

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 理化科

第一名

031602

液體交流道

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 國一 陳柏言 國一 陳亮瑄 國一 李祥	指導老師： 陳忠城 邱莉華
----------------------------------	---------------------

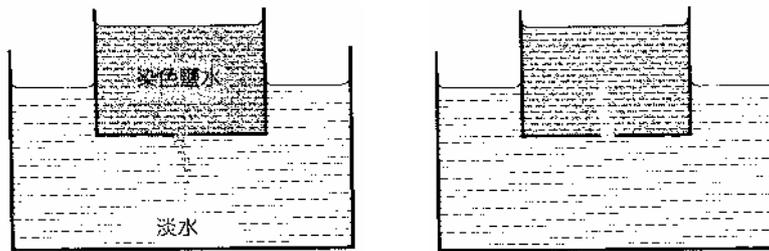
關鍵詞：密度 壓力 擾動

摘要

本實驗主要研究在不同密度的液體之間設計出一條細窄通道，使其發生交流振盪的現象，嘗試解釋其發生的原因，並找出下降(上升)高度變因的關係式，以及影響震盪週期的變因，實驗測量出的結果與理論推論的趨勢相吻合。

壹、研究動機

將一杯裝有密度較大的液體小容器，置於一個裝有密度較小的大水槽內，在下方鑽一小洞時，兩液體混合的過程是相當奇特的，首先是密度大的液體往下流，接著是密度小的液體往上流，依次往返進行。這種震盪會持續進行相當長的一段時間，為什麼會有這種溶液互換的震盪，與哪些因素有關？週期會如何決定？



我們在『物理馬戲團』書中，讀到這個鹽水震盪的現象，覺得非常奇怪，立刻上網查資料，卻沒有任何下文，另外在師大物理系黃福坤教授的網站上，有人發表相同的問題，卻也沒有人回答，在指導老師的建議下，轉往台灣科學教育館的網站上，遍查近三十年的科展資料，也沒有人對此現象加以研究，使我們對這個現象更加好奇，因此決定以這個主題做進一步的了解。

在國中生活科技的課程中，不相溶的液體混合而平衡時，密度大的液體會在兩種溶液的下方，密度小的液體應在上方。上面的現象，若是只與密度有關，上方液體可能一直往下流光才會停止。在課程中也提到，壓力與液體密度、液體深度成正比，兩容器相通時，壓力大的地方會驅使液體往壓力小的地方流動。

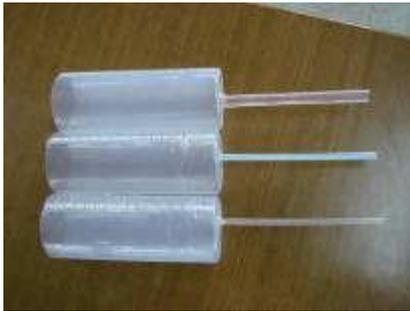
無論是密度或壓力應該都是影響的因素，如何自行設計一個實驗儀器來考慮不同變因對此現象造成不同的變化，對我們都是相當大的挑戰，從閱讀國中教材、理解教材的意義，針對不同變因設計儀器，這過程有時枯燥、有時有趣、有時艱澀，若能將自己的想法以實驗來驗證，或是設法探討理論來解釋實驗結果，也許就是實驗所帶給我們的最大樂趣。

貳、研究目的

- 一.研究『物理馬戲團』這本書裡有關液體互換的振盪現象。
- 二.解釋不同密度的液體在自行設計的細管中產生交流現象的原因。
- 三.找出本實驗中液體第一次下降的高度及第一次上升高度的關係式。
- 四.找出本實驗液體交流震盪時，影響週期的變因。

參、研究設備及器材

比重計(最小刻度 0.002 g/cm^3)、微量天平(0.1 克)、鹽(NaCl)、奶茶(統一麥香)、碼錶、50c.c.量筒、滴管、溫度計、紙尺、游標尺、數位相機、熱熔膠、塑膠圓筒、吸管、魚缸(長 45cm×寬 36cm×高 45cm)等，裝置如照片所示。



肆、研究過程及方法

一、液體密度測定

(一)水密度 d_1 的測定

使用比重計，測量水的密度，雖然純水的密度會隨溫度改變，但實驗室的水略有雜質在室溫 $18^{\circ}\text{C}\sim 21^{\circ}\text{C}$ 之間，我們用三個比重計測量均是 1.000 g/cm^3 ，故視為定值。

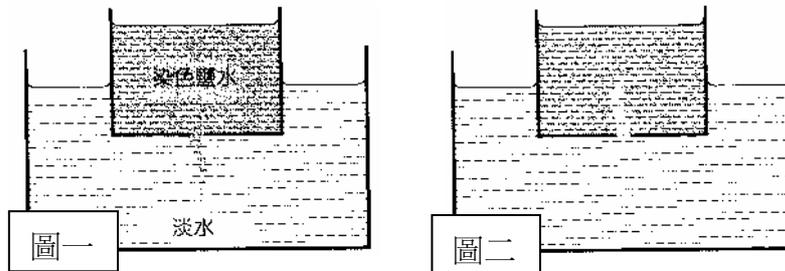
(二)液體密度 d_2 的調整與測定

奶茶具有懸浮微粒且顏色較深容易觀察，故本實驗以統一麥香奶茶加入鹽來改變密度，在實驗過程中利用比重計測量密度。

二、驗證物理馬戲團這本書中有關鹽水震盪的實驗

(一)測試一

- 1.將小圓筒底部鑽一小洞，再用膠帶黏住，加入密度大的溶液後，使其漂浮在水中，再撕開底部的膠帶，結果不可能呈現如書中的(圖一)情形。



- 2.事實上，在圖(一)時，圓筒一放入，因其密度較大，故筒外的水面會高於筒內，此後的水不斷湧入，圓筒繼續下沉，不可能有液體互換震盪的現象。

(二)測試二

- 1.將測試一的小圓筒固定在大水槽中，使其筒內液面高於筒外，再撕開底部的膠帶，出現如圖一的現象。
- 2.筒內的液體持續流出，當筒內液面開始低於大容器液面仍會持續流出，一直到某個高度後，液體出現不明顯而且斷斷續續的流動，此時可能是發生如書上所說的，筒內流出微量液體，筒外隨後流入微量的水，或者兩者同時發生，因不易觀察，故不可得知。但絕對不會出現如圖二筒內液面比筒外液面高時，有逆流的現象。

(三)由測試一、二我們提出一些想法

- 1.這本書應說明清楚，小容器必須固定在大容器上。
- 2.圖二是不可能發生的，一定是在桶內液面比筒外液面低的時候，才可能有逆流現象。
- 3.書中所提溶液互換的振盪並不明顯，所以我們決定自行設計一個裝置來了解這個現象

三、液體交流道現象

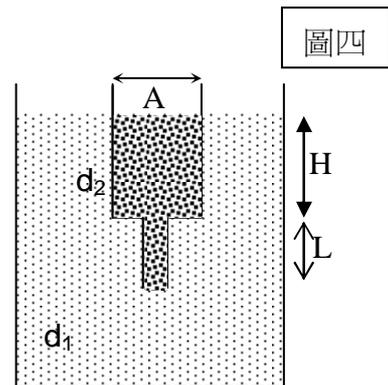
(一)觀察液體交流道實驗裝置

- 1.以一魚缸做為大容器：容器截面積甚大，在內部注水，水的密度為 d_1 ，水面深度不會受到小圓筒液面的升降而改變。

2. 塑膠製圓筒：將密度較大的液體($d_2 > d_1$)裝入圓筒，圓筒截面積為 A ，表面貼一刻度表，觀察液面高度 H ，其刻度的最小單位為 mm 。因為細管連接圓筒時，會有些微距離(0.50cm)伸入圓筒中，所以在求取液面初始高度 H 時，要修正此數值。
3. 塑膠製細管：將長為 L 的細管接於圓筒下方，提供液體進出圓筒的管道，方便觀察液體進出的時間。



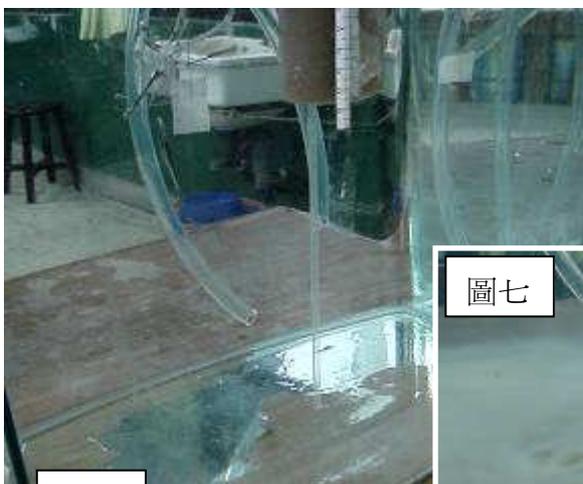
圖三



圖四

(二)圓筒內的液面高度與圓筒外的高度相同時($H=11\text{cm}$)

1. 將粘性甚佳的膠帶貼於管口，若黏性不佳，可於實驗中觀察到滲漏現象。加入密度 $d_2 = 1.180 \text{ g/cm}^3$ 的液體，過程中應避免細管中間夾有空氣與氣泡的出現。將圓筒固定在大容器邊緣，可用熱熔膠與膠帶幫助，固定時需注意液面與刻度尺保持垂直，這樣才能確定安裝在鉛直方向，方便正確的讀取液面高度 H 。
2. 將大容器擦拭乾淨，用塑膠管將大容器裝水，溫度計測量水溫及比重計測量水的密度 d_1 ，水面一直加到與圓筒內液體的高度 H 一致。
3. 撕開管口膠帶，可見圓筒內液面一直下降，密度較大的液體沉入大容器底部，直到 $H=6.50\text{cm}$ ，此後水反而經由細管流入，圓筒內液面上升，然後又再下降，如此週而復始的發生，我們稱細管為液體交流道。



圖五



圖七



圖六

(三)圓筒內的液面高度較桶外水面低 3cm(H=8 cm)

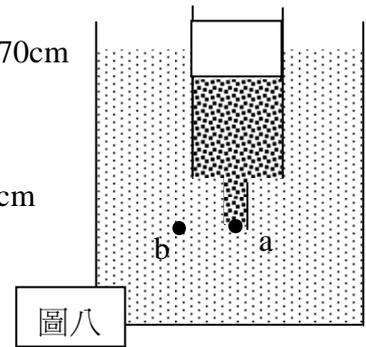
1.同(二)的操作，觀察到圓筒內液體先向下流出，直到 H=6.70cm，水反而經由細管流入，後來也發生液體交流的現象。

2.經由計算可知，一開始 a 點所產生的液體壓力較 b 點大。

$$d_1 = 1.000 \text{ g/cm}^3, d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3, H = 8.00 \text{ cm}, L = 20.00 \text{ cm}$$

$$P_a = (8.00 + 20.00) \cdot 1.190 = 33.32 \text{ g/cm}^2$$

$$P_b = (11.00 + 20.00) \cdot 1.000 = 31.00 \text{ g/cm}^2 \quad P_a > P_b$$



圖八

(四)圓筒內的液面高度較桶外水面低 6cm(H=5cm)

1.同(二)的操作，觀察到圓筒外的水先流入細管，方向向上，直到筒內液面上升到某一高度，才又向下流，後來也發生液體交流的現象。

2.經由計算可知，一開始 a 點所產生的液體壓力較 b 點小。

$$d_1 = 1.000 \text{ g/cm}^3, d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3, H = 5.00 \text{ cm}, L = 20.00 \text{ cm}$$

$$P_a = (5.00 + 20.00) \cdot 1.190 = 29.75 \text{ g/cm}^2$$

$$P_b = (11.00 + 20.00) \cdot 1.000 = 31.00 \text{ g/cm}^2 \quad P_a < P_b$$

(五)由前面的四個現象，我們認為流出細管或流入細管主要是由液體的壓力所決定，從實驗中，可以觀察到圓筒內外的液體不斷的透過細管發生交流震盪，故圓筒內液體的密度會一直變小，為了滿足我們所設定的控制變因，故只取圓筒內第一次下降的高度及第一次上升的高度，做為探討變因的推導。

1.推導出液面第一次下降高度 Δh_1 的關係式

大容器內裝有密度為 d_1 的液體，其內固定一個截面積為 A 的圓筒，底部接通一長為 L 的細管，圓筒內注入密度為 d_2 的有色混濁液體($d_2 > d_1$)，直到液面高度為 H 為止，此時內外的液面高度相等，a 點所產生的液體壓力較 b 點大，打開細管下端開口處，密度大的液體從細管底部流入大容器，直到兩者壓力相同，液面下降高度 Δh_1 ，在不考慮流體受到的阻力的理想情形下，第一次平衡時， $P_a = P_b$

壓力 $P = h \text{ 深度} \times d \text{ 密度 (gw/cm}^2)$

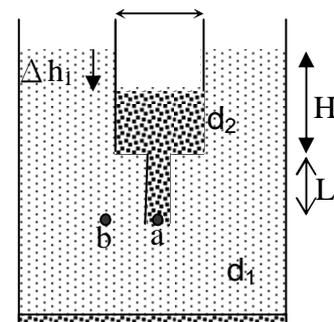
$$d_1(H + L) = d_2(H + L - \Delta h_1)$$

$$d_1(H + L) = d_2(H + L) - d_2 \cdot \Delta h_1$$

$$d_2 \cdot \Delta h_1 = (d_2 - d_1)(H + L)$$

$$\Delta h_1 = \frac{d_2 - d_1}{d_2} \cdot (H + L) = \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \cdot (H + L)$$

圖九



2.推導出液面第一次上升高度 Δh_2 的關係式

圓筒內的液面下降 Δh_1 之後，液體開始回流，雖然回流過程在圓柱筒中液體會相互混合，但總重量不變，混合液的壓力與兩層液體分開時的壓力相同，以此推算較容易，設密度 d_1 的液體回流時，圓筒內液面上升的最大高度為 Δh_2 ，此時仍滿足細管下端內外壓力相等。 $P_b = d_1(H + L)$

管內密度 d_2 的液體高度只剩 $(H - \Delta h_1)$ ，此時密度 d_1 的水回流佔據長為 L 的細管，液面的高度增加 Δh_2

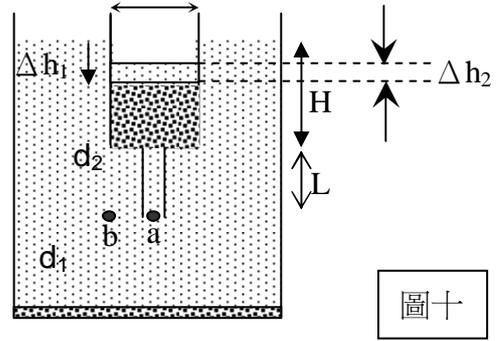
$$P_a = d_2(H - \Delta h_1) + d_1L + d_1 \cdot \Delta h_2$$

將上面結果 Δh_1 代入，且 $P_a = P_b$

$$d_1(H+L) = d_2H - d_2 \cdot \Delta h_1 + d_1L + d_1 \cdot \Delta h_2$$

$$d_1(H+L) = d_2H - (d_2 - d_1)(H+L) + d_1L + d_1 \cdot \Delta h_2$$

$$\Delta h_2 = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot L$$



(六)由此我們可以了解，實驗設計中的液體交流現象與震盪現象一定會發生，接下來，我們打算以實驗數據來驗證上述所推論的 Δh_1 ， Δh_2 的式子是否成立，並嘗試解釋震盪現象發生的原因，以及找出影響週期變因有那些？

四. 實驗操作的步驟

- (一)固定圓筒內液體的起始高度 H 、細管長度 L ，改變液體密度 d_2 ，測量筒內液面上升(下降)的高度 Δh 及其對應的時間 T 。
- (二)固定圓筒內液體的密度 d_2 、細管長度 L ，改變圓筒內液體的起始高度 H ，測量筒內液面上升(下降)的高度 Δh 及其對應的時間 T 。
- (三)固定圓筒內液體的密度 d_2 、圓筒內液體的起始高度 H ，改變細管長度 L ，測量筒內液面上升(下降)的高度 Δh 及其對應的時間 T 。
- (四)固定圓筒內液體的密度 d_2 、圓筒內液體的起始高度 H 、細管長度 L ，僅改變圓筒的口徑，測量筒內液面上升(下降)的高度 Δh 及其對應的時間 T 。
- (五)固定圓筒內液體的密度 d_2 、圓筒內液體的起始高度 H 、細管長度 L ，僅改變細管的口徑，測量筒內液面上升(下降)的高度 Δh 及其對應的時間 T 。

伍、研究結果

一、圓筒液面第一次下降的最大高度 Δh_1

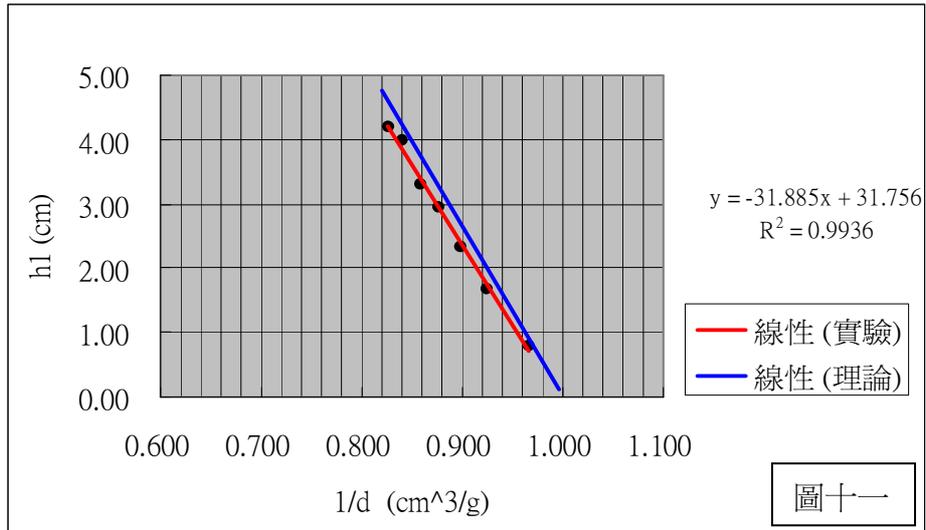
在不考慮阻力的情形下，很理想的推導出 $\Delta h_1 = (1 - \frac{d_1}{d_2}) \cdot (H+L)$ ，比較測量值與理想值的差異。

(一)液面第一次下降的高度 Δh_1 與圓筒內液體密度 d_2 的關係

1. 圓筒內液面原高度 $H=9.50\text{cm}$ 、細管長度 $L=17.00\text{cm}$

圓筒直徑 = 6.15cm 、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet30)

d_2 (g/cm^3)	Δh_1 測量值 (cm)	Δh_1 理想值 (cm)	Δh_1 誤差 (%)
1.036	0.80	0.92	-13.1 %
1.082	1.70	2.01	-15.4 %
1.114	2.35	2.71	-13.3 %
1.142	2.95	3.30	-10.5 %
1.166	3.30	3.77	-12.5 %
1.190	4.00	4.23	-5.5 %
1.211	4.20	4.62	-9.0 %



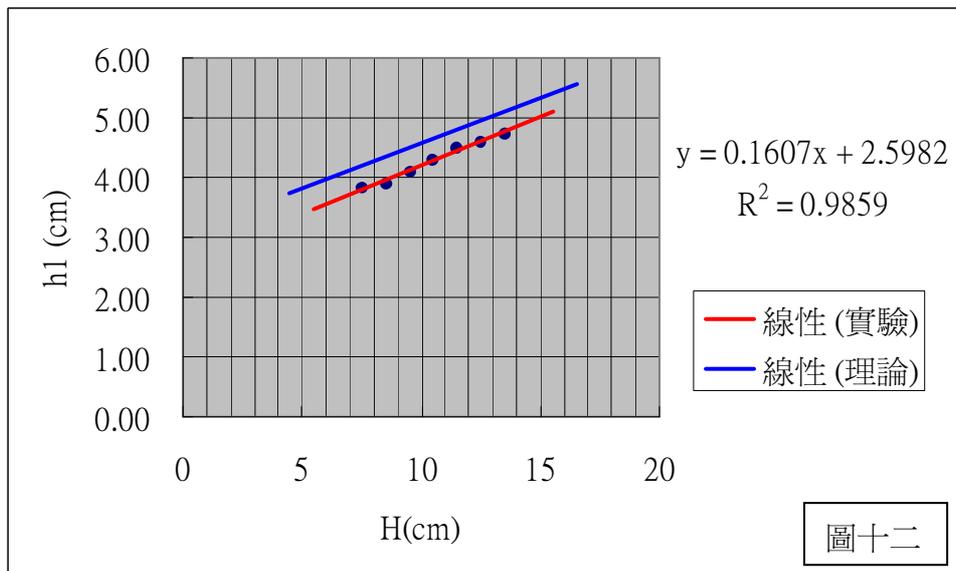
圖十一

2. 實驗結果如圖所示，相關係數非常接近 1，密度 d_2 愈大，下降的高度 Δh_1 愈大，下降高度 Δh_1 與密度倒數 $1/d_2$ 成線性關係，與理想值的趨勢吻合。

(二) 液面第一次下降的最大高度 Δh_1 與圓筒內液面初始高度 H 的關係

1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.180 \text{ g/cm}^3$ 、水密度 $d_1 = 1.000 \text{ g/cm}^3$ 、細管長度 $L = 20.00 \text{ cm}$
圓筒直徑 = 6.15 cm 、細管直徑 = 0.50 cm (實驗數據 Sheet39)

H (cm)	Δh_1 測量值 (cm)	Δh_1 理想值 (cm)	Δh_1 誤差 (%)
13.50	4.75	5.11	- 7.0 %
12.50	4.60	4.96	- 7.2 %
11.50	4.50	4.81	- 6.3 %
10.50	4.30	4.65	- 7.6 %
9.50	4.10	4.50	- 8.9 %
8.50	3.90	4.35	- 10.3 %
7.50	3.85	4.19	- 8.2 %



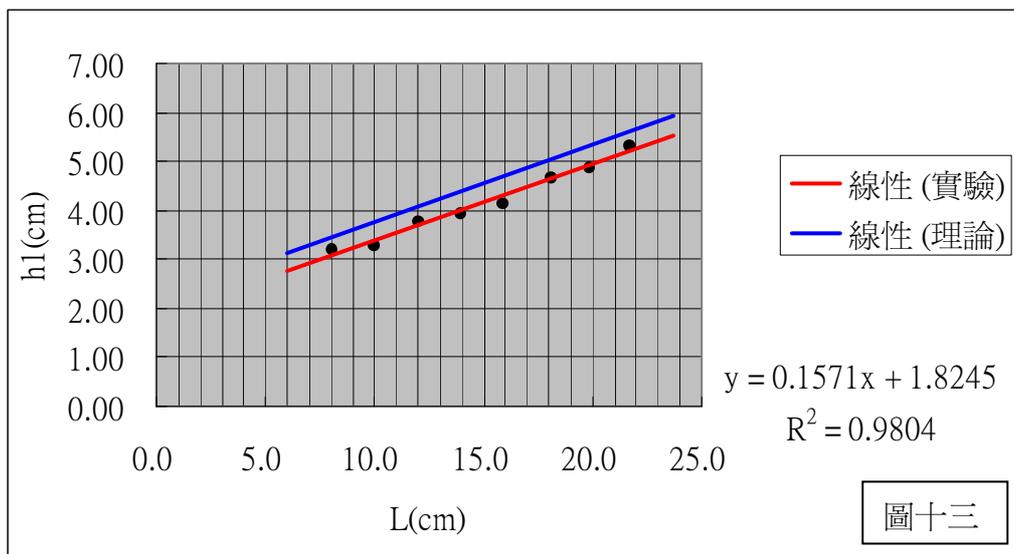
圖十二

2. 實驗結果顯示，相關係數非常接近 1， Δh_1 與 H 成線性關係，與理想值的趨勢吻合。

(三)液面第一次下降的最大高度 Δh_1 與細管長度 L 的關係

1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、圓筒內液面原高度 $H = 13.50\text{cm}$
 圓筒直徑 = 6.15cm、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet31)

L (cm)	Δh_1 測量值 (cm)	Δh_1 理想值 (cm)	Δh_1 誤差 (%)
21.70	5.35	5.62	- 4.8 %
19.80	4.90	5.32	- 7.8 %
18.10	4.70	5.05	- 6.8 %
15.90	4.15	4.69	- 11.6 %
13.90	3.95	4.37	- 9.7 %
12.00	3.80	4.07	- 6.7 %
10.00	3.30	3.75	- 12.0 %
8.00	3.20	3.43	- 6.8 %



2. 實驗結果顯示，相關係數非常接近 1， Δh_1 與 L 成線性關係，與理想值的趨勢吻合。

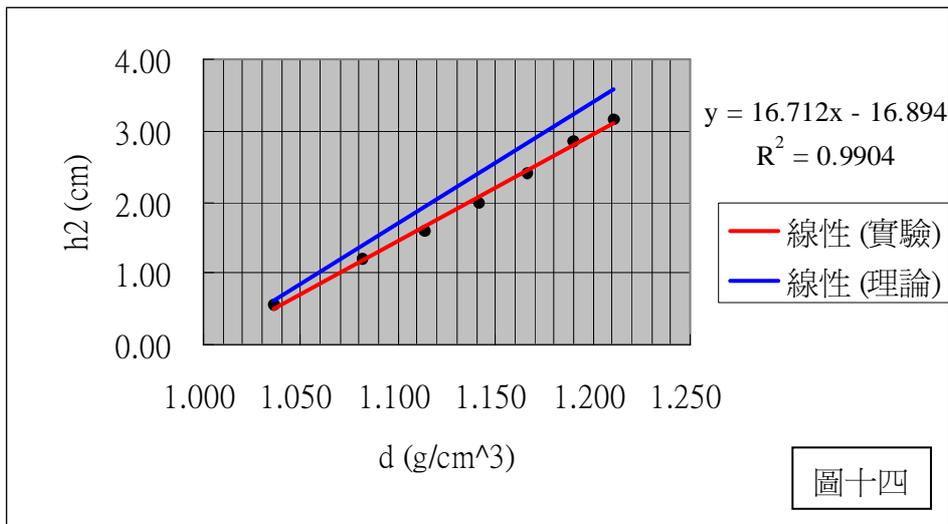
二、圓筒液面從第一次最低點回升的高度 Δh_2

在不考慮阻力的情形下，很理想的推導出 $\Delta h_2 = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot L$ ，比較測量值與理想值的差異。

(一)液面第一次回升的最大高度 Δh_2 與圓筒內液體密度 d_2 的關係

1. 圓筒內液面原高度 $H = 9.50\text{cm}$ 、細管長度 $L = 17.00\text{cm}$
 圓筒直徑 = 6.15cm、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet30)

d_2 (g/cm ³)	Δh_2 測量值 (cm)	Δh_2 理想值 (cm)	Δh_2 誤差 (%)
1.036	0.55	0.61	- 10.1 %
1.082	1.20	1.39	- 13.9 %
1.114	1.60	1.94	- 17.4 %
1.142	2.00	2.41	- 17.1 %
1.166	2.40	2.82	- 15.0 %
1.190	2.85	3.23	- 11.8 %
1.211	3.15	3.59	- 12.2 %



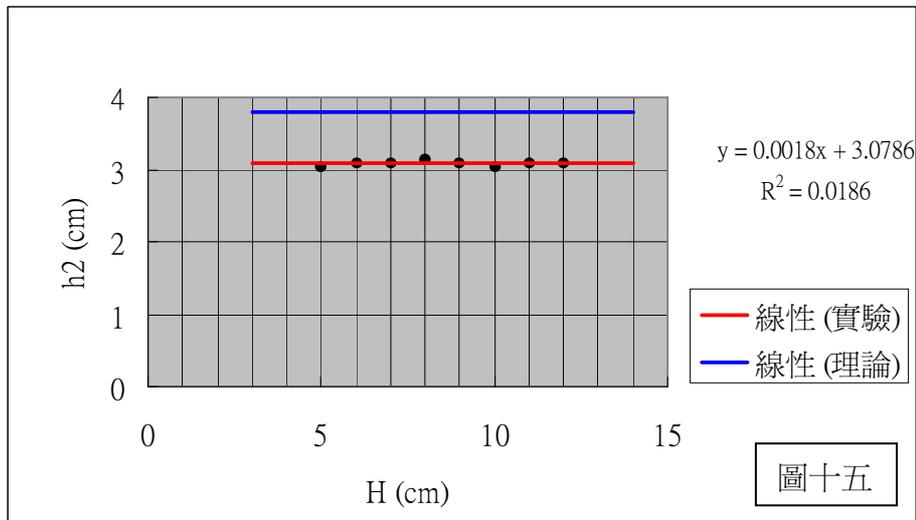
2. 實驗結果顯示，相關係數非常接近 1， Δh_2 與 d_2 成線性關係，與理想值的趨勢吻合

(二) 液面第一次回升的最大高度 Δh_2 與圓筒內液面初始高度 H 的關係

1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、細管長度 $L = 20.00 \text{ cm}$

圓筒直徑 = 5.60cm、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet49)

H (cm)	Δh_2 測量值 (cm)	Δh_2 理想值 (cm)	Δh_2 誤差 (%)
12.00	3.10	3.80	- 18.4 %
11.00	3.10	3.80	- 18.4 %
10.00	3.05	3.80	- 19.7 %
9.00	3.10	3.80	- 18.4 %
8.00	3.15	3.80	- 17.1 %
7.00	3.10	3.80	- 18.4 %
6.00	3.10	3.80	- 18.4 %
5.00	3.05	3.80	- 19.7 %



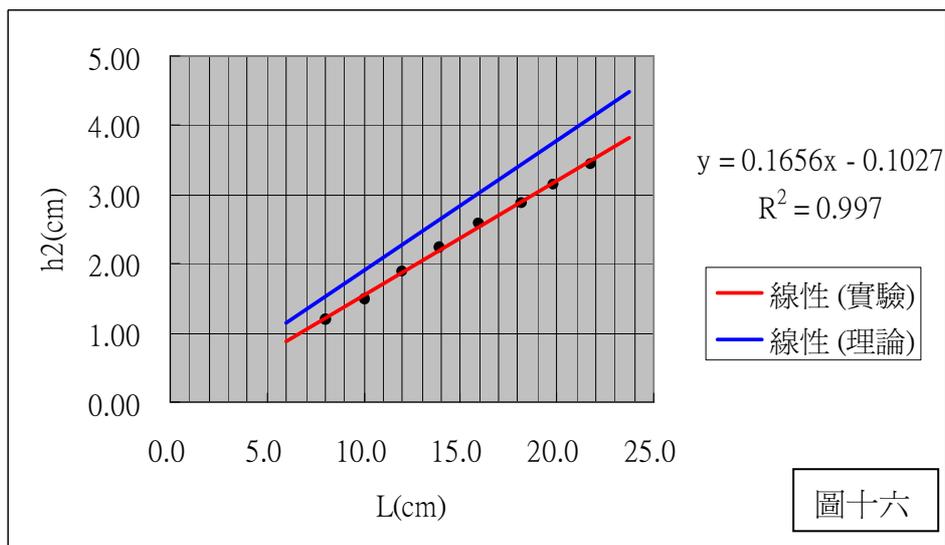
2. 實驗結果顯示，相關係數非常接近 0，表示 Δh_2 應與液面初始高度 H 無關，與理想值的趨勢吻合。

(三) 液面第一次回升的最大高度 Δh_2 與細管長度 L 的關係

1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、圓筒內液面原高度 $H = 13.50\text{cm}$

圓筒直徑 = 6.15cm、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet31)

L (cm)	Δh_2 測量值 (cm)	Δh_2 理想值 (cm)	Δh_2 誤差 (%)
21.70	3.45	4.12	-16.3 %
19.80	3.15	3.76	-16.3 %
18.10	2.90	3.44	-15.7 %
15.90	2.60	3.02	-13.9 %
13.90	2.25	2.64	-14.8 %
12.00	1.90	2.28	-16.7 %
10.00	1.50	1.90	-21.1 %
8.00	1.20	1.52	-21.1 %



2. 實驗結果顯示，相關係數非常接近 1，截距很小， Δh_2 幾乎與 L 成正比，與理想值的趨勢吻合。

三、 Δh_1 、 Δh_2 與圓筒直徑、細管直徑的相關性

(一).測量值與理想值的比較

1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、(實驗數據 Sheet30)

圓筒內液面原高度 $H = 9.50 \text{ cm}$ 、細管長度 $L = 17.00 \text{ cm}$ 、小圓筒直徑 = 5.60 cm

細管直徑 (cm)	測量值 Δh_1 (cm)	理想值 Δh_1 (cm)	誤差	Δh_2 (cm)	理想值 Δh_2 (cm)	誤差
0.50	3.80	4.23	- 10.2%	2.60	3.23	- 19.5%
0.60	4.00	4.23	- 5.4%	2.85	3.23	- 11.8%
1.15	4.20	4.23	- 0.7%	3.50	3.23	8.4%

2. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、(實驗數據 Sheet30)

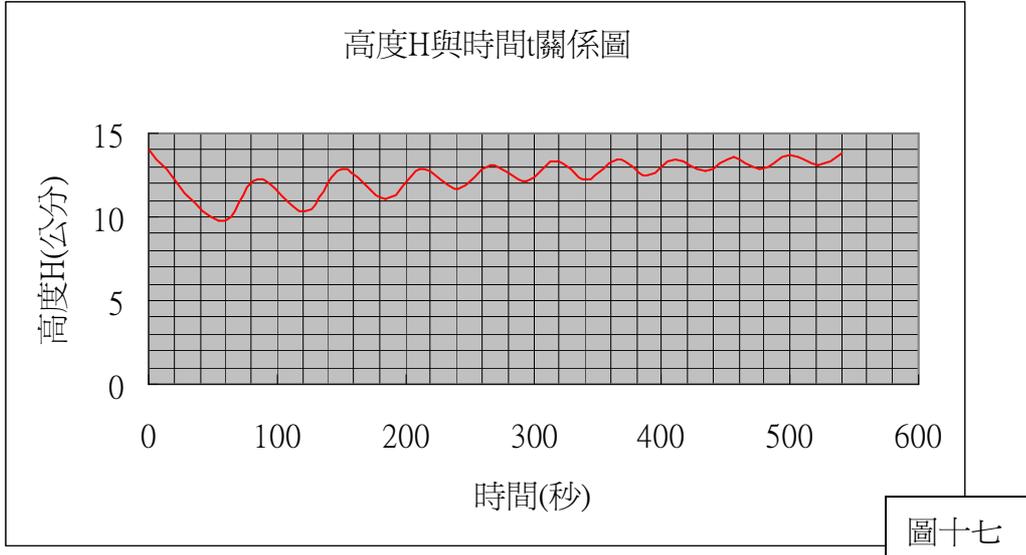
圓筒內液面原高度 $H = 9.50 \text{ cm}$ 、細管長度 $L = 17.00 \text{ cm}$ 、大圓筒直徑 = 6.15 cm

細管直徑 (cm)	測量值 Δh_1 (cm)	理想值 Δh_1 (cm)	誤差	Δh_2 (cm)	理想值 Δh_2 (cm)	誤差
0.50	3.70	4.23	- 12.6%	2.50	3.23	- 22.6%
0.60	3.95	4.23	- 6.6%	2.70	3.23	- 16.4%
1.15	4.30	4.23	1.6%	3.30	3.23	2.2%

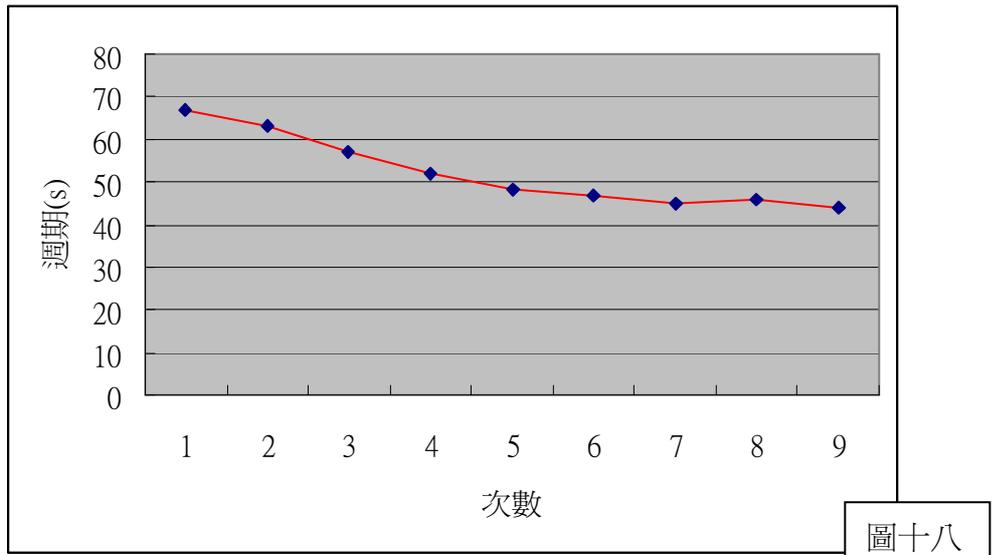
(二).由上表顯示，小圓筒的誤差似乎比大圓筒小；而且管子越粗，下降的高度與上升的高度將越大，但我們所推導出的理想式子中並未出現圓筒直徑及細管直徑的變因，在後面的討論中會提出來探討。

四、圓筒液面的震盪週期

(一)圓筒內液體會下降至某一液面的最低點，水接著回流入圓筒中，液面也有一最高點，之後圓筒內液體會再次流出細管，這個現象會不斷週而復始的發生，我們觀察這個現象持續相當長的一段時間，實驗紀錄最長約 20 分鐘。以下是其中一組數據所繪出的圖形 $d_1 = 1.000 \text{ g/cm}^3$ 、 $d_2 = 1.180 \text{ g/cm}^3$ 、 $H = 14.50 \text{ cm}$ 、 $L = 17.00 \text{ cm}$ (實驗資料 Sheet 11)



圖十七



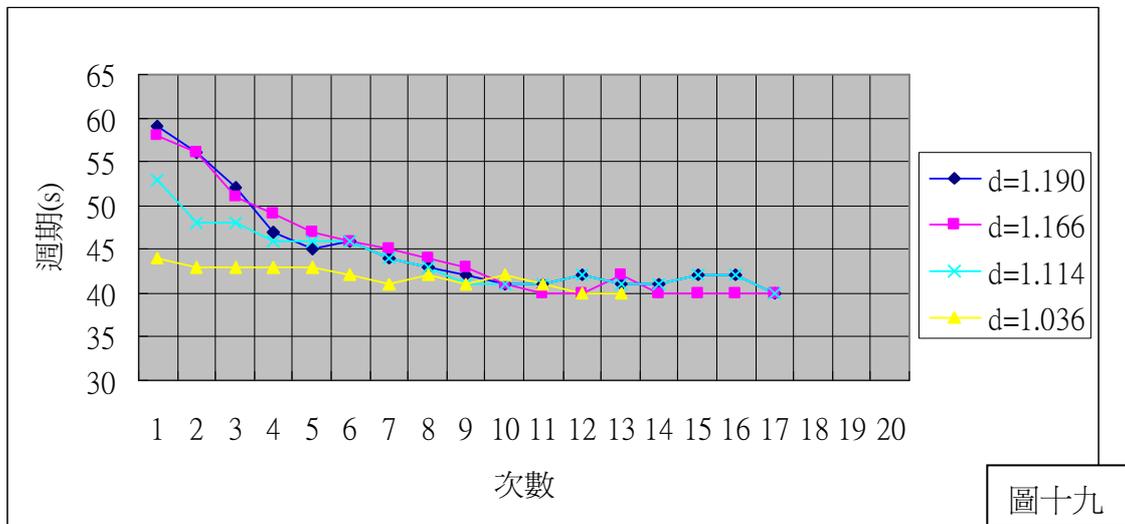
圖十八

從實驗結果可觀察到來回一次震盪的時間會減少，但後來似乎趨向一較穩定的值，不過後來的振幅很小，液體擾動的現象十分混亂，時間的判讀也較不容易。

(二)週期 T 與圓筒內液體密度 $d(\text{g}/\text{cm}^3)$ 的關係

1.圓筒內液面原高度 $H = 13.50\text{cm}$ 、細管長度 $L = 20.00\text{cm}$

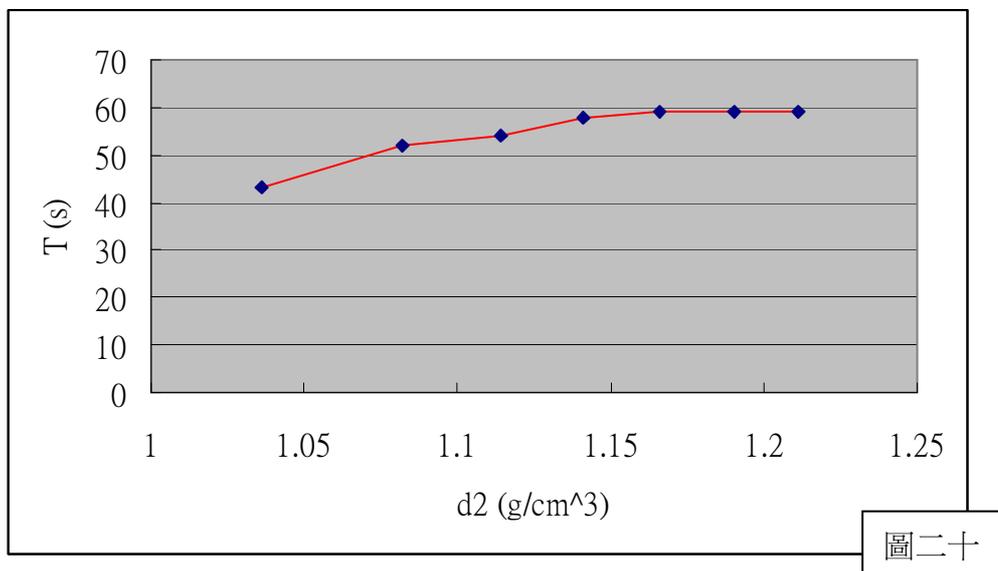
圓筒直徑 = 6.15cm 、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet 50)



圖十九

2.實驗結果顯示，一開始不同的密度 d_2 ，液面震盪週期也不同，但是震盪一段時間之後，週期 T 趨向一穩定值，可推論穩定後的週期 T 與初始液體密度 d_2 無顯著關係。

3.我們取平衡後的第一次週期做比較，得到下圖。

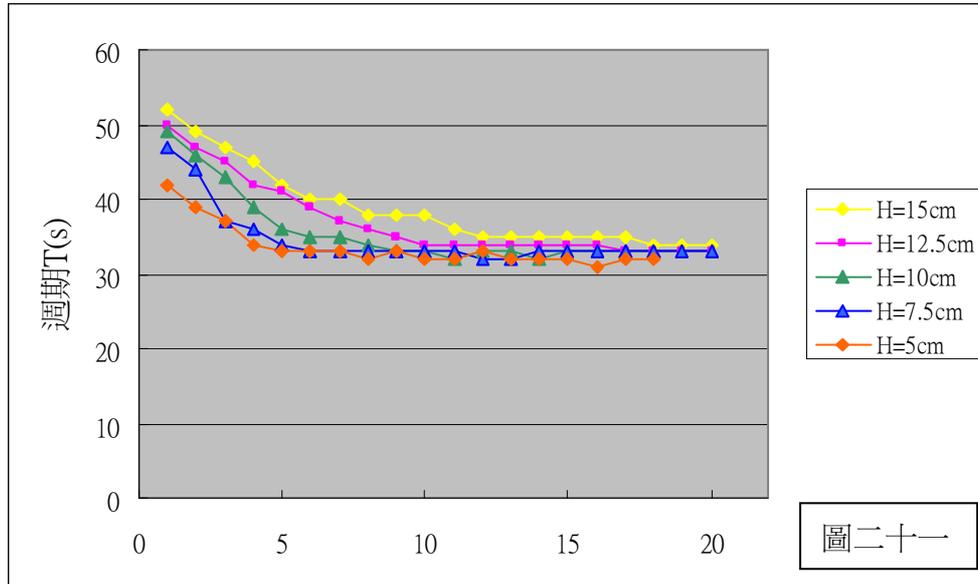


圖二十

例如 $1.166\text{g}/\text{cm}^3$ 與 $1.190\text{g}/\text{cm}^3$ 與 $1.211\text{g}/\text{cm}^3$ 的週期似乎並無顯著差異，可能是密度太大時，流出的液體的質量較多，且阻力較大，驅使週期增長；但密度太大卻也造成細管兩端的壓力差變大，流速變大，驅使週期變短，在這些因素抗衡下，導致密度很大時，一開始的週期似乎並無明顯差異。

(三) 週期 T 與圓筒內液面初始高度 H 的關係

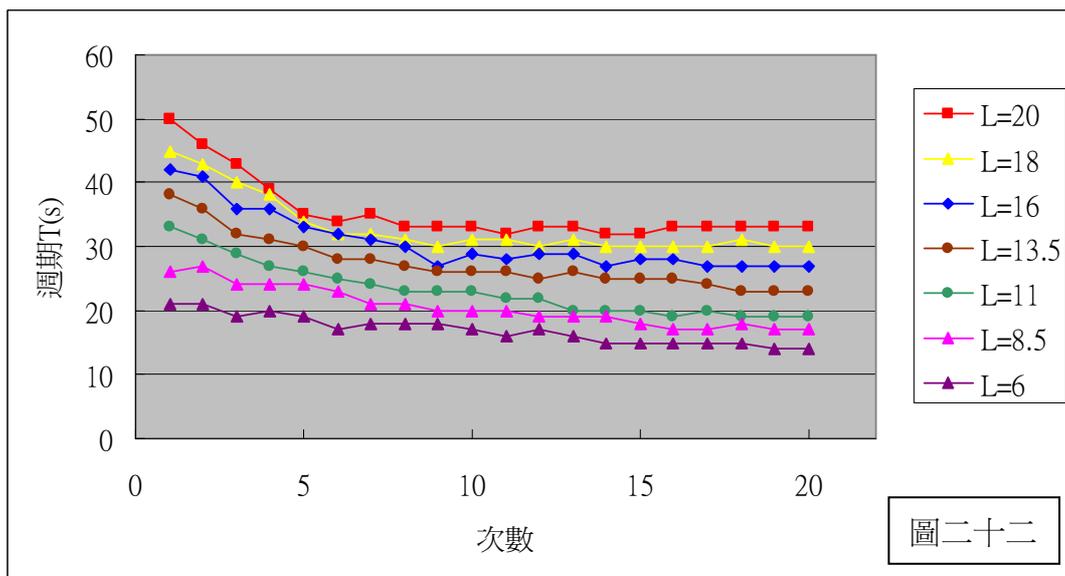
1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、細管長度 $L = 20.00\text{cm}$
圓筒直徑 = 5.60cm 、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet51)



2. 實驗結果如上，圓筒內液面高度 H 不同時，一開始的週期略有差異，但震盪一段時間之後，週期趨向一穩定值，可推論穩定後的週期 T 與初始液面高度 H 無顯著關係。

(四) 週期 T 與細管長度 L 的關係

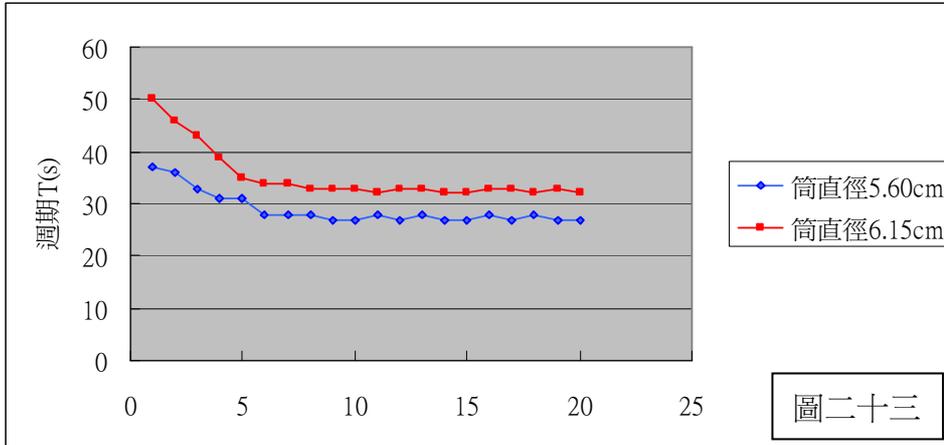
1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、圓筒內液面原高度 $H = 9.50\text{cm}$
圓筒直徑 = 6.15cm 、細管直徑 = 0.50cm (實驗數據 Sheet 18)



- 實驗結果如上所示，週期隨細管長度 L 的變化十分明顯， L 愈長週期愈大

(五) 週期 T 與圓筒直徑的關係

1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、圓筒內液面原高度 $H = 9.50 \text{ cm}$
 細管長度 $L = 20.00 \text{ cm}$ 、細管直徑 = 0.50 cm (實驗數據 Sheet 11)



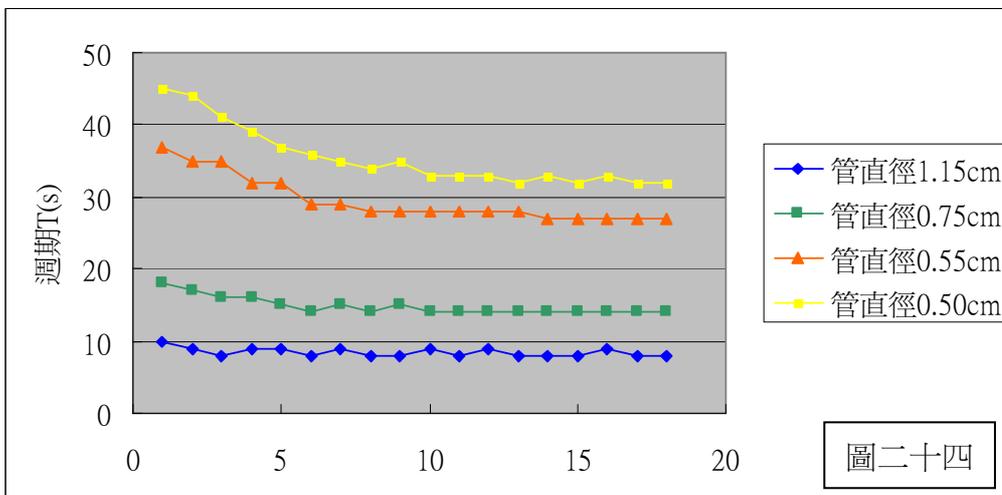
圖二十三

2. 取週期較穩定的末 7 組數據，求其平均值，實驗結果為圓筒直徑愈小，液面震盪週期愈小。

數據	圓筒直徑 (cm)	週期 T (s)
Sheet 50	6.15	32.4
Sheet 50	5.60	27.3

(六) 週期 T 與細管直徑的關係

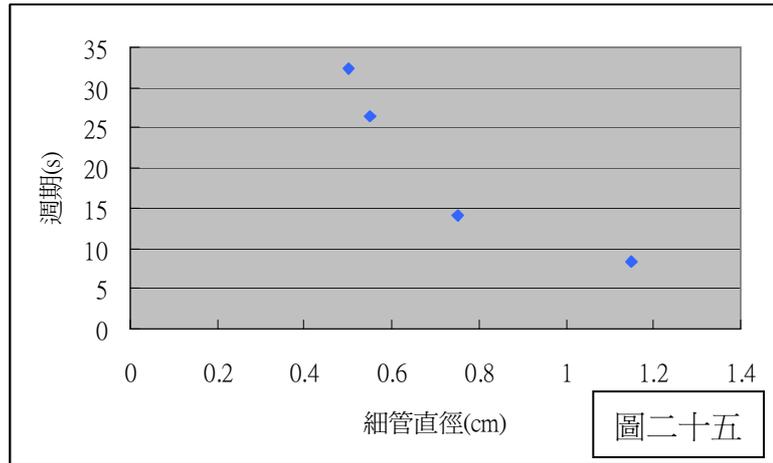
1. 圓筒內液體密度 $d_2 = 1.190 \text{ g/cm}^3$ 、圓筒內液面原高度 $H = 9.50 \text{ cm}$
 細管長度 $L = 19.70 \text{ cm}$ 、圓筒直徑 = 6.15 cm (實驗數據 Sheet 11)



圖二十四

2.取週期較穩定的末 7 組數據，求其平均值，實驗數據如下

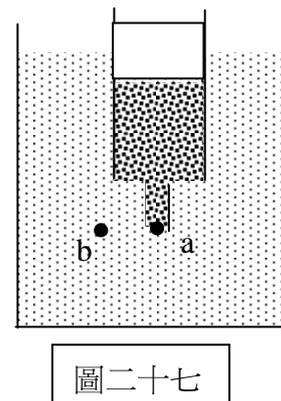
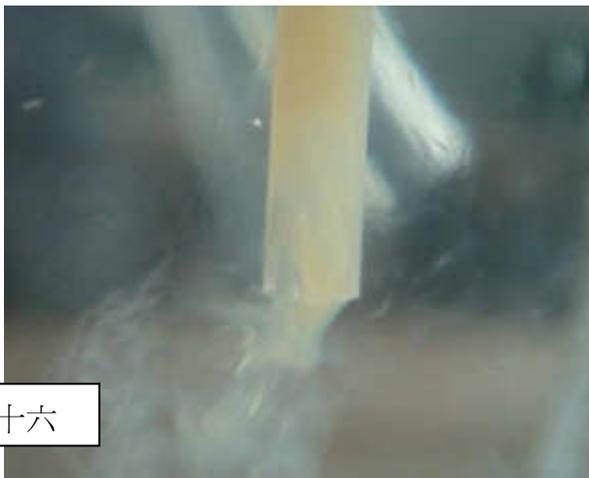
細管直徑 (cm)	週期 T(s)
1.15	8.3
0.75	14
0.55	26.3
0.50	32.3



實驗結果顯示，吸管愈粗週期愈小，但並非線性遞減。

陸、討論

- 一、根據實驗觀察，可得知液體會由壓力大往壓力小的方向流動，但當壓力相同時，由下圖可看出有些微的液體外流，顯示密度大的液體往密度小處滲透，但也可看見管中顏色變淺，顯示密度小的液體也往密度大處滲透，因此我們相信在不同密度的液體交界面會有互相滲透現象的擾動。



我們嘗試以下列圖示法來解釋液體交流道形成的原因。

- (一)、如圖 28-1，此時 a、b 兩點壓力相同，在細管下端密度不同的交界面，兩種液體會產生由一方滲透到另一方的小擾動。
- (二)、如圖 28-2，一旦密度較小的微量液體(水)滲透至細管時，b 點的壓力即大於 a 點的壓力，故液體(水)開始由管外流入管內。

圖 28-1

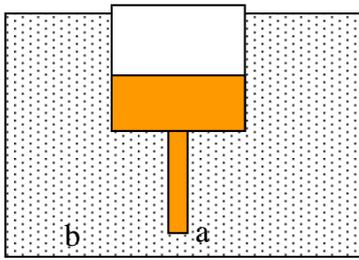
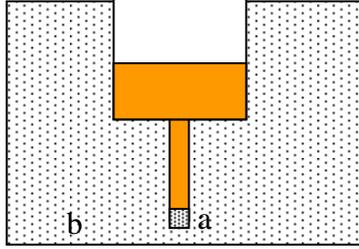


圖 28-2



(三)、如圖 28-3，回流過程前期，a 與 b 兩點的壓力差漸增，可以清楚的觀察到透明液體(水)急速上升，但因圓筒截面積約為細管截面積的 100 倍，故此時圓筒上方液面並無明顯的改變。

(四)、如圖 28-4，當水柱上升至 C 點時，a、b 兩點壓力差為最大，水持續由管外流入管內

圖 28-3

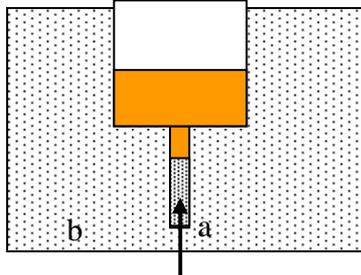
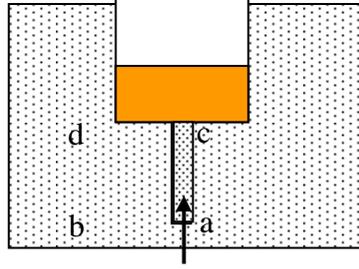


圖 28-4



(五)、如圖 28-5，由正上方可觀察到圓柱的液面有液體湧出，此後 a、b 兩點壓力差漸減，直到兩者壓力相同，圓筒液面不再上升。

(六)、如圖 28-6，此時在細管上端的 c 點，雖然上、下壓力相同，但在密度不同的交界面會有微小擾動，造成液體互相滲透進入另一方。

圖 28-5

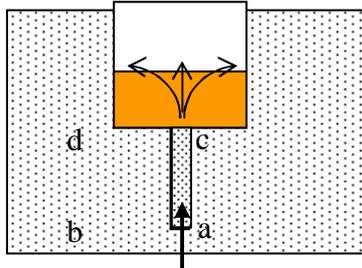
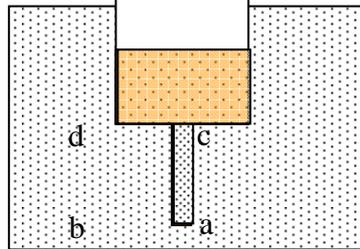


圖 28-6



(七)、如圖 28-7，一但密度較大的微量液體由圓筒進入細管上端時，a 點壓力便大於 b 點的壓力，故液體開始由管內流出管外。

(八)、如圖 28-8，在流出的前期過程，a、b 兩點的壓力差漸增，液柱流出十分迅速，但因圓筒截面積約為細管截面積的 100 倍，故圓筒上方液面尚無明顯變化。

圖 28-7

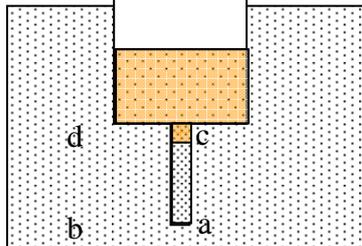
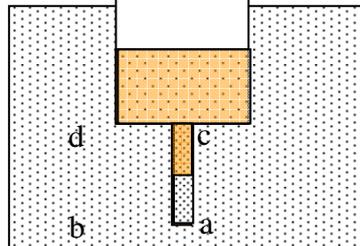
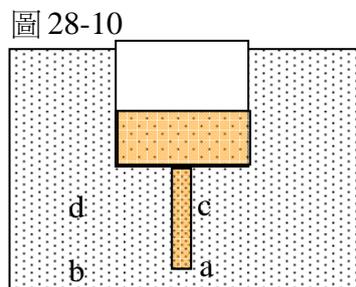
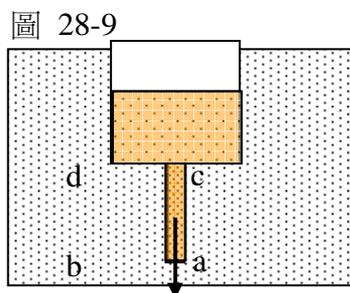


圖 28-8



(九)、如圖 28-9，當透明水柱完全流出細管下端時，a、b 兩點壓力差最大，混合液體將持續由細管內流出管外。

(十)、如圖 28-10，此時可明顯觀察到圓筒上方液面下降，但 a、b 兩點的壓力差漸減，直到壓力相等為止，圓筒液面不再下降，之後，又再回到圖一的狀況，如此週而復始，往返震盪，大約持續 15 分鐘。



在『物理馬戲團』的書中，提到了瑞立不穩定，我們便上網查資料，找到了台大物理系陳義裕教授所寫的一篇文章，其中提到了瑞立-泰勒不穩定，如果將密度大的液體放在密度小的上方時，任何一個小小的擾動，都很容易驅使上方的液體侵入下方的液體，反過來說，密度小的液體也會侵入上方的液體，所以在實驗中壓力平衡的交界面所產生的擾動現象，應該就是屬於瑞立-泰勒不穩定。而這種擾動反而破壞了原本的壓力平衡，所以驅動液體流動，經過十幾分鐘後，我們觀察到容器內外密度越來越接近(顏色變淡了)，高度越來越接近，擾動的現象持續發生，而且愈來愈混亂，直到最後形成對流，混合液不斷的流出，同時，水不斷的流入，為一種動態的平衡。

二、除了人為操作的誤差之外，我們討論以下造成 Δh_1 及 Δh_2 和理想值差距的來源：

(一).因為圓筒半徑 $r=2.8\text{cm}$ ，毛細現象所能影響液面上升的高度比例很小。

(二).液體的黏滯阻力可能是主要原因之一，當液體 d_2 往下流動時，黏滯阻力向上，會造成向上的壓力，故真實液體下降的高度較理想值小，同理當液體 d_1 往上流動時，黏滯阻力向下，會造成向下的壓力，故真實液體上升的高度較理想值小。

(三).理想狀態下，細管下方管口壓力內外相等時，開始發生液體互相滲透。實驗時，當細管端口內外壓力將要平衡時，流速會逐漸變慢，另一個液體開始微量滲入，所以比理想的狀況推導出上升(下降)高度提早達到壓力平衡，故測量值較小。的確，綜合(二)、(三)我們測量到的數據，大部分都比理想值小。

(四).我們所推導出的 Δh_1 及 Δh_2 的式子中，並不包含圓筒直徑及細管直徑的變因，但從實驗結果顯示，小圓筒的誤差似乎比大圓筒小，可能是在小圓筒中，每次流入或流出的質量較少，流動時液體與管壁的接觸面較小，造成阻力較小；另外，細管越粗，下降的高度 Δh_1 與上升的高度 Δh_2 也越大，當細管的截面較大時，越靠近管中央的部份流速較大，誤差值較小，而且在回流上升的過程中，或許是因為純水的阻力比混合液較小，使得 Δh_2 的測量值甚至大於理想值。

三、探討週期的變因

(一)實驗結果：從實驗的週期圖形中(如圖十八)，可知完整震盪一次的時間，在一開始會有明顯下降，後來漸漸趨向一定值，此時液體來回混合後，密度變化不明顯。再由圖二十二至二十四可看出後來的週期主要與容器的幾何形狀有關，實驗結果顯示圓筒截面積 A 愈大，細管長 L 愈大，週期愈大，細管截面積 a 愈大，週期會變短，但週期似乎與 H 無關。這可理解成圓筒截面積越大，流出或流入液體的質量越多，所需時間較長；流經細管越長，所需時間越長；但細管截面積變大，每秒可流過的量變多了，週期反而下降，這些趨勢與實驗結果吻合。

(二)理論探討：粗略的由理論來探討週期的變因

1.週期定義：我們粗略的假設來回一次震盪的週期與流出細管的混合液質量、流入細管水的質量有關，也與每秒流出和流入的質量(即流量)有關，雖然流量並非定值，但經過一段時間後震盪週期漸趨於穩定值，故可以數次週期的平均值作推論。

$$\text{流出液體的質量} = (\text{每秒流出液體的質量}) \times T_1$$

$$\text{流入水的質量} = (\text{每秒流入水的質量}) \times T_2$$

$$\text{週期 } T = T_1 + T_2$$

2.證明流出質量等於流入質量：若密度 d_2 與密度 d_1 的液體不相溶，且忽略細管內的液體質量，每次流出或流入的質量是相等的。

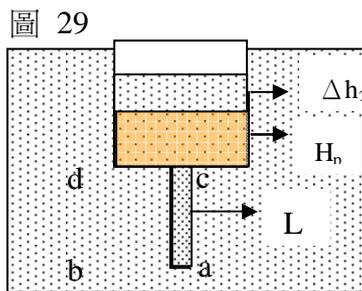
流入的質量等於密度 d_1 乘上流入的體積(截面積 $A \times$ 上升高度 Δh_2)

$$\Delta M_{\text{流入}} = d_1 A \cdot \Delta h_2 = d_1 A \cdot \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot L = (d_2 - d_1)AL \dots\dots\dots(1)$$

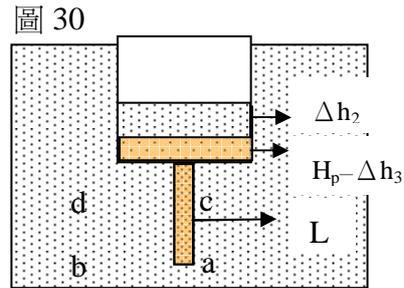
流出的質量等於密度 d_2 乘上流出的體積(截面積 $A \times$ 下降的高度 Δh_3)

$$\Delta M_{\text{流出}} = d_2 A \cdot \Delta h_3 = d_2 A \cdot \frac{d_2 - d_1}{d_2} \cdot L = (d_2 - d_1)AL \dots\dots\dots(2)$$

以下說明 Δh_3 如何求得



第一次流入 Δh_2



再度流出 Δh_3

液面上升 Δh_2 後再度流出 Δh_3 ，這兩種狀況的細管底端壓力均相同 ($P = hd$)

左圖壓力 = 右圖壓力，所以 $\Delta h_2 \cdot d_1 + H_0 d_2 + L d_1 = \Delta h_2 \cdot d_1 + (H_0 - \Delta h_3) d_2 + L d_2$

$$\Delta h_3 = \frac{d_2 - d_1}{d_2} \cdot L \text{ 再代回上式(2)中，得到 } \Delta M_{\text{流入}} = \Delta M_{\text{流出}}$$

由上述可知，在液體不相溶時，每次流出或流入的質量是相等的，在本實驗中，液體來回震盪會使液體混合而密度改變，故以平衡後流入的質量應略大於後來流出的質量，但經過一段時間後的穩定震盪週期，密度變化不明顯，又幾乎可以視為相等。

3. 流量：探討每秒由細管流入圓筒的平均質量 $\frac{\Delta m}{\Delta t}$

我們從流體力學書籍中找到相關的資料(泊肅葉 Poiseuille 公式，見附錄)，對一根長 L 、截面積 a 的管子，若有密度 d 的液體，黏滯係數 η ，在兩端壓力差為 ΔP 的情形下

$$\text{每秒流入水的質量 } \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{\text{流入}} = \frac{\Delta P_{\text{入}} \cdot d_1}{8 \pi \eta_{\text{水}} L} \cdot a^2 \cdot \dots \quad (1)$$

$$\text{每秒流出液體的質量 } \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{\text{流出}} = \frac{\Delta P_{\text{出}} \cdot d_2}{8 \pi \eta_{\text{液}} L} \cdot a^2 \cdot \dots \quad (2)$$

實驗時圓筒內液體密度 d_2 逐漸變小，在穩定震盪後， d_2 變化不再明顯，只略大於 d_1 。液體的黏滯係數 $\eta_{\text{液}}$ 因為液體混合時改變了密度而逐漸改變，在穩定震盪後趨向定值。細管壓力差也會因密度變化而改變，最後細管壓力差變化很小，也可視為定值，且正比於管長 L ，將與分母的 L 消掉，並設比例常數為 κ_1 。

$$\text{每秒流入水的質量 } \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{\text{流入}} = \frac{\Delta P_{\text{入}} \cdot d_1}{8 \pi \eta_{\text{水}} L} \cdot a^2 \cdot \propto \frac{d_1}{\eta_{\text{水}}} \cdot a^2 = \kappa_1 \cdot a^2 \cdot \dots \quad (3)$$

$$\text{每秒流出液體的質量 } \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{\text{流出}} = \frac{\Delta P_{\text{出}} \cdot d_2}{8 \pi \eta_{\text{液}} L} \cdot a^2 \cdot \propto \frac{d_2}{\eta_{\text{液}}} \cdot a^2 = \kappa_2 \cdot a^2 \cdot \dots \quad (4)$$

4. 週期理論值：綜合 1、2、3，我們大約可粗略的推知，經過一段時間後的穩定震盪週期，其奶茶密度、液體的黏滯係數、細管壓力差均只有微量的變化，將其視為定值，整體比例常數設為 K 。

$$\Delta M_{\text{流入水}} = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{\text{流入}} \times T_1 \rightarrow A(d_2 - d_1)L = \kappa_1 \cdot a^2 \times T_1 \rightarrow T_1 = \frac{AL}{a^2} \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{\kappa_1}$$

$$\Delta M_{\text{流出液}} = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_{\text{流出}} \times T_2 \rightarrow A(d_2 - d_1)L = \kappa_2 \cdot a^2 \times T_2 \rightarrow T_2 = \frac{AL}{a^2} \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{\kappa_2}$$

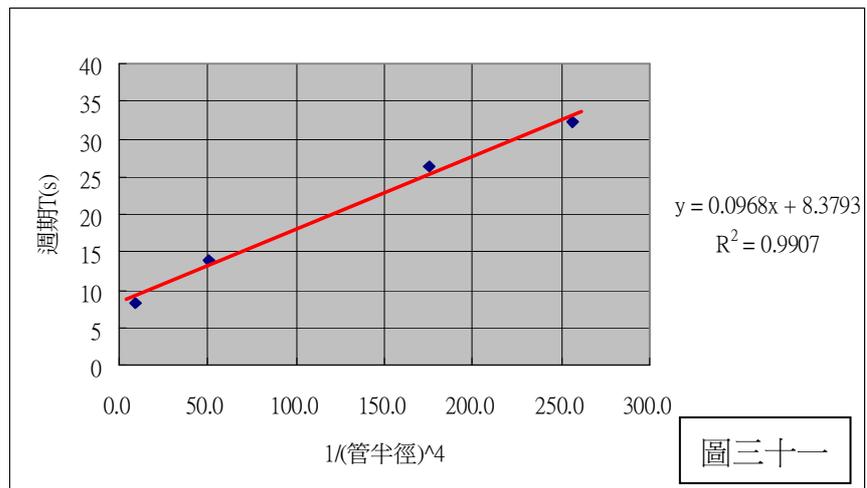
$$T_1 + T_2 = \frac{AL}{a^2} \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{\kappa_1} + \frac{AL}{a^2} \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{\kappa_2} = K \cdot \frac{AL}{a^2}$$

5. 細管長度為零時的週期：當細管長度 L 為零時，若裝入密度不大的液體時，圓筒內外液體理論上也應有交流的現象，其週期設為 T_0 ，所以本實驗的週期理想值應為

$$T = T_1 + T_2 + T_0 = K \cdot \frac{AL}{a^2} + T_0$$

6. 細管直徑與週期實驗值：於圓筒截面積只有大小兩種，無法驗證圓筒截面積與週期的函數關係，而細管截面積有四種不同規格，可粗略驗證比較，取週期較穩定的末 7 組數據，求其平均值，實驗數據如下：

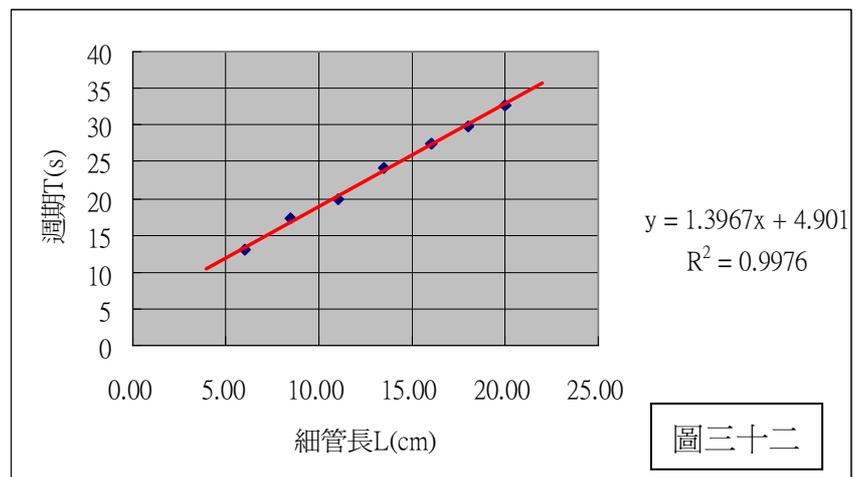
細管直徑 (cm)	週期 T(s)
1.15	8.3
0.75	14
0.55	26.3
0.50	32.3



相關係數非常接近 1，由圖形的趨勢線可以支持週期與細管半徑的四次方的倒數成線性關係，即表示週期與管的截面積平方的倒數成線性關係，符合上述所推導的式子。

7. 驗證細管長度與週期的關係：取週期較穩定的末 7 組數據，求其平均值，實驗數據如下

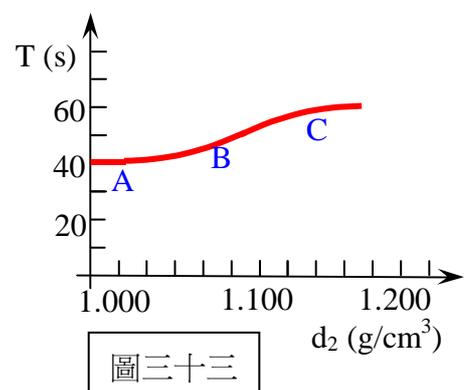
L (cm)	週期 T(s)
20.00	32.7
18.00	29.9
16.00	27.4
13.50	24.2
11.00	19.8
8.50	17.2
6.00	13.0



相關係數非常接近 1，由圖形的趨勢線可以支持週期與細管長度成線性關係，符合上述所推導的式子。

(三). 推論密度與週期的關係：綜合前面的實驗結果，可以下列圖形來描述，BC 區為改變液體不同密度所得的第一次震盪的週期曲線，AB 區則表示同一次實驗中液體來回震盪隨著密度遞減的週期曲線，將兩者結合起來，便成右圖的曲線。我們推想：

- C 區：液體密度接近飽和時，阻力大，流出質量大，欲使週期變大；但壓力大流速較大，欲使週期變小，整體因素互相抗衡，使密度接近飽和的溶液其週期十分接近。
- B 區：隨著密度漸減，或許主要是因為震盪交換的質量遞減，阻力變小，週期也漸減。
- A 區：當密度接近水時，每次震盪交換的質量十分接近，混合液與水的阻力接近，壓力變化不大，週期趨向一定值。

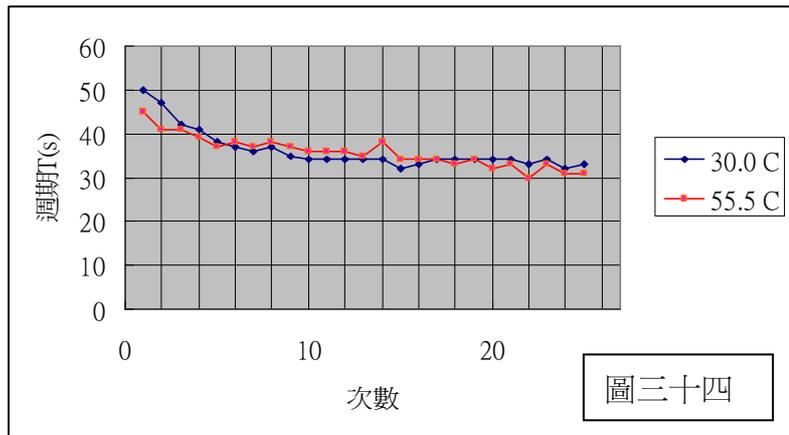


(四).測試溫度對週期的影響

水的密度會受溫度的影響，混合液和水的黏滯阻力也會受溫度的影響，於是我們選擇 30°C 與 55°C 兩種溫度的水分別做比較，實驗曲線如下：

溫度(°C)	水密度 g/cm ³
30.0	1.000
55.5	0.902

溫度(°C)	週期(s)
30.0	33.4
55.5	32.0



溫度較高時，水的密度變小，黏滯係數變小，流速較快，週期的確變小了。但溫度也增加了互相擾動、滲透的現象，使得週期更不易判讀，取穩定後的 7 次週期求其平均值，發現只有 1.4 秒的差距，並不顯著。

(五).容器的一致性也是影響週期的關鍵

有一次我們測量大圓筒(直徑 6.15cm)初始液面高度 H=14.00cm、液體密度 $d_2=1.190 \text{ g/cm}^3$ 、細管長 L=20.00cm，得到平均週期為 41.3 秒。與之前相同狀況下的平均週期約 33.9 秒並不相同，仔細觀察，發現原來這次在以熱熔膠連結細管與圓筒時，有一微小的傾斜度，即細管並未鉛直，但卻造成週期的差距很大，故在做每一個週期系列探討時，應盡量調整細管的鉛直程度，並且不可任意更換容器。

	輕微傾斜	鉛直
週期 (s)	41.3	33.9

柒、結論

- 一、本實驗對「物理馬戲團 I」書中第 122 頁，提到鹽水震盪的現象，作了實際的測試，認為書中應明確交代小容器必須固定不動，而且筒內液面高於筒外時，是不可能有液體逆流的現象，所以書中的示意圖是錯誤的。
- 二、本實驗設計出一個液體交流道的實驗裝置，嘗試解釋產生液體在細管中來回交流的現象，原因有二，一是細管下端或上端內外壓力相同時，因交界面密度不同的液體有互相滲透的小擾動，而造成瞬間液體交換位置；其二是當交界面液體的小擾動一旦發生後，即造成細管端口內外壓力不同，此時液體將由壓力大往壓力小處流動，直到壓力再度相同，如此週而復始的產生液體的交互震盪，經過一段長時間震盪後形成對流的現象。
- 三、利用細管底端內外壓力相等，在不考慮阻力的理想情形下，推導出

$$\text{第一次下降高度 } \Delta h_1 = \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \cdot (H + L)$$

$$\text{平衡後第一次上升高度 } \Delta h_2 = \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot L ,$$

實驗測量值與理想值的趨勢吻合，但大部分的測量值都偏小，而其差距應該必須考慮液體的黏滯阻力，以及細管兩端壓力差變小時，液體已發生互相滲透的現象來修正。

- 四、實驗得到圓筒截面積 A 、管長 L 愈大，週期愈大；但細管截面積 a 愈小，週期愈大。密度接近飽和時，第一次震盪的週期並無明顯的差異，後來隨著密度的下降，週期也漸減，當密度很接近水時，週期趨向一個定值，只與容器的幾何形狀(圓筒截面積、細管直徑、細管截面積)有關。

捌、參考資料及其他

- | | | |
|---|------------|----------|
| 一、物理馬戲團 | 沃克著 | 天下文化 |
| 二、國中生活科技(三)至(六)冊 | | 南一書局 |
| 三、高級中學物質科學物理篇(下) | 林明瑞等著 | 南一書局 |
| 四、啓發性物理學——力學 | 林清涼、戴念祖著 | 五南出版社 |
| 五、科學雙月刊二七卷六期 | 賭博、擴散與擴散實驗 | 陳義裕 |
| 六、大學物理學之一(力學) | 陳錫桓 | 中央圖書出版社 |
| 七、新概念物理教程力學 | 趙凱華、羅蔚茵 | 建宏出版社 |
| 七、 www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/ 物理教學示範實驗教室 | | |
| 八、 phys.cts.nthu.edu.tw/workshop/focus/20060703/DLi.pdf | | 瑞立泰勒不穩定性 |

玖、附 錄

考慮半徑 R 、截面積 a 、長 L 的一段水平管子 ab ，密度 d 的液體在管中流動

根據泊肅葉 Poiseuille 公式：流速 $v(r) = \frac{P_a - P_b}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2)$

故管中的流量 $Q = 2\pi \int_0^R v(r) \cdot r \cdot dr = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} \cdot R^4$

所以 $\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) = \frac{\pi \Delta P \cdot d}{8 \eta L} \cdot R^4 = \frac{\Delta P \cdot d}{8\pi\eta L} \cdot a^2$

【評語】 031602 液體交流道

1.本件作品觀察不同密度液體於大小容器之振盪行爲，實驗設計系統化測量不同變因之改變結果，對實驗數據作圖呈現物理趨勢。並對發生物理原由理解銓釋合於科學探究方法，應予鼓勵。

2.對本件作品建議進一步以數學模型對實驗兩液互溶之密度變化加以考慮，以推演並比較實驗結果，或不互溶液體加以觀察其是否不同等。