中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030401

<u>傑克密碼</u>

學校名稱：高雄市立龍華國民中學

作者：	指導老師：
國三 賴晉達	許建銘
國三 林宗佑	吳俊成
國三 葉芃瑜	
國三 鄭伃汝	

關鍵詞：<u>傑克密碼</u>　<u>傑克結構</u>　<u>正方形</u>

傑克密碼

摘要

「神奇的傑克」是上屆全國科展第二名作品，由於考慮其內容還有充實的空間，我們便決定以更有系統的討論觀點，來完成這份作品。我們的作圖方式是以傑克中心爲標準，完整討論傑克結構九種不同連法下，向傑克中心的異側做正方形時，面積發展的關係與性質。

由於以推理幾何驗證面積關係的過程，必須用到複雜的輔助線、且驗證步驟冗長，所以轉而運用「解析幾何」以簡化繁瑣的驗證程序。因爲解決了坐標設定的問題，才得以爲傑克結構開拓更大的研究空間。我們進一步以「解析幾何」討論向傑克中心同側做正方形時，九種不同連法下，圖形或面積發展的關係與性質。

我們以 $MB_{(i)}$ 、 $MT_{(i)}$ 、 $MC_{(i)}$ 、 $NB_{(i)}$ 、 $NT_{(i)}$ 、 $NC_{(i)}$ 、 $HB_{(i)}$ 、 $HT_{(i)}$ 、 $HC_{(i)}$ 表示九種不同連結情況下的第 i 層四邊形；$A[MB_{(i)}]$、$A[MT_{(i)}]$、$A[MC_{(i)}]$、$A[NB_{(i)}]$、$A[NT_{(i)}]$、$A[NC_{(i)}]$、$A[HB_{(i)}]$、$A[HT_{(i)}]$、$A[HC_{(i)}]$表示九種不同連結情況下的第 i 層四邊形面積，最後整理不同連接情況下，同一層四邊形間的各種面積關係，「從一粒沙看一世界」，窺探永恆、無盡的幾何之美。

傑克密碼

壹、研究動機

「神奇的傑克」是上屆全國科展得獎作品，由於考慮其內容還有充實的空間，所以在學長與老師的鼓勵下，承襲以「推理幾何」的方式，推證上屆作品尚未討論到的其他五種不同連接情況下之面積發展關係。由於以推理幾何驗證面積關係的過程，必須用到複雜的輔助線，且驗證步驟冗長，所以轉而考慮運用「解析幾何」，試圖簡化繁瑣的驗證過程，並期待爲傑克結構開拓更大的研究空間。

貳、研究目的

一、以更有系統的討論觀點，利用推理幾何完整補充與驗證「傑克結構」九個面積發展的重要定理。

二、另以解析幾何證明九個面積發展的重要定理，以更簡明的代數處理呈現推算過程，並強化論證過程與結果的可靠性。

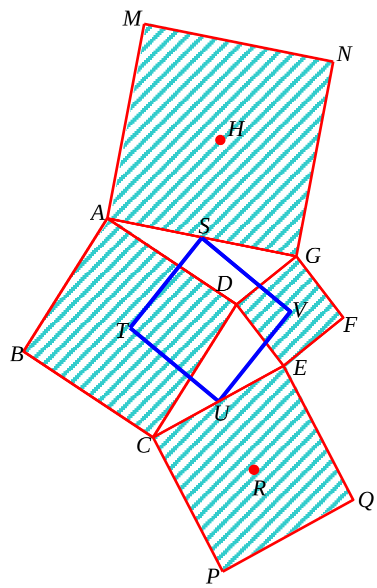
三、推導「傑克結構」所連成的每一層四邊形與基準正方形（Reference Square）之間的面積關係（傑克密碼），以及整理「傑克結構」九種不同連接情況下，同一層四邊形間的面積關係，「從一粒沙看一世界」，窺探永恆、無盡的幾何之美。

四、討論「傑克結構」九種不同連接情況下，向傑克中心同側做正方形時，圖形或面積發展的關係與性質。

參、名詞與符號界定

一、傑克結構、基準正方形與傑克中心：

如下圖（一）的四個斜線正方形的特殊組合，稱爲「傑克結構」(Jack Structure)，它是我們研究圖形的主要架構，而正方形 $STUV$（ S、U 分別爲 $\overline{AG}$ 與 $\overline{CE}$ 之中點，而 H、T、R、V 分別是四個正方形的中心點），我們稱之爲基準正方形（Reference Square），而 D 點，稱之爲「傑克中心」。（※爲了方便說明起見，以下我們將「傑克結構」上的正方形頂點與中心點皆固定使用此圖上所標示的名稱。）



二、$MB_{(i)}$ 與 $A[MB_{(i)}]$：

如下頁圖（二），先作出「傑克結構」的 $\overline{MB}$ ，並以對稱方式依序作出另三條線段 $\overline{PB}$ 、 $\overline{QF}$ 、 $\overline{NF}$ ，再以上述四條線段爲邊，各自在傑克中心的異側作一正方形，再將這四個正方形的中心點依序連成一個四邊形，則此四邊形稱之爲 $MB_{(1)}$ ，而其面積以 $A[MB_{(1)}]$ 表示。再以 $MB_{(1)}$ 的四邊爲邊，各自在傑克中心的異側作一正方形，將這四個正方形的中心點依序連成一個四邊形，則此四邊形稱之爲 $MB_{(2)}$ ，而其面積以 $A[MB_{(2)}]$ 表示。……，依此模式第 i 次作出的四邊形稱之爲 $MB_{(i)}$ ，而其面積以 $A[MB_{(i)}]$ 表示。

三、$MT_{(i)}$ 與 $A[MT_{(i)}]$：

如下圖（三），先作出「傑克結構」的 $\overline{MT}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

四、$MC_{(i)}$ 與 $A[MC_{(i)}]$：

如下圖（四），先作出「傑克結構」的 $\overline{MC}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

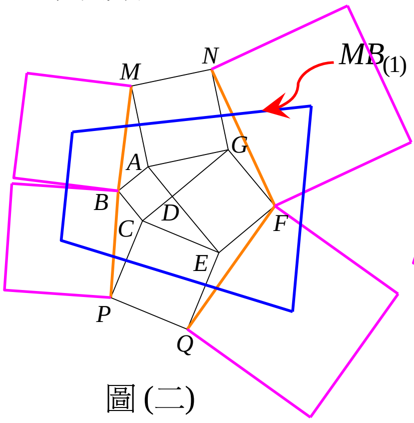


圖 (二)

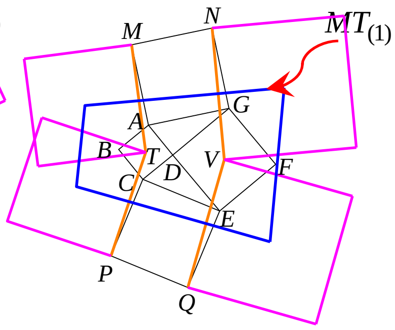


圖 (三)

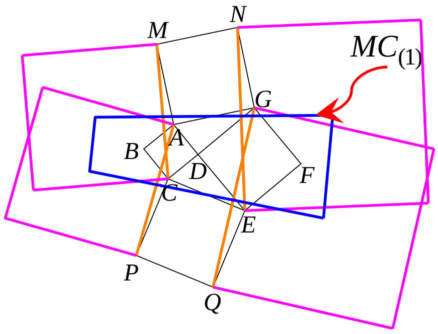


圖 (四)

五、$NB_{(i)}$ 與 $A[NB_{(i)}]$：

如下圖（五），先作出「傑克結構」的 $\overline{NB}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

六、$NT_{(i)}$ 與 $A[NT_{(i)}]$：

如下圖（六），先作出「傑克結構」的 $\overline{NT}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

七、$NC_{(i)}$ 與 $A[NC_{(i)}]$：

如下圖（七），先作出「傑克結構」的 $\overline{NC}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

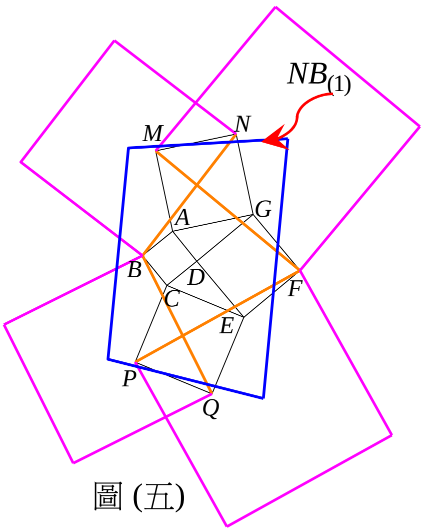


圖 (五)

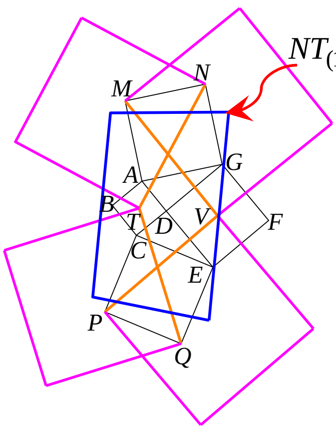


圖 (六)

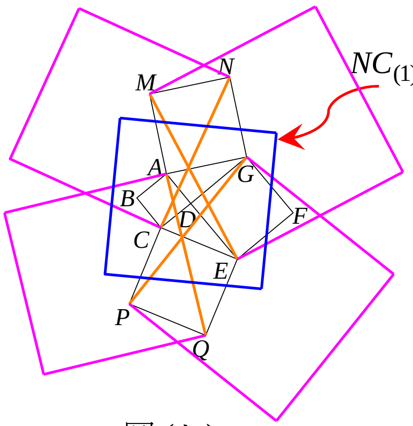


圖 (七)

八、$HB_{(i)}$ 與 $A[HB_{(i)}]$：

如下圖（八），先作出「傑克結構」的 $\overline{HB}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義

如同本項界定說明之二。

九、$HT_{(i)}$ 與 $A[HT_{(i)}]$：

如下圖（九），先作出「傑克結構」的 $\overline{HT}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

十、$HC_{(i)}$ 與 $A[HC_{(i)}]$：

如下圖（十），先作出「傑克結構」的 $\overline{HC}$ ，接下來的作圖程序與圖形、符號表示之意義如同本項界定說明之二。

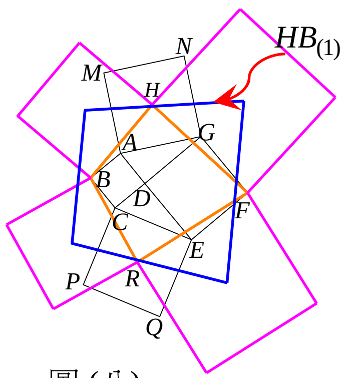


圖 (八)

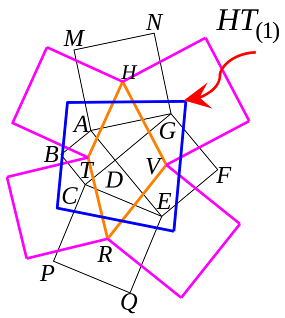


圖 (九)

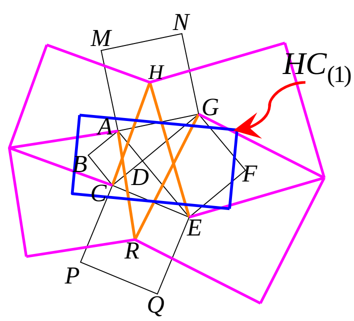
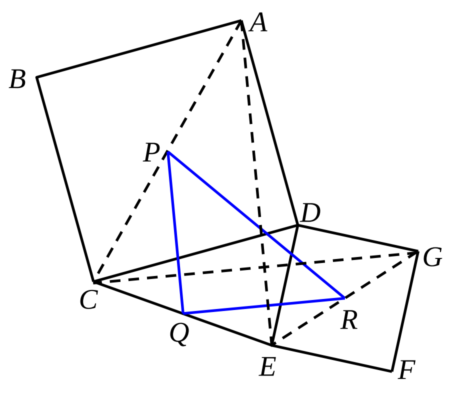
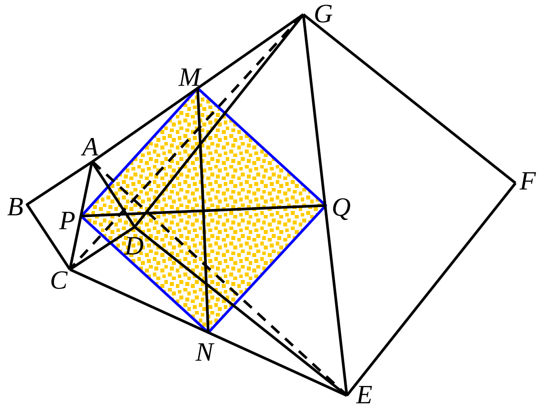


圖 (十)

肆、預備定理

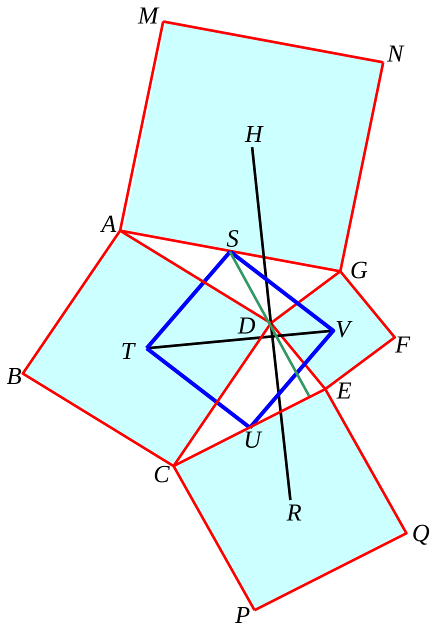
【引理 1】P 、R 分別爲正方形 $ABCD$ 、$DEFG$ 的中心點，Q 爲 $\overline{CE}$ 的中點，則 ΔPQR 爲等腰直角三角形。



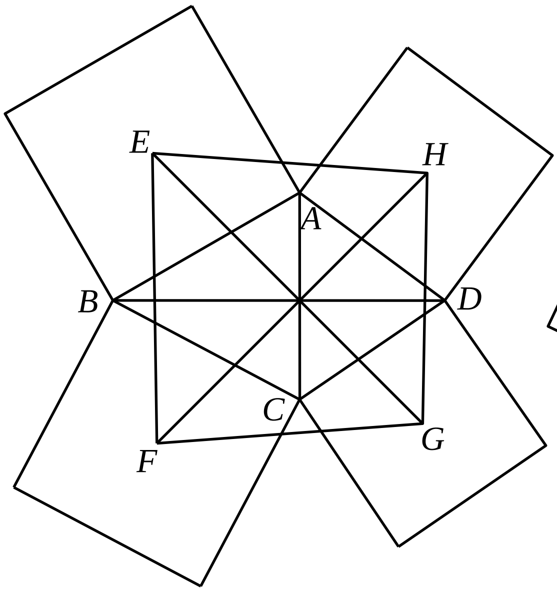


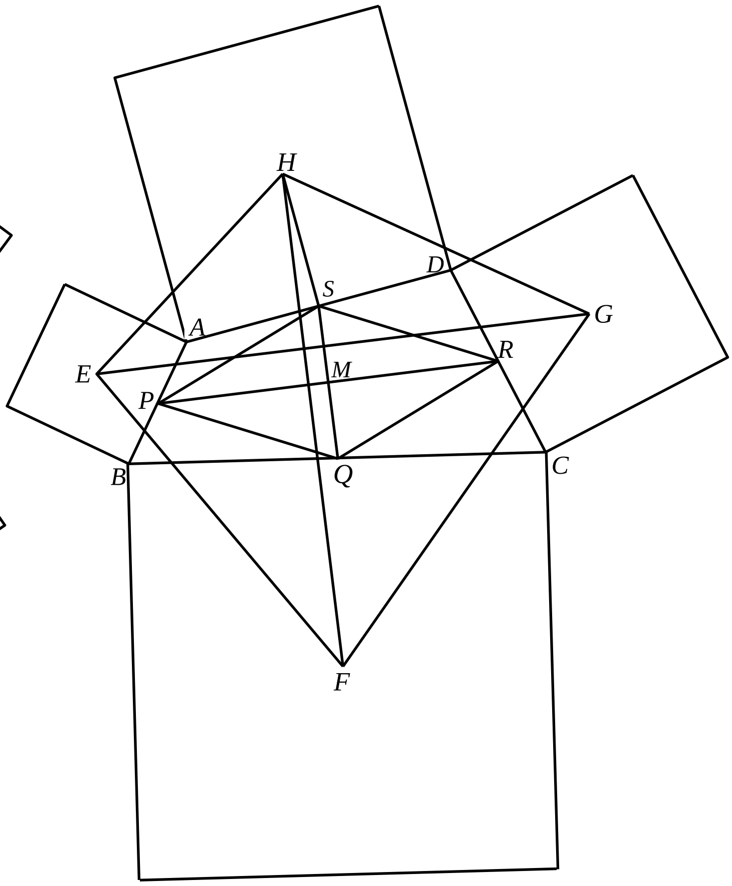
【引理 2】P 、Q 分別爲正方形 $ABCD$ 、$DEFG$ 的中心點，M 、N 分別爲 $\overline{AG}$ 、$\overline{CE}$ 的中點，則 $MPNQ$ 爲正方形。

【引理 3】$ABCD$ 、$CEQP$ 、$DEFG$ 、$AGNM$ 皆爲正方形，T 、R 、V 、H 分別是各個正方形的中心點，S 、U 分別是 $\overline{AG}$ 、$\overline{CE}$ 的中點，則必(I) $\overline{HD}=\overline{DR}$ ；(II) $\overline{HR}$ 與 $\overline{TV}$ 互相垂直；(III) $\overleftrightarrow{SD}\perp\overline{CE}$ 。



【引理 4】如下圖左，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，$\overline{AC} = a$，$\overline{BD} = b$，若分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 爲邊，向外作四個正方形，且 E、F、G、H 分別爲四個正方形的中心點，則必 (Ⅰ) $\overline{EG} \perp \overline{FH}$，$\overline{EG} = \overline{FH}$；(II) $EFGH$ 的面積等於 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍；(III)當 $a = b$ 時，$EFGH$ 的面積等於 $ABCD$ 面積的 2 倍。





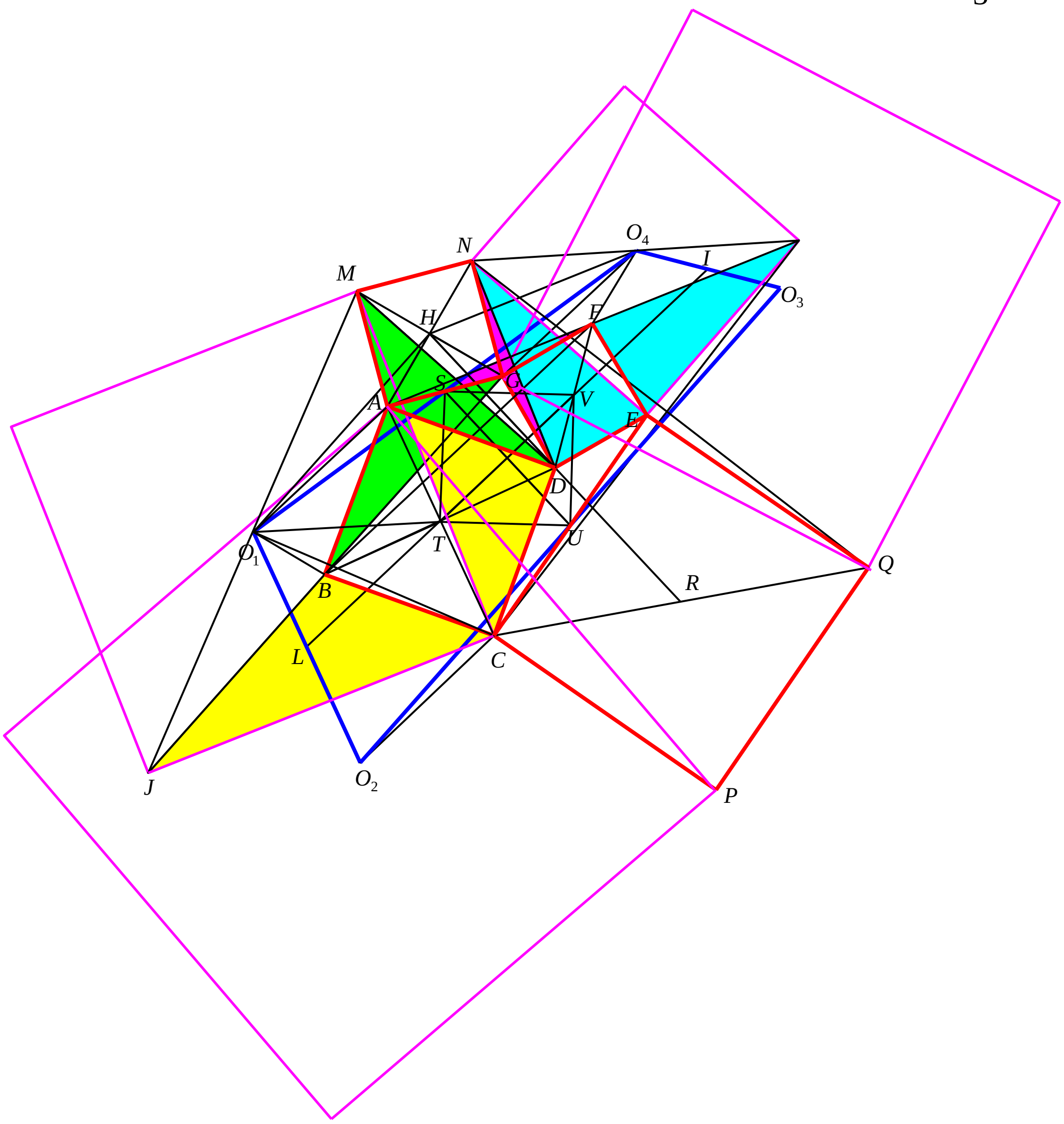
【引理 5】如上圖右，四邊形 $ABCD$ 中，P、Q、R、S 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 的中點，$\overline{PR} = a$，$\overline{SQ} = b$，且 $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$（垂足爲 M）。若分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 爲邊，向外作

四個正方形，且 E 、 F 、 G 、 H 分別爲四個正方形的中心點，則必(I) $\overline{EG}=\overline{FH}$ ， $\overline{EG}\perp\overline{FH}$ ；(II)四邊形 $EFGH$ 的面積等於四邊形 $ABCD$ 面積的 $\frac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍；(III)當 $a=b$ 時， $EFGH$ 的面積等於 $ABCD$ 面積的 2 倍。

伍、研究內容

一、以傑克中心爲標準，完整討論傑克結構九種不同連法下，向傑克中心的異側做正方形時，九個面積發展的重要定理。以下爲補充證明先前作品中未完成討論的其他五個面積發展定理。

【MC 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $MC_{(1)}$ ， L 、 I 分別爲 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 的中點，試證： $\overline{LI}\perp\overline{SU}$ ， $\overline{LI}=3\overline{SU}$ ， $A[MC_{(1)}]=6\times STUV$ 面積， $A[MC_{(2)}]=\frac{8}{3}\times A[MC_{(1)}]$ 。



【證明】

(1) $\Delta MAD\cong\Delta GAB\Rightarrow\overline{MD}=\overline{BG}$ ， $\overline{MD}\perp\overline{BG}$ ； $\Delta CBJ\cong\Delta CDM\Rightarrow\overline{JB}=\overline{MD}$ ， $\overline{JB}\perp\overline{MD}$ 。

(2)由(1) $\Rightarrow\overline{JB}=\overline{BG}$ ， $\overline{JB}//\overline{BG}$ 。

(3) $\because\overline{MO_1}=\overline{O_1J}$ ， $\overline{MH}=\overline{HG}$ $\quad\therefore\overline{O_1H}=\frac{1}{2}\overline{JG}=\overline{BG}$ 。

(4) $\because \overline{HO_1}=\overline{MD}$，$\overline{HO_1}\perp\overline{MD}$，又 $\overline{HA}=\overline{HM}$，$\overline{HA}\perp\overline{HM}$

$\therefore \angle HAO_1=\angle MHD \Rightarrow \Delta HAO_1\cong\Delta MHD \Rightarrow \overline{AO_1}=\overline{HD}$，$\overline{AO_1}\perp\overline{HD}$。

(5)同理 $\overline{O_2C}=\overline{DR}$，$\overline{O_2C}\perp\overline{DR}\Rightarrow\overline{O_1A}=\overline{O_2C}$，$\overline{O_1A}//\overline{O_2C}$ $\therefore O_1O_2CA$ 爲平行四邊形。

又 $\overline{AT}=\overline{TC}$，$\overline{O_1L}=\overline{LO_2}$ $\therefore \overline{LT}=\overline{AO_1}=\overline{HD}$，且 $\overline{LT}\perp\overline{HD}$。

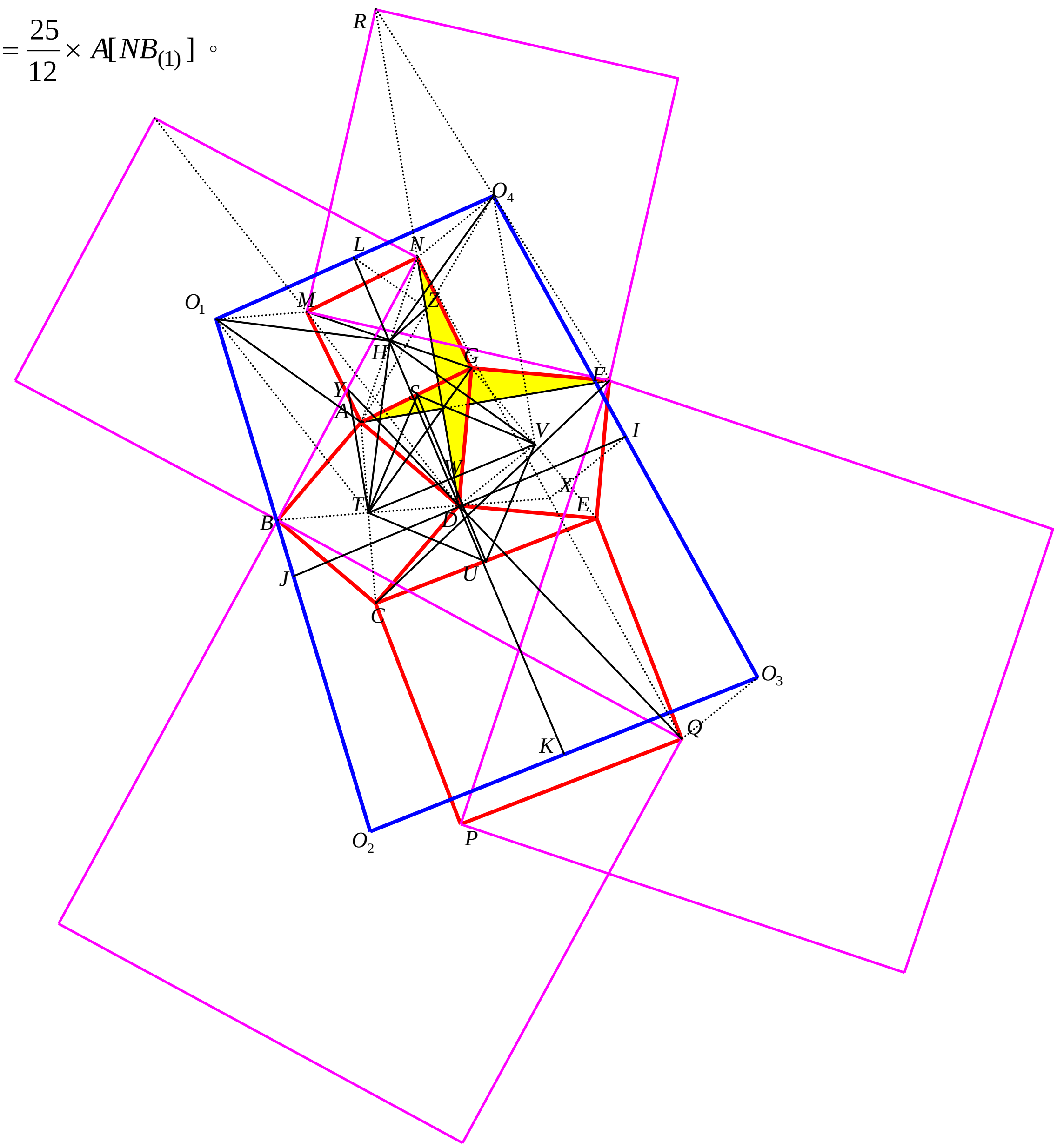
(6)同理 $\overline{VI}=\overline{HD}$，$\overline{VI}\perp\overline{HD}$ 又 $\overline{HD}=\overline{TV}$，$\overline{HD}\perp\overline{TV}$ $\therefore \overline{LI}=3\overline{TV}=3\overline{SU}$。

(7) $\because \overline{O_1A}=\overline{GO_4}$，$\overline{O_1A}//\overline{GO_4}$ $\therefore O_1GO_4A$ 爲平行四邊形（或 O_1、G、O_4、A 共線），$\overline{AS}=\overline{SG}$

$\therefore \overline{O_1S}=\overline{SO_4}\Rightarrow S$ 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點。同理可證得：U 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點。

(8) $\therefore A[MC_{(1)}]=6\times STUV$ 面積。由引理 5 可推算得：$A[MC_{(2)}]=\dfrac{8}{3}\times A[MC_{(1)}]$。

【NB 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $NB_{(1)}$，J、K、I、L 分別爲 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$ 的中點，試證：$\overline{LK}=3\overline{TV}$，$\overline{IJ}=2\overline{TV}$，$A[NB_{(1)}]=12\times STUV$ 面積，$A[NB_{(2)}]=\dfrac{25}{12}\times A[NB_{(1)}]$。



【證明】

(1)由 $\Delta NGD\cong\Delta AGF\Rightarrow\overline{ND}=\overline{AF}$，$\overline{ND}\perp\overline{AF}$；

由$\Delta RMN \cong \Delta FMA \Rightarrow \overline{RN} = \overline{AF}$，$\overline{RN} \perp \overline{AF}$

又$\overline{FO_4} = \overline{O_4R}$，$\overline{FV} = \overline{VD}$ $\therefore \overline{O_4V} = \frac{1}{2}\overline{RD} = \overline{ND} = \overline{RN} \Rightarrow \overline{O_4V} = \overline{AF} = \overline{DN}$，$\overline{O_4V} // \overline{RN}$

$\therefore O_4NDV$ 爲平行四邊形$\Rightarrow \overline{O_4N} = \overline{DV} = \overline{GV} = \overline{VE}$。

(2)同理可證：MO_1TD 爲平行四邊形$\Rightarrow \overline{MO_1} // \overline{TD}$，$\overline{MO_1} = \overline{TD} = \overline{TA}$。

(3)$\because \overline{O_4N} = \overline{GV}$，$\overline{O_4N} \perp \overline{GV}$，$\overline{HN} = \overline{HG}$，$\overline{HN} \perp \overline{HG}$

$\therefore \Delta O_4NH \cong \Delta VGH \Rightarrow \overline{O_4H} \perp \overline{HV}$，$\overline{O_4H} = \overline{HV}$

同理可證：$\overline{HO_1} = \overline{HT}$，$\overline{HO_1} \perp \overline{HT}$

$\because L$ 爲$\overline{O_4O_1}$中點，由引理 3$\Rightarrow L$、H、D共線，且$\overline{HD} \perp \overline{TV}$。

(4)$\because \overline{HD} \perp \overline{TV}$，$\overline{HD} = \overline{TV}$、且$\overline{DV} \perp \overline{GV}$，$\overline{DV} = \overline{GV}$

$\therefore \Delta HDV \cong \Delta TVG \Rightarrow \overline{HV} = \overline{TG}$，$\overline{HV} \perp \overline{TG}$

又$\overline{AG} = \overline{MA}$，$\overline{AG} \perp \overline{MA}$，$\overline{AT} = \overline{MO_1}$，$\overline{AT} \perp \overline{MO_1}$ $\therefore \Delta ATG \cong \Delta MO_1A$

$\Rightarrow \overline{TG} \perp \overline{O_1A} \Rightarrow \overline{O_4H} = \overline{HV} = \overline{GT} = \overline{O_1A}$。

(5)連$\overline{O_4A}$取$\overline{O_4A}$中點$Z \Rightarrow \overline{LZ} // \overline{O_1A}$，$\overline{LZ} = \frac{1}{2}\overline{O_1A} = \frac{1}{2}\overline{HV}$

連$\overline{HZ} = \frac{1}{2}\overline{NO_4} = \frac{1}{2}\overline{DV}$，$\overline{HZ} // \overline{NO_4} // \overline{DV} \Rightarrow \Delta LHZ \sim \Delta HDV$

$\Rightarrow \overline{LH} = \frac{1}{2}\overline{HD} = \frac{1}{2}\overline{TV} \Rightarrow \overline{LD} = 1.5\overline{TV}$。

(6)同理可證：$\overline{KD} = \frac{3}{2}\overline{TV}$ $\therefore \overline{LK} = 3\overline{TV}$，$\overline{LK} \perp \overline{TV}$。

(7)由$\overline{O_4N} = \overline{DV}$，$\overline{O_4N} // \overline{DV}$，依對稱性可證得$\overline{O_3Q} = \overline{DV}$，$\overline{O_3Q} // \overline{DV}$。

連$\overline{NQ} \Rightarrow \overline{O_4N} = \overline{QO_3}$，$\overline{O_4N} = \overline{QO_3} \Rightarrow O_4NQO_3$ 平行四邊形$\Rightarrow$取$\overline{NQ}$中點 X。

(8) 連$\overline{XI}$，$\overline{XD}$，取$\overline{NB}$中點 Y，連$\overline{YD}$。

(9)由$\Delta FEC \cong \Delta DEQ \Rightarrow \overline{FC} = \overline{DQ}$，$\overline{FC} \perp \overline{DQ}$。

(10)連$\overline{TY}$ $\because \overline{BY} = \overline{YN}$，$\overline{BT} = \overline{TD}$ $\therefore \overline{TY} // \overline{ND}$，$\overline{TY} = \frac{1}{2}\overline{ND} = \frac{1}{2}\overline{AF}$，$\overline{TY} \perp \overline{AF}$

又$\overline{TD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{TD} \perp \overline{AC}$ $\therefore \Delta DTY \sim \Delta CAF \Rightarrow \overline{YD} = \frac{1}{2}\overline{FC}$，$\overline{YD} \perp \overline{FC}$

$\Rightarrow \overline{YD} // \overline{DQ}$，$\overline{YD} = \frac{1}{2}\overline{DQ}$

$\therefore D$ 爲ΔNBQ的重心$\Rightarrow \overline{BX}$ 爲ΔNBQ的一中線，且$\overline{BD} = 2\overline{DX} \Rightarrow \overline{TD} = \overline{DX}$。

(11)由$\overline{TD} = \overline{DX}$，$\overline{TD} // \overline{DX}$，$\overline{XI} = \overline{O_3Q} = \overline{DV}$，$\overline{XI} // \overline{O_3Q} // \overline{DV} \Rightarrow \Delta IXD \cong \Delta VDT \Rightarrow \overline{ID} = \overline{TV}$，

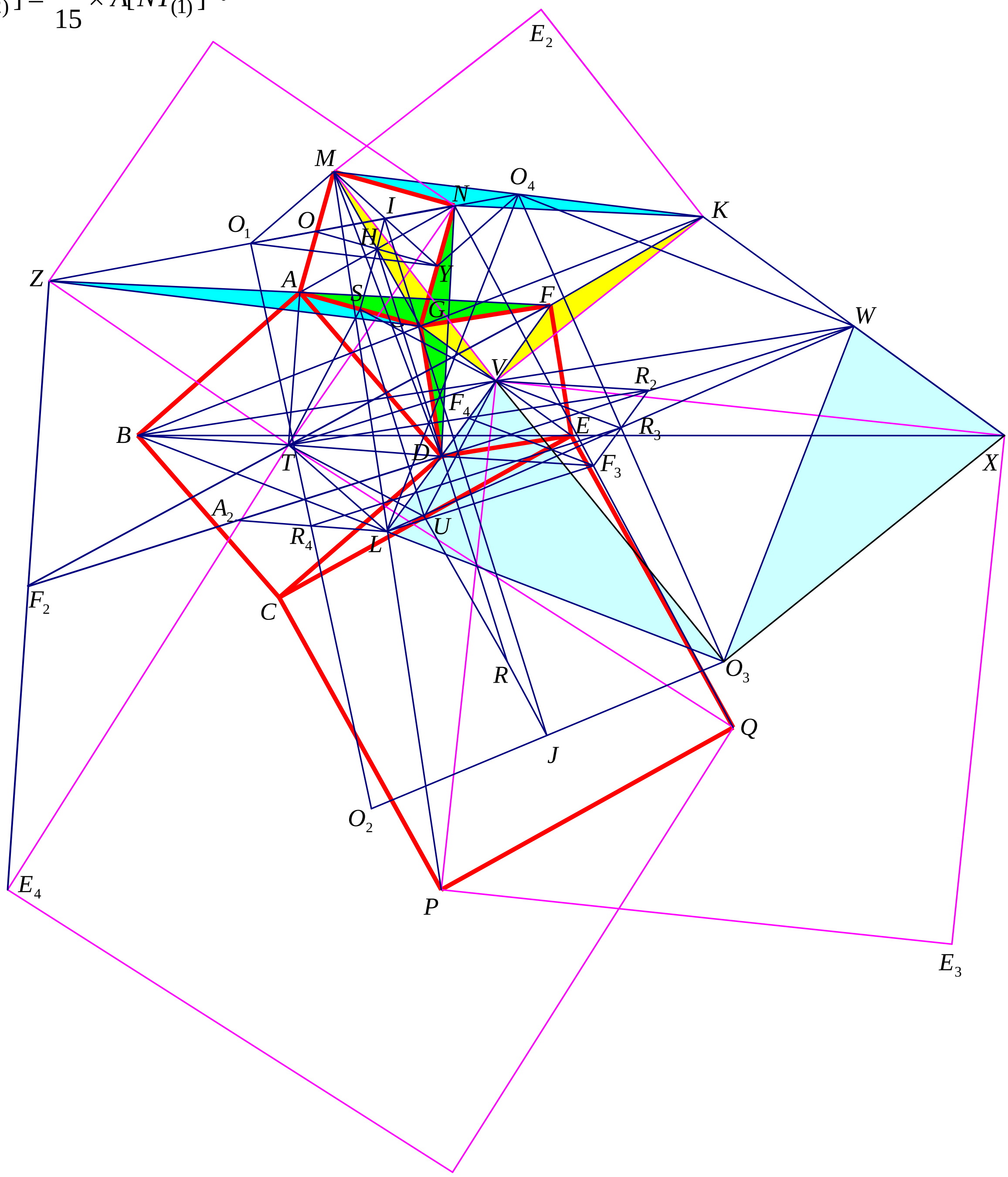
同理$\overline{DJ} = \overline{VO_4}$，$\overline{DJ} // \overline{TV} \Rightarrow \overline{IJ} = 2\overline{TV}$。

(12)$\therefore \overline{IJ} \perp \overline{LK}$，$\overline{IJ} = 2\overline{TV} \Rightarrow A[NB_{(1)}] = 12 \times STUV$ 面積。

(13)由引理 5 可推算得：$A[NB_{(2)}] = \frac{25}{12} \times A[NB_{(1)}]$。

【NT 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形$O_1O_2O_3O_4$爲$NT_{(1)}$，R_4、J、R_3、I 分別爲$\overline{O_1O_2}$、

$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$的中點，試證：$\overline{IJ}=2.5\overline{TV}$，$\overline{R_3R_4}=1.5\overline{TV}$，$A[NT_{(1)}]=7.5\times STUV$ 面積，$A[NT_{(2)}]=\dfrac{32}{15}\times A[NT_{(1)}]$。



【證明】

(1) $\Delta NGD\cong\Delta AGF \Rightarrow \overline{AF}=\overline{ND}$，$\overline{AF}\perp\overline{ND}$。

(2) $\Delta AZT\cong\Delta DNT \Rightarrow \overline{ND}=\overline{AZ}$，$\overline{ND}\perp\overline{AZ}$。

(3) $\Delta MGV\cong\Delta KFV \Rightarrow \overline{MG}=\overline{FK}$，$\overline{MG}\perp\overline{FK}$ 又 $\overline{NA}=\overline{MG}$，$\overline{NA}\perp\overline{MG}\Rightarrow\overline{NA}=\overline{FK}$，$\overline{NA}//\overline{FK} \Rightarrow$ NAFK 爲平行四邊形 $\Rightarrow\overline{NK}=\overline{AF}$，$\overline{NK}//\overline{AF}$ 又 $\overline{ZA}=\overline{AF} \Rightarrow \overline{ZA}=\overline{NK}$，$\overline{ZA}//\overline{NK}$ 又 $\overline{MN}=\overline{AG}$，$\overline{MN}//\overline{AG}$ $\therefore\Delta MNK\cong\Delta GAZ$。

(4)取$\overline{NG}$中點 Y，$\overline{MA}$中點 O，連$\overline{YO}$ $\because\overline{NO_1}=\overline{O_1Z}$，$\overline{NY}=\overline{YG}\Rightarrow\overline{O_1Y}=\dfrac{1}{2}\overline{ZG}$，$\overline{O_1Y}//\overline{ZG}$，

又$\frac{1}{2}\overline{ZG}=\frac{1}{2}\overline{MK}=\overline{MO_4}$，$\overline{O_1Y}=\overline{MO_4}$，$\overline{O_1Y}//\overline{MO_4}\Rightarrow MO_1YO_4$爲平行四邊形$\Rightarrow I$爲$\overline{MY}$中點。

(5)$\because \overline{IH}=\frac{1}{2}\overline{MO}=\frac{1}{2}\overline{HS}$ $\therefore \overline{HS}:\overline{HI}=2:1$

依據對稱性 $\Rightarrow \overline{UR}:\overline{RJ}=2:1$ $\because \overline{SU}//\overline{HR}$，$\overline{SU}=\frac{1}{2}\overline{HR}$ $\Rightarrow \overline{IJ}//\overline{SU}$，$\overline{IJ}=2.5\overline{SU}$。

(6)分別取$\overline{KX}$、$\overline{NQ}$、$\overline{MP}$、$\overline{ZE_4}$ 中點 W、F_3、L、F_2。

(7)$\because \Delta BAG\cong\Delta DAM$ $\Rightarrow \overline{BG}=\overline{MD}$，$\overline{BG}\perp\overline{MD}$ 又 $\Delta MDG\cong\Delta KGF$ $\Rightarrow \overline{MD}=\overline{KG}$，$\overline{MD}\perp\overline{KG}$ $\Rightarrow \overline{BG}=\overline{KG}$，$B$、$G$、$K$共線

依對稱性$\Rightarrow \overline{BE}=\overline{EX}$，$B$、$E$、$X$ 共線 $\because \overline{GV}=\overline{VE}$，$\overline{KW}=\overline{WX}$ $\therefore \overline{BV}=\overline{VW}$，$B$、$V$、$W$ 共線，依對稱性 F、T、F_2 共線，$\overline{FT}=\overline{TF_2}$。

(8)$\because \overline{BG}=\overline{GK}$，$\overline{BV}=\overline{VW}$ $\therefore \overline{GV}//\overline{KW}$，$\overline{GV}=\frac{1}{2}\overline{KW}$ $\Rightarrow \overline{GE}=\overline{KW}$，$\overline{GE}//\overline{KW}$

$\Rightarrow \overline{GE}=\overline{WX}$，$\overline{GE}//\overline{WX}$ $\Rightarrow \overline{DF}=\overline{WX}$，$\overline{DF}\perp\overline{WX}$。

(9) $\because MVKE_2$、VPE_3X 爲正方形 且L爲$\overline{MP}$中點，W爲$\overline{KX}$中點 $\therefore LO_3WO_4$爲正方形 $\Rightarrow \overline{LO_3}=\overline{WO_3}$，$\overline{LO_3}\perp\overline{WO_3}$ 又 $\overline{VO_3}=\overline{XO_3}$，$\overline{VO_3}\perp\overline{XO_3}$。

(10)$\because \Delta WXO_3\cong\Delta LVO_3$ $\Rightarrow \overline{LV}=\overline{WX}$，$\overline{LV}\perp\overline{WX}$

$\Rightarrow L$、D、V、F 共線，$\overline{LD}=\overline{DV}$。

依對稱性 $\Rightarrow$ B、T、D、F_3 共線，且$\overline{TD}=\overline{DF_3}$ $\therefore$ TLF_3V爲平行四邊形。

(11)連$\overline{DW}$ $\because \overline{BV}=\overline{VW}$，$\overline{BT}=\overline{TD}$，$\overline{DW}=2\overline{TV}$，$\overline{DW}//\overline{TV}$ 同理$\overline{DF_2}=2\overline{TV}$，$\overline{DF_2}//\overline{TV}$ $\therefore$ F_2.、D、W共線。

(12)取$\overline{DW}$中點R_2，取$\overline{DF_2}$中點A_2，連$\overline{R_2F_3}$，連 $\overline{A_2L}$，連$\overline{DF_2}$。

(13)$\because \overline{WV}=\overline{VB}$，$\overline{WR_2}=\overline{R_2D}$ $\therefore \overline{VR_2}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\overline{TD}=\overline{DF_3}$。

(14)$\because \overline{VR_2}=\overline{TD}$，$\overline{VR_2}//\overline{TD}$ $\therefore VTDR_2$爲平行四邊形，連$\overline{TR_2}$ 交$\overline{VD}$ 於F_4

$\Rightarrow \overline{VF_4}=\overline{F_4D}$，$\overline{DR_2}=\overline{TV}=\overline{LF_3}$，$\overline{DR_2}//\overline{LF_3}$，$R_2DLF_3$ 爲平行四邊形。

(15)連$\overline{WL}$ $\because \overline{WR_2}=\overline{R_2D}$，$\overline{WR_3}=\overline{R_3L}$ $\therefore$ $\overline{R_2R_3}//\overline{DL}$，$\overline{R_2R_3}=\frac{1}{2}\overline{DL}$。

(16)$\because \overline{DF_3}=\overline{TD}=\overline{VR_2}$，$\overline{VR_2}//\overline{TD}//\overline{DF_3}$ $\therefore VR_2DF_3$爲平行四邊形$\Rightarrow \overline{R_2R_3}//\overline{DV}//\overline{R_2F_3}$

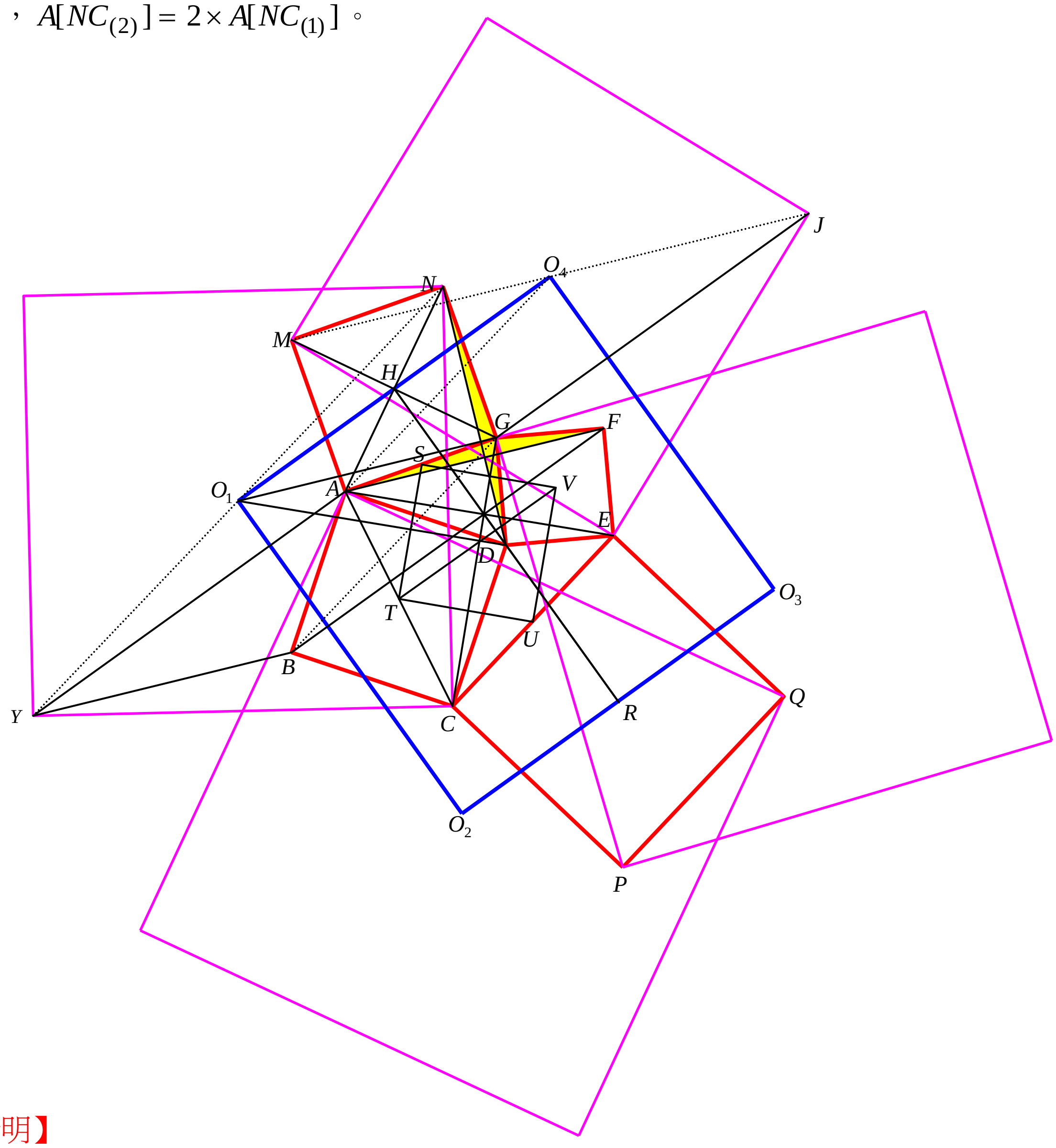
$\Rightarrow R_3$爲 $\overline{R_2F_3}$ 中點，同理 R_4爲 $\overline{A_2L}$ 中點。

(17)$\because \overline{TV}=\overline{LF_3}$，$\overline{TV}//\overline{LF_3}$，$\overline{TV}//\overline{A_2R_2}$ 且$\overline{A_2R_2}=2\overline{TV}$

$\therefore \overline{R_3R_4}=\frac{1}{2}\left(\overline{TV}+2\overline{TV}\right)=1.5\overline{TV}$，且 $\overline{R_3R_4}\perp\overline{IJ}$。

(18)故得證$A[NT_{(1)}]=7.5\times STUV$面積。由引理 5 可推算得：$A[NT_{(2)}]=\frac{32}{15}\times A[NT_{(1)}]$。

【NC 第 1 定理】 如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $NC_{(1)}$，試證：$A[NC_{(1)}]=8\times STUV$ 面積，$A[NC_{(2)}]=2\times A[NC_{(1)}]$。



【證明】

(1) $\Delta NGD\cong\Delta AGF\Rightarrow\overline{ND}=\overline{AF}$，$\overline{ND}\perp\overline{AF}$；

$\Delta NDC\cong\Delta YBC\Rightarrow\overline{ND}=\overline{YB}$，$\overline{ND}\perp\overline{YB}\Rightarrow\overline{AF}=\overline{YB}$，$\overline{AF}//\overline{YB}$

$\therefore AYBF$ 爲平行四邊形 $\Rightarrow\overline{AY}=\overline{BF}$，$\overline{AY}//\overline{BF}$。

(2)依對稱性，推出：$\overline{GJ}=\overline{BF}$，$\overline{GJ}//\overline{BF}$。

(3)令 H 爲正方形 $NMAG$ 中心點，連 $\overline{O_1H},\overline{O_4H}$。

(4) $\because\overline{NO_1}=\overline{O_1Y}$，$\overline{NH}=\overline{HA}$　　$\therefore\overline{O_1H}//\overline{YA}//\overline{BF}$，$\overline{O_1H}=\dfrac{1}{2}\overline{YA}$。

同理可證 $\overline{O_4H}//\overline{GJ}//\overline{BF}$，$\overline{O_4L}=\dfrac{1}{2}\overline{GJ}\Rightarrow\overline{O_1H}//\overline{O_4H}//\overline{BF}$

$\therefore O_1$、H、O_4 共線 $\Rightarrow\overline{O_1O_4}=\overline{BF}=2\overline{TV}=\overline{HR}$，$\overline{O_1O_4}//\overline{TV}$，且 H 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點。

(5)同理可證 $\overline{O_2O_3}=2\overline{TV}=\overline{HR}$，$\overline{O_2O_3}//\overline{TV}$，且 R 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點

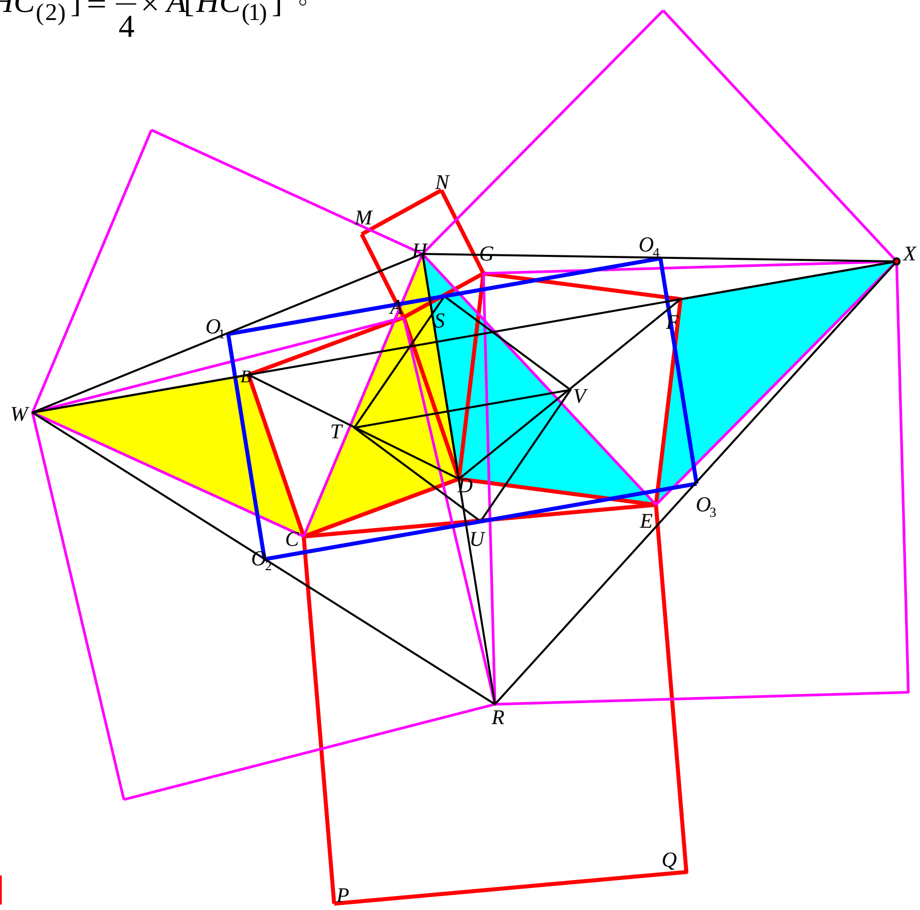
$\because\overline{HR}\perp\overline{TV}\ \therefore\overline{HR}\perp\overline{O_1O_4}$ 且 $\overline{HR}\perp\overline{O_2O_3}\Rightarrow O_1O_2O_3O_4$ 爲正方形。

(6) $\therefore A[NC_{(1)}]=O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=\overline{O_1O_4}\times\overline{O_1O_2}=2\overline{TV}\times 2\overline{TV}=4\overline{TV}^2=8\times STUV$ 面積。

(7) 由引理 5 可知：$A[NC_{(2)}]=2\times A[NC_{(1)}]$。

【HC 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $HC_{(1)}$，試證：$A[HC_{(1)}]=8\times STUV$ 面

積，$A[HC_{(2)}]=\dfrac{9}{4}\times A[HC_{(1)}]$。



【證明】

(1) $\overline{HO_1}=\overline{O_1W}$，$\overline{HO_4}=\overline{O_4X}$，$\overline{O_1O_4}//\overline{WX}$，$\overline{O_1O_4}=\dfrac{1}{2}\overline{WX}$；同理 $\overline{O_2O_3}//\overline{WX}$，

$\overline{O_2O_3}=\dfrac{1}{2}\overline{WX}\Rightarrow\overline{O_1O_4}=\overline{O_2O_3}$，$\overline{O_1O_4}//\overline{O_2O_3}$。

(2) $\because\overline{WC}=\overline{HC}$，$\overline{HC}\perp\overline{WC}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{BC}\perp\overline{CD}$ $\therefore\Delta BCW\cong\Delta DCH$

$\Rightarrow\overline{WB}=\overline{HD}=\overline{TV}$，$\overline{WB}\perp\overline{HD}\Rightarrow\overline{WB}=\overline{TV}$，$\overline{WB}//\overline{TV}$

依對稱性可證：$\overline{FX}=\overline{TV}$ $\overline{FX}//\overline{TV}$ 又 $\overline{DT}=\overline{TB}$，$\overline{DV}=\overline{VF}$，$\overline{BF}=2\overline{TV}$，$\overline{BF}//\overline{TV}$

$\Rightarrow W$、B、F、X 共線，且 $\overline{WX}//\overline{TV}\Rightarrow\overline{WX}=4\overline{TV}$ $\therefore\overline{O_1O_4}=\overline{O_2O_3}=\dfrac{1}{2}\times 4\overline{TV}=2\overline{TV}$。

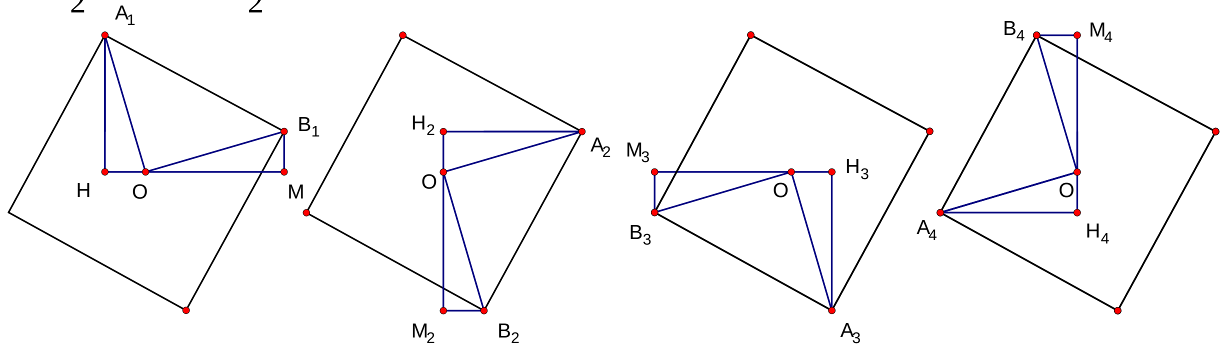
(3) $\because\overline{O_1O_2}=\dfrac{1}{2}\overline{HR}=\overline{TV}$，同理 $\overline{O_3O_4}=\dfrac{1}{2}\overline{HR}=\overline{TV}$，$\overline{O_1O_2}//\overline{O_3O_4}//\overline{HR}$ 又 $\overline{HR}\perp\overline{TV}$

$\therefore O_1O_2O_3O_4$ 爲矩形 故 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=2\overline{TV}\times\overline{TV}=2\overline{TV}^2=4\times STUV$ 面積。

(4) 由引理 5 可推算得：$A[HC_{(2)}]=\dfrac{9}{4}\times A[HC_{(1)}]$。

二、以解析幾何的驗證方式，完成「傑克結構」九種不同連接情況下，面積關係之證明。

【引理 6】有一個正方形 O（※爲了說明簡便，以下有時會以中心點名稱作爲正方形之命名），以順時針方向，令其頂點爲 A 、 B ，當 A 之座標爲 (a,b) ， B 爲 (c,d) ，試証： O 爲 $(\frac{a-b+c+d}{2},\frac{a+b-c+d}{2})$ 。



圖(1)　　圖(2)　　圖(3)　　圖(4)

(1)順時針令頂點 A 、 B 有以上 4 種情況(第一種情況的 A 、 B ，稱爲 A_1 、 B_1 ，並依此類推)。

(2)如圖(1)，過 O 做一條直線，並分別過 A_1 、 B_1 作此直線的垂線，是爲 H_1 、 M_1

$$\Rightarrow \Delta A_1HO \cong \Delta OB_1M \therefore \overline{A_1H}=\overline{OM}，\overline{OH}=\overline{B_1M}$$ 。

(3)令 O 爲 $(x,y) \Rightarrow x-a=d-y$ 且 $b-y=c-x$ ，解得 $x=\frac{a-b+c+d}{2}$ ， $y=\frac{a+b-c+d}{2}$

$\therefore O$ 爲 $(\frac{a-b+c+d}{2},\frac{a+b-c+d}{2})$ 。

(4)同理可證其他 3 種情況， O 亦爲 $(\frac{a-b+c+d}{2},\frac{a+b-c+d}{2})$ 。

【MB 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $MB_{(1)}$ ， D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 ，分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證： $\overline{D_3D_4}=2\overline{SU}$ ， $\overline{D_1D_2}=3\overline{TV}$ ， $\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ， $A[MB_{(1)}]=12\times STUV$ 面積。

【證明】首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$ [假設 a 、 b 、 c 、 d 均 >0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGNM$ 中

$\because A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$

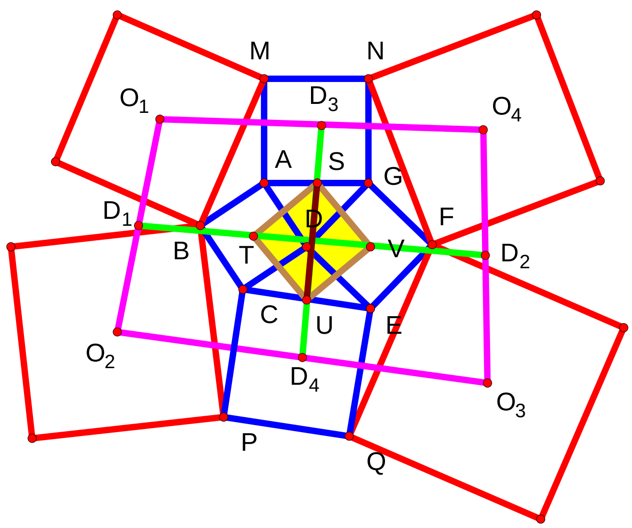
$\therefore N(a+d-b,a+b+c)$ 、

$M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEQP$ 中

$\because C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$

$\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$ 、 $P(c-a-d,-b-c-d)$



在正方形 $DEFG$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $E(b,-a)$ $\therefore F(a+b,b-a)$

在正方形 $DABC$ 中 ∵ $D(0,0)$ 、 $A(-c,d)$ 、 $C(-d,-c)$ ∴ $B(-c-d,d-c)$

在 O_1 正方形中 ∵ $M(d-b-c,a+c+d)$ ， $B(-c-d,d-c)$ ∴ $O_1\ (\dfrac{-a-b-4c}{2},\dfrac{a-b+4d}{2})$

在 O_2 正方形中 ∵ $B(-c-d,d-c)$ ， $P(c-a-d,-b-c-d)$ ∴ $O_2\ (\dfrac{-a-b-4d}{2},\dfrac{a-b-4c}{2})$

在 O_3 正方形中 ∵ $F(a+b,b-a)$ ， $Q(b+c-a,-a-b-d)$ ∴ $O_3\ (\dfrac{4b+c+d}{2},\dfrac{-4a+c-d}{2})$

在 O_4 正方形中 ∵ $N(a+d-b,a+b+c)$ ， $F(a+b,b-a)$ ∴ $O_4\ (\dfrac{4a+c+d}{2},\dfrac{4b+c-d}{2})$

D_3 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點， D_4 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點， D_1 爲 $\overline{O_1O_2}$ 中點， D_2 爲 $\overline{O_3O_4}$ 中點

∴ $D_1(\dfrac{-a-b-2c-2d}{2},\dfrac{a-b-2c+2d}{2})$ ， $D_2(\dfrac{2a+2b+c+d}{2},\dfrac{-2a+2b+c-d}{2})$

$D_3(\dfrac{3a-b-3c+d}{4},\dfrac{a+3b+c+3d}{4})$ ， $D_4(\dfrac{-a+3b+c-3d}{4},\dfrac{-3a-b-3c-d}{4})$

➔ $\overline{D_3D_4}=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}=2\overline{TV}$

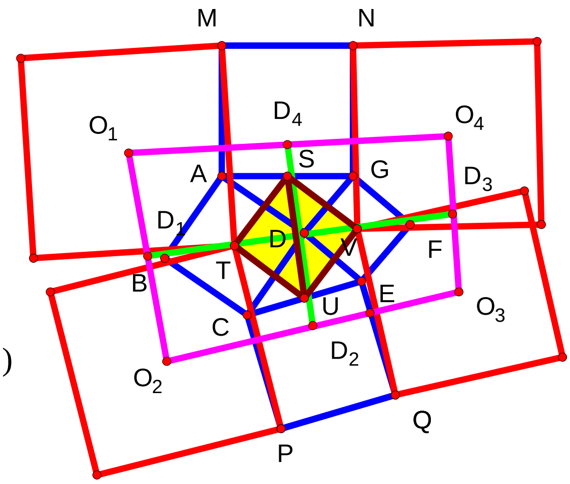
$\overline{D_1D_2}=\dfrac{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{2}=3\overline{TV}$ --------------- (1)

➔ $m\overline{D_3D_4}=\dfrac{2a-2b-2c+2d}{2a+2b+2c+2d}$ ， $m\overline{D_1D_2}=\dfrac{3a+3b+3c+3d}{-3a+3b+3c-3d}$

∵ $m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\dfrac{a-b-c+d}{a+b+c+d}\times\dfrac{a+b+c+d}{-a+b+c-d}=-1$

∴ $\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ------------------ (2)　　➔由 (1) (2) 知 $A[MB_{(1)}]=12\times STUV$ 面積。

【MT 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $MT_{(1)}$ ， D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 ，分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證： $\overline{D_3D_4}=1.5\overline{SU}$ ， $\overline{D_1D_2}=2.5\overline{TV}$ ， $\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ， $A[MT_{(1)}]=7.5\times STUV$ 面積。



【證明】首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$

[假設 a 、 b 、 c 、 d 均 >0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGNM$ 中 ∵ $A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$

∴ $N(a+d-b,a+b+c)$ 、 $M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEPQ$ 中 ∵ $C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$

∴ $Q(b+c-a,-a-b-d)$ 、 $P(c-a-d,-b-c-d)$

在正方形 $AGMN$ 中 ∵ $A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$

∴ $H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$

在正方形 $CEQP$ 中 $\because C(-d,-c)$、$E(b,-a)$ $\therefore R(\frac{-a+b+c-d}{2},\frac{-a-b-c-d}{2})$

在正方形 $ABCD$ 中 $\because A(-c,d)$、$C(-d,-c)$ $\therefore T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$

在正方形 $DEFG$ 中 $\because E(b,-a)$、$G(a,b)$ $\therefore V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$

在 O_1 正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$、$T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$ $\therefore O_1(\frac{-a-b-3c}{2},\frac{a-b+3d}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$、$P(c-a-d,-b-c-d)$ $\therefore O_2(\frac{-a-b-3d}{2},\frac{a-b-3c}{2})$

在 O_3 正方形中 $\because V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$、$Q(b+c-a,-a-b-d)$ $\therefore O_3(\frac{3b+c+d}{2},\frac{-3a+c-d}{2})$

在 O_4 正方形中 $\because N(a+d-b,a+b+c)$、$V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$ $\therefore O_4(\frac{3a+c+d}{2},\frac{3b+c-d}{2})$

D_3 為 $\overline{O_1O_4}$ 中點，D_4 為 $\overline{O_2O_3}$ 中點，D_1 為 $\overline{O_1O_2}$ 中點，D_2 為 $\overline{O_3O_4}$ 中點

$\therefore D_1(\frac{-2a-2b-3c-3d}{4},\frac{2a-2b-3c+3d}{4})$，$D_2(\frac{3a+3b+2c+2d}{4},\frac{-3a+3b+2c-2d}{4})$

$D_3(\frac{2a-b-2c+d}{4},\frac{a+2b+c+2d}{4})$，$D_4(\frac{-a+2b+c-2d}{4},\frac{-2a-b-2c-d}{4})$

➔ $\overline{D_3D_4}=\frac{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{4}=\frac{3}{2}\overline{TV}$

$\overline{D_1D_2}=\frac{5\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{4}=\frac{5}{2}\overline{TV}$ ---------------- (1)

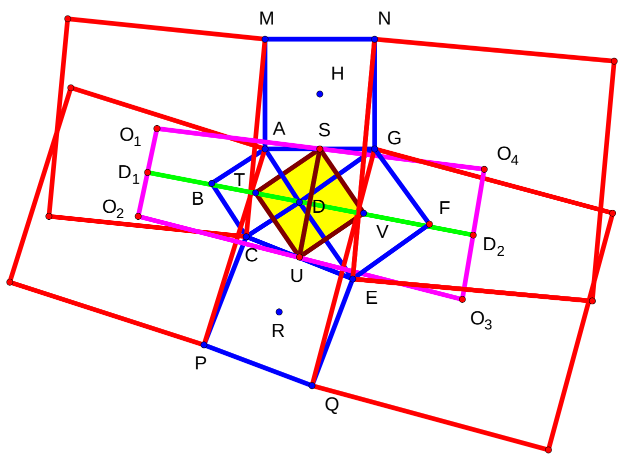
➔ $m\overline{D_3D_4}=\frac{3a-3b-3c+3d}{3a+3b+3c+3d}$，$m\overline{D_1D_2}=\frac{-5a-5b-5c-5d}{5a-5b-5c+5d}$

$\because m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\frac{a-b-c+d}{a+b+c+d}\times\frac{-a-b-c-d}{a-b-c+d}=-1$

$\therefore \overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ------------------- (2) ➔由 (1) (2) 知 $A[MT_{(1)}]=7.5\times STUV$ 面積。

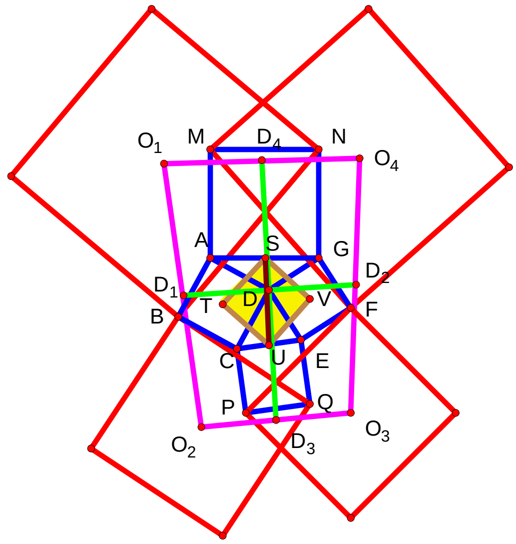
【MC 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 為 $MC_{(1)}$，D_1、D_2、D_3、D_4，分別是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證：$\overline{D_3D_4}=\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=3\overline{TV}$，$\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$，$A[MC_{(1)}]=6\times STUV$ 面積。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。

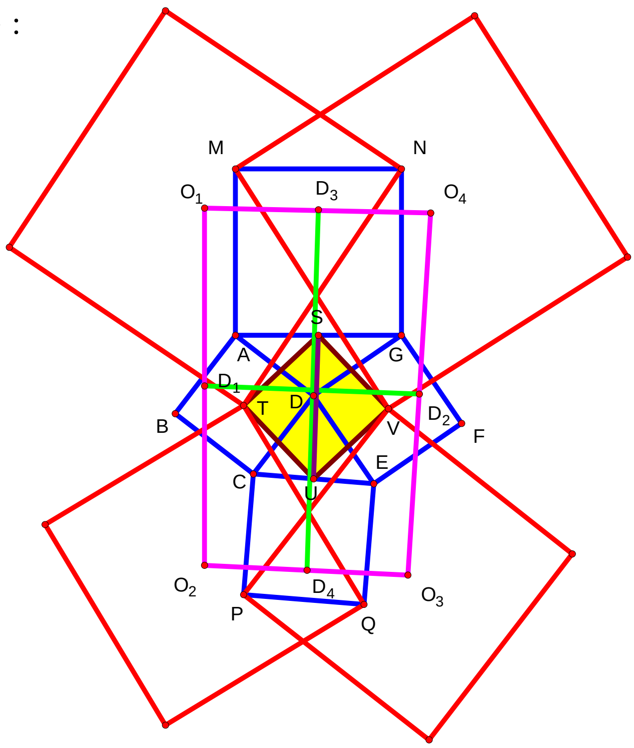


【NB 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 為 $NB_{(1)}$，D_1、D_2、D_3、D_4，分別是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證：$\overline{D_3D_4}=3\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=2\overline{TV}$，$\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$，$A[NB_{(1)}]=12\times STUV$ 面積。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。



【NT 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 為 $NT_{(1)}$，D_1、D_2、D_3、D_4，分別是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證：$\overline{D_3D_4}=2.5\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=1.5\overline{TV}$，$\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$，$A[NT_{(1)}]=7.5\times STUV$ 面積。



【證明】首先令 $D(0,0)$、$G(a,b)$、$A(-c,d)$

[假設 a、b、c、d 均>0]

➔ $E(b,-a)$、$C(-d,-c)$

在正方形 $AGNM$ 中 $\because A(-c,d)$、$G(a,b)$

$\therefore N(a+d-b,a+b+c)$、$M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEQP$ 中 $\because C(-d,-c)$、$E(b,-a)$ $\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$、$P(c-a-d,-b-c-d)$

在正方形 $ABCD$ 中 $\because A(-c,d)$、$C(-d,-c)$ $\therefore$ $T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$

在正方形 $DEFG$ 中 $\because E(b,-a)$、$G(a,b)$ $\therefore$ $V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$

在 O_1 正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$，$V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$ $\therefore O_1(\frac{2a-b+2d}{2},\frac{a+2b+2c}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because P(c-a-d,-b-c-d)$，$V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$

$\therefore O_2(\frac{2b+2c-a}{2},\frac{-2a-b-2d}{2})$

在O_3正方形中 $\because Q(b+c-a,-a-b-d)$，$T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$

$\therefore\ O_3(\frac{-2a+c-2d}{2},\frac{-2b-2c-d}{2})$

在O_4正方形中 $\because N(a+d-b,a+b+c)$，$T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$ $\therefore O_4(\frac{-2b-2c+d}{2},\frac{2a+c+2d}{2})$

D_3爲$\overline{O_1O_4}$中點，D_4爲$\overline{O_2O_3}$中點，D_1爲$\overline{O_1O_2}$中點，D_2爲$\overline{O_3O_4}$中點

$\therefore D_1(\frac{a+b+2c+2d}{4},\frac{-a+b+2c-2d}{4})$，$D_2(\frac{-2a-2b-c-d}{4},\frac{2a-2b-c+d}{4})$

$D_3(\frac{2a-3b-2c+3d}{4},\frac{3a+2b+3c+2d}{4})$，$D_4(\frac{-3a+2b+3c-2d}{4},\frac{-2a-3b-2c-3d}{4})$

➔ $\overline{D_3D_4}=2.5\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=1.5\overline{TV}$ ---------------- (1)

➔ $m\overline{D_3D_4}=\frac{5a+5b+5c+5d}{5a-5b-5c+5d}$，$m\overline{D_1D_2}=\frac{-3a+3b+3c-3d}{3a+3b+3c+3d}$

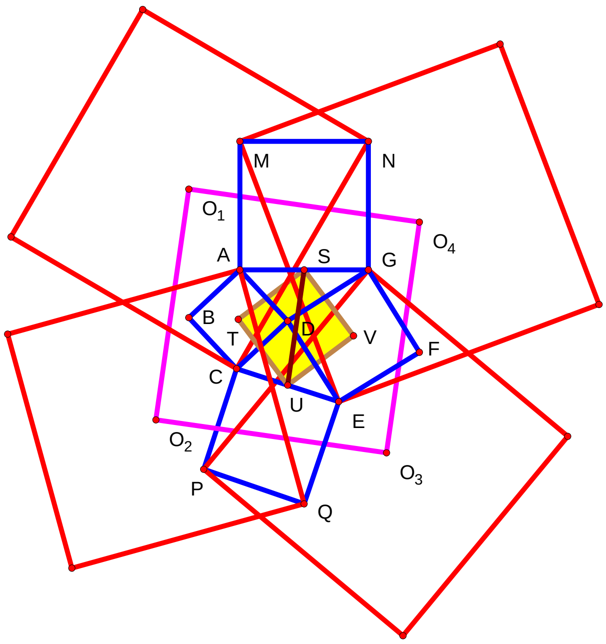
$\because m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\frac{-a+b+c-d}{a+b+c+d}\times\frac{a+b+c+d}{a-b-c+d}=-1$

$\therefore \overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ------------------- (2)

➔由(1) (2)知 $A[NT_{(1)}]=7.5\times STUV$ 面積。

【NC 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形$O_1O_2O_3O_4$爲$NC_{(1)}$，試證：$NC_{(1)}$爲正方形，$A[NC_{(1)}]=8\times STUV$ 面積。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。



【HB 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形$O_1O_2O_3O_4$爲$HB_{(1)}$，D_1、D_2、D_3、D_4，分別是$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$的中點，試證：$\overline{D_3D_4}=2\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=2\overline{TV}$，$\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$，$A[HB_{(1)}]=8\times STUV$ 面積。

【證明】

首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$

[假設 a 、 b 、 c 、 d 均 >0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGNM$ 中 $\because A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$

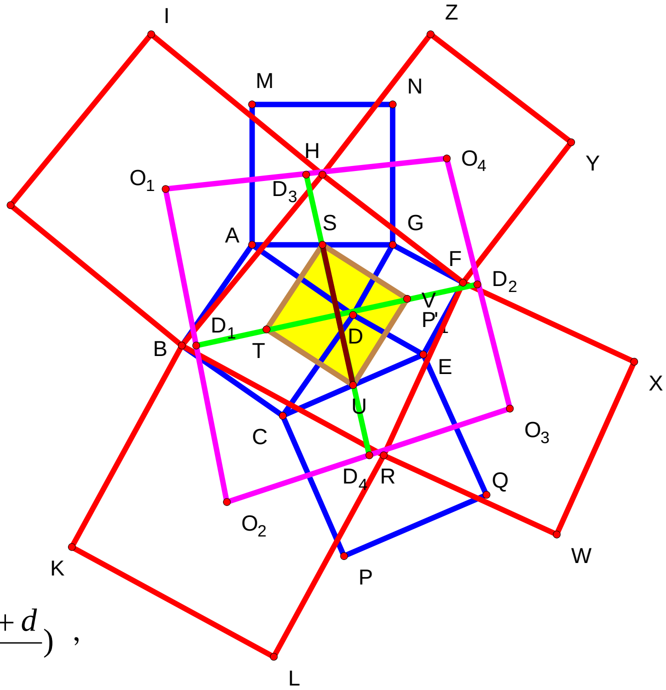
$\therefore H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$

在正方形 $CEQP$ 中 $\because C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$

$\therefore R(\dfrac{-a-b+c-d}{2},\dfrac{-a-b-c-d}{2})$

在正方形 $DEFG$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $E(b,-a)$ $\therefore$ $F(a+b,b-a)$

在正方形 $ABCD$ 中 $\because$ $D(0,0)$ 、 $A(-c,d)$ 、 $C(-d,-c)$ $\therefore$ $B(-d-c,d-c)$



在 O_1 正方形中 $\because H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$ ，

$B(-d-c,d-c)$ $\therefore O_1\,(\dfrac{-3c-b}{2},\dfrac{a+3d}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because B(-d-c,d-c)$ ， $R(\dfrac{-a-b+c-d}{2},\dfrac{-a-b-c-d}{2})$ $\therefore O_2\,(\dfrac{-a-3d}{2},\dfrac{-b-3c}{2})$

在 O_3 正方形中 $\because F(a+b,b-a)$ ， $R(\dfrac{-a-b+c-d}{2},\dfrac{-a-b-c-d}{2})$ $\therefore O_3\,(\dfrac{3b+c}{2},\dfrac{-3a-d}{2})$

在 O_4 正方形中 $\because H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$ ， $F(a+b,b-a)$ $\therefore O_4\,(\dfrac{3a+d}{2},\dfrac{3b+c}{2})$

D_3 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點， D_4 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點， D_1 爲 $\overline{O_1O_2}$ 中點， D_2 爲 $\overline{O_3O_4}$ 中點

$\therefore D_1(\dfrac{-a-b-3c-3d}{4},\dfrac{a-b-3c+3d}{4})$ ， $D_2(\dfrac{3a+3b+c+d}{4},\dfrac{-3a+3b+c-d}{4})$

$D_3(\dfrac{3a-b-3c+d}{4},\dfrac{a+3b+c+3d}{4})$ ， $D_4(\dfrac{-a+3b+c-3d}{4},\dfrac{-3a-b-3c-d}{4})$

➔ $\overline{D_3D_4}=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}=2\overline{SU}$

$\overline{D_1D_2}=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}=2\overline{TV}$ -------------- (1)

➔ $m\overline{D_3D_4}=\dfrac{2a-2b-2c+2d}{2a+2b+2c+2d}$ ， $m\overline{D_1D_2}=\dfrac{-2a-2b-2c-2d}{2a-2b-2c+2d}$

$\because m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\dfrac{a-b-c+d}{a+b+c+d}\times\dfrac{-a-b-c-d}{a-b-c+d}=-1$

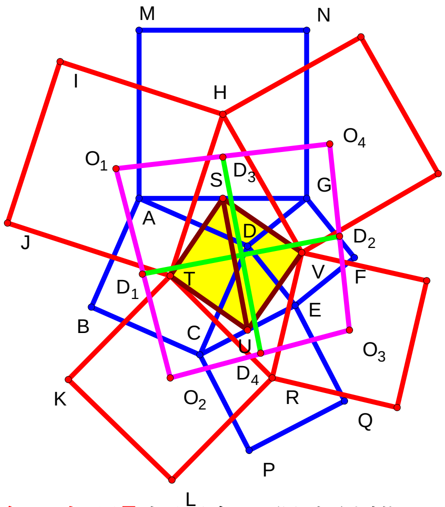
$\therefore \overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ------------------ (2)

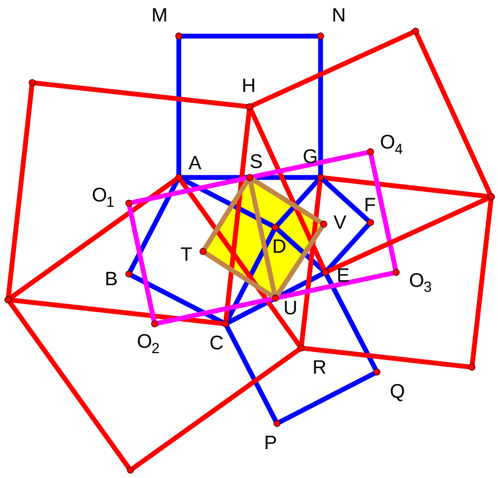
➔由 (1) (2) 知 $A[HB_{(1)}]=8\times STUV$ 面積。

【HT 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $HT_{(1)}$ ， D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 ，分別

是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證：$\overline{D_3D_4}=1.5\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=1.5\overline{TV}$，$\overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$，$A[HT_{(1)}]=4.5\times STUV$ 面積。

【證明】省略（請參考研究紀錄）





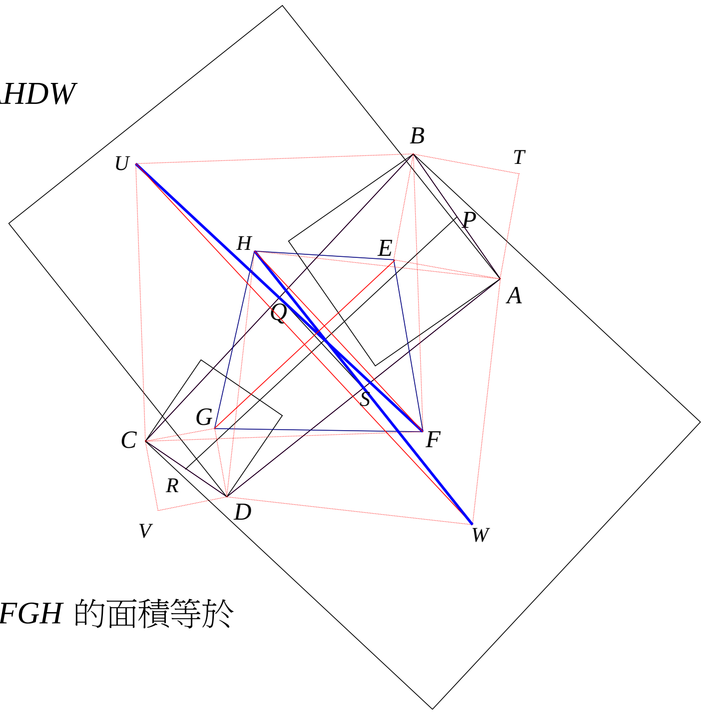
【HC 第 1 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 為 $HC_{(1)}$，試證：$HC_{(1)}$ 為長寬比為 $2:1$ 的矩形，$A[HC_{(1)}]=4\times STUV$ 面積。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。

三、討論「傑克結構」九種不同連接情況下，向傑克中心同側做正方形時，圖形或面積發展的關係與性質。

【引理 7】如下圖，四邊形 $ABCD$ 中，P、Q、R、S 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 的中點，$\overline{PR}=a$，$\overline{SQ}=b$（令 $a\ge b$），且 $\overline{PR}\perp\overline{SQ}$（垂足為 M）。若分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 為邊，向 M 的同側作四個正方形，且令 E、F、G、H 分別為四個正方形的中心點，則必 (I) $\overline{EG}=\overline{FH}$，$\overline{EG}\perp\overline{FH}$；(II)四邊形 $EFGH$ 的面積等於四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{(a-b)^2}{2ab}$ 倍。

【證明】



(1)作正方形 $AEBT$、$BFCU$、$CGDV$、$AHDW$

(2)連 $\overline{HW}$、$\overline{FU}$，則 S、Q 分別為 $\overline{HW}$、$\overline{FU}$ 中點。由引理 5 ➔ $\overline{WU}=a+b$。

(3)∵ $\overline{HS}=\overline{SW}$，$\overline{FQ}=\overline{QU}$

➔ $\overline{SQ}=\dfrac{1}{2}(\overline{WU}-\overline{FH})$ ➔ $2b=a+b-\overline{FH}$

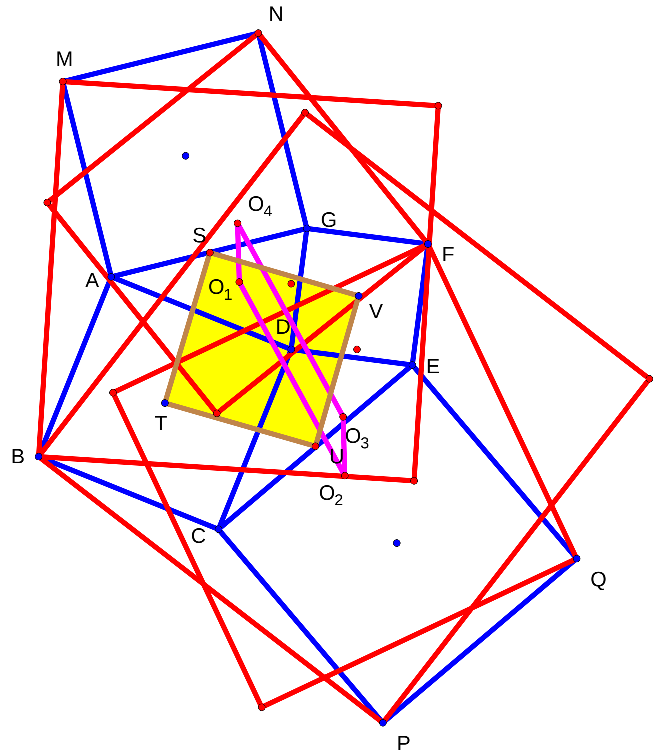
➔ $\overline{FH}=a-b$。同理可證 $\overline{EG}=a-b$。

(4)∵ $\overline{FH}\,//\,\overline{WU}$，$\overline{EG}\,//\,\overline{PR}$，且 $\overline{PR}\perp\overline{SQ}$

∴ $\overline{FH}\perp\overline{EG}$。

(5) $\dfrac{1}{2}(a-b)^2\div ab=\dfrac{(a-b)^2}{2ab}$，故四邊形 $EFGH$ 的面積等於四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{(a-b)^2}{2ab}$ 倍。

【MB 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形$O_1O_2O_3O_4$爲$MB_{(-1)}$，則(1) $A[MB_{(-1)}]$與正方形 $STUV$ 面積沒有固定倍數關係；(2) $MB_{(-1)}$是對角線相交於 D 的平行四邊形；(3) $MB_{(-2)}$是中心點爲 D 的正方形 (4) $MB_{(-3)}$會收斂至 D 。



【證明】

首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$ [假設 a 、 b 、 c 、 d 均>0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGMN$ 中 $\because A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$

$\therefore N(a+d-b,a+b+c)$ 、

$M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEPQ$ 中 $\because C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$

$\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$ 、

$P(c-a-d,-b-c-d)$

在正方形 $DEGF$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $E(b,-a)$ $\therefore F(a+b,b-a)$

在正方形 $DABC$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $A(-c,d)$ 、 $C(-d,-c)$ $\therefore B(-c-d,d-c)$

在O_1正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$，$B(-c-d,d-c)$ $\therefore O_1$ $(\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2})$

在O_2正方形中 $\because F(a+b,b-a)$，$Q(b+c-a,-a-b-d)$ $\therefore O_2$ $(\frac{c-d}{2},\frac{-c-d}{2})$

在O_3正方形中 $\because B(-c-d,d-c)$，$P(c-a-d,-b-c-d)$ $\therefore O_3$ $(\frac{b-a}{2},\frac{-a-b}{2})$

在O_4正方形中 $\because N(a+d-b,a+b+c)$，$F(a+b,b-a)$ $\therefore O_4$ $(\frac{d-c}{2},\frac{c+d}{2})$

因此O_1 、 O_3的中點是$(0,0)$，O_2 、 O_4中點也是$(0,0)$

$\therefore$四邊形$O_1O_2O_3O_4$是一個對角線相交於D的平行四邊形

由O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4的座標可知：

$MB_{(-2)}$的四個頂點座標分別是$(\frac{d-b}{2},\frac{a+c}{2})$ 、 $(\frac{-a-c}{2},\frac{d-b}{2})$ 、 $(\frac{b-d}{2},\frac{-a-c}{2})$ 、 $(\frac{a+c}{2},\frac{b-d}{2})$

$\therefore MB_{(-2)}$是中心點爲D的正方形➔ $MB_{(-3)}$會收斂至D 。

【MT 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形$O_1O_2O_3O_4$爲$MT_{(-1)}$，D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4，分別是$\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$的中點，則(1) $\overline{D_3D_4}=1.5\overline{SU}$，$\overline{D_1D_2}=0.5\overline{TV}$；(2) $A[MT_{(-1)}]$ =(正方形 $STUV$ 面積)×1.5；(3) $MT_{(-2)}$ =(正方形 $STUV$ 面積)×1；(4) $MT_{(-3)}$頂點兩兩重合。

【證明】

首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$ [假設 a 、 b 、 c 、 d 均>0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGMN$ 中 $\because A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$

$\therefore N(a+d-b,a+b+c)$ 、 $M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEPQ$ 中 $\because C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$

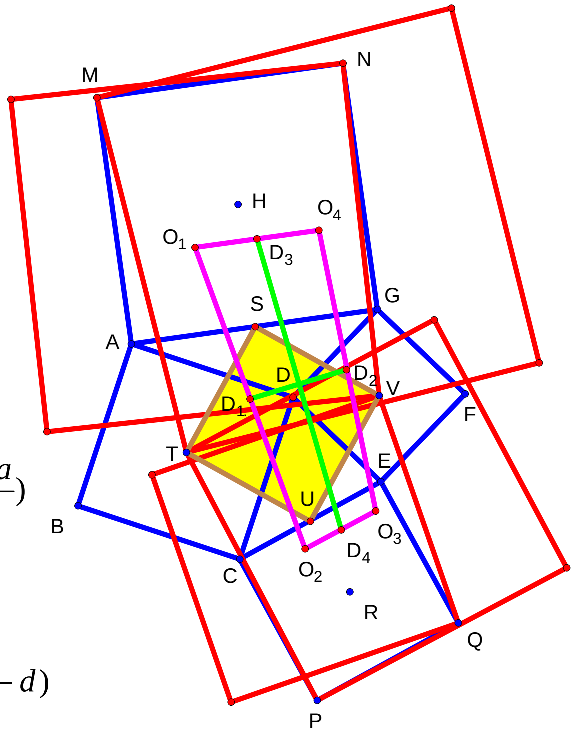
$\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$ 、 $P(c-a-d,-b-c-d)$

在正方形 $DEGF$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $E(b,-a)$

$\therefore F(a+b,b-a)$

在正方形 $DABC$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $A(-c,d)$ 、 $C(-d,-c)$

$\therefore B(-c-d,d-c)$



在 O_1 正方形中 $\because N(a+d-b,a+b+c)$ 、 $V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$

$\therefore O_1\ (\frac{-b-c+d}{2},\frac{a+c+d}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because V(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2})$ 、 $Q(b+c-a,-a-b-d)$

$\therefore O_2\ (\frac{-a+c-d}{2},\frac{-b-c-d}{2})$

在 O_3 正方形中 $\because T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$ 、 $P(c-a-d,-b-c-d)$ $\quad\therefore O_3\ (\frac{-a+b+c}{2},\frac{-a-b-d}{2})$

在 O_4 正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$ 、 $T(\frac{-c-d}{2},\frac{d-c}{2})$ $\quad\therefore O_4\ (\frac{a-b+d}{2},\frac{a+b+c}{2})$

D_3 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點， D_4 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點， D_1 爲 $\overline{O_1O_2}$ 中點， D_2 爲 $\overline{O_3O_4}$ 中點

$\therefore D_1(\frac{-a-b}{4},\frac{a-b}{4})$ 、 $D_2(\frac{c+d}{4},\frac{c-d}{4})$

$D_3(\frac{a-2b-c+2d}{4},\frac{2a+b+2c+d}{4})$ 、 $D_4(\frac{-2a+b+2c-d}{4},\frac{-a-2b-c-2d}{4})$

➔ $\overline{D_3D_4}=\dfrac{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{4}=\dfrac{3}{2}\overline{TV}$

$\overline{D_1D_2}=\dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{4}=\dfrac{1}{2}\overline{TV}$ ---------------(1)

$\because m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\dfrac{a-b-c+d}{a+b+c+d}\times\dfrac{a+b+c+d}{-a+b+c-d}=-1$ $\quad\therefore \overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ------------------(2)

➔由 (1) 、 (2) 知 $A[MT_{(1)}]=1.5\times STUV$ 面積。

再由引理 7 可知： $A[MT_{(-2)}]$=(正方形 $STUV$ 面積)×1

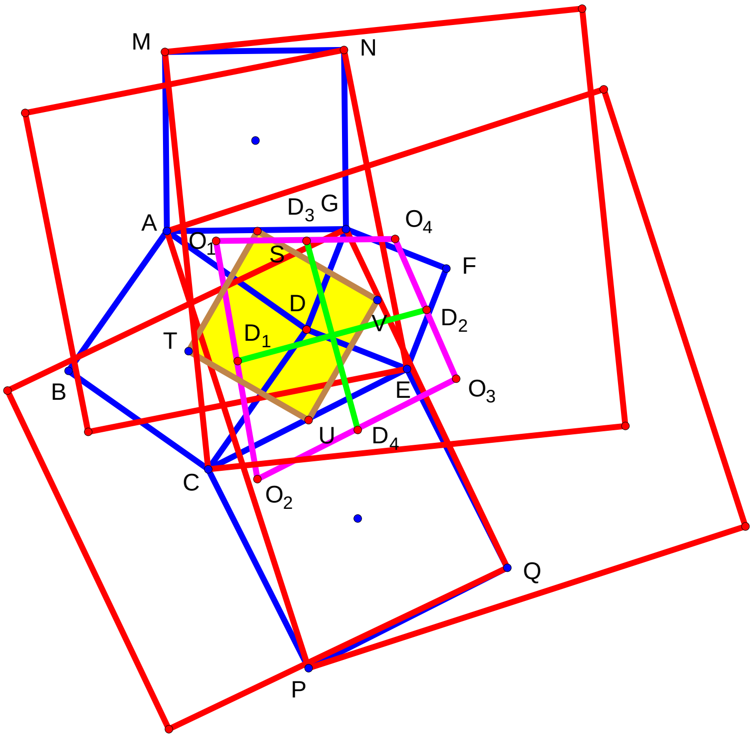
由 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 的座標可知： $MT_{(-2)}$ 的四個頂點座標分別是 $(\frac{-a-b}{2},\frac{a-b}{2})$ 、

$(\frac{-a+b+c-d}{4},\frac{-a-b-c-d}{4})$ 、 $(\frac{c+d}{2},\frac{c-d}{2})$ 、 $(\frac{a-b-c+d}{4},\frac{a+b+c+d}{4})$

➔ $MT_{(-3)}$ 其中兩頂點重疊於 $(\frac{-b+c}{4},\frac{a-d}{4})$ ，另外兩頂點重疊於 $(\frac{-a+d}{4},\frac{b-c}{4})$ 。

【MC 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $MC_{(-1)}$ ，D_1、D_2、D_3、D_4，分別是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，則(1) $\overline{D_3D_4}=\overline{SU}$ ，$\overline{D_1D_2}=\overline{TV}$ ；(2) $A[MC_{(-1)}]$=(正方形 $STUV$ 面積)$\times 2$ ；(3) $MC_{(-2)}$ 頂點兩兩重合。

【證明】



首先令 $D(0,0)$、$G(a,b)$、$A(-c,d)$

[假設 a、b、c、d 均 >0]

➔ $E(b,-a)$、$C(-d,-c)$

在正方形 $AGMN$ 中

$\because A(-c,d)$、$G(a,b)$

$\therefore N(a+d-b,a+b+c)$、

$M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEPQ$ 中

$\because C(-d,-c)$、$E(b,-a)$

$\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$、

$P(c-a-d,-b-c-d)$

在 O_1 正方形中 $\because E(b,-a)$、

$N(a+d-b,a+b+c)$

$\therefore O_1(\frac{-a-b-c+d}{2},\frac{a-b+c+d}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because G(a,b)$、

$Q(b+c-a,-a-b-d)$ $\therefore$ $O_2(\frac{-a-b+c-d}{2},\frac{a-b-c-d}{2})$

在 O_3 正方形中 $\because A(-c,d)$、$P(c-a-d,-b-c-d)$ $\therefore O_3(\frac{-a+b+c+d}{2},\frac{-a-b+c-d}{2})$

在 O_4 正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$、$C(-d,-c)$ $\therefore O_4(\frac{a-b+c+d}{2},\frac{a+b+c-d}{2})$

D_3 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點，D_4 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點，D_1 爲 $\overline{O_1O_2}$ 中點，D_2 爲 $\overline{O_3O_4}$ 中點

$\therefore D_1(\frac{-a-b}{2},\frac{a-b}{2})$ ，$D_2(\frac{c+d}{2},\frac{c-d}{2})$ $D_3(\frac{-b+d}{2},\frac{a+c}{2})$ ，$D_4(\frac{-a+c}{2},\frac{-b-d}{2})$

➔ $\overline{D_3D_4}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{2}=\overline{SU}$

，$\overline{D_1D_2}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4(ad+bc)}}{2}=\overline{TV}$ --------------(1)

➔ $m\overline{D_1D_2}=\frac{a-b-c+d}{a+b+c+d}$ ，$m\overline{D_3D_4}=\frac{a+b+c+d}{-a+b+c-d}$

$\because m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\frac{a-b-c+d}{a+b+c+d}\times\frac{a+b+c+d}{-a+b+c-d}=-1$ $\therefore \overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ -----------------(2)

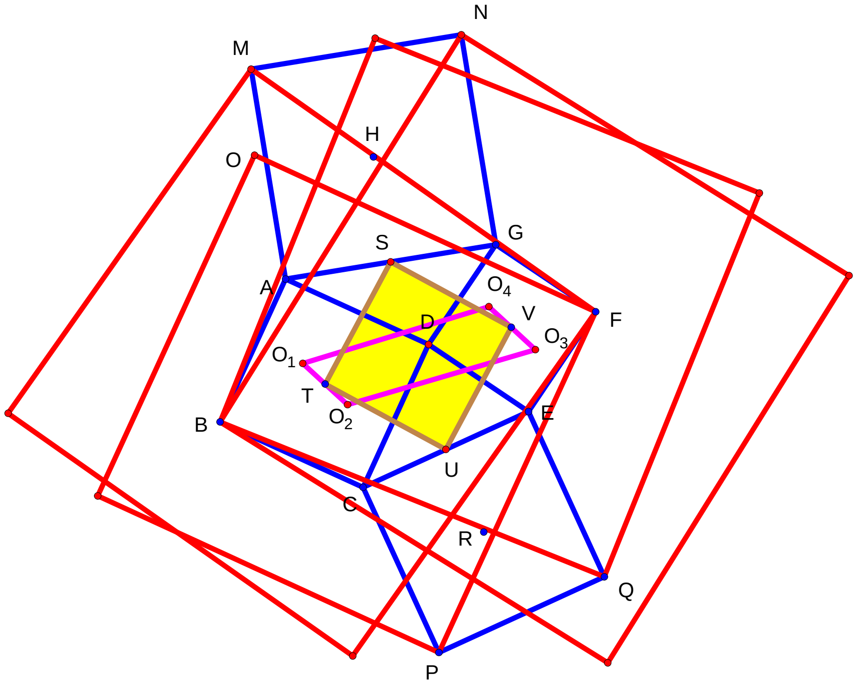
➔由 (1) (2) 知四邊形 $O_1O_2O_3O_4=\overline{D_3D_4}\times\overline{D_1D_2}=\overline{SU}^2$

此外，由 O_1、O_2、O_3、O_4 的座標可知：

$MC_{(-2)}$ 其中兩頂點重合於 $D(0,0)$，另兩頂點重合於 $(\frac{-a-b+c+d}{2},\frac{a-b+c-d}{2})$。

【NB 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $NB_{(-1)}$，則(1) $A[NB_{(-1)}]$ 與正方形 $STUV$ 面積沒有固定倍數關係；(2) $NB_{(-2)}$ 是中心點爲 D 的正方形；(3) $NB_{(-3)}$ 會收斂成爲一點。

【證明】首先令 $D(0,0)$、$G(a,b)$、$A(-c,d)$ [假設 a、b、c、d 均 >0]



➔ $E(b,-a)$、$C(-d,-c)$

在正方形 $AGMN$ 中

$\because A(-c,d)$、$G(a,b)$

$\therefore N(a+d-b,a+b+c)$、$M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEPQ$ 中

$\because C(-d,-c)$、$E(b,-a)$

$\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$、$P(c-a-d,-b-c-d)$

在正方形 $ABCD$ 中

$\because A(-c,d)$、$C(-d,-c)$

$\therefore B(-c-d,d-c)$

在正方形 $DEFG$ 中

$\because E(b,-a)$、$G(a,b)$ $\therefore F(a+b,b-a)$

在 O_1 正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$，$F(a+b,b-a)$ $\therefore O_1(\frac{-a+b-2c}{2},\frac{-a-b+2d}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because F(a+b,b-a)$，$P(c-a-d,-b-c-d)$ $\therefore O_2(\frac{a-b-2d}{2},\frac{a+b-2c}{2})$

在 O_3 正方形中 $\because N(a+d-b,a+b+c)$，$B(-c-d,d-c)$ $\therefore O_3(\frac{2a+c-d}{2},\frac{2b-c-d}{2})$

在 O_4 正方形中 $\because B(-c-d,d-c)$，$Q(b+c-a,-a-b-d)$ $\therefore O_4(\frac{2b-c+d}{2},\frac{-2a+c+d}{2})$

➔ $\overline{O_1O_4}=\overline{O_2O_3}=\overline{TV}$

由 O_1、O_2、O_3、O_4 的座標可知：

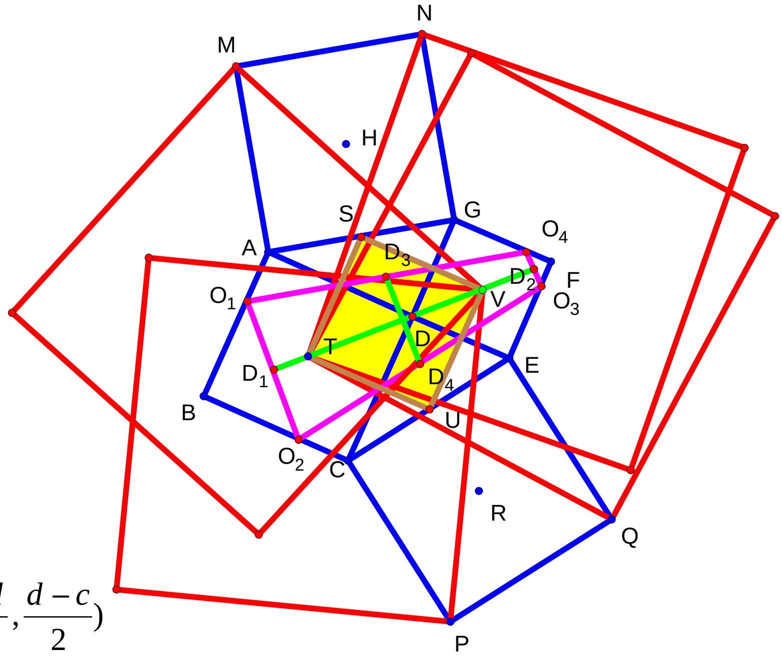
$NB_{(-2)}$ 的四個頂點座標分別是 $(\frac{2a+2b-c-d}{2},\frac{-2a+2b-c+d}{2})$、$(\frac{2a-b-d}{2},\frac{a+2b-c}{2})$、$(\frac{-a-b}{2},\frac{a-b}{2})$、$(\frac{-a+2b-c}{2},\frac{-2a-b+d}{2})$

$\therefore NB_{(-2)}$ 是中心點爲 $(\frac{a+b-c-d}{4},\frac{-a+b-c+d}{4})$ 的正方形

➔ $NB_{(-3)}$ 會收斂至 $(\dfrac{a+b-c-d}{4},\dfrac{-a+b-c+d}{4})$ 。

【NT 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $NT_{(-1)}$ ， D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 ，分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_1O_4}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，則 (1) $\overline{D_3D_4}=0.5\overline{SU}$ ，$\overline{D_1D_2}=1.5\overline{TV}$ ； (2) $A[NT_{(-1)}]$=(正方形 $STUV$ 面積)×1.5 ；(3) $A[NT_{(-2)}]$=(正方形 $STUV$ 面積)×1 ；(4) $NT_{(-3)}$ 頂點兩兩重合。

【證明】



首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$

[假設 a 、 b 、 c 、 d 均 >0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGMN$ 中 $\because A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$ $\therefore N(a+d-b,a+b+c)$ 、 $M(d-b-c,a+c+d)$

在正方形 $CEPQ$ 中

$\because C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$

$\therefore Q(b+c-a,-a-b-d)$ 、 $P(c-a-d,-b-c-d)$

在正方形 $ABCD$ 中

$\because A(-c,d)$ 、 $C(-d,-c)$ $\therefore$ $T(\dfrac{-c-d}{2},\dfrac{d-c}{2})$

在正方形 $DEFG$ 中 $\because E(b,-a)$ 、 $G(a,b)$ $\therefore$ $V(\dfrac{b+a}{2},\dfrac{b-a}{2})$

在 O_1 正方形中 $\because M(d-b-c,a+c+d)$ ， $V(\dfrac{b+a}{2},\dfrac{b-a}{2})$ $\therefore O_1(\dfrac{-a-2c}{2},\dfrac{-b+2d}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because P(c-a-d,-b-c-d)$ ， $V(\dfrac{b+a}{2},\dfrac{b-a}{2})$ $\therefore O_2(\dfrac{-b-2d}{2},\dfrac{a-2c}{2})$

在 O_3 正方形中 $\because Q(b+c-a,-a-b-d)$ ， $T(\dfrac{-c-d}{2},\dfrac{d-c}{2})$ $\therefore O_3(\dfrac{2b+d}{2},\dfrac{-2a+c}{2})$

在 O_4 正方形中 $\because N(a+d-b,a+b+c)$ ， $T(\dfrac{-c-d}{2},\dfrac{d-c}{2})$ $\therefore O_4(\dfrac{2a+c}{2},\dfrac{2b-d}{2})$

D_1 爲 $\overline{O_1O_2}$ 中點， D_2 爲 $\overline{O_3O_4}$ 中點， D_3 爲 $\overline{O_1O_4}$ 中點， D_4 爲 $\overline{O_2O_3}$ 中點

$\therefore D_1(\dfrac{-a-b-2c-2d}{4},\dfrac{a-b-2c+2d}{4})$ ， $D_2(\dfrac{2a+2b+c+d}{4},\dfrac{-2a+2b+c-d}{4})$

$D_3(\dfrac{a-c}{4},\dfrac{b+d}{4})$ ， $D_4(\dfrac{b-d}{4},\dfrac{-a-c}{4})$

➔ $\overline{D_3D_4}=0.5\overline{SU}$ ， $\overline{D_1D_2}=1.5\overline{TV}$ --------------- (1)

➔ $m\overline{D_1D_2}=\dfrac{a-b-c+d}{a+b+c+d}$ ， $m\overline{D_3D_4}=\dfrac{a+b+c+d}{-a+b+c-d}$

$\because m\overline{D_3D_4}\times m\overline{D_1D_2}=\dfrac{a-b-c+d}{a+b+c+d}\times\dfrac{a+b+c+d}{-a+b+c-d}=-1 \quad \therefore \overline{D_3D_4}\perp\overline{D_1D_2}$ ------------------ (2)

➔由(1) (2) 知 $A[NT_{(1)}]=1.5\times STUV$ 面積。

再由引理 7 可知： $A[NT_{(-2)}]$=(正方形 $STUV$ 面積)$\times 1$

由 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 的座標可知：

$NT_{(-2)}$ 的四個頂點座標分別是 $(\dfrac{c+d}{2},\dfrac{c-d}{2})$ 、 $(\dfrac{3a+b-3c-d}{4},\dfrac{-a+3b-c+3d}{4})$ 、

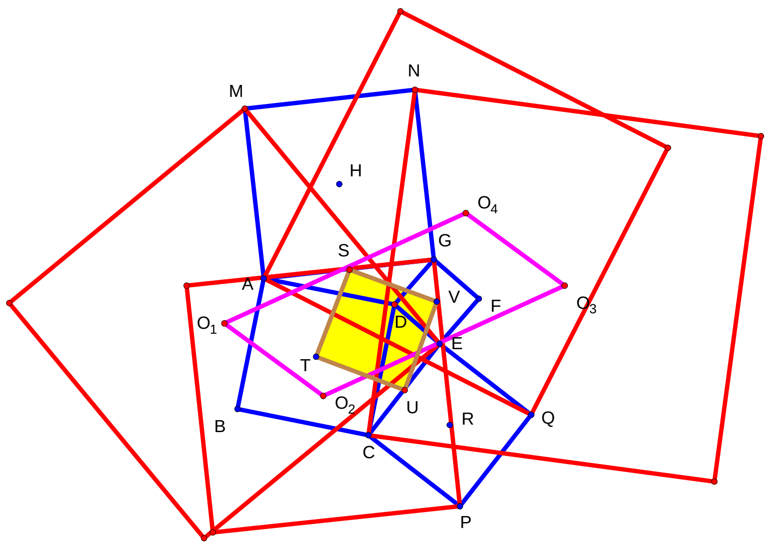
$(\dfrac{-a-b}{2},\dfrac{a-b}{2})$ 、 $(\dfrac{a+3b-c-3d}{2},\dfrac{-3a+b-3c+d}{2})$

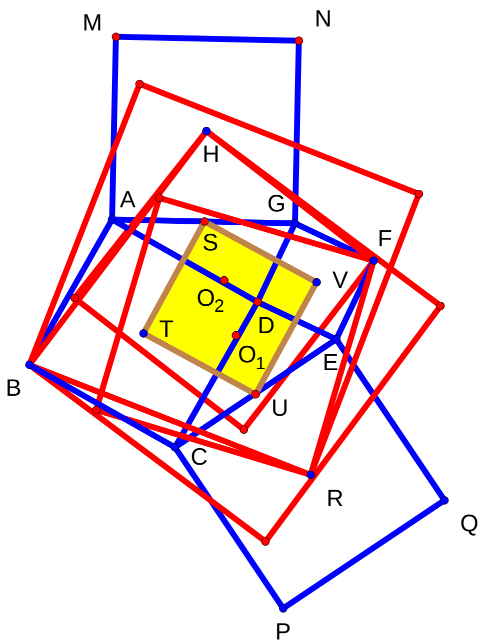
➔ $NT_{(-3)}$ 其中兩頂點重疊於 $(\dfrac{2a-b+c-2d}{4},\dfrac{a+2b-2c-d}{4})$ ，另外兩頂點重疊於

$(\dfrac{-a+2b-2c+d}{4},\dfrac{-2a-b+c+2d}{4})$ 。

【NC 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $NC_{(-1)}$ ，則(1) $A[NC_{(-1)}]$與正方形 $STUV$ 面積沒有固定倍數關係；(2) $NC_{(-1)}$ 是對角線相交於 D 的平行四邊形；(3) $NC_{(-2)}$ 是中心點爲 D 的正方形；(4) $NC_{(-3)}$ 會收斂爲一點。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。





【HB 第 2 定理】如圖有一傑克結構，若分別以 $\overline{HB}$ 、 $\overline{BR}$ 、 $\overline{RF}$ 、 $\overline{HF}$ 爲邊向 D 的同側作四個正方形，則 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是這四個正方形的中心點，且 O_1 、 O_3 重合， O_2 、 O_4 重合。

【證明】

首先令 $D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $A(-c,d)$ [假設 a 、 b 、 c 、 d 均 >0]

➔ $E(b,-a)$ 、 $C(-d,-c)$

在正方形 $AGMN$ 中 $\because A(-c,d)$ 、 $G(a,b)$ $\therefore H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$

在正方形 $CEPQ$ 中 $\because C(-d,-c)$ 、 $E(b,-a)$ $\therefore R(\dfrac{-a+b+c-d}{2},\dfrac{-a-b-c-d}{2})$

在正方形 $DEGF$ 中 $\because D(0,0)$ 、 $G(a,b)$ 、 $E(b,-a)$ $\therefore$ $F(a+b,b-a)$

在正方形 $DABC$ 中 $\because$ $D(0,0)$ 、 $A(-c,d)$ 、 $C(-d,-c)$ $\therefore$ $B(-d-c,d-c)$

在 O_1 正方形中 $\because H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$ ， $B(-d-c,d-c)$ $\therefore O_1(\dfrac{a-d}{2},\dfrac{b-c}{2})$

在 O_2 正方形中 $\because B(-d-c,d-c)$ ， $R(\dfrac{-a+b+c-d}{2},\dfrac{-a-b-c-d}{2})$ $\therefore O_2(\dfrac{b-c}{2},\dfrac{d-a}{2})$

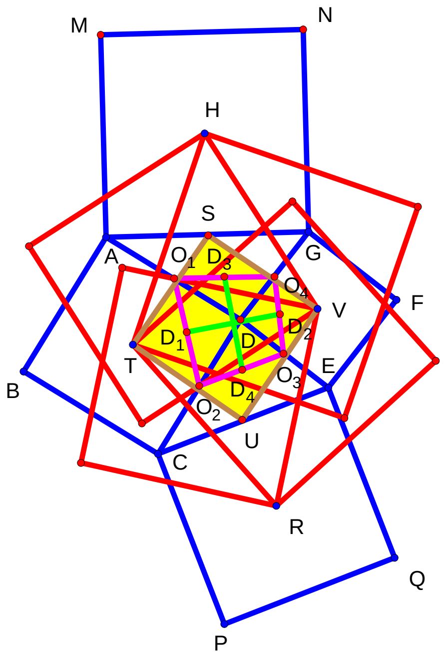
在 O_3 正方形中 $\because F(a+b,b-a)$ ， $R(\dfrac{-a+b+c-d}{2},\dfrac{-a-b-c-d}{2})$ $\therefore O_3(\dfrac{a-d}{2},\dfrac{b-c}{2})$

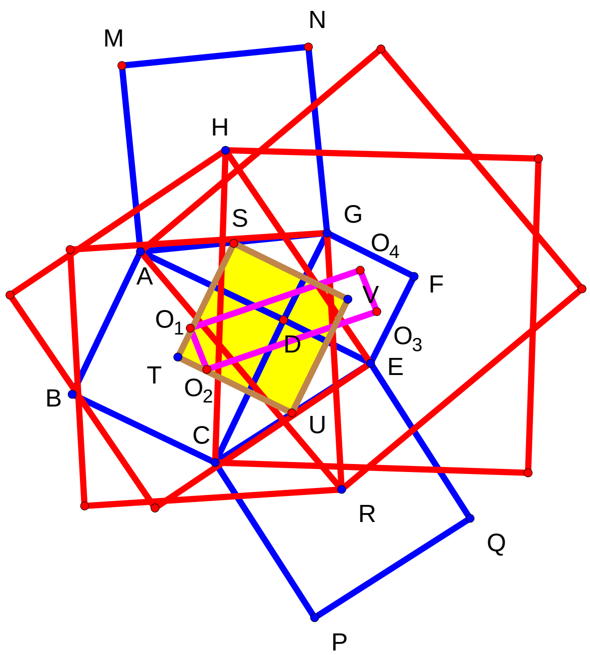
在 O_4 正方形中 $\because H(\dfrac{a-b-c+d}{2},\dfrac{a+b+c+d}{2})$ ， $F(a+b,b-a)$ $\therefore O_4(\dfrac{b-c}{2},\dfrac{d-a}{2})$

證得： O_1 、 O_3 重合， O_2 、 O_4 重合。

【HT 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $HT_{(-1)}$ ， D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_1O_4}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，則 (1) $\overline{D_3D_4}=0.5\overline{SU}$ ，$\overline{D_1D_2}=0.5\overline{TV}$ ；(2) $A[HT_{(-1)}]=$(正方形 $STUV$ 面積)$\times 0.5$ ；(3) $HT_{(-2)}$ 頂點兩兩重合。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。





【HC 第 2 定理】如圖有一傑克結構，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 爲 $HC_{(-1)}$ ，則 (1) $A[HC_{(-1)}]$ 與正方形 $STUV$ 面積沒有固定倍數關係，且 $HC_{(-1)}$ 是對角線相交於 D 的平行四邊形；(2) $HC_{(-2)}$ 是中心點爲 D 的正方形；(3) $HC_{(-3)}$ 會收斂爲一點。

【證明】省略（請參考研究紀錄）。

柒、研究結論

一、傑克密碼（假設「傑克結構」（Jack Structure）的「基準正方形」（Reference Square）面積爲 1）：

	$A[MB_{(i)}]$	$A[MT_{(i)}]$	$A[MC_{(i)}]$	$A[NB_{(i)}]$	$A[NT_{(i)}]$	$A[NC_{(i)}]$	$A[HB_{(i)}]$	$A[HT_{(i)}]$	$A[HC_{(i)}]$
$i=1$	12	7.5	6	12	7.5	8	8	4.5	4
$i=2$	25	16	16	25	16	16	16	9	9
$i=3$	50	32	32	50	32	32	32	18	18
$i=4$	100	64	64	100	64	64	64	36	36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

二、傑克密碼上永恆與無盡之美：

(一) 對於任一個「傑克結構」（Jack Structure）而言，假設其「基準正方形」（Reference Square）的面積爲 1，以下關係式恆成立。

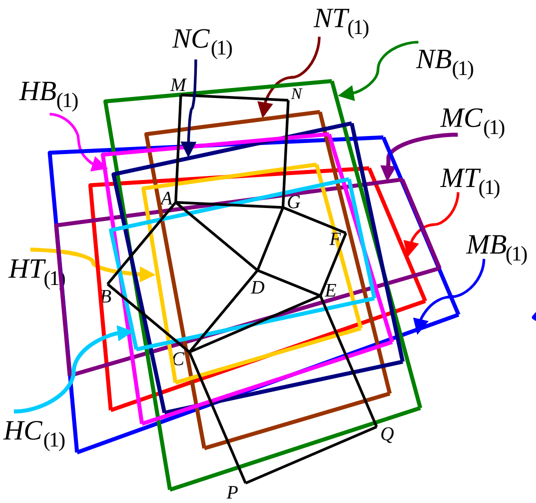
1. $A[MB_{(1)}]=12$ ， $A[MB_{(n)}]=25\times 2^{n-2}$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）
2. $A[MT_{(1)}]=7.5$ ， $A[MT_{(n)}]=16\times 2^{n-2}$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）
3. $A[MC_{(1)}]=6$ ， $A[MC_{(n)}]=16\times 2^{n-2}$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）
4. $A[NB_{(1)}]=12$ ， $A[NB_{(n)}]=25\times 2^{n-2}$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）
5. $A[NT_{(1)}]=7.5$ ， $A[NT_{(n)}]=16\times 2^{n-2}$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）
6. $A[NC_{(n)}]=2^{n+2}$ （ $n\in N$ ）
7. $A[HB_{(n)}]=2^{n+2}$ （ $n\in N$ ）
8. $A[HT_{(n)}]=9\times 2^{n-2}$ （ $n\in N$ ）
9. $A[HC_{(1)}]=4$ ， $A[HC_{(n)}]=9\times 2^{n-2}$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）

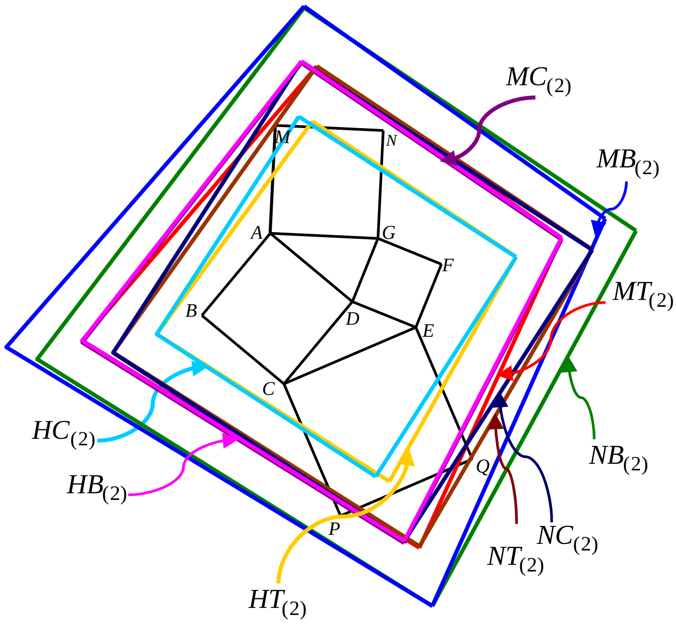
(二)對於同一個「傑克結構」（Jack Structure）而言，以下關係式恆成立。

1. $A[MB_{(n)}]=A[NB_{(n)}]$ （ $n\in N$ ）
2. $A[MT_{(n)}]=A[NT_{(n)}]$ （ $n\in N$ ）
3. $A[NC_{(n)}]=A[HB_{(n)}]$ （ $n\in N$ ）
4. $A[MB_{(n)}]=A[MT_{(n)}]+A[HT_{(n)}]=A[NT_{(n)}]+A[HT_{(n)}]=A[NC_{(n)}]+A[HC_{(n)}]$
   $=A[HB_{(n)}]+A[HC_{(n)}]$ （ $n\in N$ ）
5. $A[MT_{(n)}]=A[MC_{(n)}]$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）
6. $A[MC_{(n)}]=A[MT_{(n)}]=A[NC_{(n)}]$ （ $n\geq 2$ ， $n\in N$ ）

7. $A[MT_{(n)}]+A[HC_{(n)}]=A[MC_{(n)}]+A[HT_{(n)}]=A[MC_{(n)}]+A[HC_{(n)}]=A[NC_{(n)}]+A[HT_{(n)}]$
$=A[HB_{(n)}]+A[HT_{(n)}]=A[MB_{(n)}]$（$n\geq 2$， $n\in N$）

8. 當 $n\geq 2$， $n\in N$ 時，若 $A[HT_{(n)}]=A[HC_{(n)}]=(3a)^2$（$a>0$），則
$A[MT_{(n)}]=A[MC_{(n)}]=A[NC_{(n)}]=A[NT_{(n)}]=A[HB_{(n)}]=(4a)^2$，且
$A[MB_{(n)}]=A[NB_{(n)}]=(5a)^2$。





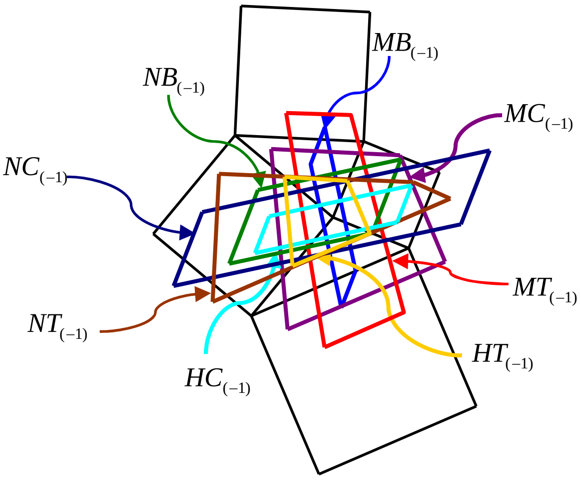
(三) 對於任一個「傑克結構」(Jack Structure）而言，假設其「基準正方形」(Reference Square）的面積爲 1，以下的圖形性質恆成立。

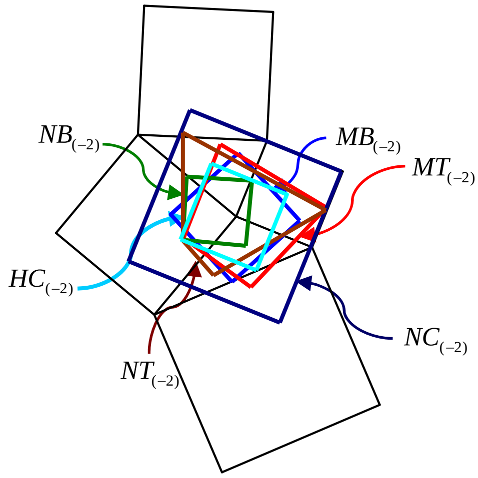
	$A[MB_{(i)}]$	$A[MT_{(i)}]$	$A[MC_{(i)}]$	$A[NB_{(i)}]$	$A[NT_{(i)}]$	$A[NC_{(i)}]$	$A[HB_{(i)}]$	$A[HT_{(i)}]$	$A[HC_{(i)}]$
$i=-1$	不確定	1.5	2	不確定	1.5	不確定	0 收斂至兩點	0.5	不確定
$i=-2$	不確定	1	0 收斂至兩點	不確定	1	不確定		0 收斂至兩點	不確定
$i=-3$	0 收斂至 D	0 收斂至兩點		0 收斂至 D	0 收斂至兩點	0 收斂至一點			0 收斂至一點

(四) 對於同一個「傑克結構」(Jack Structure）而言，以下關係式恆成立。

1. $A[MT_{(-1)}]=A[NT_{(-1)}]$， $A[MT_{(-2)}]=A[NT_{(-2)}]=$ 基準正方形 $STUV$ 面積

2. $A[MC_{(-1)}]=A[MT_{(-1)}]+A[HT_{(-1)}]=A[NT_{(-1)}]+A[HT_{(-1)}]$。





捌、心得感想

從推理幾何到解析幾何，從「向外」發展轉至「向內」發展，從無限大回歸零，「傑克結構」上「心心相連」的四邊形面積，到處充滿令人驚歎的發現。我們打趣的說，說不定這些關係與宇宙間某種自然現象的發展與形成，也有著高度的相關性。無論如何，這趟神奇、有趣的研究之旅，提高了我們對數學學習的態度及興趣，也期望這份報告能具有實質的理論或應用價值。

捌、參考資料

一、葉芸瑄、陳以箴《中華民國第四十六屆中小學科學展覽會國中數學組第二名作品「神奇的傑克」》；民 95.7。

二、洪有情主編《國中數學第五冊》；台北市：康軒出版社；民 95.8。

三、林福來主編《高中數學第一冊》；台南市；南一書局；民 93.8。

四、嚴鎮軍主編《初中數學競賽教程》；台北市；九章出版社；民 88.11。

【評　語】　030401　傑克密碼

1. 研究討論相當完整充實。

2. 有深度，但研究必要性之說明可加強。