

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第二名

030406

循尋冪祕--一、二次等冪和問題之探討

學校名稱：彰化縣立大同國民中學

作者：	指導老師：
國一 賴柏舟	顏福泉
國一 江如晴	蘇宴慧
國一 賴俊佑	
國一 許立穎	

關鍵詞：等冪和 數和金蟬脫殼

摘要

數學之中，常有一些數組有著特殊的性質，等冪和數組便是其一，至今仍是尚未完全解決的問題。而這次我們的研究對象，卻非一般的等冪和數組，而是一種奇中之奇，有著更微妙特性的數組，恍如不死之身，無論層層剝削，仍為等冪和數組的一員。為何他有著不同凡響的身世？和對稱究竟有什麼關聯？又有著什麼更耐人尋味的特質？值得加以探討。

壹、研究動機

一天，數學老師將一本書(數學家族一，請見 p13 參考資料一)放在我們班教室裡給同學們參閱，我們翻了片刻，發現裡面寫的盡是些有關數學的東西。這時，我們發現了樣東西如有魔力般吸引了我們，那就是「等冪和問題」。無底洞般的求知慾豈會為篇大略的簡介所滿足？次日即找老師商量，決定探討有關「等冪和」之問題。探究之路就如此展開了……

貳、研究目的

- 一、了解何謂「數的金蟬脫殼」
- 二、數組的規則探討
- 三、創造新的一、二次等冪和數組

參、研究設備及器材

計算工具：12 位計算機、Microsoft Office Excel 程式

肆、研究過程及方法

- 一、了解何謂「數的金蟬脫殼」

等冪和問題是數論中一個有趣的問題，所謂等冪和即將二個不全等的等式兩邊各數字做同次方(冪)並相加後，能使等式成立，即能滿足下方一系列等式者，稱作「等冪和」。

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

.....

$$a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k$$

舉一個最常見的例子：

$$123789 + 561945 + 642864 = 242868 + 323787 + 761943$$

$$123789^2 + 561945^2 + 642864^2 = 242868^2 + 323787^2 + 761943^2$$

這是一個等冪和等式所必備的條件，但可發現，這組數還有著更奇妙的性質：

$$123789^k + 561945^k + 642864^k = 242868^k + 323787^k + 761943^k$$

$$23789^k + 61945^k + 42864^k = 42868^k + 23787^k + 61943^k$$

$$3789^k + 1945^k + 2864^k = 2868^k + 3787^k + 1943^k$$

$$789^k + 945^k + 864^k = 868^k + 787^k + 943^k$$

$$89^k + 45^k + 64^k = 68^k + 87^k + 43^k$$

$$9^k + 5^k + 4^k = 8^k + 7^k + 3^k \quad (k=1,2)$$

不僅由高位遞減後等冪和性質仍在，由低位遞減亦是如此：

$$123789^k + 561945^k + 642864^k = 242868^k + 323787^k + 761943^k$$

$$12378^k + 56194^k + 64286^k = 24286^k + 32378^k + 76194^k$$

$$1237^k + 5619^k + 6428^k = 2428^k + 3237^k + 7619^k$$

$$123^k + 561^k + 642^k = 242^k + 323^k + 761^k$$

$$12^k + 56^k + 64^k = 24^k + 32^k + 76^k$$

$$1^k + 5^k + 6^k = 2^k + 3^k + 7^k \quad (k=1,2)$$

這樣的等冪數組層層剝落卻不失本色，可謂「數的金蟬脫殼」。

別以為這組數組只有這樣的能耐，更讓我們驚訝的是：將這個數組按等位數拆開後竟而也擁有相同性質：

$$123^k + 789^k + 561^k + 945^k + 642^k + 864^k \\ = 242^k + 868^k + 323^k + 787^k + 761^k + 943^k \quad (k=1,2)$$

$$12^k + 37^k + 89^k + 56^k + 19^k + 45^k + 64^k + 28^k + 64^k \\ = 24^k + 28^k + 68^k + 32^k + 37^k + 87^k + 76^k + 19^k + 43^k \quad (k=1,2)$$

$$1^k + 2^k + 3^k + 7^k + 8^k + 9^k + 5^k + 6^k + 1^k + 9^k + 4^k + 5^k + 6^k + 4^k + 2^k + 8^k + 6^k + 4^k \\ = 2^k + 4^k + 2^k + 8^k + 6^k + 8^k + 3^k + 2^k + 3^k + 7^k + 8^k + 7^k + 7^k + 6^k + 1^k + 9^k + 4^k + 3^k \\ (k=1,2)$$

其實「金蟬脫殼」等冪和數組的特性多樣，上述的性質也是其特徵之一。在各種情況下，仍然不為所動。凡有其妙，必有其祕，循尋冪祕，追根究柢去！

二、數組的規則探討

(123789+561945+642864=242868+323787+761943)這組等冪和數組是一組最常見的數組之一，為了解開「金蟬脫殼」之謎，我們對這組數做了一些規則的尋找。

$$123789^k + 561945^k + 642864^k = 242868^k + 323787^k + 761943^k$$

$$23789^k + 61945^k + 42864^k = 42868^k + 23787^k + 61943^k$$

$$3789^k + 1945^k + 2864^k = 2868^k + 3787^k + 1943^k$$

$$789^k + 945^k + 864^k = 868^k + 787^k + 943^k$$

$$89^k + 45^k + 64^k = 68^k + 87^k + 43^k$$

$$9^k + 5^k + 4^k = 8^k + 7^k + 3^k$$

$$123789^k + 561945^k + 642864^k = 242868^k + 323787^k + 761943^k$$

$$12378^k + 56194^k + 64286^k = 24286^k + 32378^k + 76194^k$$

$$\begin{aligned}
1237^k + 5619^k + 6428^k &= 2428^k + 3237^k + 7619^k \\
123^k + 561^k + 642^k &= 242^k + 323^k + 761^k \\
12^k + 56^k + 64^k &= 24^k + 32^k + 76^k \\
1^k + 5^k + 6^k &= 2^k + 3^k + 7^k \quad (k=1,2)
\end{aligned}$$

我們由上等式已知：當此等式不斷縮減到最後一層的過程中，等冪和性質一直存在。我們由此和拆開後也能構成數組的性質推測：若要使其和相等，單一位數平方和應要相同，就代表著等式兩邊每個數之同位數字和與平方和皆相同，即符合下等式：

$$a_1^k + a_2^k + a_3^k = b_1^k + b_2^k + b_3^k \quad (k=1,2)$$

於是我們開始檢驗有哪些單一位等冪和數組。首先，我們先列出所有組合(表一)：

表一▼

$0^2+0^2+0^2=0$	$0^2+8^2+8^2=128$	$2^2+2^2+2^2=12$	$3^2+5^2+5^2=59$	$5^2+7^2+7^2=123$
$0^2+0^2+1^2=1$	$0^2+8^2+9^2=145$	$2^2+2^2+3^2=17$	$3^2+5^2+6^2=70$	$5^2+7^2+8^2=138$
$0^2+0^2+2^2=4$		$2^2+2^2+4^2=24$	$3^2+5^2+7^2=83$	$5^2+7^2+9^2=155$
$0^2+0^2+3^2=9$	$0^2+9^2+9^2=162$	$2^2+2^2+5^2=33$	$3^2+5^2+8^2=98$	
$0^2+0^2+4^2=16$		$2^2+2^2+6^2=44$	$3^2+5^2+9^2=115$	$5^2+8^2+8^2=153$
$0^2+0^2+5^2=25$		$2^2+2^2+7^2=57$		$5^2+8^2+9^2=170$
$0^2+0^2+6^2=36$	$1^2+1^2+1^2=3$	$2^2+2^2+8^2=72$	$3^2+6^2+6^2=81$	
$0^2+0^2+7^2=49$	$1^2+1^2+2^2=6$	$2^2+2^2+9^2=89$	$3^2+6^2+7^2=94$	$5^2+9^2+9^2=187$
$0^2+0^2+8^2=64$	$1^2+1^2+3^2=11$		$3^2+6^2+8^2=109$	
$0^2+0^2+9^2=81$	$1^2+1^2+4^2=18$	$2^2+3^2+3^2=22$	$3^2+6^2+9^2=126$	
	$1^2+1^2+5^2=27$	$2^2+3^2+4^2=29$		$6^2+6^2+6^2=108$
$0^2+1^2+1^2=2$	$1^2+1^2+6^2=38$	$2^2+3^2+5^2=38$	$3^2+7^2+7^2=107$	$6^2+6^2+7^2=121$
$0^2+1^2+2^2=5$	$1^2+1^2+7^2=51$	$2^2+3^2+6^2=49$	$3^2+7^2+8^2=122$	$6^2+6^2+8^2=136$
$0^2+1^2+3^2=10$	$1^2+1^2+8^2=66$	$2^2+3^2+7^2=62$	$3^2+7^2+9^2=139$	$6^2+6^2+9^2=153$
$0^2+1^2+4^2=17$	$1^2+1^2+9^2=83$	$2^2+3^2+8^2=77$		
$0^2+1^2+5^2=26$		$2^2+3^2+9^2=94$	$3^2+8^2+8^2=137$	$6^2+7^2+7^2=134$
$0^2+1^2+6^2=37$	$1^2+2^2+2^2=9$		$3^2+8^2+9^2=154$	$6^2+7^2+8^2=149$
$0^2+1^2+7^2=50$	$1^2+2^2+3^2=14$	$2^2+4^2+4^2=36$		$6^2+7^2+9^2=166$
$0^2+1^2+8^2=65$	$1^2+2^2+4^2=21$	$2^2+4^2+5^2=45$	$3^2+9^2+9^2=171$	
$0^2+1^2+9^2=82$	$1^2+2^2+5^2=30$	$2^2+4^2+6^2=56$		$6^2+8^2+8^2=164$
	$1^2+2^2+6^2=41$	$2^2+4^2+7^2=69$	$4^2+4^2+4^2=48$	$6^2+8^2+9^2=181$
$0^2+2^2+2^2=8$	$1^2+2^2+7^2=54$	$2^2+4^2+8^2=84$	$4^2+4^2+5^2=57$	
$0^2+2^2+3^2=13$	$1^2+2^2+8^2=69$	$2^2+4^2+9^2=101$	$4^2+4^2+6^2=68$	$6^2+9^2+9^2=198$
$0^2+2^2+4^2=20$	$1^2+2^2+9^2=86$		$4^2+4^2+7^2=81$	
$0^2+2^2+5^2=29$		$2^2+5^2+5^2=54$	$4^2+4^2+8^2=96$	
$0^2+2^2+6^2=40$	$1^2+3^2+3^2=19$	$2^2+5^2+6^2=65$	$4^2+4^2+9^2=113$	$7^2+7^2+7^2=147$

$0^2+2^2+7^2=53$	$1^2+3^2+4^2=26$	$2^2+5^2+7^2=78$		$7^2+7^2+8^2=162$
$0^2+2^2+8^2=68$	$1^2+3^2+5^2=35$	$2^2+5^2+8^2=93$	$4^2+5^2+5^2=66$	$7^2+7^2+9^2=179$
$0^2+2^2+9^2=85$	$1^2+3^2+6^2=46$	$2^2+5^2+9^2=110$	$4^2+5^2+6^2=77$	
	$1^2+3^2+7^2=59$		$4^2+5^2+7^2=90$	$7^2+8^2+8^2=177$
$0^2+3^2+3^2=18$	$1^2+3^2+8^2=74$	$2^2+6^2+6^2=76$	$4^2+5^2+8^2=105$	$7^2+8^2+9^2=194$
$0^2+3^2+4^2=25$	$1^2+3^2+9^2=91$	$2^2+6^2+7^2=89$	$4^2+5^2+9^2=122$	
$0^2+3^2+5^2=34$		$2^2+6^2+8^2=104$		$7^2+9^2+9^2=211$
$0^2+3^2+6^2=45$	$1^2+4^2+4^2=33$	$2^2+6^2+9^2=121$	$4^2+6^2+6^2=88$	
$0^2+3^2+7^2=58$	$1^2+4^2+5^2=42$		$4^2+6^2+7^2=101$	
$0^2+3^2+8^2=73$	$1^2+4^2+6^2=53$	$2^2+7^2+7^2=102$	$4^2+6^2+8^2=116$	$8^2+8^2+8^2=192$
$0^2+3^2+9^2=90$	$1^2+4^2+7^2=66$	$2^2+7^2+8^2=117$	$4^2+6^2+9^2=133$	$8^2+8^2+9^2=209$
	$1^2+4^2+8^2=81$	$2^2+7^2+9^2=134$		
$0^2+4^2+4^2=32$	$1^2+4^2+9^2=98$		$4^2+7^2+7^2=114$	$8^2+9^2+9^2=226$
$0^2+4^2+5^2=41$		$2^2+8^2+8^2=132$	$4^2+7^2+8^2=129$	
$0^2+4^2+6^2=52$	$1^2+5^2+5^2=51$	$2^2+8^2+9^2=149$	$4^2+7^2+9^2=146$	
$0^2+4^2+7^2=65$	$1^2+5^2+6^2=62$			$9^2+9^2+9^2=243$
$0^2+4^2+8^2=80$	$1^2+5^2+7^2=75$	$2^2+9^2+9^2=166$	$4^2+8^2+8^2=144$	
$0^2+4^2+9^2=97$	$1^2+5^2+8^2=90$		$4^2+8^2+9^2=161$	
	$1^2+5^2+9^2=107$			
$0^2+5^2+5^2=50$		$3^2+3^2+3^2=27$	$4^2+9^2+9^2=178$	
$0^2+5^2+6^2=61$	$1^2+6^2+6^2=73$	$3^2+3^2+4^2=34$		
$0^2+5^2+7^2=74$	$1^2+6^2+7^2=86$	$3^2+3^2+5^2=43$	$5^2+5^2+5^2=75$	
$0^2+5^2+8^2=89$	$1^2+6^2+8^2=101$	$3^2+3^2+6^2=54$	$5^2+5^2+6^2=86$	
$0^2+5^2+9^2=106$	$1^2+6^2+9^2=118$	$3^2+3^2+7^2=67$	$5^2+5^2+7^2=99$	
		$3^2+3^2+8^2=82$	$5^2+5^2+8^2=114$	
$0^2+6^2+6^2=72$	$1^2+7^2+7^2=99$	$3^2+3^2+9^2=99$	$5^2+5^2+9^2=131$	
$0^2+6^2+7^2=85$	$1^2+7^2+8^2=114$			
$0^2+6^2+8^2=100$	$1^2+7^2+9^2=131$	$3^2+4^2+4^2=41$	$5^2+6^2+6^2=97$	
$0^2+6^2+9^2=117$		$3^2+4^2+5^2=50$	$5^2+6^2+7^2=110$	
	$1^2+8^2+8^2=129$	$3^2+4^2+6^2=61$	$5^2+6^2+8^2=125$	
$0^2+7^2+7^2=98$	$1^2+8^2+9^2=146$	$3^2+4^2+7^2=74$	$5^2+6^2+9^2=142$	
$0^2+7^2+8^2=113$		$3^2+4^2+8^2=89$		
$0^2+7^2+9^2=130$	$1^2+9^2+9^2=163$	$3^2+4^2+9^2=106$		

列出所有平方數組後，接著我們利用 Excel 幫助我們運算(請參見 p14 附錄一)：先用函數 SUMSQ 算出其平方和，並將其依大小排列，再使用函數 IF 將平方和相等的找出來，之後，才檢驗一次方和的相等(請參見 p14~19 附錄二)，並將其列出(如表二)：

表二▼

一次方和亦相等者以網底表示，例： $a,b,c / d,e,f$ (平方和)

0,0,3 / 1,2,2 (9)	0,5,6 / 3,4,6 (61)	0,7,7 / 1,4,9 / 3,5,8 (98)
0,1,4 / 2,2,3 (17)	1,5,6 / 2,3,7 (62)	1,7,7 / 3,3,9 / 5,5,7 (99)
0,3,3 / 1,1,4 (18)	0,1,8 / 0,4,7 / 2,5,6 (65)	1,6,8 / 2,4,9 / 4,6,7 (101)
0,0,5 / 0,3,4 (25)	1,1,8 / 1,4,7 / 4,5,5 (66)	0,5,9 / 3,4,9 (106)
0,1,5 / 1,3,4 (26)	0,2,8 / 4,4,6 (68)	1,5,9 / 3,7,7 (107)
1,1,5 / 3,3,3 (27)	1,2,8 / 2,4,7 (69)	2,5,9 / 5,6,7 (110)
0,2,5 / 2,3,4 (29)	0,6,6 / 2,2,8 (72)	0,7,8 / 4,4,9 (113)
1,4,4 / 2,2,5 (33)	0,3,8 / 1,6,6 (73)	1,7,8 / 4,7,7 / 5,5,8 (114)
0,3,5 / 3,3,4 (34)	0,5,7 / 1,3,8 / 3,4,7 (74)	0,6,9 / 2,7,8 (117)
0,0,6 / 2,4,4 (36)	1,5,7 / 5,5,5 (75)	2,6,9 / 6,6,7 (121)
1,1,6 / 2,3,5 (38)	2,3,8 / 4,5,6 (77)	3,7,8 / 4,5,9 (122)
0,4,5 / 1,2,6 / 3,4,4 (41)	0,0,9 / 1,4,8 / 3,6,6 / 4,4,7 (81)	1,8,8 / 4,7,8 (129)
0,3,6 / 2,4,5 (45)	0,1,9 / 3,3,8 (82)	1,7,9 / 5,5,9 (131)
0,0,7 / 2,3,6 (49)	1,1,9 / 3,5,7 (83)	2,7,9 / 6,7,7 (134)
0,1,7 / 0,5,5 / 3,4,5 (50)	0,2,9 / 0,6,7 (85)	1,8,9 / 4,7,9 (146)
1,1,7 / 1,5,5 (51)	1,2,9 / 1,6,7 / 5,5,6 (86)	2,8,9 / 6,7,8 (149)
0,2,7 / 1,4,6 (51)	0,5,8 / 2,2,9 / 2,6,7 / 3,4,8 (89)	5,8,8 / 6,6,9 (153)
1,2,7 / 2,5,5 / 3,3,6 (54)	0,3,9 / 1,5,8 / 4,5,7 (90)	0,9,9 / 7,7,9 (162)
2,2,7 / 4,4,5 (57)	2,3,9 / 3,6,7 (94)	2,9,9 / 6,7,9 (166)
1,3,7 / 3,5,5 (59)	0,4,9 / 5,6,6 (97)	

找到之後，發現數組並不多，在眾多數組中，僅有 16 組符合條件，除此之外，全等數組當然也可符合條件，共計只有：

$$C_3^{10} + C_2^{10} \times 2 + C_1^{10} + 16 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} + \frac{10 \times 9 \times 2}{2 \times 1} + 10 + 16 = 236 (\text{種組合})$$

我們把原先的數組(123789+561945+642864=242868+323787+761943)拆開，得到：

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a. [1,5,6/2,3,7] | b. [2,6,4/4,6,2] | c. [3,1,2/2,3,1] |
| d. [7,9,8/8,7,9] | e. [8,4,6/6,8,4] | f. [9,5,4/8,7,3] |

這些組合中，b、c、d、e 皆是屬於全等的各位等冪和數組，一看即知；而組合 a、f 皆為不全等數組，而這兩組依然在我們所找到的數組中(以外框於【表二】表示)。為確保其他等冪和數組亦是如此，我們又找來了一組數組來做檢查：

$$193333+648787+854842=276466+482521+937975$$

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| [1,6,8/2,4,9] | [9,4,5/7,8,3] | [3,8,4/6,2,7] |
| [3,7,8/4,5,9] | [3,8,4/6,2,7] | [3,7,2/6,1,5] |

結果不出所料，這組數也是由上表之數組構成，找到了這個重要的條件，同於找到了開鎖之鑰，有助於我們以鑰尋鎖，打開等冪和之門。

三、創造新的一、二次等冪和數組

幾天前，我們在搜尋資料的同時，看到了一筆有趣的資料(見 p13 參考資料二)：將數組 $123789+561945+642864=242868+323787+761943$ 依位數拆開後，將之大小排列，並依原數做連結，可得到一個對稱的圖形，如右圖一：

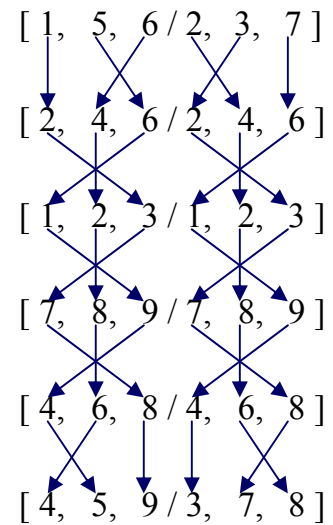
據文獻所述：把這些箭頭改變，並形成對稱後，仍能構成等冪和數組。一次方和的部分就不用說了，這些組合都在我們所找到的數組中；但是，把數字平方後就不一定了，我們開始做了以下的驗證。

我們首先先隨機調換箭頭順序，並使之呈現對稱型態，以測試會有等冪和關係是否與對稱有關。如圖二：

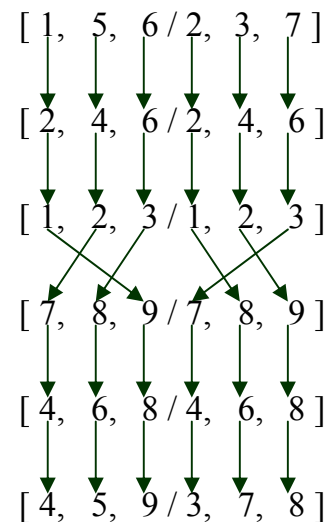
$$\begin{aligned}
 &121989+542744+663865=221867+342988+763743 \\
 &121989^2+542744^2+663865^2 \\
 &=14881316121+294571049536+440716738225 \\
 &=750169103882 \\
 &221867^2+342988^2+763743^2 \\
 &=49224965689+117640768144+583303370049 \\
 &=750169103882 \\
 &\Rightarrow 121989^2+542744^2+663865^2 \\
 &=221867^2+342988^2+763743^2
 \end{aligned}$$

答案結果相同，這讓我們進一步地猜想：這個方法與個位等冪和數組和對稱有直接的關係。於是我們把先前 16 組數加上全等的單一位數組隨意挑六組出來，同樣的使其形成對稱，並作檢測。如圖三：

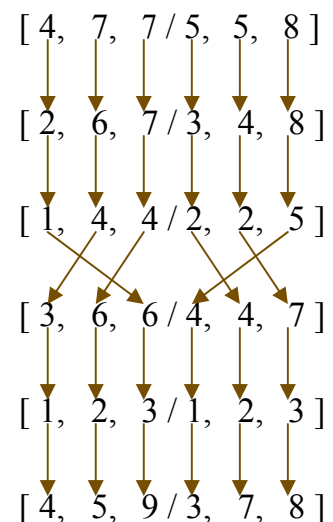
$$\begin{aligned}
 &421639+764314+774625=532427+542738+885413 \\
 &421639^2+764314^2+774625^2 \\
 &=177779446321+584175890596+600043890625 \\
 &=1361999227542 \\
 &532427^2+542738^2+885413^2 \\
 &=283478510329+294564536644+783956180569 \\
 &=1361999227542 \\
 &\Rightarrow 421639^2+764314^2+774625^2 \\
 &=532427^2+542738^2+885413^2
 \end{aligned}$$



圖一▲



圖二▲



圖三▲

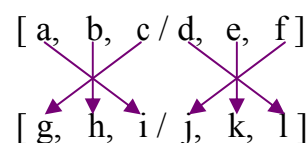
看到了嗎？實驗顯示結果可能是肯定的，但是在未能看透真相前，尚有變數。可是，我們知道：等冪和的奧秘絕不是湊巧，表面的神韻醞釀著內在的美，我們不只試著欣賞這神秘的「美」，更希望知道它美在哪裡。

首要問題是：我們目前要探討的問題數字十分的大，計算繁雜，為了方便探討，我們先試著簡化問題：

依照金蟬脫殼的性質，我們可以假設數一等冪和數組刪到只剩二位數後，組成其之等冪和單一位數組分別為[a,b,c/d,e,f] [g,h,i/j,k,l]，並假設一個對稱形式(如圖四)。

若對稱性質存在，依照等冪和數組性質可列出：

$$\begin{aligned} (10a+i)^2 + (10b+h)^2 + (10c+g)^2 \\ = (10d+l)^2 + (10e+k)^2 + (10f+j)^2 \\ \Rightarrow 100a^2 + 20ai + i^2 + 100b^2 + 20bh + h^2 + 100c^2 + 20cg + g^2 \\ = 100d^2 + 20dl + l^2 + 100e^2 + 20ek + k^2 + 100f^2 + 20fj + j^2 \end{aligned}$$



圖四▲

由 $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2$, $g^2+h^2+i^2=j^2+k^2+l^2$ 消去後可得：

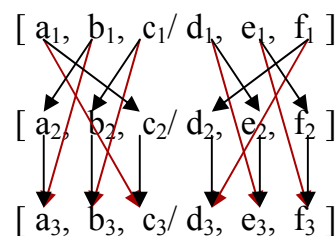
$$\begin{aligned} \Rightarrow 20ai + 20bh + 20cg &= 20dl + 20ek + 20fj \\ \Rightarrow ai + bh + cg &= dl + ek + fj \end{aligned}$$

我們知道，若對稱的特性為真的話，那數組除了必須符合以上等式，按照其他對稱性質還可列出下列五個等式，加以上之等式成六個：

$$\begin{aligned} ag + bh + ci &= dj + ek + fl & ag + bi + ch &= dk + ej + fl \\ ah + bi + cg &= dl + ej + fk & ah + bg + ci &= dj + el + fk \\ ai + bg + ch &= dk + el + fj & ai + bh + cg &= dl + ek + fj \end{aligned}$$

換言之，只要符合這六個等式，對稱的性質便會存在。但這只限於二位數的情況，因此我們還是先假設對稱成立，並選一對稱形式(如圖五)，試著看看三位數的狀況：

$$\begin{aligned} (a_1+c_2+c_3)^2 + (b_1+a_2+a_3)^2 + (c_1+b_2+b_3)^2 \\ = (d_1+e_2+e_3)^2 + (e_1+f_2+f_3)^2 + (f_1+d_2+d_3)^2 \\ \Rightarrow a_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2a_1c_2 + 2a_1c_3 + 2c_2c_3 + b_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2b_1a_2 \\ + 2b_1a_3 + 2a_2a_3 + c_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2c_1b_2 + 2c_1b_3 + 2b_2b_3 \\ = d_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2d_1e_2 + 2d_1e_3 + 2e_2e_3 + e_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + 2e_1f_2 \\ + 2e_1f_3 + 2f_2f_3 + f_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + 2f_1d_2 + 2f_1d_3 + 2d_2d_3 \end{aligned}$$



圖五▲

同樣再消去平方項：

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2a_1c_2 + 2a_1c_3 + 2c_2c_3 + 2b_1a_2 + 2b_1a_3 + 2a_2a_3 + 2c_1b_2 + 2c_1b_3 + 2b_2b_3 \\ = 2d_1e_2 + 2d_1e_3 + 2e_2e_3 + 2e_1f_2 + 2e_1f_3 + 2f_2f_3 + 2f_1d_2 + 2f_1d_3 + 2d_2d_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a_1c_2 + a_1c_3 + c_2c_3 + b_1a_2 + b_1a_3 + a_2a_3 + c_1b_2 + c_1b_3 + b_2b_3 \\
&= d_1e_2 + d_1e_3 + e_2e_3 + e_1f_2 + e_1f_3 + f_2f_3 + f_1d_2 + f_1d_3 + d_2d_3 \\
&\Rightarrow (a_1c_2 + b_1a_2 + c_1b_2) + (a_1c_3 + b_1a_3 + c_1b_3) + (c_2c_3 + a_2a_3 + b_2b_3) \\
&= (d_1e_2 + e_1f_3 + f_1d_3) + (d_2d_3 + e_2e_3 + f_2f_3) + (d_1e_3 + e_1f_2 + f_1d_2)
\end{aligned}$$

列出等式後，沒發覺這樣的狀況與僅有二位數時相像嗎？皆是依照箭頭方向來互乘(如圖五)後並相加而成的，而更多位數的也同理。因此現在的關鍵就在於乘積為何相同了。

我們先把化簡後的六個假設等式(如圖六)列出：

$$ag + bh + ci = dj + ek + fl$$

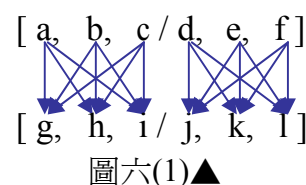
$$ah + bi + cg = dl + ej + fk$$

$$ai + bg + ch = dk + el + fj$$

$$ag + bi + ch = dk + ej + fl$$

$$ah + bg + ci = dj + el + fk$$

$$ai + bh + cg = dl + ek + fj$$



為了製造這些數字，我們將原已知等式互乘：

$$(a+b+c)(g+h+i) = (d+e+f)(j+k+l)$$

$$\Rightarrow ag+ah+ai+bg+bh+bi+cg+ch+ci=dj+dk+dl+ej+ek+el+fj+fk+fl$$

我們赫然發現：等式便是猜測的六個等式其中三組或另外三組的和：

$$\begin{array}{rcccccccc}
ag & + & bh & + & ci & = & dj & + & ek & + & fl \\
ah & + & bi & + & cg & = & dl & + & ej & + & fk \\
+) ai & + & bg & + & ch & = & dk & + & el & + & fj \\
\hline
ag+ah+ai+bg+bh+bi+cg+ch+ci & = & dj+dk+dl+ej+ek+el+fj+fk+fl
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
ag & + & bi & + & ch & = & dk & + & ej & + & fl \\
ah & + & bg & + & ci & = & dj & + & el & + & fk \\
+) ai & + & bh & + & cg & = & dl & + & ek & + & fj \\
\hline
ag+ah+ai+bg+bh+bi+cg+ch+ci & = & dj+dk+dl+ej+ek+el+fj+fk+fl
\end{array}$$

三式和是對了，但拆開來卻未可知，於是我們希望能用實驗證明：

在一對一的狀況下，等式二邊各僅有兩種拆法：

$$\begin{aligned}
&ag+ah+ai+bg+bh+bi+cg+ch+ci \\
&= (ag+bh+ci) + (ah+bi+cg) + (ai+bg+ch) \\
&= (ag+bi+ch) + (ah+bg+ci) + (ai+bh+cg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&dj+dk+dl+ej+ek+el+fj+fk+fl \\
&= (dj+ek+fl) + (dl+ej+fk) + (dk+el+fj) \\
&= (dk+ej+fl) + (dj+el+fk) + (dl+ek+fj)
\end{aligned}$$

若依對稱性質來講，我們不僅從找到的數組是否能符合我們所算的六個等式下手，也從其餘非對稱狀態的式子來做檢驗。如表三：

表三

ag+bh+ci≠dl+ej+fk	ai+bg+ch≠dj+ek+fl	ah+bg+ci≠dj+ek+fl
ag+bh+ci≠dk+el+fj	ai+bg+ch≠dl+ej+fk	ah+bg+ci≠dl+ej+fk
ag+bh+ci≠dk+ej+fl	ai+bg+ch≠dk+ej+fl	ah+bg+ci≠dk+el+fj
ag+bh+ci≠dj+el+fk	ai+bg+ch≠dj+el+fk	ah+bg+ci≠dj+el+fk
ag+bh+ci≠dl+ek+fj	ai+bg+ch≠dl+ek+fj	ah+bg+ci≠dl+ek+fj
ah+bi+cg≠dj+ek+fl	ag+bi+ch≠dj+ek+fl	ai+bh+cg≠dj+ek+fl
ah+bi+cg≠dk+el+fj	ag+bi+ch≠dl+ej+fk	ai+bh+cg≠dl+ej+fk
ah+bi+cg≠dk+ej+fl	ag+bi+ch≠dk+el+fj	ai+bh+cg≠dk+el+fj
ah+bi+cg≠dj+el+fk	ag+bi+ch≠dj+el+fk	ai+bh+cg≠dk+ej+fl
ah+bi+cg≠dl+ek+fj	ag+bi+ch≠dl+ek+fj	ai+bh+cg≠dj+el+fk

經過檢驗後，我們發現等冪和數組對於這些算式大多是不等的，因此我們把它們列為不等式於表三。我們依據不等式的列式規律分為每五個一組，其中也不乏能對於整組不等式都成立的數組。尋獲者如下：

$$\begin{cases} ag + bh + ci \neq dl + ej + fk \\ ag + bh + ci \neq dk + el + fj \\ ag + bh + ci \neq dk + ej + fl \\ ag + bh + ci \neq dj + el + fk \\ ag + bh + ci \neq dl + ek + fj \end{cases} \Rightarrow [1,5,6 / 2,3,7] \\ [1,6,8 / 2,4,9]$$

$$\begin{cases} ag + bh + ci \neq dl + ej + fk \\ ag + bh + ci \neq dk + el + fj \\ ag + bh + ci \neq dk + ej + fl \\ ag + bh + ci \neq dj + el + fk \\ ag + bh + ci \neq dl + ek + fj \end{cases} \Rightarrow [1,5,6 / 2,3,7] \\ [1,6,8 / 2,4,9]$$

$$\begin{cases} ai + bg + ch \neq dj + ek + fl \\ ai + bg + ch \neq dl + ej + fk \\ ai + bg + ch \neq dk + ej + fl \\ ai + bg + ch \neq dj + el + fk \\ ai + bg + ch \neq dl + ek + fj \end{cases} \Rightarrow [1,5,6 / 2,3,7] \\ [1,6,8 / 2,4,9]$$

$$\begin{cases} ag + bi + ch \neq dj + ek + fl \\ ag + bi + ch \neq dl + ej + fk \\ ag + bi + ch \neq dk + el + fj \\ ag + bi + ch \neq dj + el + fk \\ ag + bi + ch \neq dl + ek + fj \end{cases} \Rightarrow [1,5,6 / 2,3,7] \\ [2,6,7 / 3,4,8]$$

$$\begin{cases} ah + bg + ci \neq dj + ek + fl \\ ah + bg + ci \neq dl + ej + fk \\ ah + bg + ci \neq dk + el + fj \\ ah + bg + ci \neq dj + el + fk \\ ah + bg + ci \neq dl + ek + fj \end{cases} \Rightarrow [1,5,6 / 2,3,7] \\ [2,6,7 / 3,4,8]$$

$$\begin{cases} ai + bh + cg \neq dj + ek + fl \\ ai + bh + cg \neq dl + ej + fk \\ ai + bh + cg \neq dk + el + fj \\ ai + bh + cg \neq dk + ej + fl \\ ai + bh + cg \neq dj + el + fk \end{cases} \Rightarrow [1,5,6 / 2,3,7] \\ [2,6,7 / 3,4,8]$$

經實驗證明，等式僅在對稱的狀態下得以成立，其餘皆被否定了。雖然經過試驗後證實對稱有一定的效力存在，但經實驗發現：要使等冪和數組成立似乎還有其它的限制存在(請見 p11 討論)，至於為何，則有待探討了。

伍、研究結果

- 一、所謂數的「金蟬脫殼」即為將二個不全等的等式兩邊各數字做同幂並相加後，能使等式成立，且由高或低位遞減後等幂和性質仍在。是等幂和家族中獨特而迷人的一份子。
- 二、我們從等式中發現此種數組的個位數平方和必須相同，並以表格找出符合此條件的單一位等幂和數組（請參考 p4~6 研究過程及方法二—數組的規則探討），推判所有等幂和數組皆由以下 16 組不全等數組及其餘全等數組等 236 組單一位等幂和數組構成。不全等之單一位等幂和數組如下表四：

表四

0,3,3 / 1,1,4 (18)	0,5,7 / 1,3,8 (74)	1,6,8 / 2,4,9 (101)
1,4,4 / 2,2,5 (33)	3,6,6 / 4,4,7 (81)	4,7,7 / 5,5,8 (114)
0,4,5 / 1,2,6 (41)	0,5,8 / 2,2,9 (89)	3,7,8 / 4,5,9 (122)
2,5,5 / 3,3,6 (54)	2,6,7 / 3,4,8 (89)	5,8,8 / 6,6,9 (153)
1,5,6 / 2,3,7 (62)	0,7,7 / 1,4,9 (98)	
0,6,6 / 2,2,8 (72)	1,7,7 / 3,3,9 (99)	

- 三、接下來我們從資料中發現：此種數組依位數拆開後，將之依大小排列，並用原數做連結，可得到一個對稱的圖形。且經觀察得知：將對稱圖形改變後，仍能構成等幂和數組(請參考 p7 研究過程及方法三)。

- 四、我們發現，假使要使對稱的假說成立的話，設代號 a、b、c、d、e、f、g(如圖六)，便必須符合以下六等式：

$$ag+bh+ci=dj+ek+fl$$

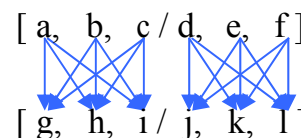
$$ag+bi+ch=dk+ej+fl$$

$$ah+bi+cg=dl+ej+fk$$

$$ah+bg+ci=dj+el+fk$$

$$ai+bg+ch=dk+el+fj$$

$$ai+bh+cg=dl+ek+fj$$



圖六(2)▲

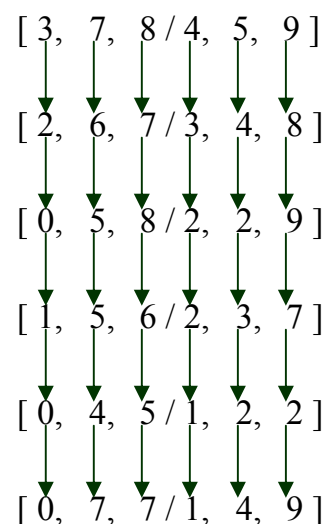
換言之，只要數組符合六個等式，那麼對稱的性質便能成立。(請參考 p9 研究過程及方法三)

陸、討論

在本次研究末段，我們發現：一、二次等幂和數組的奧妙並非我們想的如此簡單。除了對稱的問題外，應有更多的變數和限制，但因時間倉卒，故未能探討，請見以下兩點：

- 一、我們原先推測等幂和數組在組合時，當然也發現了一些特例。在單一位數不全等數等幂和數組中，其中就有[0,5,8 / 2,2,9]、[0,7,7 / 1,4,9] 2 組是不容易構成等幂和數組的例外，無論如何試驗，就是沒輒；其餘卻都能隨意組合而不失其特質。

我們為此也藉用電腦將 $C_2^{16} = 120$ 加上左右可交換的不同等 $120 \times 3 = 360$ 種組合利用六等式 $ag+bh+ci=dj+ek+fl$ 、 $ag+bi+ch=dk+ej+fl$ 、 $ah+bi+cg=dl+ej+fk$ 、 $ah+bg+ci=dj+el+fk$ 、 $ai+bg+ch=dk+el+fj$ 、 $ai+bh+cg=dl+ek+fj$ 、



圖七▲

$ai+bh+cg=dl+ek+fj$ 進行檢驗(詳見 p20~29 附錄三)，確實惟此二組有組合問題，但卻也有少數數組在特定的對稱圖形下能與其構成數組。

我們檢驗出結果後，便按照其數組及其對稱方式排列，上下層則不拘，如圖七，得到 $320100^2+765547^2+878657^2=432211^2+542324^2+989769^2$ ，經電腦計算，確實為一金蟬脫殼數組。但這結果僅止於土法煉鋼後的產物，背後隱藏的秘密，想必更耐人尋味。

- 二、 我們原先構想是：只要符合單一位等冪和數組並經對稱組合後便能夠造出新的等冪和數組，但經試驗後，這個猜想馬上就被推翻了：不僅不全等數組有問題，全等亦然。

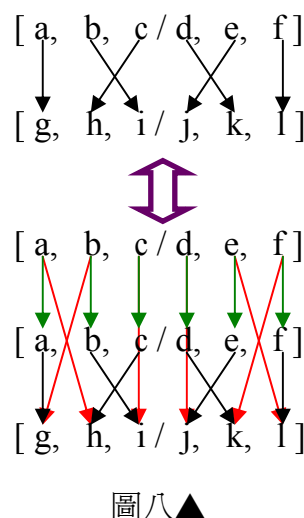
於是我們感到十分疑惑，便拿了最原始的數組 $123789+561945+642864=242868+323787+761943$ 來做試驗，我們取出其中的單一位等冪和全等數組 $[2,6,4/4,6,2]$ 、 $[3,1,2/2,3,1]$ 、 $[7,9,8/8,7,9]$ 、 $[9,4,6/6,8,4]$ 後，開始做進一步試驗，但這幾組數卻不論如何組合都能構成等冪和陣列。其中又包含了何樣的變化，待加探討。

柒、結論

- 一、 「金蟬脫殼」等冪和數組是左右兩邊算式經由削減或拆開後(詳見 p2,3 研究過程及方法一)，不但其和相等，平方和亦同之數組。其應是由 236 組單一位數等冪和數組構成，(如圖八)只要符合箭號兩端乘積相等，對稱的性質便能成立。

- 二、 如圖八，箭號兩邊乘積和相等是構成等冪和數組的必備條件，而對稱性質則是要符合所有對稱模式。這也是在構成數組條件上基本的限制。所以在 236 組單一位數等冪和數組中，有些能構成等冪和數組，有些則否。

- 三、 對稱的性質與等冪和數組有一定程度的關係。一組等冪和陣列因原來單一位數平方後原就相等，所以箭頭兩端相乘後也必然相等。由此我們可以確定：在箭頭路線不改變的時候，我們可以將原構成此數組的單一位等冪和數組做刪減或增加，來推出另一數組(如圖八)。這也可以說明為何將數組削減或拆開後(詳見 p2,3 研究過程及方法一)，仍能保有其性質。



圖八▲

- 四、 經實驗發現，16 組全等單一位等冪和數組(詳見 p11 研究結果二)中其中有兩組含有 0 的數組 $[0,5,8 / 2,2,9]$ 及 $[0,7,7 / 1,4,9]$ 無法構成等冪和的陣列，而全等數組也未必能構成(詳見 p11~12 討論)。所以至少有 14 組全等數組可能無誤的構成等冪和數組。若限於等式兩邊各只有三個頂多六位的數，且在個位數等冪和數組能隨意組合並不重複使用的話，仍然有：

$$\frac{P_6^{14} \times 2^6 \times 6^5}{2} = \frac{\frac{14!}{8!} \times 2^{11} \times 3^5}{2} = \frac{1076029194240}{2} = 538014597120 \text{ (種數組)}$$

雖然說我們在此算出了 5380 多億種數組，但 $[0,5,8 / 2,2,9]$ 及 $[0,7,7 / 1,4,9]$ 卻也是有特例可構成(詳見 p11 討論一)，例如： $320100^2+765547^2+878657^2=432211^2+542324^2+989769^2$ 。

五、作數學研究，計算拜電腦之賜，想必不成問題；造成我們最大困擾的反而是推導過程的理解。尤其這個題目新穎，我們查詢到的資料相當少。還好有全體組員的鍥而不捨，以及老師多次的指引與細心的指正，日以繼夜的研究探討，才將結果汰舊換新，得到心目中的結晶。我想這樣的過程是我們想要的，回想從無到有，從天馬行空的想法到理論支持，以及團隊的付出與合作默契的表現，才是我們這次科展最重要的收穫。

捌、參考資料及其它

一、參考資料

(一)劉應泉(民 87)。神奇的數組(一)壁報趣題。數學家族(一)(95~97 頁)。台北市：九章出版社。

(二)数的“金蝉脫壳”法(無日期)。湖北：黄冈中学网校。民 95 年 12 月 12 日，取自：
<http://www.huanggao.net/hgweb/student/dekt/sx3110702.htm>

二、附錄

(一)單一位等冪和數組檢驗函數說明表(p14 上方)

(二)單一位等冪和數組檢驗表(p14~19)

(三)尋找可利用等冪和單一位數組(part1-p20~23, part2-p23~26, part3-p26~29)

附錄(一) 單一位等冪和數組檢驗函數說明表

	A	B	C	D	E
1	單一位數組			一次方和	平方和
2	Nr.1	Nr.2	Nr.3	=A2+B2+C2	=SUMSQ(A2, B2, C2)
3	Nr.4	Nr.5	Nr.6	=A3+B3+C3	=SUMSQ(A3, B3, C3)
	F			G	
1	與前一組平方和相等？			與前一組一次方和相等？	
2					
3	=IF(E3=E2,"TRUE","")			=IF(D3=D2,"TRUE","")	

附錄(二)：單一位等冪和數組檢驗表(符合者以 TRUE 表示)

單一位數組			一次方和	平方和	平方和相等？	一次方和相等？
0	0	0	0	0		
0	0	1	1	1		
0	1	1	2	2		
1	1	1	3	3		
0	0	2	2	4		
0	1	2	3	5		
1	1	2	4	6		
0	2	2	4	8		TRUE
0	0	3	3	9		
1	2	2	5	9	TRUE	
0	1	3	4	10		
1	1	3	5	11		
2	2	2	6	12		
0	2	3	5	13		
1	2	3	6	14		
0	0	4	4	16		
0	1	4	5	17		
2	2	3	7	17	TRUE	
0	3	3	6	18		
1	1	4	6	18	TRUE	TRUE
1	3	3	7	19		
0	2	4	6	20		
1	2	4	7	21		
2	3	3	8	22		
2	2	4	8	24		TRUE
0	0	5	5	25		

0	3	4	7	25	TRUE	
0	1	5	6	26		
1	3	4	8	26	TRUE	
1	1	5	7	27		
3	3	3	9	27	TRUE	
0	2	5	7	29		
2	3	4	9	29	TRUE	
1	2	5	8	30		
0	4	4	8	32		TRUE
1	4	4	9	33		
2	2	5	9	33	TRUE	TRUE
0	3	5	8	34		
3	3	4	10	34	TRUE	
1	3	5	9	35		
0	0	6	6	36		
2	4	4	10	36	TRUE	
0	1	6	7	37		
1	1	6	8	38		
2	3	5	10	38	TRUE	
0	2	6	8	40		
0	4	5	9	41		
1	2	6	9	41	TRUE	TRUE
3	4	4	11	41	TRUE	
1	4	5	10	42		
3	3	5	11	43		
2	2	6	10	44		
0	3	6	9	45		
2	4	5	11	45	TRUE	
1	3	6	10	46		
4	4	4	12	48		
0	0	7	7	49		
2	3	6	11	49	TRUE	
0	1	7	8	50		
0	5	5	10	50	TRUE	
3	4	5	12	50	TRUE	
1	1	7	9	51		
1	5	5	11	51	TRUE	
0	4	6	10	52		
0	2	7	9	53		

1	4	6	11	53	TRUE	
1	2	7	10	54		
2	5	5	12	54	TRUE	
3	3	6	12	54	TRUE	TRUE
2	4	6	12	56		TRUE
2	2	7	11	57		
4	4	5	13	57	TRUE	
0	3	7	10	58		
1	3	7	11	59		
3	5	5	13	59	TRUE	
0	5	6	11	61		
3	4	6	13	61	TRUE	
1	5	6	12	62		
2	3	7	12	62	TRUE	TRUE
0	0	8	8	64		
0	1	8	9	65		
0	4	7	11	65	TRUE	
2	5	6	13	65	TRUE	
1	1	8	10	66		
1	4	7	12	66	TRUE	
4	5	5	14	66	TRUE	
3	3	7	13	67		
0	2	8	10	68		
4	4	6	14	68	TRUE	
1	2	8	11	69		
2	4	7	13	69	TRUE	
3	5	6	14	70		
0	6	6	12	72		
2	2	8	12	72	TRUE	TRUE
0	3	8	11	73		
1	6	6	13	73	TRUE	
0	5	7	12	74		
1	3	8	12	74	TRUE	TRUE
3	4	7	14	74	TRUE	
1	5	7	13	75		
5	5	5	15	75	TRUE	
2	6	6	14	76		
2	3	8	13	77		
4	5	6	15	77	TRUE	

2	5	7	14	78		
0	4	8	12	80		
0	0	9	9	81		
1	4	8	13	81	TRUE	
3	6	6	15	81	TRUE	
4	4	7	15	81	TRUE	TRUE
0	1	9	10	82		
3	3	8	14	82	TRUE	
1	1	9	11	83		
3	5	7	15	83	TRUE	
2	4	8	14	84		
0	2	9	11	85		
0	6	7	13	85	TRUE	
1	2	9	12	86		
1	6	7	14	86	TRUE	
5	5	6	16	86	TRUE	
4	6	6	16	88		TRUE
0	5	8	13	89		
2	2	9	13	89	TRUE	TRUE
2	6	7	15	89	TRUE	
3	4	8	15	89	TRUE	TRUE
0	3	9	12	90		
1	5	8	14	90	TRUE	
4	5	7	16	90	TRUE	
1	3	9	13	91		
2	5	8	15	93		
2	3	9	14	94		
3	6	7	16	94	TRUE	
4	4	8	16	96		TRUE
0	4	9	13	97		
5	6	6	17	97	TRUE	
0	7	7	14	98		
1	4	9	14	98	TRUE	TRUE
3	5	8	16	98	TRUE	
1	7	7	15	99		
3	3	9	15	99	TRUE	TRUE
5	5	7	17	99	TRUE	
0	6	8	14	100		
1	6	8	15	101		

2	4	9	15	101	TRUE	TRUE
4	6	7	17	101	TRUE	
2	7	7	16	102		
2	6	8	16	104		TRUE
4	5	8	17	105		
0	5	9	14	106		
3	4	9	16	106	TRUE	
1	5	9	15	107		
3	7	7	17	107	TRUE	
6	6	6	18	108		
3	6	8	17	109		
2	5	9	16	110		
5	6	7	18	110	TRUE	
0	7	8	15	113		
4	4	9	17	113	TRUE	
1	7	8	16	114		
4	7	7	18	114	TRUE	
5	5	8	18	114	TRUE	TRUE
3	5	9	17	115		
4	6	8	18	116		
0	6	9	15	117		
2	7	8	17	117	TRUE	
1	6	9	16	118		
2	6	9	17	121		
6	6	7	19	121	TRUE	
3	7	8	18	122		
4	5	9	18	122	TRUE	TRUE
5	7	7	19	123		
5	6	8	19	125		TRUE
3	6	9	18	126		
0	8	8	16	128		
1	8	8	17	129		
4	7	8	19	129	TRUE	
0	7	9	16	130		
1	7	9	17	131		
5	5	9	19	131	TRUE	
2	8	8	18	132		
4	6	9	19	133		
2	7	9	18	134		

6	7	7	20	134	TRUE	
6	6	8	20	136		TRUE
3	8	8	19	137		
5	7	8	20	138		
3	7	9	19	139		
5	6	9	20	142		
4	8	8	20	144		TRUE
0	8	9	17	145		
1	8	9	18	146		
4	7	9	20	146	TRUE	
7	7	7	21	147		
2	8	9	19	149		
6	7	8	21	149	TRUE	
5	8	8	21	153		TRUE
6	6	9	21	153	TRUE	TRUE
3	8	9	20	154		
5	7	9	21	155		
4	8	9	21	161		TRUE
0	9	9	18	162		
7	7	8	22	162	TRUE	
1	9	9	19	163		
6	8	8	22	164		
2	9	9	20	166		
6	7	9	22	166	TRUE	
5	8	9	22	170		TRUE
3	9	9	21	171		
7	8	8	23	177		
4	9	9	22	178		
7	7	9	23	179		
6	8	9	23	181		TRUE
5	9	9	23	187		TRUE
8	8	8	24	192		
7	8	9	24	194		TRUE
6	9	9	24	198		TRUE
8	8	9	25	209		
7	9	9	25	211		TRUE
8	9	9	26	226		
9	9	9	27	243		

附錄(三) 尋找可利用等冪和單一位數組(不符合者標示 FALSE，符合者標示為 0)

本表目的為尋找可利用之等冪和單一位數組，並發現有不符者均有[0,5,8/2,2,9]或[0,7,7/1,4,9]兩組數組，另以橘底表示。

a b c d e f	g h i j k l	ag+bh+ci=	ag+bi+ch=	ah+bi+cg=	ah+bg+ci=	ai+bg+ch=	ai+bh+cg=
數組1	數組2	dj+ek+fl?	dk+ej+fl?	dl+ej+fk?	dj+el+fk?	dk+el+fj?	dl+ek+fj?
0 3 3 1 1 4	1 4 4 2 2 5	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	0 4 5 1 2 6	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	2 5 5 3 3 6	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 3 3 1 1 4	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 3 3 1 1 4	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	0 4 5 1 2 6	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	2 5 5 3 3 6	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 4 2 2 5	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 4 2 2 5	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	2 5 5 3 3 6	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0

0 4 5 1 2 6	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	0 5 8 2 2 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 4 5 1 2 6	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	0 7 7 1 4 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 4 5 1 2 6	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 5 5 3 3 6	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 5 5 3 3 6	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	0 5 8 2 2 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 5 6 2 3 7	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	0 7 7 1 4 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 5 6 2 3 7	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 6 6 2 2 8	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 6 6 2 2 8	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0

0 6 6 2 2 8	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 7 1 3 8	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 7 1 3 8	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 6 6 4 4 7	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 6 6 4 4 7	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
0 5 8 2 2 9	2 6 7 3 4 8	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	0 7 7 1 4 9	0	0	FALSE	0	FALSE	0
0 5 8 2 2 9	1 7 7 3 3 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	1 6 8 2 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	4 7 7 5 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	3 7 8 4 5 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	5 8 8 6 6 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 6 7 3 4 8	0 7 7 1 4 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 6 7 3 4 8	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
0 7 7 1 4 9	1 7 7 3 3 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 7 7 1 4 9	1 6 8 2 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 7 7 1 4 9	4 7 7 5 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 7 7 1 4 9	3 7 8 4 5 9	0	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE

0 7 7 1 4 9	5 8 8 6 6 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 7 7 3 3 9	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
1 7 7 3 3 9	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 7 7 3 3 9	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 7 7 3 3 9	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
1 6 8 2 4 9	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 6 8 2 4 9	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 6 8 2 4 9	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
4 7 7 5 5 8	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
4 7 7 5 5 8	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
3 7 8 4 5 9	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
數組1	數組2 左右調換	ag+bh+ci=	ag+bi+ch=	ah+bi+cg=	ah+bg+ci=	ai+bg+ch=	ai+bh+cg=
		dj+ek+fl?	dk+ej+fl?	dl+ej+fk?	dj+el+fk?	dk+el+fj?	dl+ek+fj?
0 3 3 1 1 4	2 2 5 1 4 4	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	1 2 6 0 4 5	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	3 3 6 2 5 5	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	2 3 7 1 5 6	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	2 2 8 0 6 6	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	1 3 8 0 5 7	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 3 3 1 1 4	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 3 3 1 1 4	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
0 3 3 1 1 4	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	1 2 6 0 4 5	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	3 3 6 2 5 5	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	2 3 7 1 5 6	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	2 2 8 0 6 6	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	1 3 8 0 5 7	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 4 2 2 5	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 4 2 2 5	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0

1 4 4 2 2 5	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
1 4 4 2 2 5	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	3 3 6 2 5 5	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	2 3 7 1 5 6	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	2 2 8 0 6 6	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	1 3 8 0 5 7	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
0 4 5 1 2 6	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
0 4 5 1 2 6	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
0 4 5 1 2 6	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	2 3 7 1 5 6	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	2 2 8 0 6 6	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	1 3 8 0 5 7	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 5 5 3 3 6	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 5 5 3 3 6	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
2 5 5 3 3 6	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	2 2 8 0 6 6	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	1 3 8 0 5 7	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
1 5 6 2 3 7	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
1 5 6 2 3 7	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0

1 5 6 2 3 7	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
1 5 6 2 3 7	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	1 3 8 0 5 7	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 6 6 2 2 8	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 6 6 2 2 8	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
0 6 6 2 2 8	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	4 4 7 3 6 6	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 7 1 3 8	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 7 1 3 8	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
0 5 7 1 3 8	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	2 2 9 0 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 6 6 4 4 7	3 4 8 2 6 7	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 6 6 4 4 7	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
3 6 6 4 4 7	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
0 5 8 2 2 9	3 4 8 2 6 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
0 5 8 2 2 9	1 4 9 0 7 7	FALSE	0	FALSE	0	FALSE	0
0 5 8 2 2 9	3 3 9 1 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	2 4 9 1 6 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	5 5 8 4 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 5 8 2 2 9	4 5 9 3 7 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
0 5 8 2 2 9	6 6 9 5 8 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 6 7 3 4 8	1 4 9 0 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
2 6 7 3 4 8	3 3 9 1 7 7	0	0	0	0	0	0

2 6 7 3 4 8	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
2 6 7 3 4 8	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
0 7 7 1 4 9	3 3 9 1 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 7 7 1 4 9	2 4 9 1 6 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 7 7 1 4 9	5 5 8 4 7 7	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
0 7 7 1 4 9	4 5 9 3 7 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
0 7 7 1 4 9	6 6 9 5 8 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 7 7 3 3 9	2 4 9 1 6 8	0	0	0	0	0	0
1 7 7 3 3 9	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
1 7 7 3 3 9	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
1 7 7 3 3 9	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
1 6 8 2 4 9	5 5 8 4 7 7	0	0	0	0	0	0
1 6 8 2 4 9	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
1 6 8 2 4 9	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
4 7 7 5 5 8	4 5 9 3 7 8	0	0	0	0	0	0
4 7 7 5 5 8	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
3 7 8 4 5 9	6 6 9 5 8 8	0	0	0	0	0	0
數組1 左右調換	數組2	ag+bh+ci= dj+ek+fl?	ag+bi+ch= dk+ej+fl?	ah+bi+cg= dl+ej+fk?	ah+bg+ci= dj+el+fk?	ai+bg+ch= dk+el+fj?	ai+bh+cg= dl+ek+fj?
1 1 4 0 3 3	1 4 4 2 2 5	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	0 4 5 1 2 6	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	2 5 5 3 3 6	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 1 4 0 3 3	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 1 4 0 3 3	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 1 4 0 3 3	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	0 4 5 1 2 6	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	2 5 5 3 3 6	0	0	0	0	0	0

2 2 5 1 4 4	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 5 1 4 4	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 5 1 4 4	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
2 2 5 1 4 4	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	2 5 5 3 3 6	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
1 2 6 0 4 5	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
1 2 6 0 4 5	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 2 6 0 4 5	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	1 5 6 2 3 7	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 3 6 2 5 5	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 3 6 2 5 5	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
3 3 6 2 5 5	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	0 6 6 2 2 8	0	0	0	0	0	0

2 3 7 1 5 6	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
2 3 7 1 5 6	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
2 3 7 1 5 6	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
2 3 7 1 5 6	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	0 5 7 1 3 8	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 8 0 6 6	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 8 0 6 6	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
2 2 8 0 6 6	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	3 6 6 4 4 7	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 3 8 0 5 7	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 3 8 0 5 7	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
1 3 8 0 5 7	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
4 4 7 3 6 6	0 5 8 2 2 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
4 4 7 3 6 6	2 6 7 3 4 8	0	0	0	0	0	0
4 4 7 3 6 6	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
4 4 7 3 6 6	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
4 4 7 3 6 6	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
4 4 7 3 6 6	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
4 4 7 3 6 6	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
4 4 7 3 6 6	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
2 2 9 0 5 8	2 6 7 3 4 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0

2 2 9 0 5 8	0 7 7 1 4 9	FALSE	0	FALSE	0	FALSE	0
2 2 9 0 5 8	1 7 7 3 3 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 9 0 5 8	1 6 8 2 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 9 0 5 8	4 7 7 5 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
2 2 9 0 5 8	3 7 8 4 5 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
2 2 9 0 5 8	5 8 8 6 6 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 4 8 2 6 7	0 7 7 1 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
3 4 8 2 6 7	1 7 7 3 3 9	0	0	0	0	0	0
3 4 8 2 6 7	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
3 4 8 2 6 7	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
3 4 8 2 6 7	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
3 4 8 2 6 7	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
1 4 9 0 7 7	1 7 7 3 3 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 9 0 7 7	1 6 8 2 4 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 9 0 7 7	4 7 7 5 5 8	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
1 4 9 0 7 7	3 7 8 4 5 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	0
1 4 9 0 7 7	5 8 8 6 6 9	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
3 3 9 1 7 7	1 6 8 2 4 9	0	0	0	0	0	0
3 3 9 1 7 7	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
3 3 9 1 7 7	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
3 3 9 1 7 7	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
2 4 9 1 6 8	4 7 7 5 5 8	0	0	0	0	0	0
2 4 9 1 6 8	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
2 4 9 1 6 8	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
5 5 8 4 7 7	3 7 8 4 5 9	0	0	0	0	0	0
5 5 8 4 7 7	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0
4 5 9 3 7 8	5 8 8 6 6 9	0	0	0	0	0	0

【評語】 030406 循尋冪祕--一、二次等冪和問題之探討

透過對一個例子觀察，猜測數字間可能存在的規則性，由此出發，找出符合猜測的數組並由此構造滿足一、二次等冪性質的數。由直覺、猜想到驗證。已經掌握了研究數學的基本精神，雖然受限於問題本身的困難度而無法給出具有有一、二次等冪和性質的數一些更好的刻劃條件。但以一個剛起步試圖踏入研究工作的初學者而言，這樣的表現已算難能可貴。