

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030403

多邊形的邊頂關係之數字玄機

學校名稱：臺中縣立大華國民中學

作者：	指導老師：
國三 蘇維翔	詹益彥
國三 江威儀	林穎育
國三 李 臻	
國三 李奕昕	

關鍵詞：聯立方程式 邊頂數字關係

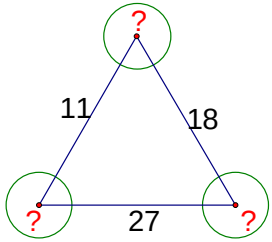
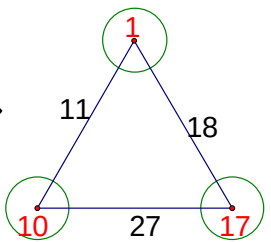
多邊形的邊頂關係之數字玄機

摘要

『多邊形每一邊所寫的數字，與頂點之間的四則運算，居然有著奇妙的關係！你相信嗎？』。我們以聯立方程式或應用參數 t 的方法解出頂點，並找出簡單的規則，進一步將它一般化到多邊形；在減法、除法運算中，我們應用了樹狀圖來分析所有解，以解決絕對值的聯立方程式，並歸納出簡易且快速的方法求出答案；最後我們研究更多點和邊的排列方法的形式。

壹、研究動機

數學老師出了一道題目如下：

邊頂數字關係	
三角形每個頂點上各有一個未知數。且三角形的每一邊寫著它兩頭未知數和。找出一個簡單的規則來求出未知數。 舉例來說：未知數 1、17 和 10 製造出	
	答案 → 
一般化至多邊形。	

我們邀約同學一起研究，因而踏上學習研究之路。

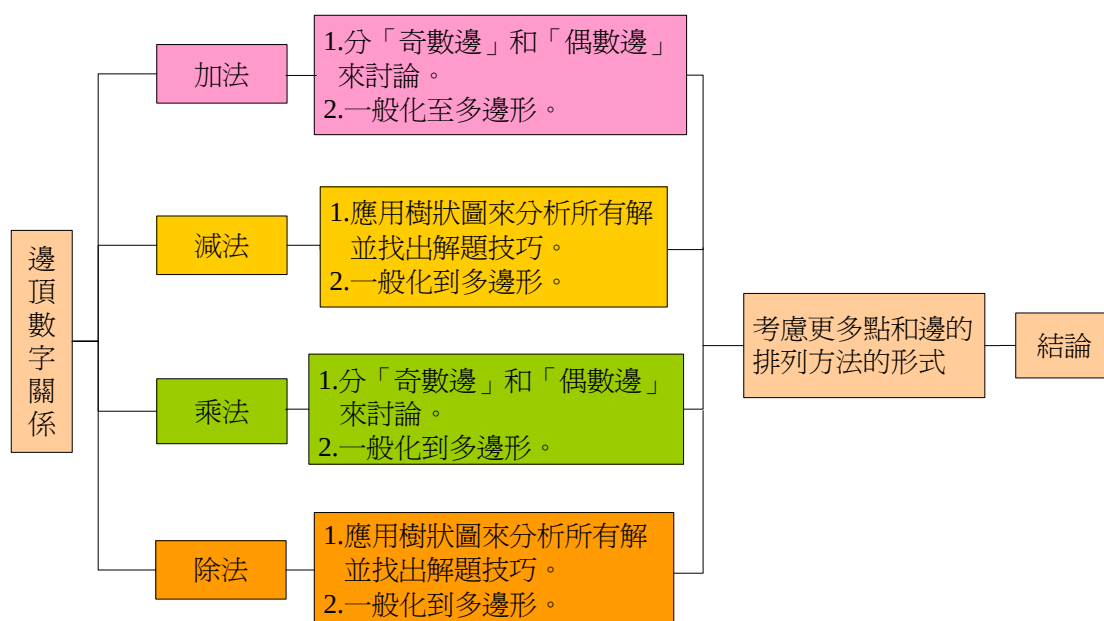
貳、研究目的

- 一、先以聯立方程式解出未知數，再找出簡單規則求出未知數。
- 二、將它一般化至多邊形。
- 三、考慮加法以外的運算如減法、乘法、除法，並將它一般化到多邊形。
- 四、考慮更多點和邊的排列方法的形式。

參、研究設備及器材

GSP 軟體

肆、研究過程或方法

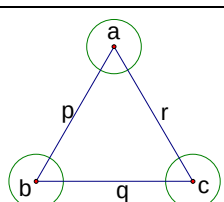
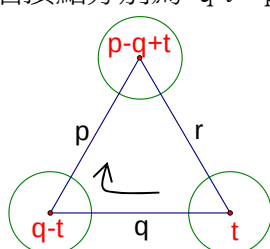


伍、研究結果

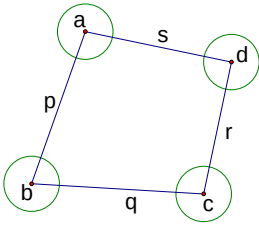
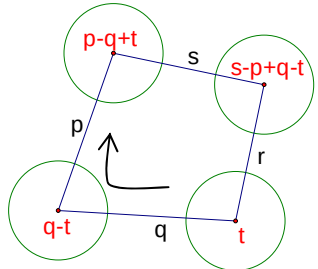
邊與頂點的關係，我們按加、減、乘、除四則運算，依序討論。

一、解加法運算

1. 邊數 = 3 (三角形)

解法一 (應用聯立方程式)	解法二 (應用參數 t)
 $\begin{cases} a + b = p \dots\dots (1) \\ b + c = q \dots\dots (2) \\ c + a = r \dots\dots (3) \end{cases}$ 其解為 $\begin{cases} a = \frac{p + r - q}{2} \\ b = \frac{p + q - r}{2} \\ c = \frac{q + r - p}{2} \end{cases}$	假設一個頂點 = t， 其他兩個頂點分別為 q-t、p-q+t  則最後關係式： $(p - q + t) + (t) = r$ 得 $\begin{cases} t = \frac{q + r - p}{2} \dots\dots\dots \text{頂點} c \\ q - t = \frac{p + q - r}{2} \dots\dots\dots \text{頂點} b \\ p - q + t = \frac{p + r - q}{2} \dots\dots\dots \text{頂點} a \end{cases}$

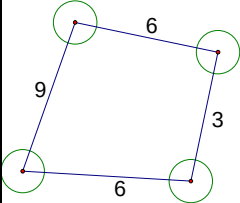
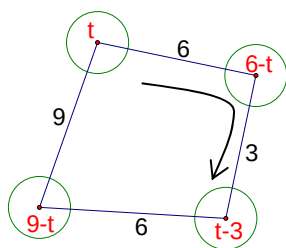
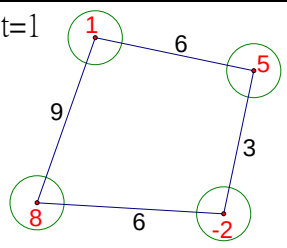
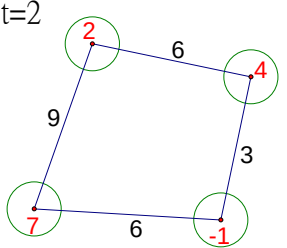
2. 邊數 = 4 (四邊形)

解法一 (應用聯立方程式)	解法二 (應用參數 t)
 $\begin{cases} a + b = p \dots\dots\dots (1) \\ b + c = q \dots\dots\dots (2) \\ c + d = r \dots\dots\dots (3) \\ d + a = s \dots\dots\dots (4) \end{cases}$ $(1) + (3) \Rightarrow (a + b) + (c + d) = p + r \dots\dots (5)$ $(2) + (4) \Rightarrow (b + c) + (d + a) = q + s \dots\dots (6)$ 由(5)(6)可知 $p + r = q + s$	假設一個頂點 = t，其餘頂點，如下圖：  則最後關係式：$(s - p + q - t) + (t) = r$ 得 $p + r = q + s$

結論：(1) 在 $p + r = q + s$ 的條件成立下，頂點 a、b、c、d 的解是無限多組。

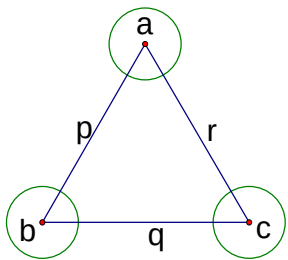
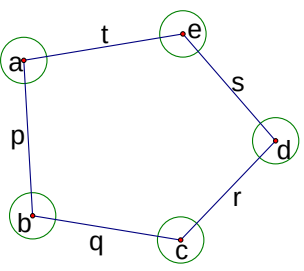
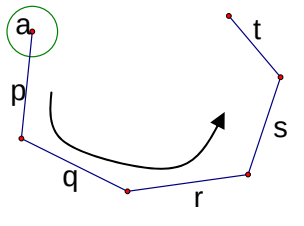
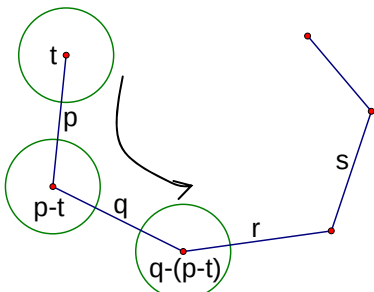
(2) 反之，若 $p + r \neq q + s$ ，則此題是無解。

舉例說明：

題目：  合乎 $9 + 3 = 6 + 6$	解法： 	當 t=1 
		當 t=2 

3.推廣到 n 邊形

根據上述的討論，我們必須分成『奇數邊』與『偶數邊』來結論

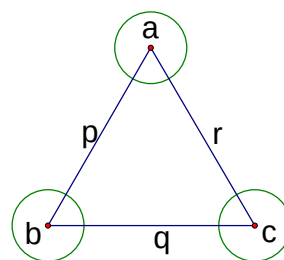
奇數邊	三邊形	 $\begin{cases} a+b=p \\ b+c=q \\ c+a=r \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} a = \frac{p-q+r}{2} \\ b = \frac{q-r+p}{2} \\ c = \frac{r-p+q}{2} \end{cases}$
	五邊形	 $\begin{cases} a+b=p \\ b+c=q \\ c+d=r \\ d+e=s \\ e+a=t \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} a = \frac{p-q+r-s+t}{2} \\ b = \frac{q-r+s-t+p}{2} \\ c = \frac{r-s+t-p+q}{2} \\ d = \frac{s-t+p-q+r}{2} \\ e = \frac{t-p+q-r+s}{2} \end{cases}$
	n 邊形	 $a = \frac{p-q+r-s+t-\dots}{2}$ 『求頂點 a 的解』其簡單的規則是從頂點 a 相鄰的一邊開始，依逆時鐘（或順時鐘）『+』、『-』相間之總和，最後再除以『2』，就是答案。其他頂點的解也同理。
偶數邊	『邊的關係』必須在『一組相間隔邊的和』等於『另一組相間隔邊的和』的條件成立之下，頂點的解是無限多組；否則此題是無解。 邊的關係： $p+r+\dots=q+s+\dots$ 成立之下 頂點的解法 	

二、解減法運算

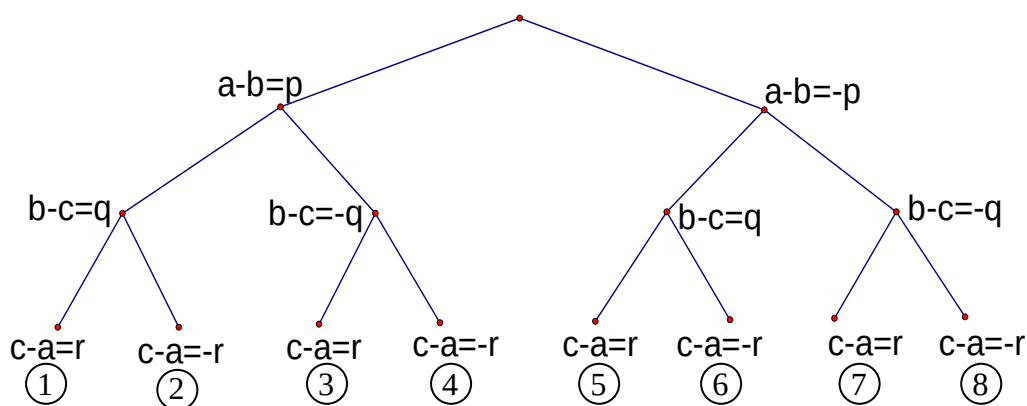
1. 邊數 = 3 (三角形)

根據右圖，可得聯立方程式如下：

$$\begin{cases} |a-b| = p \dots\dots(1) \\ |b-c| = q \dots\dots(2) \\ |c-a| = r \dots\dots(3) \end{cases}$$



以樹狀圖來分析上述聯立方程式的所有可能如下：



整理路徑①⑧得 $p+q+r=0$

②⑦得 $p+q=r$

③⑥得 $p+r=q$

④⑤得 $q+r=p$

我們再將『邊的關係』分成兩個類型，整理如下表：

	類型一	類型二
邊的 關係	$p+q+r=0$	$p+q=r$ $p+r=q$ $q+r=p$

接著我們依其類型分別找出其解的方法並分述如下：

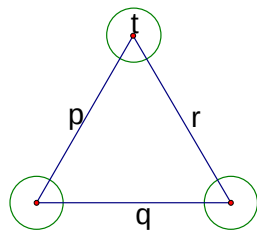
(1) 若『邊的關係』屬於類型一 ($p+q+r=0$)

從樹狀圖可知，它是由這兩組聯立方程式所整理的

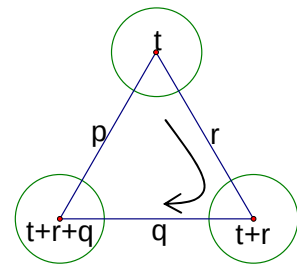
$$\begin{cases} a-b=p \\ b-c=q \\ c-a=r \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} a-b=-p \\ b-c=-q \\ c-a=-r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a=p \\ c-b=q \\ a-c=r \end{cases}$$

仔細觀察 a、b、c 的順序，在解法上我們得到一些心得：

解法一

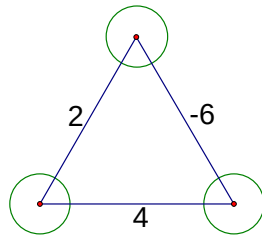


先假設一頂點為 t ，
依順時鐘方向，遇到
 p 、 q 、 r 就加，依序完
成其他頂點的假設。

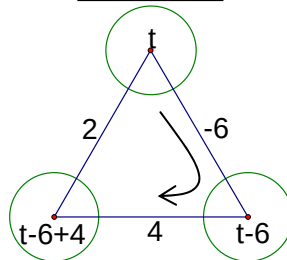


實例說明：

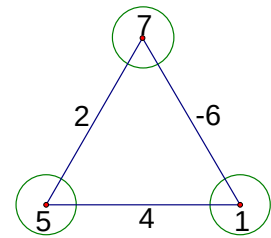
題目：



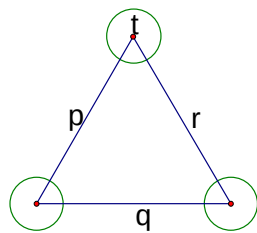
解法：



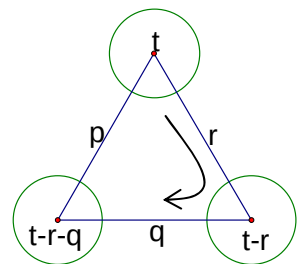
當 $t = 7$ 時



解法二

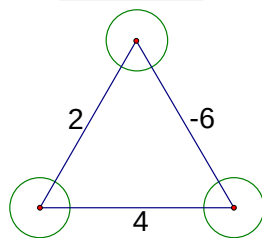


先假設一頂點為 t ，
依順時鐘方向，遇到
 p 、 q 、 r 就減，依序完
成其他頂點的假設。

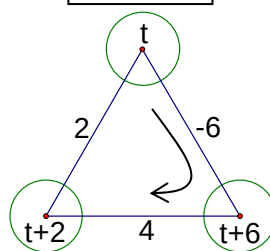


實例說明：

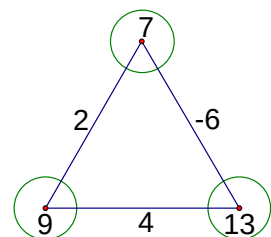
題目：



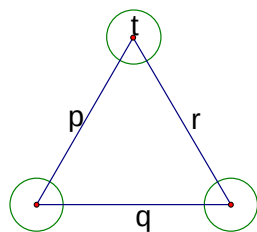
解法：



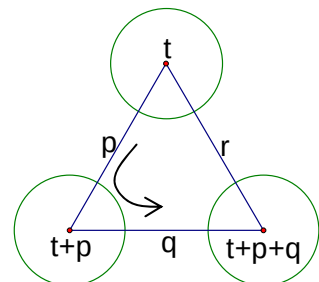
當 $t = 7$ 時



解法三

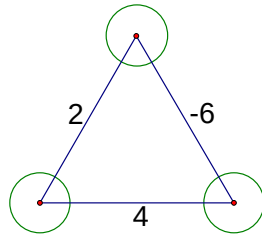


先假設一頂點為 t ，
依逆時鐘方向，遇到
 p 、 q 、 r 就加，依序完
成其他頂點的假設。

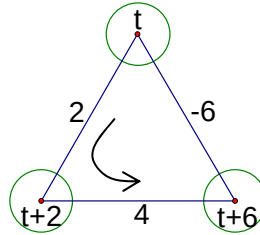


實例說明：

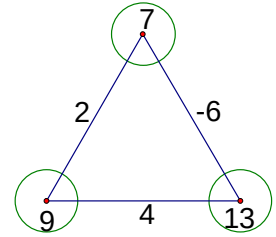
題目：



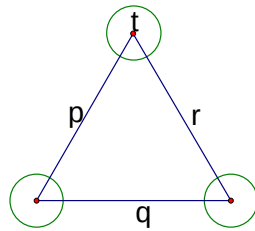
解法：



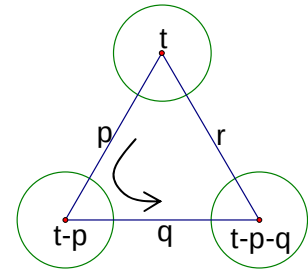
當 $t = 7$ 時



解法四

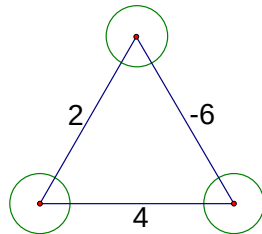


先假設一頂點為 t ，
依逆時鐘方向，遇到
 p 、 q 、 r 就減，依序完
成其他頂點的假設。

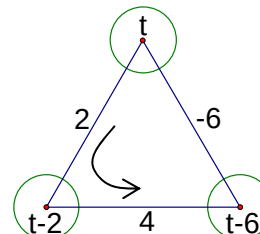


實例說明：

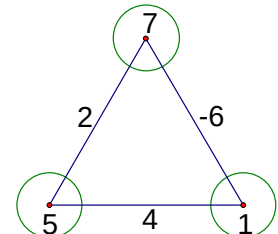
題目：



解法：



當 $t = 7$ 時



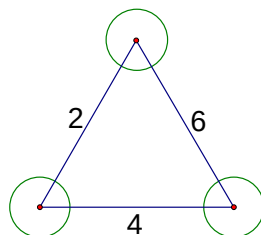
心得： 1. 頂點的解法：

若依順時鐘方向(或逆時鐘)，遇到 p 、 q 、 r 就加(減)。

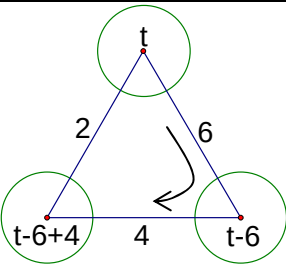
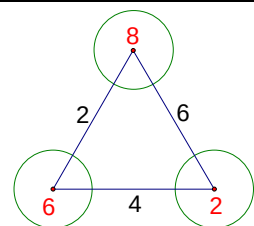
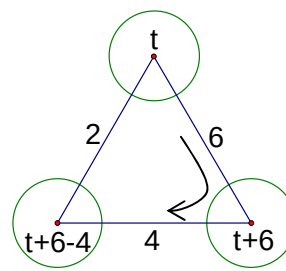
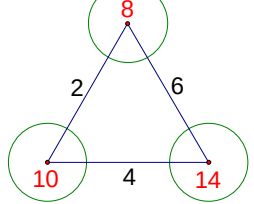
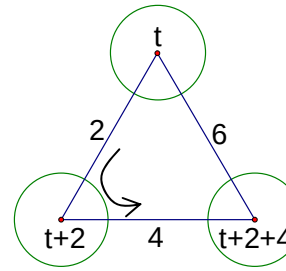
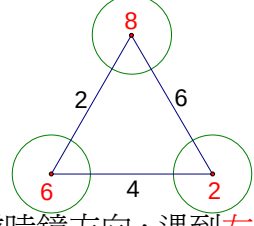
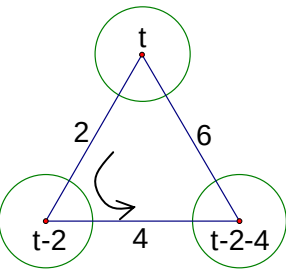
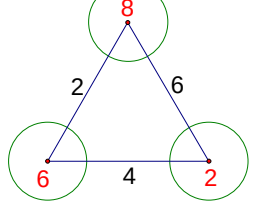
2. 其解是無限多組

(2) 若『邊的關係』屬於類型二

以『邊的關係』有 $2+4=6$ 來說明：



$$\begin{array}{ccc} 2 & + & 4 \\ \text{左式} & & \text{右式} \end{array} = 6$$

解法	頂點假設	實例與頂點的解法
一		 依順時鐘方向，遇到左式的 2、4 就加，右式的 6 就減。
二		 依順時鐘方向，遇到左式的 2、4 就減，右式的 6 就加。
三		 依逆時鐘方向，遇到左式的 2、4 就加，右式的 6 就減。
四		 依逆時鐘方向，遇到左式的 2、4 就減，右式的 6 就加。

心得：

1. 頂點的解法：

若依順時鐘方向，遇到『邊的關係』左式的 p 、 q 就加，右式的 r 就減；反之也成立。

2. 同理， $(p+r=q)$ 、 $(q+r=p)$ 型的解法也是一樣。

3. 其解是無限多組

(3) 結論

- 『邊的關係』必須合乎類型一、二之下，才有解，其解是無限多組。解法如下表：

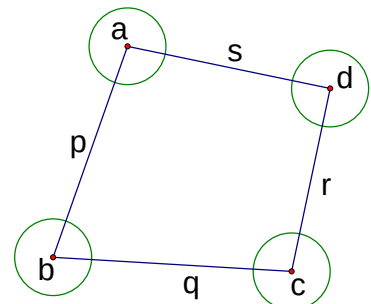
	類型一	類型二
邊的關係	$p+q+r=0$	$p+q=r$ $p+r=q$ $q+r=p$
頂點的解法	- 依順時鐘方向，遇到 p、q、r 就加。 - 反之也成立。	- 以 $p+q=r$ 為例 依順時鐘方向，遇到左式的 p、q 就加，右式的 r 就減。 - 反之也成立。

- 『邊的關係』不合乎類型一、二，則此題是無解。

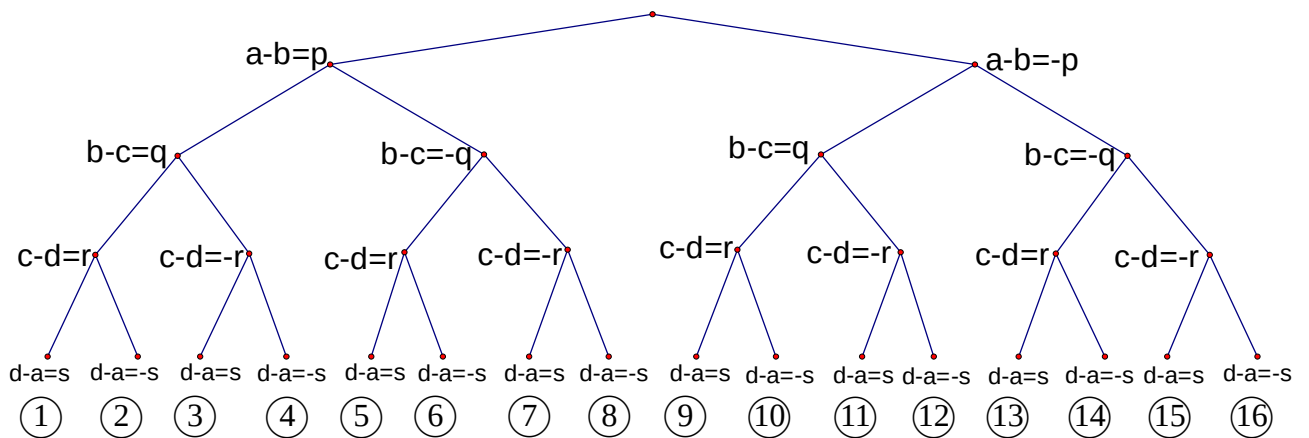
2. 邊數 = 4 (四邊形)

根據右圖，可得聯立方程式如下：

$$\begin{cases} |a-b| = p \dots\dots (1) \\ |b-c| = q \dots\dots (2) \\ |c-d| = r \dots\dots (3) \\ |d-a| = s \dots\dots (4) \end{cases}$$



以樹狀圖來分析上述聯立方程式的所有可能如下：



根據樹狀圖的路徑整理，得『邊的關係』如下表：

	類型一	類型二	類型三
邊的關係	$p+q+r+s=0$	$p+q+r=s$ $p+q+s=r$ $p+r+s=q$ $q+r+s=p$	$p+q=r+s$ $p+r=q+s$ $p+s=q+r$

其解法的分析方式與『三角形』一樣，我們整理如下表：

	邊的關係	頂點的解法
類型一	$p+q+r+s=0$	1. 依順時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 、 s 就加。 2. 反之也成立。
類型二	$p+q+r=s$ $p+q+s=r$ $p+r+s=q$ $q+r+s=p$	1. 以 $p+q+r=s$ 為例，依順時鐘方向，遇到左式的 p 、 q 、 r 就加，右式的 s 就減。 2. 反之也成立。
類型三	$p+q=r+s$ $p+r=q+s$ $p+s=q+r$	1. 以 $p+q=r+s$ 為例，依順時鐘方向，遇到左式的 p 、 q 就加，右式的 r 、 s 就減。 2. 反之也成立。

『邊的關係』合乎類型一、二、三 其解是無限多組；反之，則此題是無解。

3. 推廣到 n 邊形

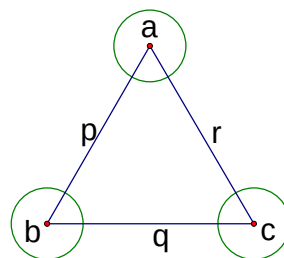
- 『邊的關係』必須合乎『類型一』、『類型二』…，其解是無限多組。
- 「頂點的解法」：依順時鐘方向，遇到『邊的關係的左式』就加，『邊的關係的右式』就減；反之也成立。
- 不合乎『邊的關係』，則此題是無解。

三、解乘法運算 (只討論『邊』是正數)

1. 邊數 = 3 (三角形)

根據右圖，解聯立方程式如下：

$$\begin{cases} a \times b = p \dots (1) \\ b \times c = q \dots (2) \\ c \times a = r \dots (3) \end{cases} \text{得到的解是} \begin{cases} a = \sqrt{\frac{p \times r}{q}} \\ b = \sqrt{\frac{q \times p}{r}} \\ c = \sqrt{\frac{r \times q}{p}} \end{cases}$$



2. 邊數 = 4 (四邊形)

根據右圖，解聯立方程式如下：

$$\begin{cases} ab = p \dots (1) \\ bc = q \dots (2) \\ cd = r \dots (3) \\ da = s \dots (4) \end{cases}$$

$$(1) \times (2) \times (3) \times (4)$$

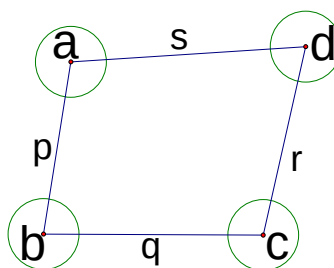
$$\text{得 } a^2 b^2 c^2 d^2 = pqrs$$

$$(ab)(cd) = \sqrt{pqrs}$$

$$pr = \sqrt{pqrs}$$

$$\sqrt{pr} = \sqrt{qs}$$

$$\therefore pr = qs$$

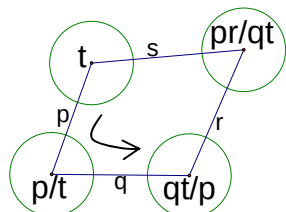


因此在 $pr = qs$ 條件成立之下，將 $s = \frac{pr}{q}$ 代入(4)則原來聯立方程式

可改寫成

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = p \\ bc = q \\ cd = r \\ da = \frac{pr}{q} \end{cases} \text{其解爲} \begin{cases} b = \frac{p}{a} \\ c = \frac{aq}{p} \\ d = \frac{pr}{aq} \end{cases}, \text{則上圖的頂點 } a、b、c、d \text{ 就可假設成}$$

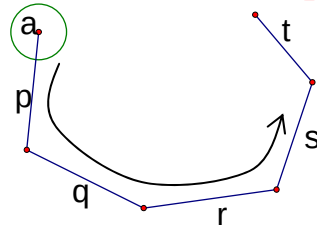
下圖 (參數 $t \neq 0$)，這個問題就可解決了。其解是無限多組。



反之，若 $pr \neq qs$ ，則此題是無解。

3. 推廣到 n 邊形

- (1) n 是奇數時。例如『求 a 的解』---從頂點 a 相鄰的一邊開始，依逆時鐘（或順時鐘）方向，『一組相間隔邊的乘積』除以『另一組相間隔邊的乘積』，最後再根號，就是答案。

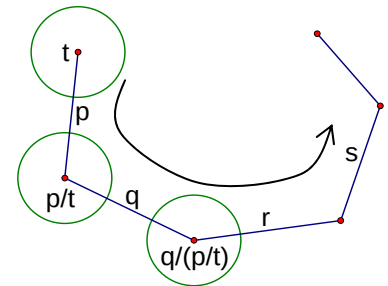
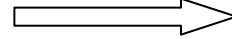


$$\text{頂點 } a \text{ 的解} = \sqrt{\frac{p \times r \times t \times \dots}{q \times s \times \dots}}$$

- (2) n 是偶數時，『邊的關係式』必須在『一組相間隔邊的乘積』等於『另一組相間隔邊的乘積』條件成立之下，再假設任一個頂點為 t（參數 $t \neq 0$ ）依逆時鐘（或順時鐘）去推論其他頂點的假設，如下圖所示，其解是無限多組；若此條件不成立，此題是無解。

邊的關係：
 $p \times r \times \dots = q \times s \times \dots$
 成立之下

頂點的解法

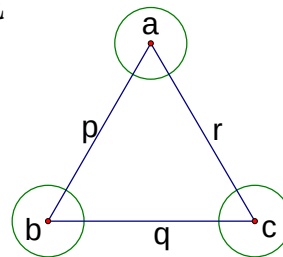


四、解除法運算

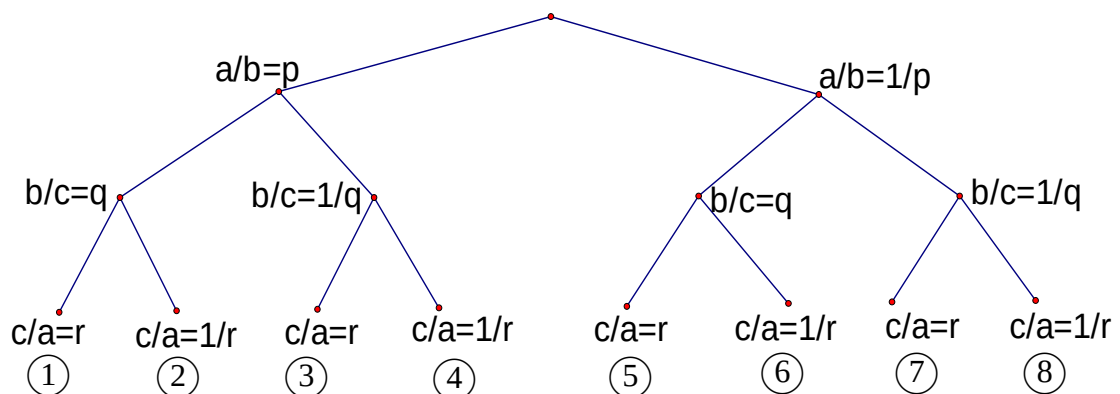
1. 邊數 = 3（三角形）

下面聯立方程式，僅是其中一組而已

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = p \dots (1) \\ \frac{b}{c} = q \dots (2) \\ \frac{c}{a} = r \dots (3) \end{cases}$$



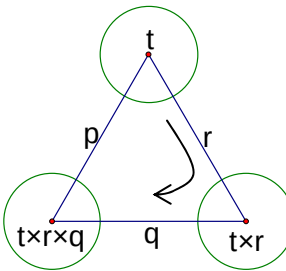
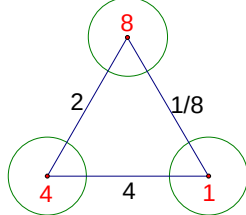
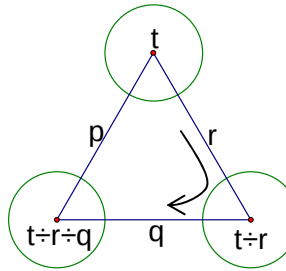
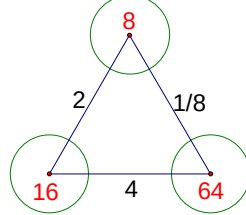
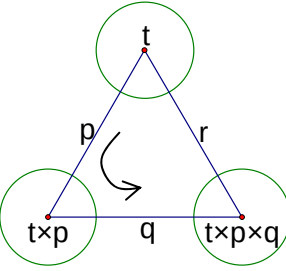
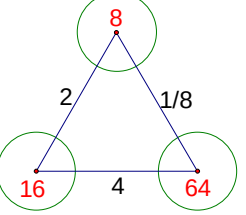
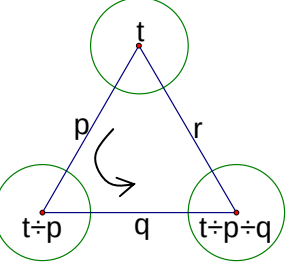
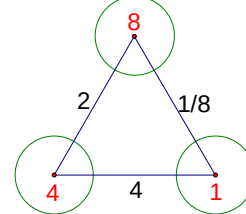
以樹狀圖來分析此題聯立方程式的所有可能如下：



根據樹狀圖的路徑整理，得『邊的關係』如下表：

	類型一	類型二
邊的 關係	$p \times q \times r = 1$	$p \times q = r$ $p \times r = q$ $q \times r = p$

(1) 若『邊的關係』屬於類型一 ($p \times q \times r = 1$)

解法	頂點假設	實例與頂點的解法
一		 依順時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 就乘。
二		 依順時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 就除。
三		 依逆時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 就乘。
四		 依逆時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 就除。

心得：

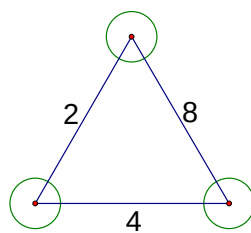
1.頂點的解法：

依順時鐘(或逆時鐘)方向，遇到 $p、q、r$ 就乘(除)。

2. 當參數 $t \neq 0$ 時，它的解有無限多組

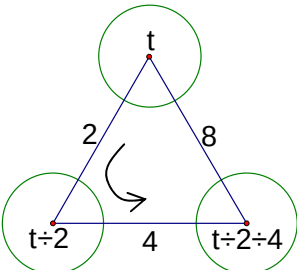
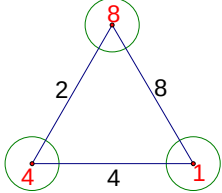
(2) 若『邊的關係』屬於類型二

以『邊的關係』有 $2 \times 4 = 8$ 來說明：



$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & 4 \\ \text{左式} & & \text{右式} \end{array} = 8$$

解法	頂點假設	實例與頂點的解法頂點的解法
一		依順時鐘方向，遇到左式的 2、4 就乘，右式的 8 就除。
二		依順時鐘方向，遇到左式的 2、4 就除，右式的 8 就乘。
三		依逆時鐘方向，遇到左式的 2、4 就乘，右式的 8 就除。

四		 依逆時鐘方向，遇到左式的 2、4 就除，右式的 8 就乘。
---	---	---

心得：

1. 頂點的解法：

依順時鐘方向，遇到『邊的關係』的左式 p 、 q 就乘，右式 r 就除；反之也成立。

2. 同理， $p \times r = q$ 、 $q \times r = p$ 型的解法也是一樣。

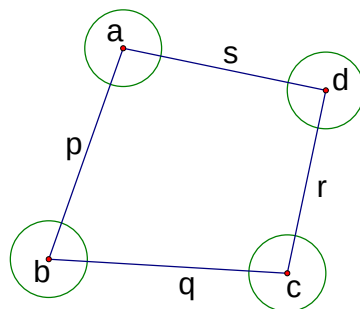
2. 當參數 $t \neq 0$ 時，它的解有無限多組

(3) 結論

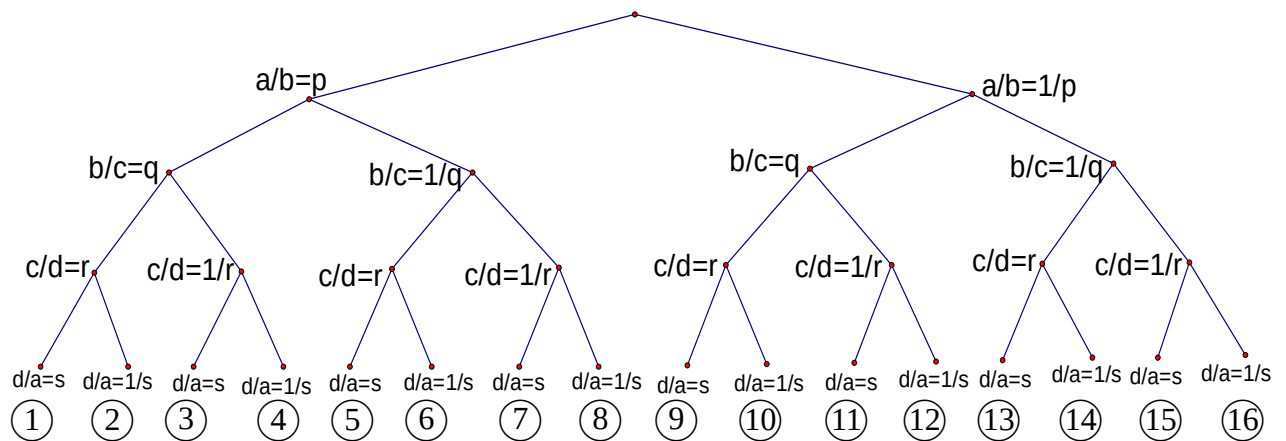
	類型一	類型二
邊的關係	$p \times q \times r = 1$	$p \times q = r$ $p \times r = q$ $r \times q = p$
頂點的解法	1. 依順時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 就乘，。 2. 反之也成立。	以 $p \times q = r$ 說明： 1. 依順時鐘方向，遇到『邊的關係』的左式 p 、 q 就乘，右式 r 就除。 2. 反之也成立。

『邊的關係』不合乎類型一、二，則此題是無解。

2. 邊數 = 4 (四邊形)



以樹狀圖來分析上述聯立方程式的所有可能如下：



根據樹狀圖的路徑整理，得『邊的關係』如下表：

	類型一	類型二	類型三
邊的 關係	$p \times q \times r \times s = 1$	$p \times q \times r = s$ $p \times q \times s = r$ $p \times r \times s = q$ $q \times r \times s = p$	$p \times q = r \times s$ $p \times r = q \times s$ $p \times s = q \times r$

其解法的分析方式如同『邊數 = 3』一樣，我們整理如下表：

	邊的關係	頂點的解法
類型一	$p \times q \times r \times s = 1$	1. 依順時鐘方向，遇到 p 、 q 、 r 、 s 就乘，。 2. 反之也成立。
類型二	$p \times q \times r = s$ $p \times q \times s = r$ $p \times r \times s = q$ $q \times r \times s = p$	1. 以 $p \times q \times r = s$ 為例，依設順時鐘方向，遇到左式的 p 、 q 、 r 就乘，右式的 s 就除。 2. 反之也成立。
類型三	$p \times q = r \times s$ $p \times r = q \times s$ $p \times s = q \times r$	1. 以 $p \times q = r \times s$ 為例，依順時鐘方向，遇到左式的 p 、 q 就乘，右式的 r 、 s 就除。 2. 反之也成立。

『邊的關係』不合乎類型一、二、三，則此題是無解。

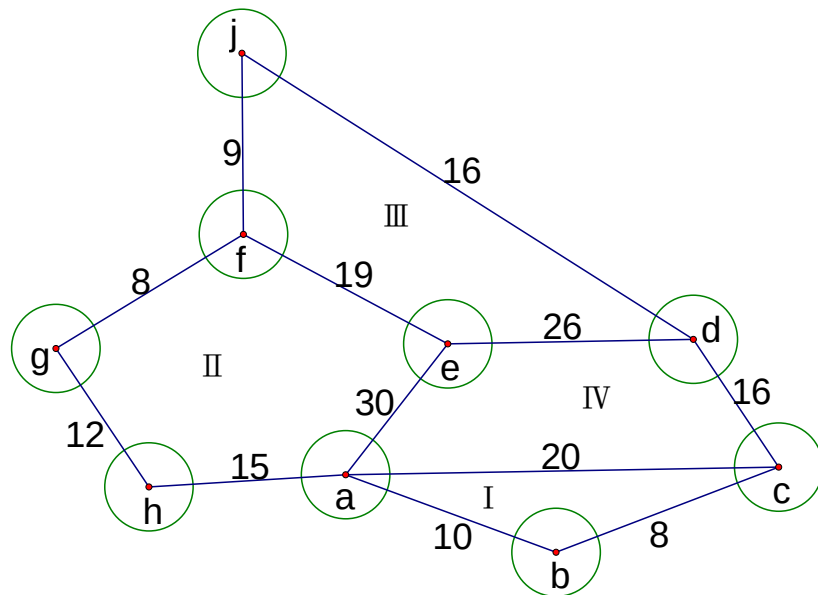
3. 推廣到 n 邊形

- 『邊的關係』必須合乎『類型一』、『類型二』…，其解是無限多組。
- 『頂點的解法』：依順時鐘方向，遇到『邊的關係』的左式就乘，『邊的關係』的右式就除；反之也成立。
- 不合乎『邊的關係』，則此題是無解。

陸、討論

考慮更多點和邊的排列方法的形式，我們就以『加法運算』來討論，其他運算也一樣。

變形一 題目

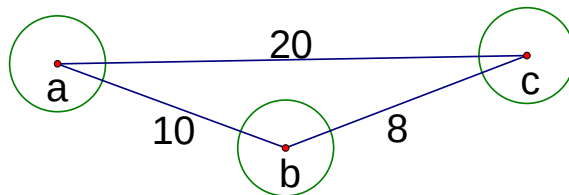


答案

因為奇數邊（I、II）是唯一解，偶數邊（III、IV）是無限多組解，但組合時必須受到 I、II 區域的牽制，所以先算唯一解。

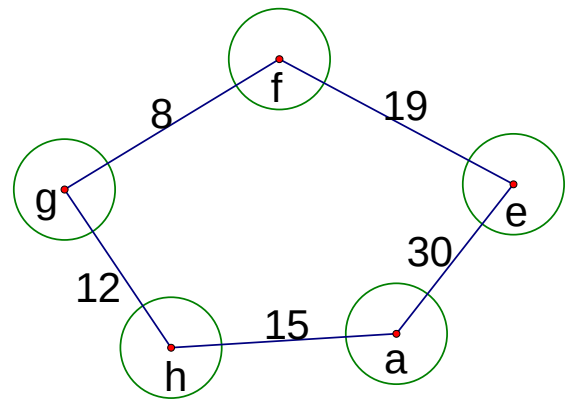
先從 I 區域著手

頂點	解 法
a	$\frac{10 - 8 + 20}{2} = 11$
b	$\frac{8 - 20 + 10}{2} = -1$
c	$\frac{20 - 10 + 8}{2} = 9$



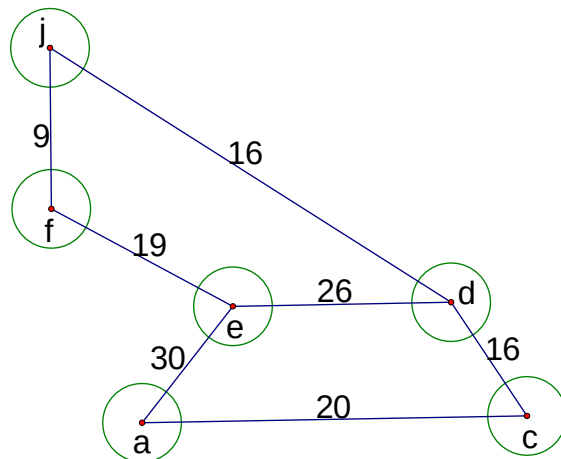
其次計算 II 區域

頂點	解 法
a	$\frac{30 - 19 + 8 - 12 + 15}{2} = 11$
h	$\frac{15 - 30 + 19 - 8 + 12}{2} = 4$
g	$\frac{12 - 15 + 30 - 19 + 8}{2} = 8$
f	$\frac{8 - 12 + 15 - 30 + 19}{2} = 0$
e	$\frac{19 - 8 + 12 - 15 + 30}{2} = 19$

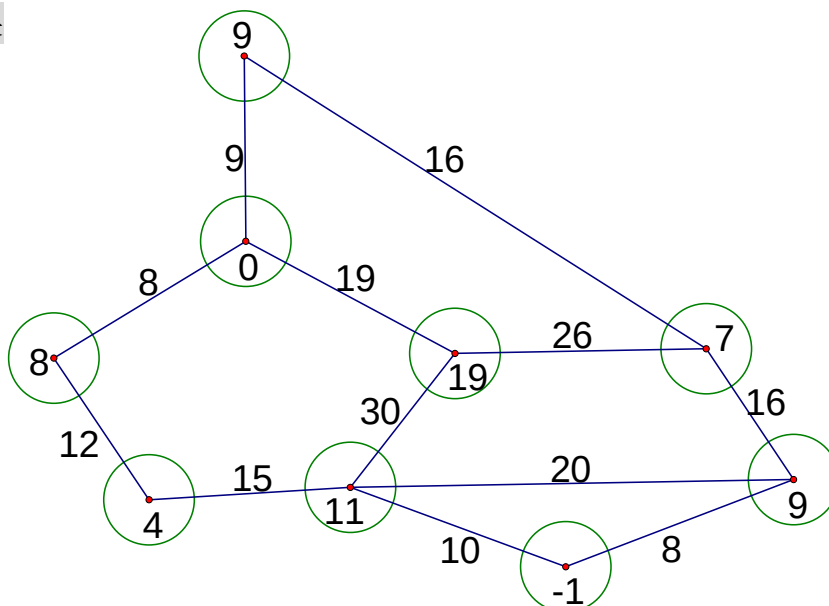


最後計算 III、IV 區域，
因受牽制所以依序求出解

頂點	解 法
d	$26 - e = 26 - 19 = 7$
j	$9 - f = 9 - 0 = 9$

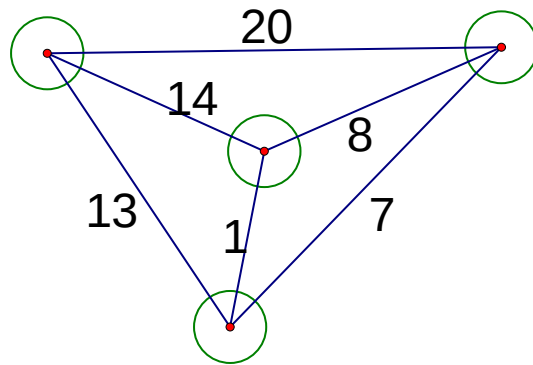


最後的結果

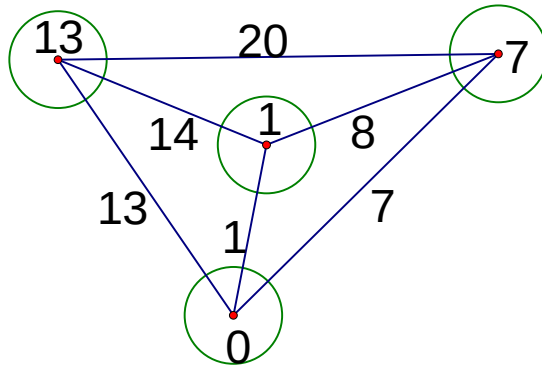


變形二

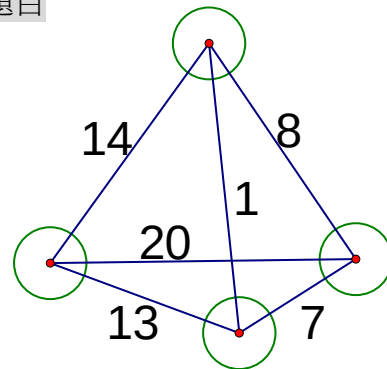
題目



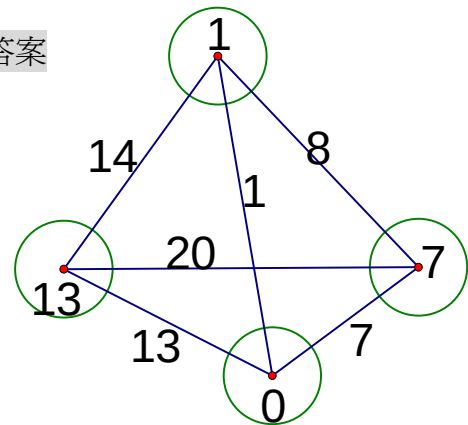
答案



題目



答案

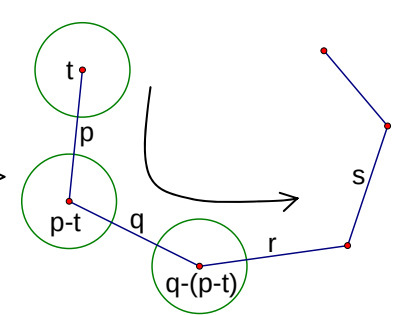


由上述兩題變形，可發現在複雜的組合也變得容易多了。

柒、結論

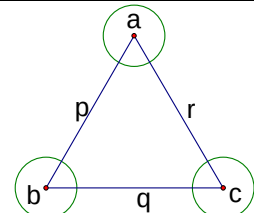
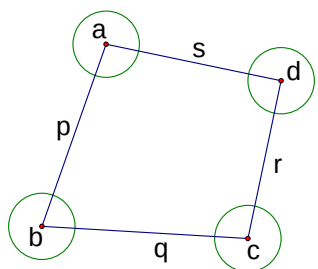
一、加法運算

奇數邊		1.頂點的解是唯一。 2.頂點 $a = \frac{p - q + r - s + t - \dots}{2}$ 『求 a 的解』是從頂點 a 相鄰的邊依逆時鐘（或順時鐘）『+』、『-』相間之總和，最後再除以『2』，就是答案。其他解也同理。
-----	--	---

偶數邊	『邊的關係』必須在『一組相間隔邊的和』等於『另一組相間隔邊的和』條件成立之下，頂點的解是無限多組；否則此題是無解。 邊的關係： $p + r + \dots = q + s + \dots$ 成立之下 頂點的解法 
-----	---

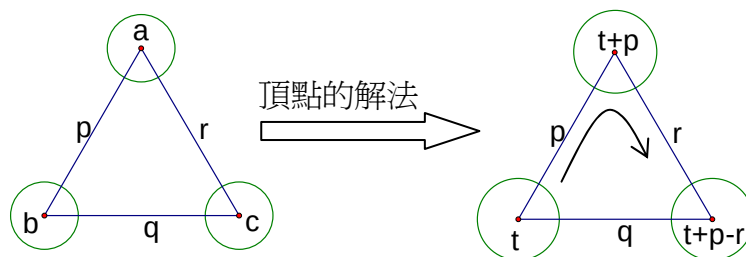
二、減法運算

1. 利用樹狀圖來分析絕對值聯立方程式的所有解。
2. 邊與解的關係：

	圖形	類型	邊的關係式	解的個數
三邊形		一	$p+q+r=0$	『邊的關係式』成立之下，其解是無限多組；否則此題無解。
		二	$p+q=r$ $p+r=q$ $q+r=p$	
四邊形		一	$p+q+r+s=0$	
		二	$p+q+r=s$ $p+q+s=r$ $p+r+s=q$ $q+r+s=p$	
		三	$p+q=r+s$ $p+r=q+s$ $p+s=q+r$	
n 邊形	同理			

3. 頂點的解法：

若『邊的關係式』是 $p+q=r$ 型，依順時鐘方向，遇到左式的 p 、 q 就加，右式的 r 就減。（反之也成立。）



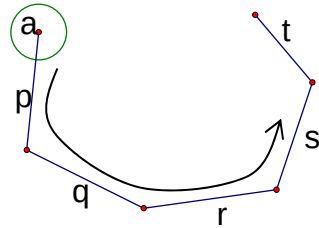
三、乘法運算（只討論『邊』是正數）

1. 奇數邊時

(1) 頂點的解是唯一。

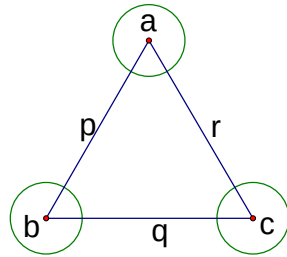
(2) 頂點的解法：

例如『求 a 的解』---從頂點 a 相鄰的一邊開始，依逆時鐘（或順時鐘）方向，『一組相間隔邊的乘積』除以『另一組相間隔邊的乘積』，最後再根號，就是答案。



$$\text{頂點 } a \text{ 的解} = \sqrt{\frac{p \times r \times t \times \dots}{q \times s \times \dots}}$$

(3). 以三角形為例



它的解是

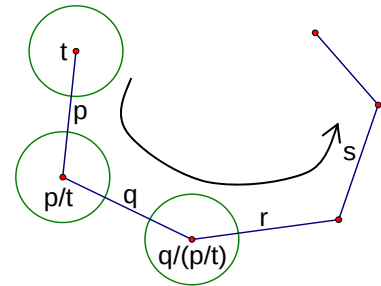
$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{p \times r}{q}} \\ b = \sqrt{\frac{q \times p}{r}} \\ c = \sqrt{\frac{r \times q}{p}} \end{cases}$$

2. 偶數邊時，頂點的解法：

『邊的關係式』必須在『一組相間隔邊的乘積』等於『另一組相間隔邊的乘積』條件成立之下，再假設任一個頂點為 t（參數 $t \neq 0$ ）依逆時鐘（或順時鐘）去推論其他頂點的假設，如下圖所示，其解是無限多組；若此條件不成立，此題是無解。

邊的關係：
 $p \times r \times \dots = q \times s \times \dots$
成立之下

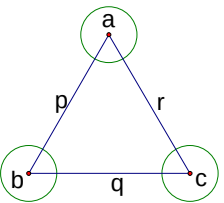
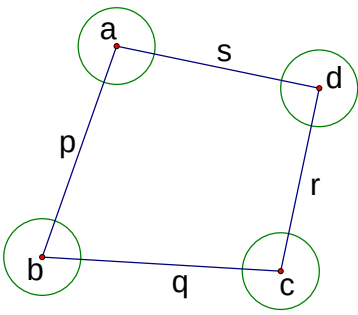
頂點的解法



四、除法運算

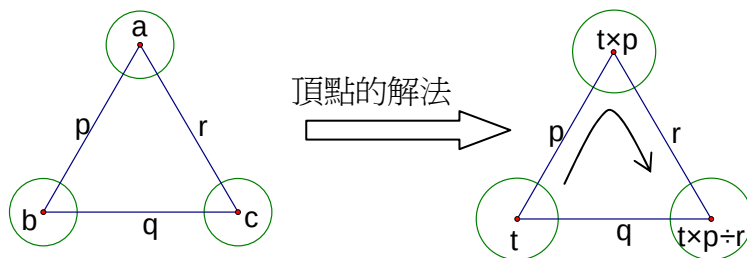
1. 利用樹狀圖來分析聯立方程式的所有解。

2. 邊與解的關係：

	圖形	解的類型	邊的關係式	解的個數
三邊形		一	$p \times q \times r = 1$	『邊的關係式』成立之下，其解是無限多組；否則此題無解。
		二	$p \times q = r$ $p \times r = q$ $q \times q = p$	
四邊形		一	$p \times q \times r \times s = 1$	
		二	$p \times q \times r = s$ $p \times q \times s = r$ $p \times r \times s = q$ $q \times r \times s = p$	
		三	$p \times q = r \times s$ $p \times r = q \times s$ $p \times s = q \times r$	
n 邊形	同理			

3. 頂點的解法（參數 $t \neq 0$ ）

以三角形為例，若『邊的關係式』是 $p \times q = r$ 型，依順時鐘方向，遇到左式的 p 、 q 就乘，右式的 r 就除。



捌、參考資料

1. 武良翰、郭梵均、黃亭捷、袁盛博 第 45 屆中小學科展（國中組）---層出不窮？！
2. 楊舜丞、陳躍中 第 45 屆中小學科展（國中組）---積頂玄機

【評 語】 030403 多邊形的邊頂關係之數字玄機

1.循序漸進地探究多邊形邊頂關係之數字玄機，條理清晰。可在書面資料上補充說明「以邊上的數字討論頂點數字之幾何意義」，則更能突顯本研究主題中幾何與代數間的連結。