中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030402

海倫家族三代同堂大蒐祕

學校名稱：高雄市立三民國民中學

作者：	指導老師：
國三 徐祥	蔡震珊
國三 楊媛甯	黃昭勳

關鍵詞：子母三角形　海倫家族　完美海倫 n 邊形

海倫家族三代同堂大蒐祕

摘要

從國中的幾何出發，利用角平分線的比例性質，發展出子直角三角形的理論，並利用此理論，加以延伸與推廣，發展出海倫家族邊長的比例解。

壹、研究動機

在上數學課時，老師介紹了兩種三角形：一種是勾股三角形（三邊長為正整數）；另一種是 Heron（海倫）三角形（三邊長為正整數，面積也為正整數）。透過老師的敘述，得知勾股三角形的比例解很早就被人所求出。然而對於有關海倫三角形的部分，在查閱相關書籍後：在蔡聰明教授所著的一本書「數學拾貝」p.199 有這麼一段話：「海倫三角形的三個邊是否可用一般公式表達出來？這個問題，目前都沒有答案，也許是真的不存在一般公式。」因此，在好奇心的驅使下，讓我們開始了海倫三角形的相關研究，經過多番的探索，運用了一些國中所學到的幾何性質，發展出子直角三角形的理論，並搭配創意與巧思，運用在海倫家族上，完成了這次的研究。

貳、研究目的

一、如何運用一子直角三角形其兩股的比值，建構出第一代海倫家族勾股三角形的比例解。

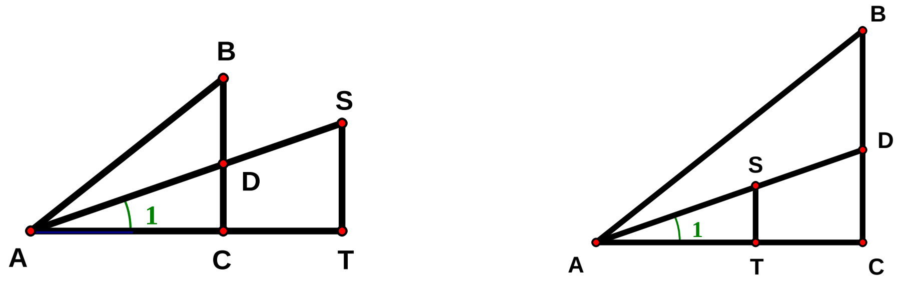
二、如何運用兩個子直角三角形其兩股的比值，建構出第二代海倫家族（海倫三角形、海倫等差三角形、海倫倍角三角形）的比例解。

三、如何運用多個子直角三角形其兩股的比值，建構出第三代海倫家族（次完美海倫 n 邊形、完美海倫 n 邊形）的比例解。

參、定義名詞

一、子（母）三角形：給定直角 ΔAST ，$\angle T = 90°, \overline{\mathrm{AT}} > \overline{\mathrm{ST}}$ ，在 $\overrightarrow{AT}$ 取一點 C 作 $\angle\mathrm{CAB} = 2\angle\mathrm{SAT}$，且 $\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$。我們將此 ΔABC 稱為 ΔAST 之母直角三角形，而稱 ΔAST 為 ΔABC 的子直角三角形（如圖一）。

註：依定義母直角 ΔABC 理應有無限個，可是每一個均互為相似，故此視為同一個，而子直角 ΔAST 亦是如此。



(圖一)

二、勾股三角形：若直角三角形三邊長均爲正整數，稱之。

三、海倫三角形：若三角形其三邊長爲正整數，面積也爲正整數，稱之。

四、海倫等差三角形：若一海倫三角形，其三邊成等差，稱之。

五、海倫倍角三角形：若一海倫三角形，其兩內角比爲 $m:n$ (m,n 爲正整數)，稱之，以符號 ${}_m\Delta_n$ 表之。

六、海倫 n 邊形：若一個 n 邊形其邊長、面積爲正整數，稱之。

註：若一個 n 邊形經放大正整數倍後，能成爲海倫 n 邊形，則此 n 邊形亦可稱之爲海倫 n 邊形。

七、次完美海倫 n 邊形：若一個海倫 n 邊形，固定某一頂點（ $n\geq 4$ ），所畫出的所有對角線均是正整數，稱之。

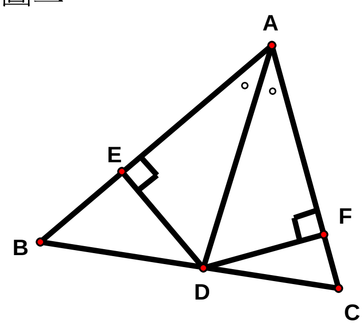
八、完美海倫 n 邊形：若一個海倫 n 邊形，其所有對角線均爲正整數，稱之。

註：二到八的所有定義中，有提及邊長爲正整數或面積爲正整數的部分，均可改爲有理數，因所有的有理數經放大後均可變爲正整數。

肆、預備定理

預備定理一：已知 ΔABC， $\overline{AD}$ 爲 $\angle$A 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 D ，如圖二，

則 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 。



(圖二)

證明：過 D 作 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$， $\overline{DF}\perp\overline{AC}$

$\because\ \overline{AD}$ 爲 $\angle$A 的角平分線

$\therefore\ \overline{DE}=\overline{DF}$

$\because \Delta ABD=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{DE}$，$\Delta ACD=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DF}$，$\overline{DE}=\overline{DF}$

得 $\frac{\Delta ACD}{\Delta ABD}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DF}}{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{DE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

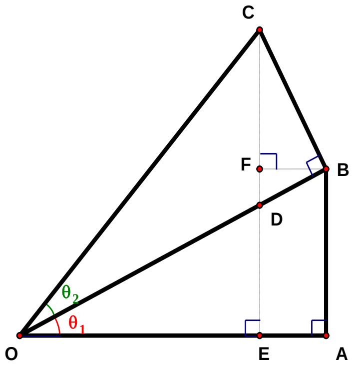
又 $\frac{\Delta ACD}{\Delta ABD}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$(同高)

故 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

預備定理二： 已知θ_1,θ_2所形成的直角三角形分別爲ΔAOB與ΔBOC，$\theta_1+\theta_2$所形成的直角三角形爲ΔEOC(如圖三)，其中$\theta_1+\theta_2<90°$，令$r_{\theta_1}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}},r_{\theta_2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}},r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}}$

求證：1. $r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}$；

2. $0<r_{\theta_1}r_{\theta_2}<1$



(圖三)

證明：1. $\because r_{\theta_1}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}},r_{\theta_2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}},r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}}$

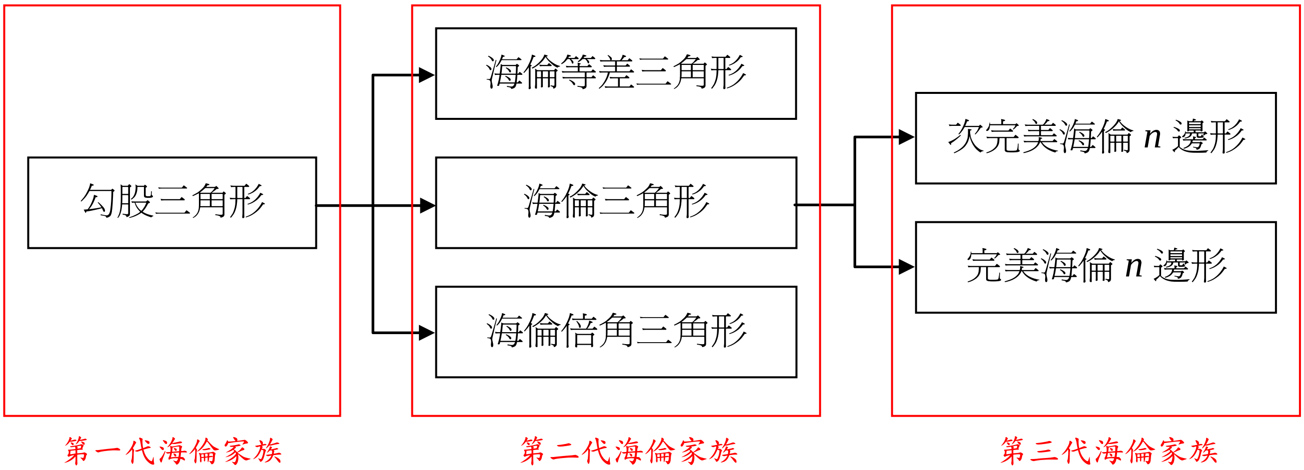
故 $r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}}=\frac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{OA}-\overline{AE}}=\frac{\overline{AB}+\overline{CF}}{\overline{OA}-\overline{BF}}$

$$=\frac{\overline{AB}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}\times\overline{BC}}{\overline{OA}-\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}+\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\times\overline{BC}}{\overline{OA}-\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{OB}\times\overline{AB}+\overline{OA}\times\overline{BC}}{\overline{OA}\times\overline{OB}-\overline{AB}\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}}{1-\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}}=\frac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}$$

2. $\because r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}>0$，故$0<r_{\theta_1}r_{\theta_2}<1$

伍、研究流程與過程



研究流程圖

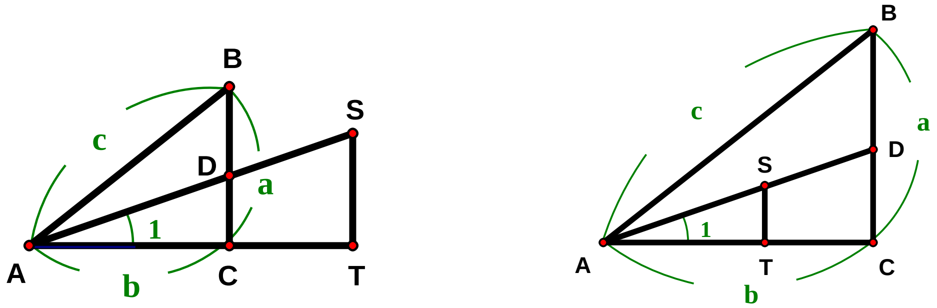
研究目的一：如何運用一子直角三角形其兩股的比值，建構出第一代海倫家族勾股三角形的比例解。

爲了探討這個問題，我們定義了直角三角形中的「子、母關係」。如何運用這個定義，再配合角平分線的比例性質，得出任何勾股三角形的三邊比？底下先導出幾個引理：

引理一：已知母直角 ΔABC 爲勾股三角形(如圖四)，其三邊長 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$ (a,b,c 爲正整數)。若其子直角 ΔAST 的兩股比值 $\dfrac{\overline{ST}}{\overline{AT}}=r_1$，則 r_1 必符合下列兩個關係：

1. $r_1=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{c-b}{a}$

2. r_1 必爲有理數，且 $0<r_1<1$



(圖四)

證明：1. $\because \overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，由預備定理一知 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CD}+\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC}+\overline{AB}}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CD}}{a}=\frac{b}{b+c} \Rightarrow \overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$$

$\because \Delta AST \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{\overline{ST}}{\overline{AT}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow r_1 = \dfrac{\frac{ab}{b+c}}{b} = \dfrac{a}{b+c}$

$\because \Delta ABC$爲直角三角形$\Rightarrow (c+b)(c-b) = a^2 \Rightarrow \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{c-b}{a}$

故$r_1 = \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{c-b}{a}$

2. $\because r_1 = \dfrac{a}{b+c}$，在三角形中 b+c>a，$\therefore 0 < r_1 < 1$

又a,b,c爲正整數，$\therefore r_1$爲有理數

引理二：給定子直角ΔAST(如圖四)，其兩股比值$\dfrac{\overline{ST}}{\overline{AT}} = r_1$，其中$r_1$爲有理數，且$0 < r_1 < 1$，若其母直角三角形$\Delta ABC$，其三邊長$\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$則下列兩式必成立：

1. $a:b:c = 2r_1 : 1-r_1^2 : 1+r_1^2$
2. 母直角ΔABC爲勾股三角形

證明：1. 由引理一知

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{a}{b+c} \Rightarrow \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} \\ r_1 = \dfrac{c-b}{a} \Rightarrow r_1 = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

故$\dfrac{1}{r_1} - r_1 = \left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}\right) - \left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{2b}{a} \Rightarrow \dfrac{1-r_1^2}{r_1} = \dfrac{2b}{a} \Rightarrow \dfrac{1-r_1^2}{2r_1} = \dfrac{b}{a}$

設$a = 2r_1k, b = (1-r_1^2)k$代入$a^2 + b^2 = c^2$，得$c = (1+r_1^2)k$

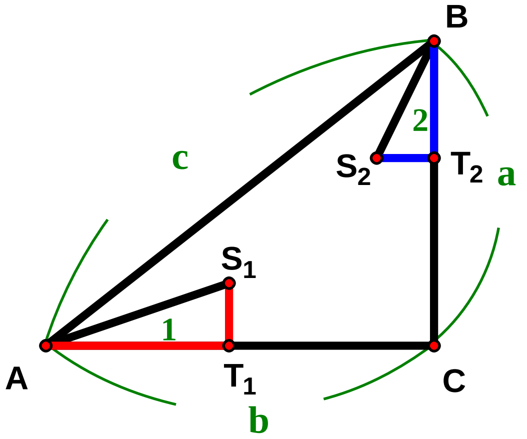
故$a:b:c = 2r_1k : (1-r_1^2)k : (1+r_1^2)k = 2r_1 : 1-r_1^2 : 1+r_1^2$

2. $\because a:b:c = 2r_1 : 1-r_1^2 : 1+r_1^2$，且$r_1$爲有理數，故$a:b:c$可化成最簡單的整數比，從而△ABC 爲勾股三角形。

由引理一給定一個母勾股直角三角形，可找出其所對應子直角三角形的有理比值r_1，反過來說，給定子直角三角形兩股的有理比值r_1，由引理二亦決定了母勾股直角三角形三邊長的比例。綜合上述引理，得出定理一：

定理一：母直角三角形爲勾股三角形的充要條件，爲其子直角三角形之兩股比值r_1爲有理數，且$0 < r_1 < 1$，而此勾股三角形的三邊比可以$2r_1 : 1-r_1^2 : 1+r_1^2$表之。

討論：由於每一個直角三角形皆有兩個銳角，分別由這兩個銳角做其角平分線可得到其所對應的兩個子直角三角形（如圖五），利用這兩個子直角三角形所決定的兩股比值r_1,r_2，可求出相同的母直角三角形，因此針對r_1,r_2可決定同一個母直角三角形的特性，其r_1,r_2理應可互相轉換，而此轉換關係為何，敘述如下：



(圖五)

由引理一知$r_1=\dfrac{a}{b+c}$，$r_2=\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{c-a}{b}$，利用和比關係可得出

$r_2=\dfrac{b+c-a}{b+c+a}=\dfrac{1-\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}}=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}$，此關係式恰好滿足一個很漂亮的代數式，讓我們心中敬存「數學之美」。

運用上述的結果，經運算得到數據如下：

母直角Δ / 子直角Δ	(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)
r_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
r_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$

研究目的二：如何運用兩個子直角三角形其兩股的比值，建構出第二代海倫家族（海倫三角形、海倫等差三角形、海倫倍角三角形）的比例解。

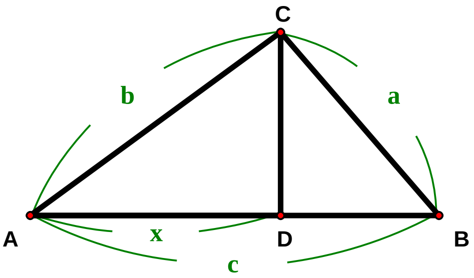
成員一：海倫三角形

針對這個主題，必須先知道海倫三角形的幾何性質：「海倫三角形的高把海倫三角形劃分爲兩個勾股三角形」證明如下：

引理三：已知ΔABC爲海倫三角形，$\overline{CD}$爲$\overline{AB}$邊上的高，則ΔACD與ΔBCD均爲勾股三角形。

證明：已知ΔABC爲海倫三角形

1. $\angle A, \angle B$爲銳角：（如圖六）



(圖六)

(1)$\because \overline{CD} = \dfrac{2\Delta ABC}{\overline{AB}}$，又$\Delta ABC$爲正整數，

$\overline{AB}$爲正整數，$\therefore \overline{CD}$爲有理數。

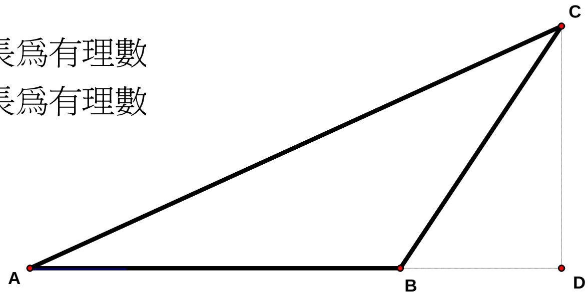
(2)令$\overline{AD} = x$，則$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$化簡得$x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，$\therefore \overline{AD}$爲有理數，

因此$\overline{BD}$亦爲有理數，故$\begin{cases} \Delta ACD\text{三邊長爲有理數} \\ \Delta BCD\text{三邊長爲有理數} \end{cases}$

$\therefore \Delta ACD$與ΔBCD均爲勾股三角形。

2. $\angle A$爲銳角、$\angle B$爲鈍角：（如圖七）

證法仿上即可得證。



(圖七)

引理四：已知爲ΔABC海倫三角形，$\overline{CD}$爲$\overline{AB}$邊上之高，則$\angle A$與$\angle B$之子直角三角形$\Delta AS_1T_1, \Delta BS_2T_2$其兩股比值$r_1, r_2$爲有理數，其中：

1. 若$\angle A, \angle B$爲銳角，則$0 < r_1 < 1, 0 < r_2 < 1$；
2. 若$\angle A$爲銳角，$\angle B$爲鈍角，則$0 < r_1 < 1, r_2 > 1, 0 < r_1 \times r_2 < 1$；
3. 若$\angle A$爲銳角，$\angle B$爲直角，則$0 < r_1 < 1, r_2 = 1$。

證明：分成兩種情形討論：

1. 若$\angle A, \angle B$爲銳角，由引理三知ΔACD與ΔBCD爲勾股三角形，再由引理一知r_1, r_2爲有理數，且$0 < r_1 < 1, 0 < r_2 < 1$。

2. (1)若$\angle A$爲銳角，$\angle B$爲鈍角，令$\angle CBD$之子直角三角形爲ΔBS_3T_3，其兩股的比值爲$r_{2'}$，由引理三知ΔACD與ΔBCD爲勾股三角形，再由引理一知$r_1, r_{2'}$爲有理

數，且 $0<r_1<1, 0<r_{2'}<1$，又 $\Delta BS_2T_2 \sim \Delta S_3BT_3$ 得 $r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}=\dfrac{\overline{BT_3}}{\overline{S_3T_3}}=\dfrac{1}{r_{2'}}>1$，且

爲有理數，故 r_1, r_2 爲有理數，且 $0<r_1<1, r_2>1$。

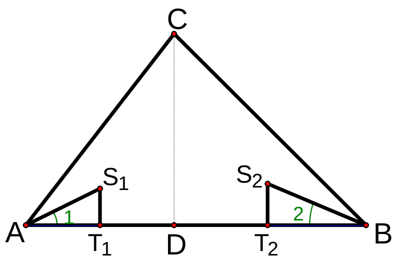
(2)並由預備定理二，知 $0<r_1\times r_2<1$，故得證。

3. 若 $\angle A$ 爲銳角，$\angle B$ 爲直角，ΔABC 顯然爲勾股三角形，故由引理一知 r_1 爲有理數，且 $0<r_1<1$，又 $\angle B$ 爲直角，$\therefore r_2=1$ 爲有理數，故得證。

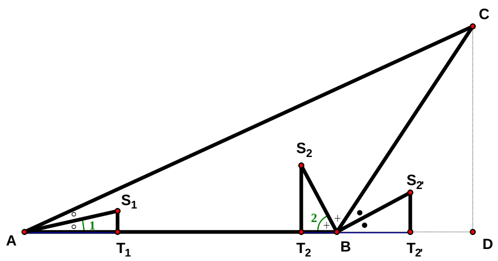
推論：由引理四知，若 ΔABC 爲海倫三角形，則三個內角所構成之子直角三角形其兩股的比值分別爲 r_1, r_2, r_3 時，則 r_1, r_2, r_3 必爲有理數。

引理五：給予直角 ΔAS_1T_1、ΔBS_2T_2，其兩股的比值 $r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$，$\mathrm{r}_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$ 爲有理數，則由此兩個子直角三角形所形成的 ΔABC 爲海倫三角形，其三邊比

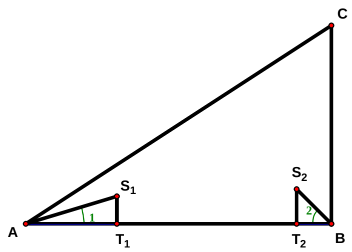
$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c=r_1(1+r_2^2):r_2(1+r_1^2):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$。



(圖八)



(圖九)



(圖十)

證明：以下分三種情況討論：

1. $0<r_1<1, 0<r_2<1$：(圖八)

(1)作 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$

$\because r_1$ 爲有理數，$\therefore \Delta ACD$ 爲勾股三角形，且面積爲正整數；

r_2 爲有理數，$\therefore \Delta BCD$ 爲勾股三角形，且面積爲正整數

故 $\Delta ABC=\Delta ACD+\Delta BCD$ 爲正整數

$\therefore \Delta ABC$ 爲海倫三角形

(2)由引理二，ΔACD 中 $\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1^2:1+r_1^2$，

ΔBCD 中 $\overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_2:1-r_2^2:1+r_2^2$。

由 $\begin{cases}\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1^2:1+r_1^2\\ \overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_2:1-r_2^2:1+r_2^2\end{cases}$ 利用連比

得 $\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_1r_2:r_2(1-r_1^2):r_2(1+r_1^2):r_1(1-r_2^2):r_1(1+r_2^2)$

故 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AD}+\overline{BD}$

$=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):r_2\left(1-r_1{}^2\right)+r_1\left(1-r_2{}^2\right)$

$=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$

2. $0<r_1<1, r_2>1, 0<r_1\times r_2<1$ ：(圖九)

(1)作 $\overline{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，令 ΔBCD 中，$\angle CBD$ 之子直角三角形其兩股的比值 $\dfrac{\overline{S_{2'}T_{2'}}}{\overline{BT_{2'}}}=r_{2'}$

$\because r_1$ 爲有理數 $0<r_1<1$，由引理二知 ΔACD 爲勾股三角形，且面積爲正整數；

又 $\Delta BS_2T_2\sim\Delta S_{2'}BT_{2'}$，$\therefore r_{2'}=\dfrac{\overline{S_{2'}T_{2'}}}{\overline{BT_{2'}}}=\dfrac{\overline{BT_2}}{\overline{S_2T_2}}=\dfrac{1}{r_2}<1$ 且爲有理數，

由引理二知 ΔBCD 爲勾股三角形，且面積爲正整數

故 $\Delta ABC=\Delta ACD-\Delta BCD$ 爲正整數

$\therefore\Delta ABC$ 爲海倫三角形

(2)在 ΔACD 中，因其爲勾股三角形，$\therefore\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1{}^2:1+r_1{}^2$ 。

在 ΔBCD 中，$\overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_{2'}:1-r_{2'}{}^2:1+r_{2'}{}^2=2\dfrac{1}{r_2}:1-\left(\dfrac{1}{r_2}\right)^2:1+\left(\dfrac{1}{r_2}\right)^2$

$=2r_2:r_2{}^2-1:r_2{}^2+1$

由 $\begin{cases}\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1{}^2:1+r_1{}^2\\ \overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_2:r_2{}^2-1:r_2{}^2+1\end{cases}$ 利用連比

得 $\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_1r_2:r_2\left(1-r_1{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):r_1\left(r_2{}^2-1\right):r_1\left(r_2{}^2+1\right)$

故 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AC}}:\left(\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{BD}}\right)$

$=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):r_2\left(1-r_1{}^2\right)-r_1\left(r_2{}^2-1\right)$

$=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$

3. $0<r_1<1, r_2=1$ ：(圖十)

$\because r_2=1$，$\therefore\Delta ABC$ 爲直角三角形，又 r_1 爲有理數 $0<r_1<1$，

由引理二知 ΔABC 爲勾股三角形，故 ΔABC 爲海倫三角形，

且三邊比 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=2r_1:1+r_1{}^2:1-r_1{}^2=2r_1:1+r_1{}^2:(1+r_1)(1-r_1)$

$=r_1(1+\underline{1}):\underline{1}(1+r_1{}^2):(1+r_1)(1-r_1\times\underline{1})$ ……(*)

將上式(*)中的 1 換成 r_2 代入得

$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$

由引理四給定一個海倫三角形，過一頂點取其高可形成兩勾股三角形，從而證出其兩內角之子直角三角形的兩股比值為有理數；反過來說，給定兩個子直角三角形兩股比值為有理數的勾股三角形，必可建構出一海倫三角形，綜合上述引理，得出定理二：

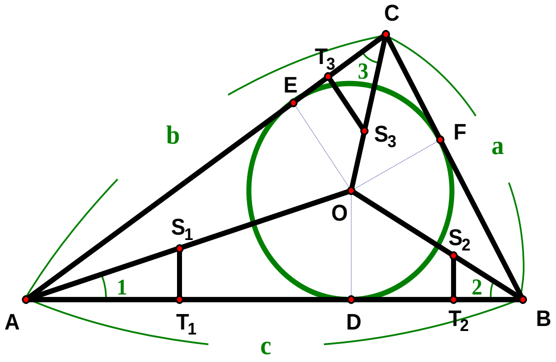
定理二： 滿足三角形為海倫三角形的充要條件，為其兩內角所形成之子直角三角形的兩股比值 r_1, r_2 為有理數，且此海倫三角形的三邊比 $a:b:c = r_1\left(1+r_2^{\,2}\right):r_2\left(1+r_1^{\,2}\right):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$，其中 $0<r_1<1, 0<r_2<1$ 或 $0<r_1<1, r_2>1, 0<r_1\times r_2<1$ 或 $0<r_1<1, r_2=1$。

討論： 由於任一三角形，必存在兩銳角，故其子直角三角形之兩股比值 r_1, r_2 的範圍，只需取 $0<r_1<1, 0<r_2<1$(兩銳角)即可得到所有的海倫三角形，可不需再考慮 $0<r_1<1, r_2>1,$ $0<r_1\times r_2<1$(一鈍角、一銳角)與 $0<r_1<1, r_2=1$(一銳角、一直角)的情形。換句話說，由 $0<r_1<1, r_2>1, 0<r_1\times r_2<1$(一鈍角、一銳角)與 $0<r_1<1, r_2=1$(一銳角、一直角)所建構出的海倫三角形，已包含在 $0<r_1<1, 0<r_2<1$(兩銳角)所建構出海倫三角形當中。

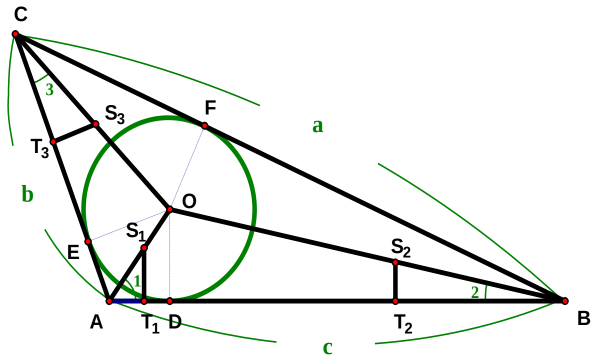
由上可知，雖然任一三角形，可由兩銳角所建構出，可是要如何迅速的判斷出所建構出來的海倫三角形為銳角、直角或鈍角三角形？為解決這個問題，可發現第三個角所形成的子直角三角形之兩股比值 r_3 將會是極大的關鍵，當 $r_3>1$ 時為鈍角三角形，$r_3=1$ 時為直角三角形，$0<r_3<1$ 時為銳角三角形。因此，若能找出 r_1, r_2, r_3 之間的關係，就可以由 r_1, r_2 的值來決定 r_3 的值。

而此三數是否蘊含著某種關係呢？經過幾何與代數的推演得到一個漂亮的轉換關係，證明詳述如下：

分別由 ΔAS_1T_1 與 ΔBS_2T_2 這兩個子直角三角形所形成的 ΔABC，在 C 的角平分線上取一點 S_3，作 $\overline{S_3T_3}\perp\overline{AC}$。令直角 ΔCS_3T_3 中 $\dfrac{\overline{S_3T_3}}{\overline{CT_3}}=r_3$，則 $r_3=\dfrac{1-r_1r_2}{r_1+r_2}$（如圖十一、圖十二）。



(圖十一)



(圖十二)

如圖，延長$\overline{AS_1}$, $\overline{BS_2}$, $\overline{CS_3}$，令其交點爲O，則O爲ΔABC的內心。再作ΔABC的內切圓，令其三個切點分別爲D,E,F，則$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{AD}}$，同理$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{BD}}$，$r_3=\dfrac{\overline{S_3T_3}}{\overline{CT_3}}=\dfrac{\overline{OE}}{\overline{CE}}$。

令$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，$\because \overline{OD}=\dfrac{2\Delta ABC}{2S}=\dfrac{\Delta ABC}{S}$，$\overline{AD}=S-a$，

故$r_1=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\frac{\Delta ABC}{S}}{S-a}=\dfrac{\Delta ABC}{S(S-a)}$，同理$r_2=\dfrac{\Delta ABC}{S(S-b)}$，$r_3=\dfrac{\Delta ABC}{S(S-c)}$。

將r_1,r_2,r_3代入$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3$得

$$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=\frac{\Delta ABC}{S(S-a)}\times\frac{\Delta ABC}{S(S-b)}+\frac{\Delta ABC}{S(S-b)}\times\frac{\Delta ABC}{S(S-c)}+\frac{\Delta ABC}{S(S-a)}\times\frac{\Delta ABC}{S(S-c)}$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\left(\frac{1}{(S-a)(S-b)}+\frac{1}{(S-b)(S-c)}+\frac{1}{(S-a)(S-c)}\right)$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\times\frac{(S-c)+(S-a)+(S-b)}{(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\times\frac{3S-2S}{(S-a)(S-b)(S-c)}=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\times\frac{S}{(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\Delta ABC^2\times\frac{1}{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\Delta ABC^2\times\frac{1}{\Delta ABC^2}=1$$

$$\therefore r_3=\frac{1-r_1r_2}{r_1+r_2}$$

有了上述結果，我們得到下列結論：(令判別式$D=r_3=\dfrac{1-r_1r_2}{r_1+r_2}$)

1. 若$D>1$，$0<r_1<1, 0<r_2<1$，r_1,r_2爲有理數，則ΔABC爲海倫鈍角三角形；
2. 若$D=1$，$0<r_1<1, 0<r_2<1$，r_1,r_2爲有理數，則ΔABC爲海倫直角三角形；
3. 若$0<D<1$，$0<r_1<1, 0<r_2<1$，r_1,r_2爲有理數，則ΔABC爲海倫銳角三角形。

運用上述的結果，經運算得到數據如下：

項目 / 舉例	r_1	r_2	D	三邊長 (化簡)	面積	類型
例一	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	10,10,12 (5,5,6)	48	銳角三角形
例二	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	15,20,25 (3,4,5)	150	直角三角形
例三	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	30,30,48 (5,5,8)	432	鈍角三角形

成員二：海倫等差三角形

引理六： 已知ΔABC爲海倫等差三角形，其等差中項爲$\overline{AB}$，由$\angle A, \angle B$所形成之子直角三角形的兩股比值爲r_1, r_2 (r_1, r_2爲有理數)，則$r_1 r_2 = \dfrac{1}{3}$。

證明：$\because \Delta ABC$爲海倫等差三角形，$\therefore 2c = a + b$

由定理二知$a : b : c = r_1\left(1 + r_2^{\,2}\right) : r_2\left(1 + r_1^{\,2}\right) : (r_1 + r_2)(1 - r_1 r_2)$代入$2c = a + b$

得$2(r_1 + r_2)(1 - r_1 r_2) = r_1\left(1 + r_2^{\,2}\right) + r_2\left(1 + r_1^{\,2}\right)$

$\Rightarrow 2(r_1 + r_2) - 2r_1 r_2(r_1 + r_2) = r_1\left(1 + r_2^{\,2}\right) + r_2\left(1 + r_1^{\,2}\right)$（乘開）得

$\Rightarrow 2r_1 + 2r_2 - 2r_1^{\,2} r_2 - 2r_1 r_2^{\,2} = r_1 + r_2 + r_1^{\,2} r_2 + r_1 r_2^{\,2}$（移項）得

$\Rightarrow r_1 + r_2 = 3r_1^{\,2} r_2 + 3r_1 r_2^{\,2}$（提公因式）得

$\Rightarrow r_1 + r_2 = 3r_1 r_2(r_1 + r_2)$（兩邊同除$r_1 + r_2$）得

$\Rightarrow r_1 r_2 = \dfrac{1}{3}$

引理七： 已知ΔABC爲海倫三角形，其$\angle A, \angle B$所形成之子直角三角形的兩股比值分別爲r_1, r_2 (r_1, r_2爲有理數)，若$r_1 r_2 = \dfrac{1}{3}$，則ΔABC爲海倫等差三角形，其等差中項爲$\overline{AB}$。

證明：由引理六之證明反推即可得證。

結合引理六、引理七，可得出下列定理：

定理三： 已知ΔABC爲海倫等差三角形，則ΔABC爲海倫等差三角形的充要條件爲，$r_1 r_2 = \dfrac{1}{3}$，r_1, r_2爲有理數，r_1, r_2的範圍爲$0 < r_1 < 1, 0 < r_2 < 1$或$0 < r_1 < 1, r_2 > 1, 0 < r_1 r_2 < 1$或$0 < r_1 < 1, r_2 = 1$。

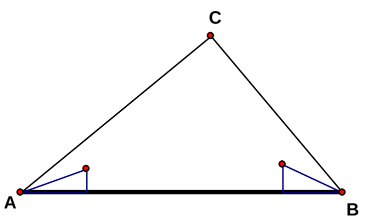
定理四： 已知ΔABC爲海倫等差三角形，則其三邊比

$$\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = a : b : c = r_1 + \frac{1}{9r_1} : \frac{r_1}{3} + \frac{1}{3r_1} : \frac{2r_1}{3} + \frac{2}{9r_1}$$

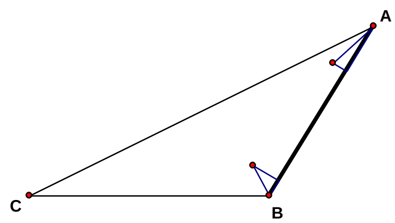
，其中$0 < r_1 < 1$，r_1爲有理數

證明：由定理二知$a : b : c = r_1\left(1 + r_2^{\,2}\right) : r_2\left(1 + r_1^{\,2}\right) : (r_1 + r_2)(1 - r_1 r_2)$

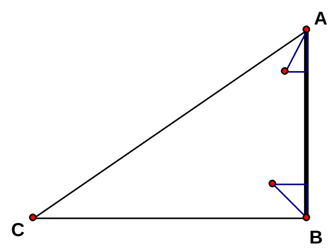
又由定理三知$r_1 r_2 = \dfrac{1}{3}$，代入上式可化簡得$a : b : c = r_1 + \dfrac{1}{9r_1} : \dfrac{r_1}{3} + \dfrac{1}{3r_1} : \dfrac{2r_1}{3} + \dfrac{2}{9r_1}$



(圖十三)



(圖十四)



(圖十五)

討論： 在海倫等差ΔABC中，我們規定$\overline{AB}$爲等差中項（而不取$\overline{BC},\overline{AC}$），此爲合理的，如圖十三、十四、十五，若粗線的部分爲等差中項時，我們取其粗線的兩端爲A,B即可。

雖然上述定理可幫助我們順利得到所有的海倫等差三角形，可惜的是，當我們給定一海倫等差三角形的公差時，卻無法從此公式中得到我們所要的答案，因此我們發展出了一套海倫等差三角形的遞迴演算法，以解決這個問題，敘述如下：

令ΔABC其三邊長爲a,b,c，得其面積公式爲$A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$，若$\Delta ABC$爲海倫等差三角形，其三邊長可轉換爲$a-d,\quad a,\quad a+d$，代入面積公式可得面積爲

$$A=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a+2d}{2}\right)\left(\frac{a-2d}{2}\right)}=\frac{a}{4}\sqrt{3(a+2d)(a-2d)}\cdots\cdots(*)$$

$\because A$爲正整數，$\therefore a$爲偶數，令$a=2x$代入(*)可得

$$A=\frac{2x}{4}\sqrt{3(2x+2d)(2x-2d)}=x\sqrt{3(x+d)(x-d)}$$

$\because A$爲正整數，故可令$(x+d)(x-d)=3y^2$，化簡可得$x^2-3y^2=d^2$。

因此我們可將三邊長爲等差數列的海倫三角形，利用不定方程$x^2-3y^2=d^2$求解。

引理八： 已知海倫等差三角形，其等差中項爲a，公差爲d，若$x^2-3y^2=d^2$之x解爲$x_1,x_2,\ldots,x_k$，則a可爲$2x_1,2x_2,\ldots,2x_k$

底下由$d=1$開始，計算不定方程$x^2-3y^2=d^2$的解：

	$d=1$				
	x	y	$a-d$	a	$a+d$
x_1	2	1	3	4	5
x_2	7	4	13	14	15
x_3	26	15	51	52	53
x_4	97	56	193	194	195
x_5	362	209	723	724	725
x_6	1351	780	2701	2702	2703

$x_3=4x_2-x_1=4\times 7-2=26$

$x_4=4x_3-x_2=4\times 26-7=97\ \ldots\ldots$

形成一串遞迴子數列

	$d=2$				
	x	y	$a-d$	a	$a+d$
x_1	4	2	6	8	10
x_2	14	8	26	28	30
x_3	52	30	102	104	106
x_4	194	112	386	388	390
x_5	724	418	1446	1448	1450
x_6	2702	1560	5402	5404	5406

$x_3=4x_2-x_1=4\times 14-4=52$

$x_4=4x_3-x_2=4\times 52-14=194\ \ldots\ldots$

形成一串遞迴子數列

	$d=11$				
	x	y	$a-d$	a	$a+d$
x_1	13	4	15	26	37
x_2	14	5	17	28	39
x_3	22	11	33	44	55
x_4	38	21	65	76	87
x_5	43	24	75	86	97
x_6	77	44	143	154	165
x_7	139	80	267	278	289
x_8	158	91	305	316	327
x_9	286	165	561	572	583
x_{10}	518	299	1025	1036	1047

① $x_7=4x_4-x_1=4\times38-13=139$

$x_{10}=4x_7-x_4=4\times139-38=518$ ……

形成一串遞迴子數列

② $x_8=4x_5-x_2=4\times43-14=158$ ……

形成一串遞迴子數列

③ $x_9=4x_6-x_3=4\times77-22=286$ ……

形成一串遞迴子數列

所以共形成三串遞迴子數列

	$d=13$				
	x	y	$a-d$	a	$a+d$
x_1	14	3	15	28	41
x_2	19	8	25	38	51
x_3	26	13	39	52	65
x_4	37	20	61	74	87
x_5	62	35	111	124	137
x_6	91	52	169	182	195
x_7	134	77	255	268	281
x_8	229	132	445	458	471
x_9	338	195	663	676	689
x_{10}	499	288	985	998	1011

① $x_7=4x_4-x_1=4\times37-14=134$

$x_{10}=4x_7-x_4=4\times134-37=499$ ……

形成一串遞迴子數列

② $x_8=4x_5-x_2=4\times62-19=229$ ……

形成一串遞迴子數列

③ $x_9=4x_6-x_3=4\times91-26=338$ ……

形成一串遞迴子數列

所以共形成三串遞迴子數列

	$d=11\times13=143$				
	x	y	$a-d$	a	$a+d$
x_1	146	17	149	292	435
x_2	151	28	159	302	445
x_3	154	33	165	308	451
x_4	* 169	52	195	338	481
x_5	+ 182	65	221	364	507
x_6	- 209	88	275	418	561
x_7	# 218	95	293	436	579
x_8	% 241	112	339	482	625
x_9	◦ 286	143	429	572	715
x_{10}	343	180	543	686	829
x_{11}	386	207	629	772	915
x_{12}	407	220	671	814	957
x_{13}	* 494	273	845	988	1131
x_{14}	+ 559	312	975	1118	1261
x_{15}	- 682	385	1221	1364	1507
x_{16}	# 721	408	1299	1442	1585
x_{17}	% 818	465	1493	1636	1779
x_{18}	◦ 1001	572	1859	2002	2145
x_{19}	1226	703	2309	2452	2595
x_{20}	1393	800	2643	2786	2929
x_{21}	1474	847	2805	2948	3091
x_{22}	* 1807	1040	3471	3614	3757
x_{23}	+ 2054	1183	3965	4108	4251
x_{24}	- 2519	1452	4895	5038	5181
x_{25}	# 2666	1537	5189	5332	5475
x_{26}	% 3031	1748	5919	6062	6205
x_{27}	◦ 3718	2145	7293	7436	7579
x_{28}	4561	2632	8979	9122	9265

① $x_{19}=4x_{10}-x_1=4\times343-146=1126$

$x_{28}=4x_{19}-x_{10}=4\times1126-343=4561$ ……

形成一串遞迴子數列

② $x_{20}=4x_{11}-x_2=4\times386-151=1393$ ……

形成一串遞迴子數列

③ $x_{21}=4x_{12}-x_3=4\times407-154=1474$ ……

形成一串遞迴子數列

④ $x_{22}=4x_{13}-x_4=4\times494-169=1807$ ……

形成一串遞迴子數列

⑤ $x_{23}=4x_{14}-x_5=4\times559-182=2054$ ……

形成一串遞迴子數列

⑥ $x_{24}=4x_{15}-x_6=4\times682-209=2519$ ……

形成一串遞迴子數列

⑦ $x_{25}=4x_{16}-x_7=4\times721-218=2666$ ……

形成一串遞迴子數列

⑧ $x_{26}=4x_{17}-x_8=4\times818-241=3031$ ……

形成一串遞迴子數列

⑨ $x_{27}=4x_{18}-x_9=4\times1001-286=3718$ ……

形成一串遞迴子數列

所以共形成九串遞迴子數列

由上幾個例子我們發現：$x^2-3y^2=d^2$的解滿足一個遞迴關係：『$x_{k+2}=4x_{k+1}-x_k$』，且根據不同的d，形成一串或數串的遞迴子數列，詳細的內容請參閱數論書籍不定方程這一章，由於理論太深奧，超出國中所能理解的範圍，故在此不再詳加研究，只將我們觀察結果寫成如下：

1. 若$d^2=1$，則$x^2-3y^2=d^2$的解，形成一串遞迴子數列；
2. 若d^2為一質數p的$2n$次方，且$p=12t\pm1$的型態，則$x^2-3y^2=d^2$的解，形成$2n+1$串(指數加1)遞迴子數列；如$x^2-3y^2=11^2$、$x^2-3y^2=11^4$，分別形成三串與五串的遞迴子數列。
3. 若d^2為一質數p的$2n$次方，且$p\neq12t\pm1$的型態，則$x^2-3y^2=d^2$的解，形成一串遞迴子數列；如$x^2-3y^2=2^2$、$x^2-3y^2=2^4$均形成一串遞迴子數列。
4. 若d^2為多個質數的偶次方相乘時，則其$x^2-3y^2=d^2$的解所形成的遞迴子數列個數，為個別質數的偶次方所形成的遞迴串列數相乘。

   例：$x^2-3y^2=143^2=11^2\times13^2$

   而$x^2-3y^2=11^2$形成三串遞迴子數列；$x^2-3y^2=13^2$形成三串遞迴子數列

   得$x^2-3y^2=143^2=11^2\times13^2$形成九串遞迴子數列。

因此若$x^2-3y^2=d^2$，知其形成n串的遞迴子數列，則其遞迴可以下式表示：

$$x_{i+2n}=4x_{i+n}-x_i\text{，其中}1\le i\le n$$

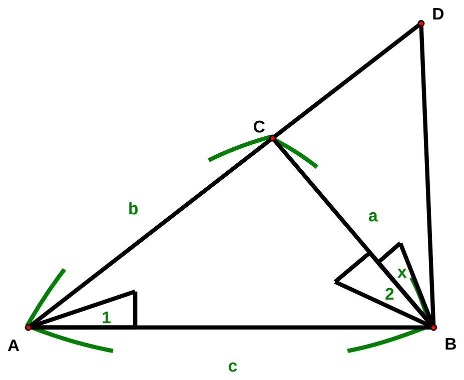
綜合上述所得的結果，得到定理如下：

定理五： 已知海倫等差三角形，其等差中項為a，公差為d，而$x^2-3y^2=d^2$形成n串子數列，則其三邊長可用$(2x_1-d,2x_1,2x_1+d)$、$(2x_2-d,2x_2,2x_2+d)$、…、$(2x_{k+2}-d,2x_{k+2},2x_{k+2}+d)$表之，其中$x_1,x_2,\dots,x_{k+2}$滿足$x^2-3y^2=d^2$的方程式，而且$x_{i+2n}=4x_{i+n}-x_i$，其中$1\le i\le n$

成員三：海倫倍角三角形

任給定一${}_1\Delta_n$之海倫三角形，如何由其推得一${}_1\Delta_{n+1}$之海倫三角形，此為我們研究此部分的基礎，如能找出方法使其成立，我們將可由${}_1\Delta_1$之任一三角形的三邊比，遞推得出${}_1\Delta_n$之三角形的三邊比。針對這個主題，導出下列幾個引理：

引理九： 給定海倫 ΔABC 的三邊長 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$，在 $\overrightarrow{AC}$ 上取一點 D，使 $\angle CBD=\angle A$，則 ΔABD 爲海倫三角形，同時其三邊比 $\overline{BD}:\overline{AD}:\overline{AB}=ab:bc:c^2-a^2$



(圖十六)

證明：1. 令 $\angle A$ 之子直角三角形兩股比值爲 r_1，$\angle CBA$ 之子直角三角形兩股比值爲 r_2，$\angle CBD$ 之子直角三角形兩股比值爲 r_x，

$\because \Delta ABC$ 爲海倫三角形，由定理二知 r_1, r_2 爲有理數

$\because \angle CBD=\angle A$，$\therefore r_x=r_1$，

由預備定理二知 $\angle ABD$ 之子直角三角形兩股比值爲 $r_{2+x}=r_{2+1}=\dfrac{r_1+r_2}{1-r_1r_2}$ 爲有理數

故 ΔABD 爲海倫三角形

2. $\because \Delta BDC \sim \Delta ADB$，$\therefore \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{a}{c}$

故 $\overline{BD}^2=\overline{CD}\times\overline{AD}=\overline{CD}\times\left(b+\overline{CD}\right)=b\overline{CD}+\overline{CD}^2$ ……①

且 $c\overline{CD}=a\overline{BD} \Rightarrow c^2\overline{CD}^2=a^2\overline{BD}^2$

將①式等式兩邊同乘 c^2 得

$c^2\overline{BD}^2=bc^2\overline{CD}+c^2\overline{CD}^2$

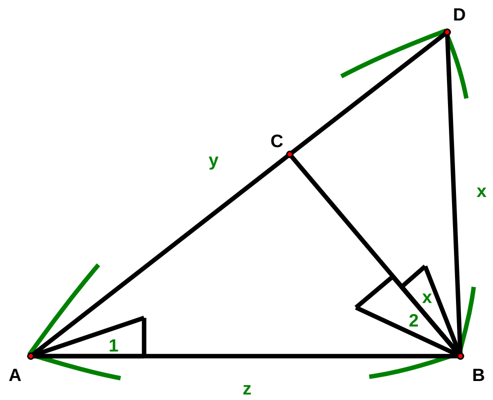
$\Rightarrow c^2\overline{BD}^2=abc\overline{BD}+a^2\overline{BD}^2 \Rightarrow c^2\overline{BD}=abc+a^2\overline{BD} \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{abc}{c^2-a^2}$

$\overline{CD}=\dfrac{a}{c}\overline{BD}=\dfrac{a}{c}\times\dfrac{abc}{c^2-a^2}=\dfrac{a^2b}{c^2-a^2}$

又 $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}$，$\therefore \overline{AD}=b+\dfrac{a^2b}{c^2-a^2}=\dfrac{bc^2-a^2b+a^2b}{c^2-a^2}=\dfrac{bc^2}{c^2-a^2}$

故 $\overline{BD}:\overline{AD}:\overline{AB}=\dfrac{abc}{c^2-a^2}:\dfrac{bc^2}{c^2-a^2}:c=ab:bc:c^2-a^2$

引理十： 給定海倫ΔABD的三邊長$\overline{BD}=x,\overline{AD}=y,\overline{AB}=z$，在$\overline{AD}$上取一點$C$，使$\angle DBC=\angle A$，則$\Delta ABC$爲海倫三角形，且三邊長比$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=xz:y^2-x^2:yz$



(圖十七)

證明：1. 令$\angle A$之子直角三角形兩股比值爲r_1，$\angle ABC$之子直角三角形兩股比值爲r_2，$\angle CBD$之子直角三角形兩股比值爲r_x，$\angle ABD$之子直角三角形兩股比值爲r_{2+x}，

$\because \Delta ABD$爲海倫三角形，$\therefore r_1,r_{2+x}$爲有理數

$\because \angle DBC=\angle A$，$\therefore r_x=r_1$，由預備定理二知$r_{2+x}=r_{2+1}=\dfrac{r_1+r_2}{1-r_1r_2}\Rightarrow r_2=\dfrac{r_{2+x}-r_1}{1+r_1r_{2+x}}$...(*)

$\because r_1,r_{2+x}$爲有理數代入(*)得r_2爲有理數，

由r_1,r_2爲有理數，故得ΔABC爲海倫三角形

2. $\because \Delta BDC\sim\Delta ADB$，$\therefore \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

即$\dfrac{\overline{CD}}{x}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{\overline{BC}}{z}$

$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{xz}{y}$

$\Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{x^2}{y}$

又$\overline{AC}=\overline{AD}-\overline{CD}$，$\therefore \overline{AC}=y-\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{y^2-x^2}{y}$

故$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\dfrac{xz}{y}:\dfrac{y^2-x^2}{y}:z=xz:y^2-x^2:yz$

今利用引理九中的海倫ΔABC，令其兩內角$\angle A=\angle B$，即得${}_1\Delta_1$，同時可得ΔABD爲${}_1\Delta_2$之海倫三角形。反過來說，取引理十中的海倫ΔABD，令其內角$\angle ABD=2\angle A$，即得${}_1\Delta_2$，同時可得出ΔABC爲${}_1\Delta_1$之海倫三角形。

由以上說明可知，${}_1\Delta_2$的任一三角形，均可由一${}_1\Delta_1$的三角形，透過引理九的關係式而得，如此遞推下去可得：${}_1\Delta_1 \to {}_1\Delta_2 \to {}_1\Delta_3 \to \cdots \to {}_1\Delta_n$，反過來說，${}_1\Delta_n$的任一三角形，透過引理十可推得${}_1\Delta_{n-1}$的三角形，如此遞推下去可得${}_1\Delta_n \to {}_1\Delta_{n-1} \to {}_1\Delta_{n-2} \to \cdots \to {}_1\Delta_2 \to {}_1\Delta_1$。

今將定理二令$r_1 = r_2$得${}_1\Delta_1$中的三角形三邊比爲$r_1(1+r_1^{\ 2}) : r_1(1+r_1^{\ 2}) : 2r_1(1-r_1^{\ 2})$，將此式結合前面引理九、引理十得出如下定理：

定理六： 令${}_1\Delta_1$的三邊爲a_1,b_1,c_1，${}_1\Delta_2$的三邊爲a_2,b_2,c_2，……，則${}_1\Delta_n$的三邊爲a_n,b_n,c_n，

則$a_n : b_n : c_n = a_{n-1}b_{n-1} : b_{n-1}c_{n-1} : c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2$

其中$a_1 : b_1 : c_1 = r_1(1+r_1^{\ 2}) : r_1(1+r_1^{\ 2}) : 2r_1(1-r_1^{\ 2})$

r_1爲有理數，$0 < r_1 < 1$，n爲正整數，$n \ge 2$

接下來我們要探討如何由${}_1\Delta_1$求得${}_m\Delta_n$，底下先舉一個例子：

例：如何由${}_1\Delta_1$求得${}_5\Delta_{17}$

解：1.要求得${}_5\Delta_{17}$，可利用引理九先求得${}_5\Delta_{12}$

2.要求得${}_5\Delta_{12}$，可利用引理九先求得${}_5\Delta_7$

3.要求得${}_5\Delta_7$，可利用引理九先求得${}_5\Delta_2$

4.將${}_5\Delta_2$作個翻轉得${}_2\Delta_5$

5.要求得${}_2\Delta_5$，可利用引理九先求得${}_2\Delta_3$

6.要求得${}_2\Delta_3$，可利用引理九先求得${}_2\Delta_1$

7.將${}_2\Delta_1$作個翻轉得${}_1\Delta_2$

8.要求得${}_1\Delta_2$，可利用引理九先求得${}_1\Delta_1$

綜合上述 8 個步驟可知，要從${}_1\Delta_1$求得${}_5\Delta_{17}$時，需要 3 條形成鏈，圖示如下：

$${}_1\Delta_1 \to {}_1\Delta_2 \quad \text{第一條}$$
$$\downarrow$$
$${}_2\Delta_1 \to {}_2\Delta_3 \to {}_2\Delta_5 \quad \text{第二條}$$
$$\downarrow$$
$${}_5\Delta_2 \to {}_5\Delta_7 \to {}_5\Delta_{12} \to {}_5\Delta_{17} \quad \text{第三條}$$

在此我們假設${}_1\Delta_1$之三邊爲a_1,b_1,c_1，${}_5\Delta_{17}$之三邊爲a,b,c

${}_1\Delta_2$之三邊爲a_2,b_2,c_2

${}_2\Delta_1$之三邊為 a_3,b_3,c_3

${}_2\Delta_3$之三邊為 a_4,b_4,c_4

${}_2\Delta_5$之三邊為 a_5,b_5,c_5

${}_5\Delta_2$之三邊為 a_6,b_6,c_6

${}_5\Delta_7$之三邊為 a_7,b_7,c_7

${}_5\Delta_{12}$之三邊為 a_8,b_8,c_8

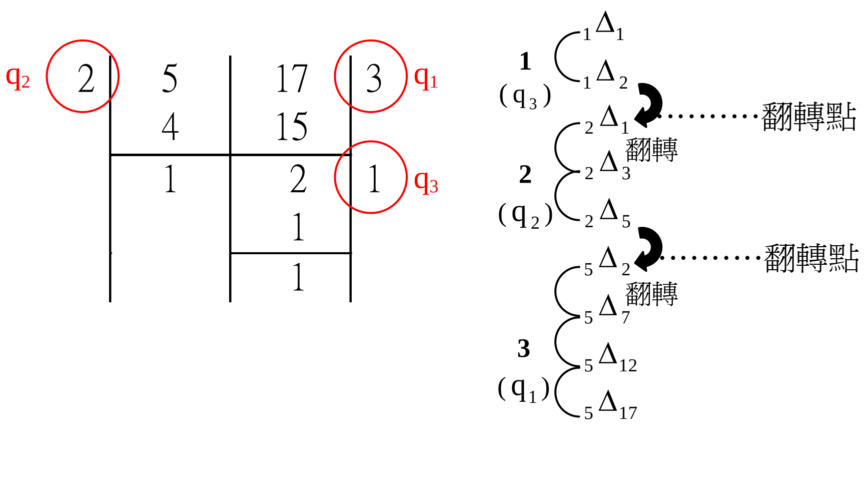
並利用圖示的 3 條形成鏈，可得出各三角形之邊長比例關係如下：

$$a_2:b_2:c_2=a_1b_1:b_1c_1:c_1^2-a_1^2$$
$$a_3:b_3:c_3=b_2:a_2:c_2 \qquad \text{........翻轉點}$$
$$a_4:b_4:c_4=a_3b_3:b_3c_3:c_3^2-a_3^2$$
$$a_5:b_5:c_5=a_4b_4:b_4c_4:c_4^2-a_4^2$$
$$a_6:b_6:c_6=b_5:a_5:c_5 \qquad \text{........翻轉點}$$
$$a_7:b_7:c_7=a_6b_6:b_6c_6:c_6^2-a_6^2$$
$$a_8:b_8:c_8=a_7b_7:b_7c_7:c_7^2-a_7^2$$
$$a:b:c=a_8b_8:b_8c_8:c_8^2-a_8^2$$

寫成遞迴式可得

$$\begin{cases} a:b:c=a_8b_8:b_8c_8:c_8^2-a_8^2 \\ a_n:b_n:c_n=a_{n-1}b_{n-1}:b_{n-1}c_{n-1}:c_{n-1}^2-a_{n-1}^2 \quad \text{其中}n\text{為正整數，}2\le n\le 8, n\ne 3,6\text{(翻轉點)} \\ a_3:b_3:c_3=b_2:a_2:c_2 \\ a_6:b_6:c_6=b_5:a_5:c_5 \end{cases}$$

在此如要知道於哪一步需翻轉、共有幾條形成鏈，以及形成鏈上各有幾個三角形時，我們可透過輾轉相除法得出相關的資訊，今以${}_1\Delta_1$生成${}_5\Delta_{17}$為例：

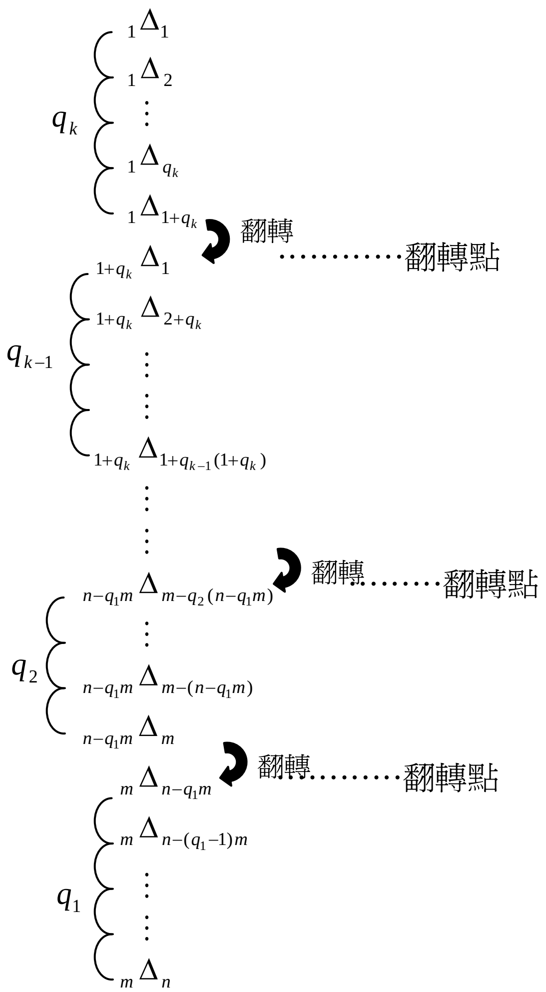


利用上式可發現，在${}_1\Delta_1$生成${}_5\Delta_{17}$過程中，於第 3 步與第 6 步出現 2 個翻轉點，而翻轉

點的位置 3 可視爲$2+q_3(=2+1)$；6 可視爲$3+q_3+q_2(=3+1+2)$，同時共形成 3 條形成鏈(k)，扣掉${}_5\Delta_{17}$共可得出 8 個三角形，其中 8 可視爲三個商數和($q_1+q_2+q_3$)加上兩個翻轉點(k-1)，即$8=(3+2+1)+2$。

在此我們將其推廣到一般式，由${}_1\Delta_1$生成${}_m\Delta_n$。底下我們透過$m,n(m<n)$之輾轉相除法，將其生成關係推演如下：

q_2	m	n	q_1
	r_1q_2	mq_1	
q_4	r_2	r_1	q_3
	r_3q_4	r_2q_3	
$\vdots$	r_4	r_3	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q_k	r_{k-2}	r_{k-3}	q_{k-1}
	q_k	$r_{k-2}q_{k-1}$	
	1	1	



由上式可知，在${}_1\Delta_1$生成${}_m\Delta_n$過程中，於第$2+q_k$步、$3+q_k+q_{k-1}$步、$4+q_k+q_{k-1}+q_{k-2}$步、$5+q_k+q_{k-1}+q_{k-2}+q_{k-3}$步、……、$k+q_k+q_{k-1}+......+q_3+q_2$步爲翻轉點，同時共有$k$條形成鏈，並且於所有形成鏈上扣除${}_m\Delta_n$共有$k-1+q_k+q_{k-1}+q_{k-2}+......+q_1$個三角形。

在此我們令${}_1\Delta_1$之三邊爲a_1,b_1,c_1 (海倫等腰三角形)

${}_1\Delta_2$之三邊爲a_2,b_2,c_2

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

${}_m\Delta_n$之三邊爲a,b,c

則可歸納得出定理如下：

定理七：已知m,n之輾轉相除法過程如圖所示，其中

$$n = mq_1 + r_1$$

$$m = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$r_{k-3} = r_{k-2} q_{k-1} + 1$$

$$r_{k-2} = 1 \times q_k + 1$$

q_2	m $r_1 q_2$	n mq_1	q_1
q_4	r_2 $r_3 q_4$	r_1 $r_2 q_3$	q_3
$\vdots$	r_4 $\vdots$ $\vdots$	r_3 $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
q_k	r_{k-2} q_k	r_{k-3} $r_{k-2} q_{k-1}$	q_{k-1}
	1	1	

令${}_m\Delta_n$之三邊為a,b,c，則三邊比

$$a:b:c = a_{k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i} \times b_{k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i} : b_{k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i} \times c_{k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i} : c^2_{k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i} - a^2_{k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i}$$

且$a_n : b_n : c_n = a_{n-1} b_{n-1} : b_{n-1} c_{n-1} : c_{n-1}^2 - a_{n-1}^2$

$$\text{其中}\begin{cases} 2 \le n \le k-1+\sum_{i=1}^{k} q_i, k\text{為形成鏈的個數}, k-1\text{為翻轉點的個數，} \\ n \ne 2+q_k, 3+q_k+q_{k-1}, 4+q_k+q_{k-1}+q_{k-2}, \ldots\ldots k+q_k+q_{k-1}+q_{k-2}+\ldots+q_2\,(\text{翻轉點}) \\ \text{而}a_{2+q_k} : b_{2+q_k} : c_{2+q_k} = b_{1+q_k} : a_{1+q_k} : c_{1+q_k} \\ a_{3+q_k+q_{k-1}} : b_{3+q_k+q_{k-1}} : c_{3+q_k+q_{k-1}} = b_{2+q_k+q_{k-1}} : a_{2+q_k+q_{k-1}} : c_{2+q_k+q_{k-1}} \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k+q_k+q_{k-1}+\ldots+q_2} : b_{k+q_k+q_{k-1}+\ldots+q_2} : c_{k+q_k+q_{k-1}+\ldots+q_2} = b_{k-1+q_k+q_{k-1}+\ldots+q_2} : a_{k-1+q_k+q_{k-1}+\ldots+q_2} : c_{k-1+q_k+q_{k-1}+\ldots+q_2} \\ a_1 : b_1 : c_1 = r_1(1+r_1^2) : r_1(1+r_1^2) : 2r_1(1-r_1^2) \end{cases}$$

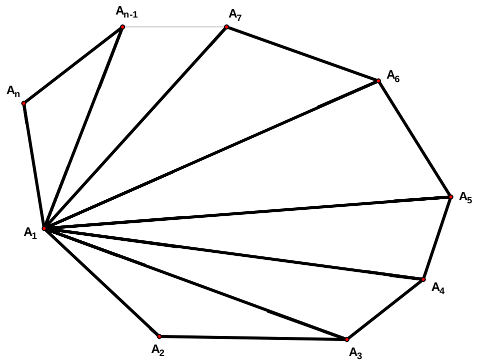
研究目的三：如何運用多個子直角三角形其兩股的比值，建構出第三代海倫家族（次完美海倫 *n* 邊形、完美海倫 *n* 邊形）的比例解。

成員一：次完美海倫 *n* 邊形

引理十一：次完美海倫 n 邊形，由正整數的對角形所分割出來的三角形，每一塊都是海倫三角形。

證明：由次完美海倫 n 邊形的定義知，所分割出來的三角形，其每一個邊長皆為正整數，代入海倫面積公式可得其面積形成$\sqrt{k}$的型態，k為正整數。且因所分割出來的三角形有 n-2 塊，因此可設其每一塊的面積為$\sqrt{k_1},\sqrt{k_2},\ldots,\sqrt{k_{n-2}}$，又次完美海倫 n 邊形，其面積為正整數，所以可得$\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}+\ldots+\sqrt{k_{n-2}}$為正整數，從而推得

$\sqrt{k_1},\sqrt{k_2},\ldots,\sqrt{k_{n-2}}$ 皆爲正整數，因此每一塊三角形均爲海倫三角形。



(圖十八)

引理十二：如圖十八，由 n-2 個海倫三角形所構成之 n 邊形，必爲次完美海倫 n 邊形。

證明：如圖，因 n-2 個海倫三角形其面積與邊長均爲正整數，故所構成之 n 邊形之面積與邊長亦爲正整數，同時其固定某一定點所形成之對角線均爲正整數，所以此 n 邊形爲次完美海倫 n 邊形。

由引理十一給定一個次完美海倫 n 邊形，固定一頂點利用對角線可將其分割成 n-2 個海倫三角形，反過來說，由引理十二知，給定 n-2 個海倫三角形，利用合併的方式可以得到依次完美海倫 n 邊形，綜合上述引理，得出定理八：

定理八：所有的次完美海倫 n 邊形，都可由 n-2 個海倫三角形所構成。

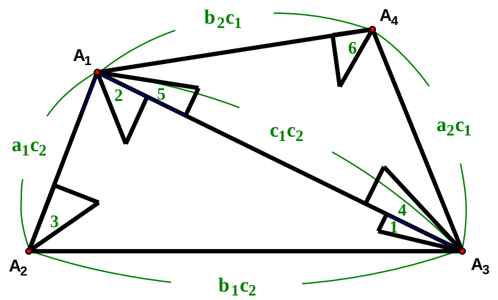
底下我們探討次完美海倫 n 邊形的邊長，先從簡單的四邊形開始：

一、四邊形：

引理十三：任取兩個海倫三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 、$\Delta A_1A_4A_3$ ，建構這兩個三角形其所有子直角三角形的兩股比值分別爲 r_1 , r_2 , ..., r_5 , r_6 。則次完美海倫四邊形的邊長比

$$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_1A_4}=r_1\left(1+r_2^{\;2}\right)\left(r_5+r_4\right)\left(1-r_5r_4\right):r_2\left(1+r_1^{\;2}\right)\left(r_5+r_4\right)\left(1-r_5r_4\right)$$
$$:r_5\left(1+r_4^{\;2}\right)\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right):r_4\left(1+r_5^{\;2}\right)\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$$

其中 $0<r_1r_2<1,\ 0<r_5r_4<1,\ 0<r_1r_4<1,\ 0<r_2r_5<1$ 且 $r_1>0,\ r_2>0,\ r_4>0,\ r_5>0$



(圖十九)

證明：令$\begin{cases}\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_1A_3}=a_1:b_1:c_1\\ \overline{A_3A_4}:\overline{A_1A_4}:\overline{A_1A_3}=a_2:b_2:c_2\end{cases}$ 利用連比得 $\begin{cases}a_1c_2:b_1c_2:c_1c_2\\ a_2c_1:b_2c_1:c_1c_2\end{cases}$

同時依**定理二**可知

$$a_1:b_1:c_1=r_1(1+r_2{}^2):r_2(1+r_1{}^2):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$$

$$a_2:b_2:c_2=r_5(1+r_4{}^2):r_4(1+r_5{}^2):(r_5+r_4)(1-r_5r_4)$$

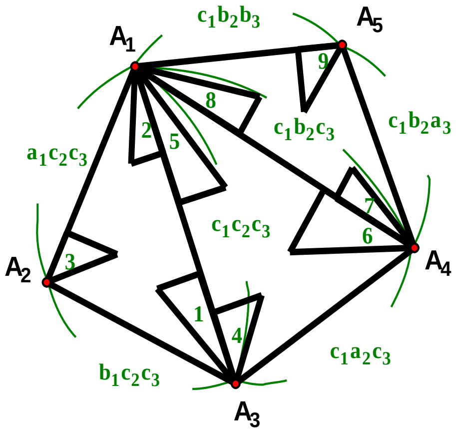
則 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_1A_4}=a_1c_2:b_1c_2:a_2c_1:b_2c_1$

$$=r_1(1+r_2{}^2)(r_5+r_4)(1-r_5r_4):r_2(1+r_1{}^2)(r_5+r_4)(1-r_5r_4)$$
$$:r_5(1+r_4{}^2)(r_1+r_2)(1-r_1r_2):r_4(1+r_5{}^2)(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$$

二、五邊形：

引理十四： 任取三個海倫三角形$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_1A_3A_4$、$\Delta A_1A_4A_5$(如圖二十)，建構這三個三角形其所有子直角三角形的兩股比值爲$r_1,r_2,\ldots,r_8,r_9$，則次完美海倫五邊形的邊長比$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_4A_5}:\overline{A_1A_5}=a_1c_2c_3:b_1c_2c_3:a_2c_1c_3:a_3b_2c_1:b_2b_3c_1$

其中$\begin{cases}a_1:b_1:c_1=r_1(1+r_2{}^2):r_2(1+r_1{}^2):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)\\ a_2:b_2:c_2=r_5(1+r_4{}^2):r_4(1+r_5{}^2):(r_5+r_4)(1-r_5r_4)\\ a_3:b_3:c_3=r_8(1+r_7{}^2):r_7(1+r_8{}^2):(r_8+r_7)(1-r_8r_7)\\ 0<r_1r_2<1,0<r_4r_5<1,0<r_7r_8<1\\ 0<r_{2+5+8}<1,0<r_1r_4<1,0<r_6r_7<1\end{cases}$



(圖二十)

證明：令$\begin{cases}\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_1A_3}=a_1:b_1:c_1\\ \overline{A_3A_4}:\overline{A_1A_4}:\overline{A_1A_3}=a_2:b_2:c_2\\ \overline{A_4A_5}:\overline{A_1A_5}:\overline{A_1A_4}=a_3:b_3:c_3\end{cases}$ 連比爲$\Rightarrow$ $\begin{cases}a_1c_2c_3:b_1c_2c_3:c_1c_2c_3\\ a_2c_1c_3:b_2c_1c_3:c_1c_2c_3\\ a_3b_2c_1:b_2b_3c_1:b_2c_1c_3\end{cases}$

則 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_4A_5}:\overline{A_1A_5}=a_1c_2c_3:b_1c_2c_3:a_2c_1c_3:a_3b_2c_1:b_2b_3c_1$

三、*n* 邊形：

依據引理十四、十五的方法，我們得到次完美海倫 n 邊形的邊長比如下：

定理九： 已知 $\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_1A_3A_4$、……、$\Delta A_1A_{n-1}A_n$，建構這 $n-2$ 個三角形其所有子直角三角形的兩股比值分別爲 $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_{3n-6}$，則次完美海倫 n 邊形的邊長比：

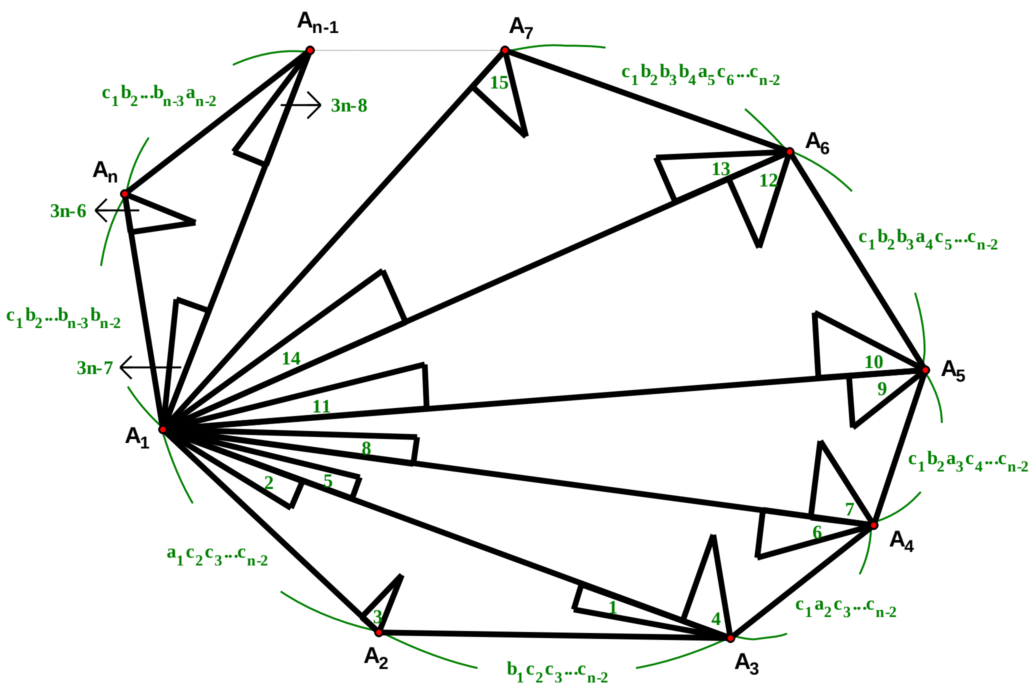
$$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_4A_5}:\overline{A_5A_6}:\ldots\ldots:\overline{A_1A_n}$$

$$=a_1\times\prod_{i=2}^{n-2}c_i : b_1\times\prod_{i=2}^{n-2}c_i : a_2c_1\times\prod_{i=3}^{n-2}c_i : a_3b_2c_1\times\prod_{i=4}^{n-2}c_i : a_4b_3b_2c_1\times\prod_{i=5}^{n-2}c_i:\ldots\ldots$$

$$:a_{n\text{-}3}b_{n\text{-}4}b_{n\text{-}5}\times\ldots\ldots\times b_2c_1c_{n-2} : a_{n\text{-}2}b_{n\text{-}3}b_{n\text{-}4}\times\ldots\ldots\times b_2c_1 : b_{n\text{-}2}b_{n\text{-}3}b_{n\text{-}4}\times\ldots\ldots\times b_2c_1$$

其中
$$\begin{aligned}
a_1:b_1:c_1 &= r_1(1+r_2^{\,2}) : r_2(1+r_1^{\,2}) : (r_1+r_2)(1-r_1r_2)\\
a_2:b_2:c_2 &= r_5(1+r_4^{\,2}) : r_4(1+r_5^{\,2}) : (r_5+r_4)(1-r_5r_4)\\
&\ \vdots\\
&\ \vdots\\
a_{n-2}:b_{n-2}:c_{n-2} &= r_{3n-7}(1+r_{3n-8}^{\,2}) : r_{3n-8}(1+r_{3n-7}^{\,2}) : (r_{3n-7}+r_{3n-8})(1-r_{3n-7}r_{3n-8})
\end{aligned}$$

且滿足 $\begin{cases} 0<r_1r_2<1,\ 0<r_4r_5<1,\ \ldots\ldots,\ 0<r_{3n\text{-}8}r_{3n\text{-}7}<1 \\ 0<r_1r_4<1,\ 0<r_6r_7<1,\ \ldots\ldots,\ 0<r_{3n\text{-}9}r_{3n\text{-}8}<1 \\ 0<r_{2+5+8+\ldots+(3n\text{-}7)}<1 \end{cases}$（如圖二十一）



(圖二十一)

成員二：完美海倫多邊形

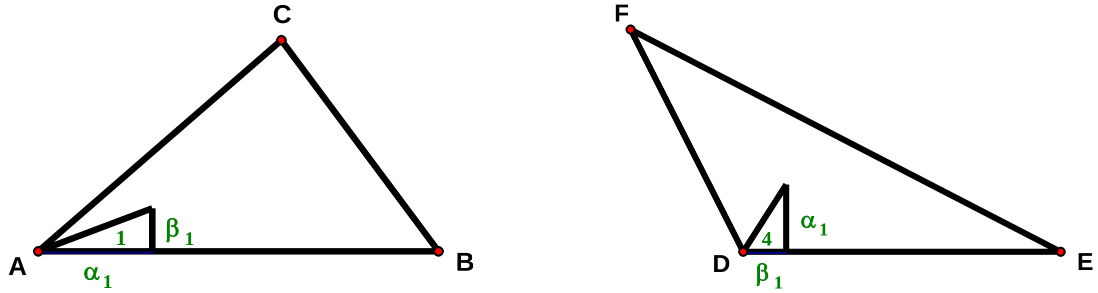
如何運用構造法，結合多個子直角三角形的兩股比值，在圓上造出完美海倫多邊形，底下我們分別對四邊形、五邊形、六邊形與 n 邊形，依序探討如下：

一、四邊形：

在進入構造法以前，先簡述幾個幾何已知的性質：

如圖二十二，在ΔABC與ΔDEF中，取$r_1=\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}, r_4=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$(即$r_1 \times r_4=1$)，則

$\angle CAB+\angle FDE=180°$

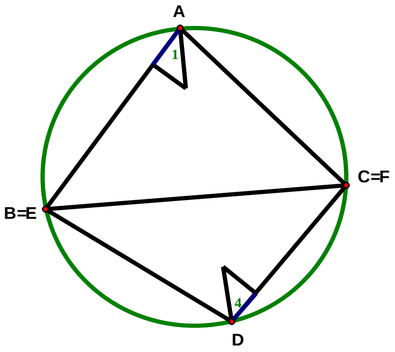


(圖二十二)

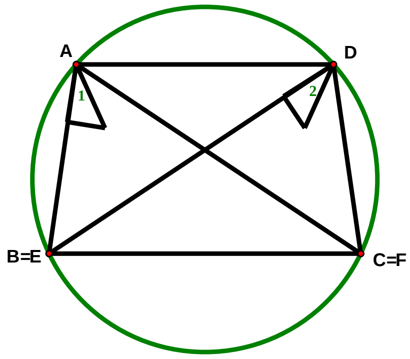
性質一：若取$r_1=\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}, r_4=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$，則四邊形 ABCD 四點共圓，如圖二十三。

性質二：在ΔABC與ΔDEF中，取$r_1=r_4$，則 ABCD 四點共圓，如圖二十四。

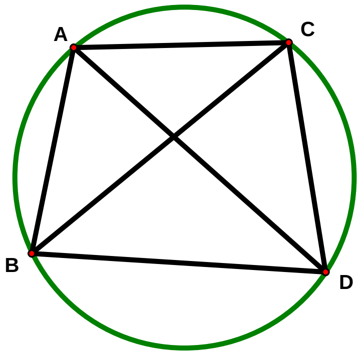
性質三：托勒密幾何性質（Ptolemy's theorem）：圓內接四邊形兩雙對邊乘積的和，等於兩條對角線的乘積$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AD}\times\overline{BC}$（如圖二十五）



(圖二十三)



(圖二十四)



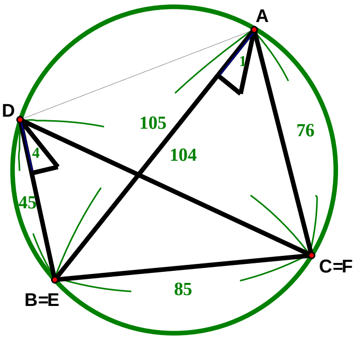
(圖二十五)

底下利用上面性質，並結合海倫多邊形之子直角三角形其兩股的比值必爲有理數的特性，採取構造法，造出完美海倫四邊形，其方法有二：

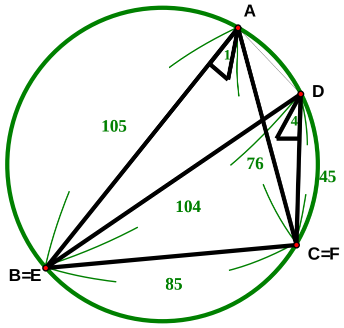
方法一：步驟 1.先取出兩個海倫三角形ΔABC與ΔDEF

2.令$r_1=r_4$(共圓)，且$\angle A$與$\angle D$的對邊長度相等

則利用兩種連接方式，即可構造出完美海倫四邊形，如圖二十六



$r_1 = r_4 = \frac{1}{2}$



(圖二十六)

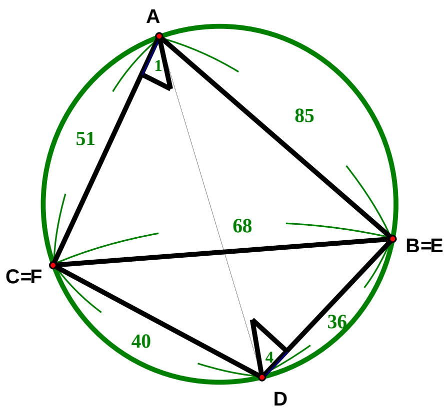
其中：1.圖二十六的部份，利用托勒密幾何性質，可求出$\overline{AD} = \frac{1500}{17}$，因此把圖形放大 17 倍，即可得到完美海倫多邊形。

2.圖二十六的部份，仿 1.的部份得$\overline{AD} = \frac{187}{5}$，此時只需放大 5 倍即可。

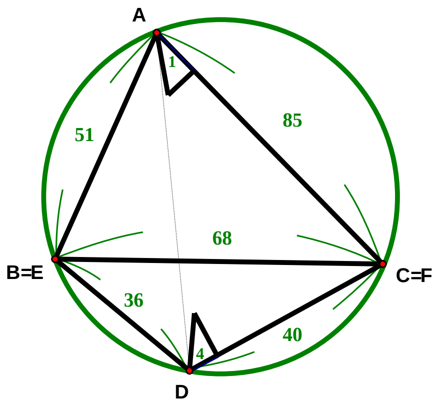
方法二：步驟 1.先取出兩個海倫三角形ΔABC與ΔDEF

2.令$r_1 \times r_4 = 1$(共圓)，且$\angle A$與$\angle D$的對邊長度相等

則利用兩種連接方式，即可構造出完美海倫四邊形，如圖二十七



$r_1 = \frac{1}{2}, r_4 = \frac{2}{1}, r_1 \times r_4 = 1$

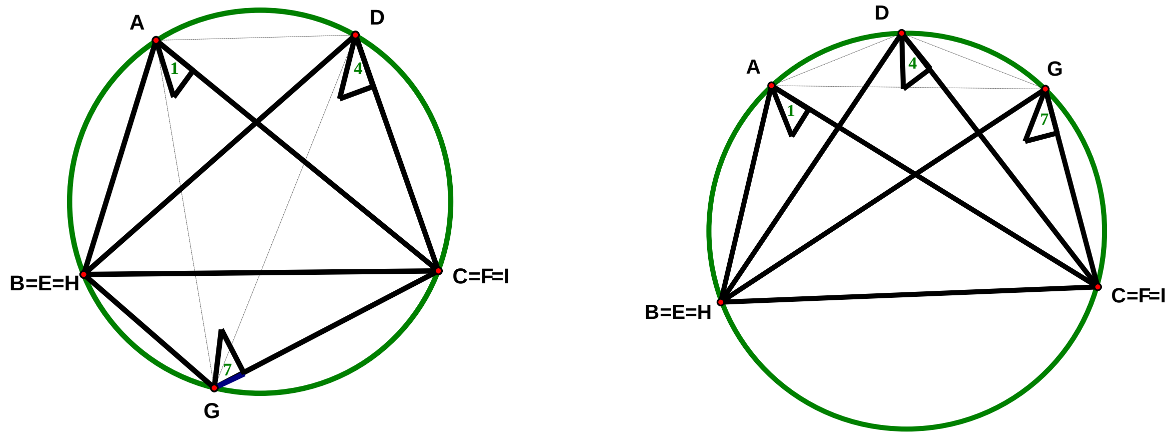


$r_1 = \frac{1}{2}, r_4 = \frac{2}{1}, r_1 \times r_4 = 1$

(圖二十七)

二、五邊形：

先取出三個海倫三角形$\Delta ABC, \Delta DEF, \Delta GHI$，則可取$\begin{cases} r_1 = r_4 = r_7(\text{共圓}) \\ \text{或} r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1(\text{共圓}) \end{cases}$任取一種，再利用不同的連接方式，即可建構出完美海倫五邊形。以下舉兩例，如圖二十八：



$r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1$　　　　$r_1 = r_4 = r_7$

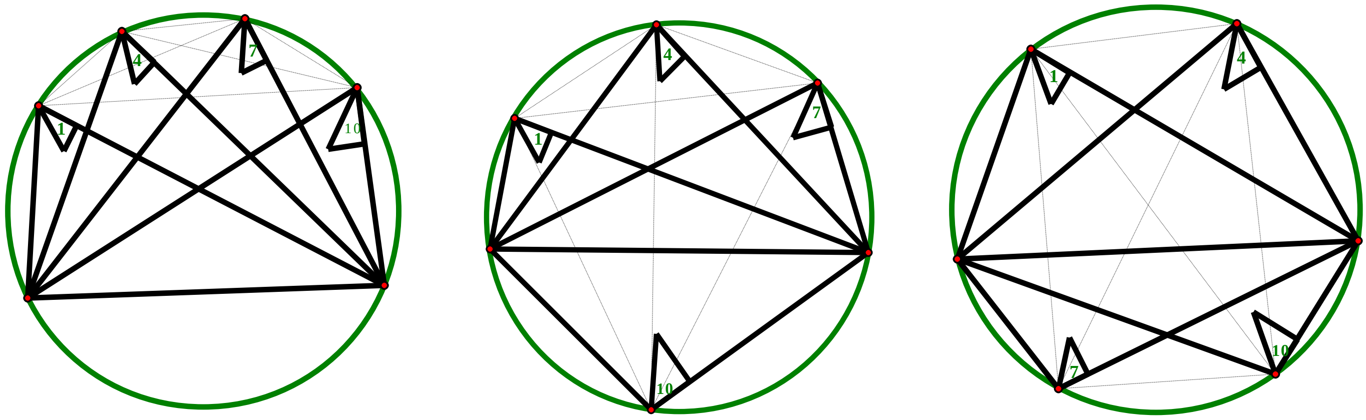
(圖二十八)

至於 $\overline{AD}$ 與 $\overline{DG}$ 都可用托勒密幾何性質求得。

三、六邊形：

仿五邊形的方式，取
$$\begin{cases} r_1 = r_4 = r_7 = r_{10}\text{(共圓)} \\ \text{或} r_1 = r_4 = r_7, r_1 \times r_{10} = 1\text{(共圓)} \\ \text{或} r_1 = r_4, r_7 = r_{10}, r_1 \times r_7 = 1\text{(共圓)} \end{cases}$$

任取一種，再利用不同的連接方式，即可建構出完美海倫六邊形。



$r_1 = r_4 = r_7 = r_{10}$　　　　$r_1 = r_4 = r_7, r_1 \times r_{10} = 1$　　　　$r_1 = r_4, r_7 = r_{10}, r_1 \times r_7 = 1$

(圖二十九)

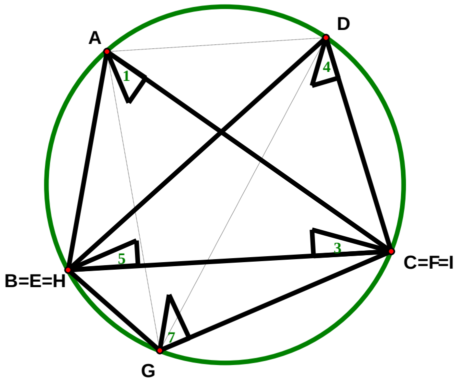
四、*n* 邊形：

取 *n-2* 個海倫三角形，當中有 *k* 個海倫三角形符合 $r_1 = r_2 = ... = r_k$，有 *j* 個海倫三角形符合 $r_{k+1} = r_{k+2} = ... = r_{k+j}$，其中 $r_1 \times r_{k+1} = 1$ 且 $k + j = n - 2$，用這兩組三角形做適當的連接方式，即可得到完美海倫 *n* 邊形。

至於其邊長的比例，需視海倫三角形的結合方式，故無法歸納出一個比例解的公式，適

用在每個圖形上。

最後，在上面很多圖形中，選取一個五邊形，來說明此五邊形（經放大後）爲何是完美海倫五邊形，其他圖形的證明同理可得。



(圖三十)

如圖三十，$\Delta ABC, \Delta DEF, \Delta GHI$ 是海倫三角形，且 $r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1$。

現說明 ABGCD 是完美海倫五邊形，說明如下：

1. 連結 $\overline{AD}, \overline{AG}, \overline{DG}$ 。
2. $\because r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1$，$\therefore$ABGCD 五點共圓。
3. $\because$ABCD 四點共圓，依托勒密性質 $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BD}$，又 $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{BD}$ 爲正整數，$\therefore$得出 $\overline{AD}$ 爲有理數。

   同理得 $\overline{AG}, \overline{DG}$ 爲有理數。
4. (1)$\because \Delta DEF(\Delta DBC)$ 爲海倫三角形，故 r_5 爲有理數。

   $\because$ABCD 四點共圓，$\therefore \angle DAC = \angle DBC = \frac{1}{2} CD$弧，又 $\angle 5 = \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{1}{2}\angle DAC$，從而 $r_{\frac{1}{2}\angle DAC}$ 爲有理數，又 r_1 爲有理數，得 $r_{1+\frac{1}{2}\angle DAC}$ 爲有理數。

   (2)$\because \Delta ABC$爲海倫三角形，故 r_3 爲有理數。

   $\because$ABCD 四點共圓，$\therefore \angle ADB = \angle ACB = \frac{1}{2}$AB弧，又 $\angle 3 = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ADB$，從而 $r_{\frac{1}{2}\angle ADB}$ 爲有理數。
5. 結合 $r_{1+\frac{1}{2}\angle DAC}, r_{\frac{1}{2}\angle ADB}$ 爲有理數，$\therefore \Delta ABD$爲海倫三角形。$\because \Delta ABD$、$\Delta DEF(\Delta DBC)$ 及

   $\Delta GHI(\Delta BGC)$ 爲海倫三角形，且 $\overline{AD}, \overline{AG}, \overline{DG}$ 爲有理數，經放大正整數倍後即可得出邊長、對角線與面積均是正整數的五邊形，故 ABGCD 是完美海倫五邊形。

陸、結論

本文的靈感，來自數學傳播中的一篇文章，透過從中所獲得的啓發，再配合國中所學的幾何來重新加以詮釋，賦予新的生命，推展出許多有趣的內容。

真的沒想到，只用角平分線的比例性質，再加上國中所學到的商高定理、相似三角形性質、海倫面積公式與內切圓半徑求法等幾何知識，創造出子直角三角形的理論，從而就揭開了海倫家族的神秘結構。欣喜之餘，我們反思，在探討一個數學題目的求解過程中，常常會受到傳統經驗和思想所侷限，而無法得到突破，然而，一但換個角度時，往往能得到意想不到的收穫，本文即是如此，期待將來有機會能做更進一步的研究，以發現海倫家族更多神奇的奧秘。

柒、參考資料

蔡聰明（民 92）。數學拾貝。三民書局。

盛立人、嚴鎮軍（民 90）。從勾股定理談起。九章出版社。

張澄清（民 85）。托勒密幾何定理的運用。凡異出版社。

王文甫、鄧仲仁、顏士傑、羅春光（民 91）。勾股數與張角長方形。數學傳播，101。

仁林文化（民 93）。國中數學課本第五冊。仁林出版社。

單墫、余紅兵（民 85）。不定方程。凡異出版社。

【評　語】　030402　海倫家族三代同堂大蒐祕

1. 研究主題趣味性相當高。

2. 討論的深入度也值得肯定。

3. 報告寫作可讀性相當好。