中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030422

長方體上的螞蟻--兩點間最短路徑之最大值研究

學校名稱：臺北市立西湖國民中學

作者：	指導老師：
國二 賴旼華	徐寶玉
國一 黃曉薇	賴俊源
國一 洪筱茹	

關鍵詞：長方體上的螞蟻　兩點間的最短路徑

長方體上的螞蟻—兩點間最短路徑之最大值研究

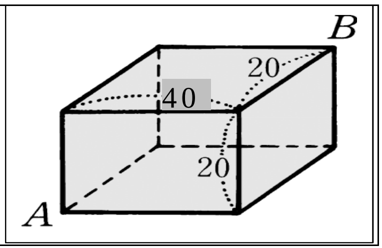
壹、摘要

由一個常見的數學考題：【找出 $20\times20\times40$ 的長方體中，兩相對頂點 A、F 從表面上走的最短路徑 min AF】，從此題中提出不同的想法，進而去思考是否有更大的 min AF，並作探討與分析並發現在 $1\times1\times2$ 長方體中，頂點 A 到長方體表面上一點 P 的最大值 min AP 的位置爲當 P 點在 A 點對面之 1×1 面上對角線下 $\frac{1}{4}$ 處有最大值爲 $\frac{\sqrt{130}}{4}$ 約 2.85。從 $1\times1\times2$ 延伸至 $1\times1\times n$ 及 $1\times m\times n$ 的長方體，找出固定頂點到長方體表面上一點 P 有最大值 min AP 的位置與距離，並求出其通式。最後希望能推廣找到在 $1\times1\times2$ 長方體上的任意兩點使其有最大值 min PQ 的點的位置與距離。

貳、研究動機

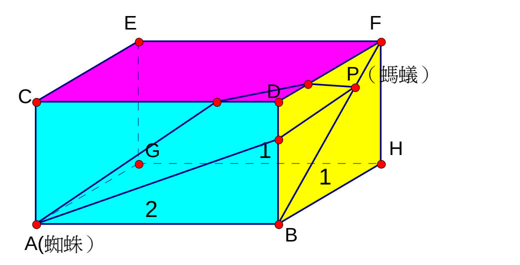
一、在八年級上學期的第一章「畢氏定理」單元的數學考卷上有一考題如下：

如附圖，乃是用很薄的鐵片所做成的長方體箱子，長、寬、高分別是 40 公分、20 公分、20 公分，有一隻螞蟻想從左下角的 *A* 點處，沿著箱面爬到右上角的 *B* 點處。問螞蟻至少需爬多少公分？



又在「打開魔數箱」這本書中看到一個問題如下：

有一隻在房間裡 A 點的蜘蛛，要沿測地線捕捉 B 點的螞蟻，螞蟻要躲在什麼位置才是最遠的距離？



剛開始我們猜想應該是在頂點，如上題的圖形。但當我們試著用展開圖找出路徑時，發現並不是在頂點上，我們覺得很有趣，也激發我們的想像力，同時與**國中數學教材第三冊平方根、商高定理，第四冊三角形的全等、尺規作圖、一元二次方程式的解，第五冊垂直平分線**有關，因此我們決定以此爲題來做研究探討。

參、研究目的

本研究即探討：

一、在 $1\times1\times2$ 的長方體中，頂點 A 到長方體表面上一點 P 有最大值 min AP 的位置與距離。

二、在 $1\times1\times n$ 的長方體中，頂點 A 到長方體表面上一點 P 有最大值 min AP 的位置與距離。

三、在 $1\times m\times n$ 的長方體中，頂點 A 到長方體表面上一點 P 有最大值 min AP 的位置與距離。

四、在 $1\times1\times2$ 的長方體上的任意兩點 P、Q 使其有最大值 min PQ 的點的位置與距離。

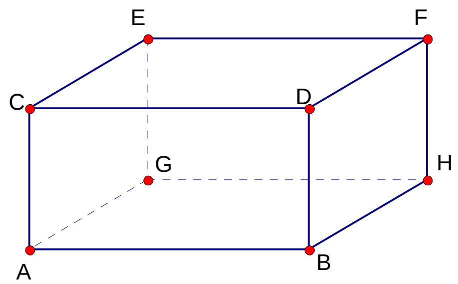
肆、　研究方法與過程

一、名詞與符號定義

（一）min PQ：在長方體表面上任兩點 P、Q 沿著長方體表面上所走的最短路徑的距離，我們用 min PQ 表示。

（二）線段 AF＝AF

（三）1. 將長方體頂點與面標示如下：



2. 將 ABDC 稱為 I 面、CDFE 稱為 II 面、EFHG 稱為 III 面、GHBA 稱為 IV 面、ACEG 稱為 V 面、BHFD 稱為 VI 面。

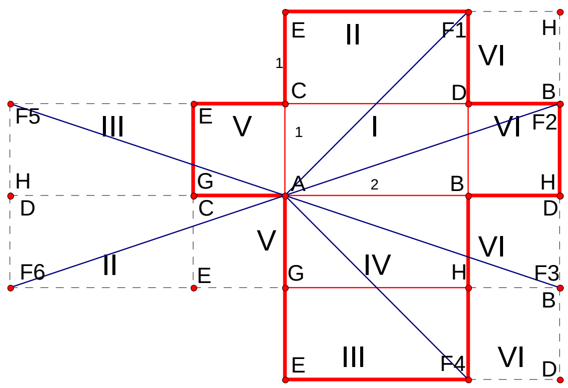
二、研究問題

***研究 1*：在 1x1x2 的長方體中，找出頂點 A 到長方體表面上一點 P 有最大值 min AP 的位置與距離。**

研究 1.1：在 1x1x2 的長方體中，求出頂點 A 到頂點 F 的 minAF。

研究分析　我們分兩階段解決

第一階段：畫展開圖找出所有可能為 minAF 的路徑：如圖 1



（圖 1）

第二階段：比較所有路徑的長度

1. 有六個路徑 AF_1、AF_2、AF_3、AF_4、AF_5、AF_6，但其中兩條 AF_5、AF_6 與 AF_2、AF_3 對稱，可以視為相同不必分別討論。

2. $AF_1 = AF_4 = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$，$AF_2 = AF_3 = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ 約 3.15

故 A 到 F 點的最短路徑 minAF＝$\sqrt{8}$ 約 2.83。

***結論 1.1*：在 1x1x2 的長方體中，頂點 A 到頂點 F 的 minAF 為通過 I 、II 兩面或 IV、III 兩面之路徑，minAF＝$\sqrt{8}$ 約 2.83**

研究 1.2、探討 minAF 是否爲頂點 A 到長方體表面上任一 P 的最大值 minAP？

猜想：**minAF 不是最大值 minAP。**

1. 如上圖 1，$AF_1=\sqrt{8}$，$AF_2=\sqrt{10}$，則 minAF＝$\sqrt{8}$，我們猜測有一點 P，使得 minA P ＞$\sqrt{8}$，且 *P 應在 BHFD（Ⅵ）面上，若找到此點 P，則 minAF 不是最大的 minAP*。

證明：

如右圖

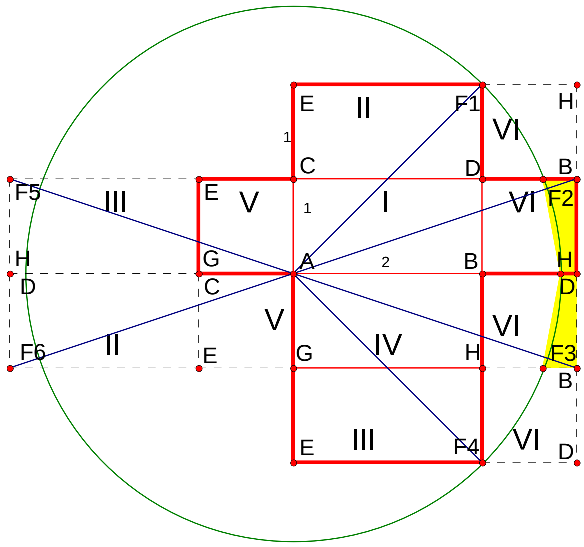
1.以 A 爲圓心，minAF 爲半徑畫圓

2.若 P 點在Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ面上，

因爲Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ面均在圓內所以 AP＜minAF

3.若有一點 P，使得 minAP＞$\sqrt{8}$，則 *P 應在 BHFD（Ⅵ）面上* 的黃色區域

則 minA F 就不是最大的 minAP。

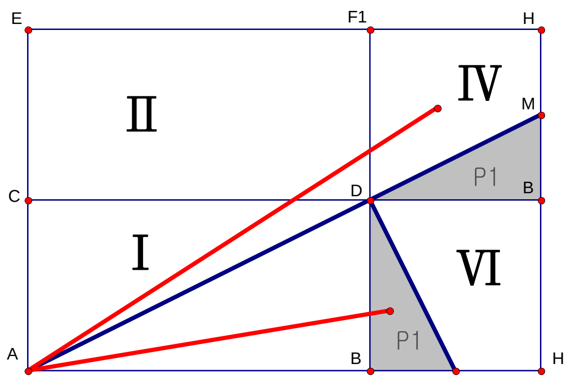


2. 若 HB 中點爲 M，BD 中點爲 N ，P 點不可能落在△DBM 和△BHN 內部。

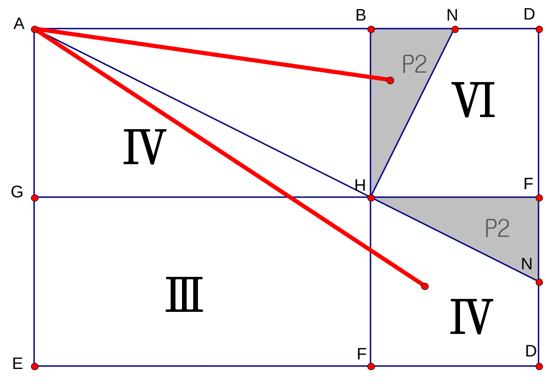
證明：

如下圖 2，設 HB 中點爲 M，若 P 點落在△DBM 內部，則無法過Ⅰ、Ⅱ面走 AP_1，得 minAP_1＜$\sqrt{8}$，故 P 點不可能落在△DBM 內部 。

同理如下圖 3，若 BD 中點爲 N，P 點不可能落在△BHN 內部 。



（圖 2）



（圖 3）

研究 1.3：在 1×1×2 的長方體中，找出頂點 A 到長方體表面上任一點 P 有最大值 minAP 的 P 點位置與距離

研究分析 我們分兩階段解決

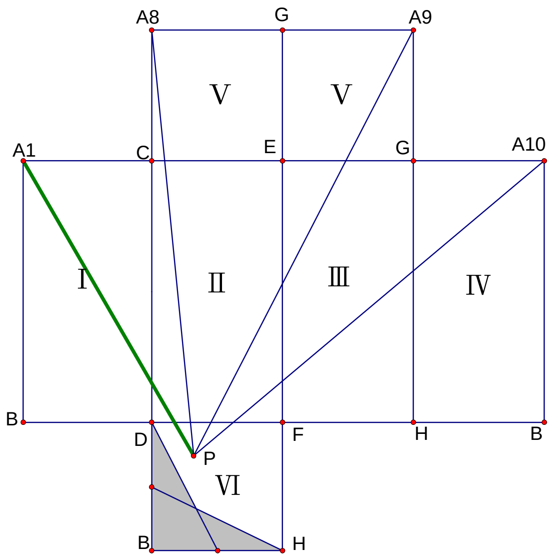
第一階段：**以 P 爲中心，畫展開圖找出所有可能爲 P 到 A 的 minAP 的路徑，再比較路徑的長短變化找到 P 點的位置：**

1. 在Ⅵ面上，若 HB 中點爲 M、BD 中點爲 N，P 點不能落在△DBM 與△BHN 內部的任一點，則 P 可能到達 A 點的路徑共有 10 條，如下表 ：

經第Ⅰ面	經第Ⅱ面	經第Ⅲ面	經第Ⅳ面
一. P⇨Ⅵ⇨Ⅰ⇨A	一. P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅴ⇨A	一. P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅴ⇨A	一.P⇨Ⅵ⇨Ⅳ⇨A
	二. P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅰ⇨A	二. P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅳ⇨A	
	三. P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨Ⅴ⇨A	三. P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅱ⇨Ⅰ⇨A	
	四. P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨Ⅳ⇨A	四. P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅱ⇨Ⅴ⇨A	

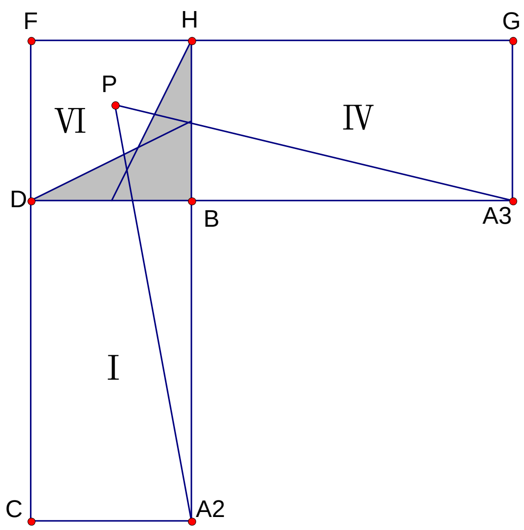
（1）通過Ⅱ面則有四條走法路徑，以 P 爲中心畫在同一個展開圖上，方便比較。如下圖 4

由**性質 1** **註 1** 可以判斷 PA_1 爲最短，故只討論此路徑 。



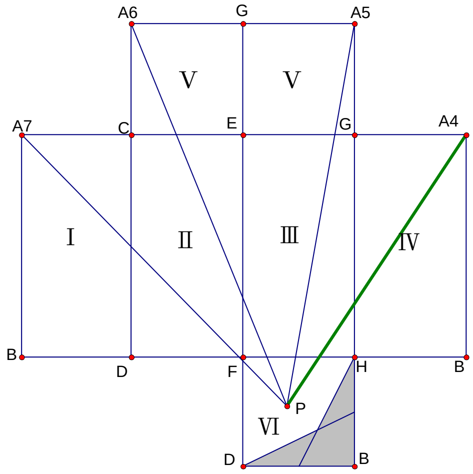
（圖 4）

（2）通過Ⅰ面或Ⅳ面有二條最短走法路徑 PA_2、PA_3，如下圖 5



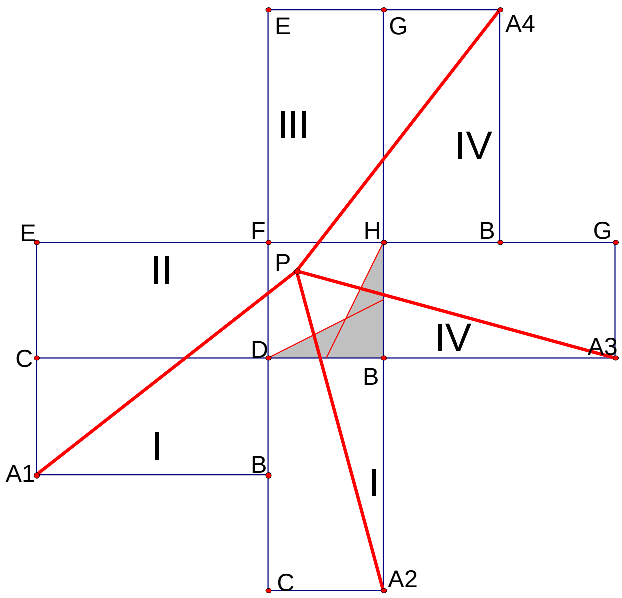
（圖 5）

（3）通過Ⅲ面有四條走法路徑，以 P 爲中心畫在同一個展開圖上，方便比較。如下圖 6 由性質 1 可以判斷 PA_4 爲最短，故只討論此路徑 。



（圖 6）

2. 綜合以上（1）（2）（3）結果，我們將可能的 minAP 四條路徑，以 P 爲中心，畫在同一個展開圖上，方便比較。如下圖 7



（圖 7）

3. 比較 PA_1、PA_4 的路徑的關係

$\boxed{\text{猜想}}$（1）當 P 在△BFH 內部 ⇨ $PA_1 > PA_4$

（2）當 P 在△BDF 內部 ⇨ $PA_1 < PA_4$

（3）當 P 在 BF 上 ⇨ $PA_1 = PA_4$

$\boxed{\text{證明}}$：

連接 A_1F、A_4F 、A_1B、A_4B

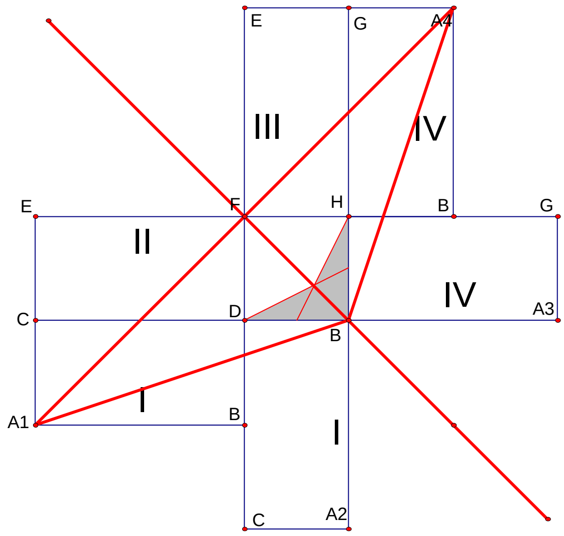
∵$A_1F = \sqrt{8} = A_4F$ 、$BA_1 = \sqrt{10} = BA_4$

∴BF 為 A_1A_4 的中垂線，由性質 1 可以判斷：

（1）若 P 在△BFH 內部上任一點，則 $PA_1 > PA_4$

（2）若 P 在△BDF 內部任一點，則 $PA_1 < PA_4$

（3）若 P 在 BF 上，則 $PA_1 = PA_4$　　故得證



結論 1.1： **1. 若 P 在 △BFH 內部上任一點，則 $PA_1 > PA_4$** **2. 若 P 在 △BDF 內部任一點，則 $PA_1 < PA_4$** **3. 若 P 在 BF 上，則 $PA_1 = PA_4$**

4. 比較 PA_2、PA_3 的路徑的關係

$\boxed{\text{猜想}}$（1）當 P 在 △BFH 內部，則 $PA_2 > PA_3$

（2）當 P 在 △BDF 內部，則 $PA_2 < PA_3$

（3）當 P 在 BF 上，則 $PA_2 = PA_3$

$\boxed{\text{證明}}$：

連接 A_2F、A_3F

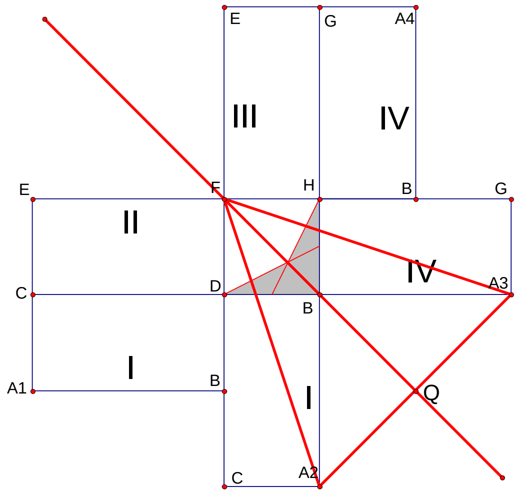
∵$A_2F = \sqrt{10} = A_3F$ 、$A_2B = \sqrt{8} = A_3B$

∴BF 為 A_2A_3 的中垂線，由性質 1 可以判斷：

（1）若 P 在 △BFH 內部上任一點，則 $PA_2 > PA_3$

（2）若 P 在 △BDF 內部任一點，則 $PA_2 < PA_3$

（3）若 P 在 BF 上，則 $PA_2 = PA_3$　故得證



結論 1.2： 1.若 P 在 △BFH 內部上任一點，則 $PA_2 > PA_3$ 2.若 P 在 △BDF 內部任一點，則 $PA_2 < PA_3$ 3.若 P 在 BF 上，則 $PA_2 = PA_3$

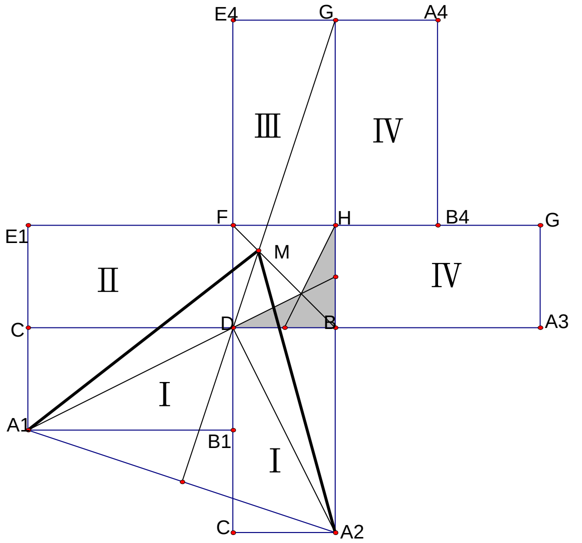
5. 比較 PA_1、PA_2 的路徑的關係，設 M 點為 A_1A_2 的中垂線與 BF 交點。

$\boxed{\text{猜想}}$（1）當 P 在△FDM 內部，則 $PA_1 < PA_2$

（2）當 P 在△BDM 內部，則 $PA_1 > PA_2$

（3）當 P 在 DM 上，則 $PA_1 = PA_2$

證明：



作 A_1A_2 的中垂線交 BF 於 M 點，連 AD，A_2D

∵A_1D＝$\sqrt{A_1B_1^{\ 2}+B_1D^2}=\sqrt{2^2+1^2}$

$=\sqrt{CD^2+A_2C^2}$ ＝A_2D

∴D 必在 A_1A_2 的中垂線 MN 上，由性質 1 可以判斷

（1）若 P 在△FDM 內部上任一點，則 PA_1＜PA_2

（2）若 P 在△BDM 內部任一點，則 PA_1＞PA_2

（3）若 P 在 DM 上，則 PA_1＝PA_2　　故得證

結論 1.3：**設 M 點為 A_1A_2 的中垂線與 BF 交點。**

1. **當 P 在△FDM 內部，則 PA_1＜PA_2**
2. **當 P 在△BDM 內部，則 PA_1＞PA_2**
3. **當 P 在 DM 上，則 PA_1＝PA_2**

6. 綜合**結論 1.1、1.2、1.3**，可推論當 P 是 $\overline{FB}$ 上的 M 點時，minAP 為最大值

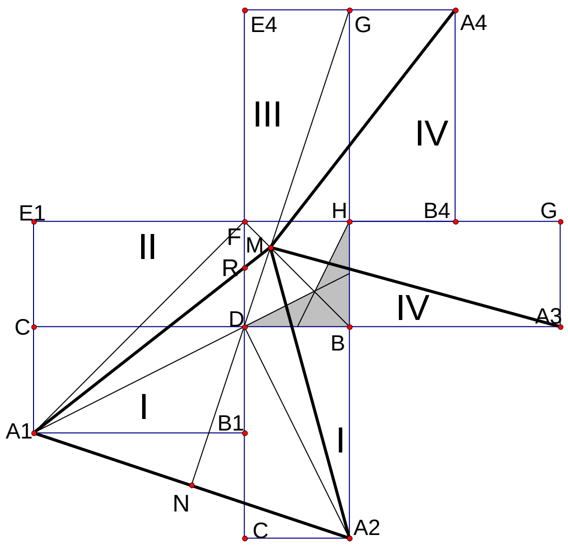
猜想（1）當 P 是△FDM 上或內部一點，則 $A_1M \geqq A_1P$

（2）當 P 是△BDM 上或內部一點，則 $A_2M \geqq A_2P$

（3）當 P 是△BHF 上或內部一點，則 $A_4M \geqq A_4P$

故 P 是 $\overline{FB}$ 上的 M 點時，minAP 為最大值

證明：



作 A_1F，A_1D

1. 若 P 落在△FRM 上或內，

∵ A_1F，BF 為正方形 $A_1E_1FB_1$、FDBH 的對角線

∴ $\angle A_1FM=\angle A_1FR+\angle MFR=45^\circ+45^\circ=90^\circ$

由性質 2 可知，$A_1M \geqq A_1P$

2. 若 P 落在△DRM 上或內，

∵$\angle A_1ND=90^\circ$

由性質 2 可知，$A_1M \geqq A_1P$

由 1、2 可知，當 P 在△FDM 上或內，$A_1M \geqq A_1P$

同理可證當 P 在△BDM 上或內，$A_2M \geqq A_2P$

故 若 P 在△BDF 上或內，$A_1M=A_2M \geqq A_1P$，

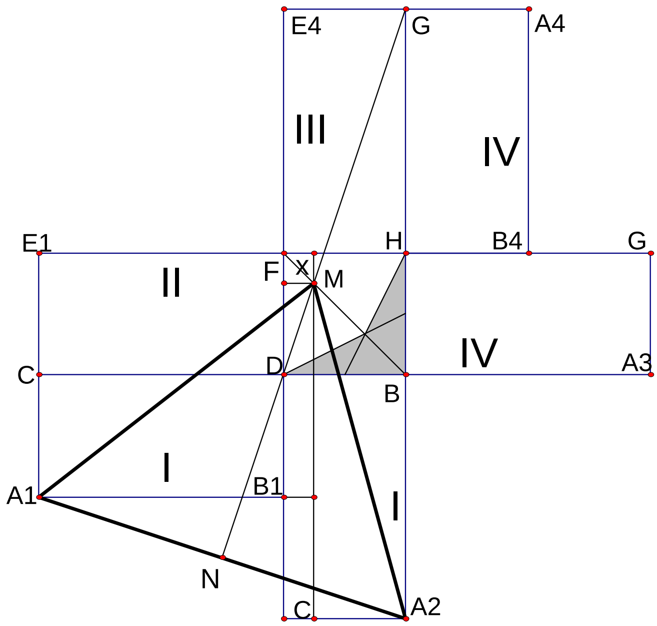
同理可證當 P 在△BHF 上或內，$A_4M=A_3M \geqq A_4P$

也就是說 P 是 BF 上的 M 點時，minAP 為最大值

結論 1.4：在 **1x1x2** 的長方體中，設 **M** 點爲 $\mathbf{A_1A_2}$ 的中垂線與 **BF** 交點。當 **P**＝**M** 時，頂點 **A** 到第 **VI** 面的 **P** 點有最大值的 **minAP**

第二階段

求出 **P** 點位置：如下圖



設 P 點到 FD 的距離爲 x

因爲∠DFP＝45°所以 P 點到 FH 的距離爲 x

因 $PA_1=PA_2$，我們可以列出此算式：

$$\sqrt{(2+x)^2+(2-x)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(1-x)^2}$$

$$\sqrt{(x^2+4x+4)+(x^2-4x+4)}$$

$$=\sqrt{(x^2-6x+9)+(x^2-2x+1)}$$

$$\sqrt{2x^2+8}=\sqrt{2x^2-8x+10}$$

$$2x^2+8=2x^2-8x+10$$

$$8x=2 \quad ，\quad x=\frac{1}{4}$$

$$FB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\therefore FP=\frac{1}{4}\sqrt{2}\ 。$$

$$PA_1=\sqrt{\left(2+\frac{1}{4}\right)^2+\left(2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{49}{16}}=\sqrt{\frac{130}{16}}=\frac{\sqrt{130}}{4}\fallingdotseq 2.85$$

結論 1.5：在 **1x1x2** 的長方體中，頂點 **A** 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點 P 的位置爲當 **PF=**$\frac{1}{4}$ **FB** 處有最大值爲 $\frac{\sqrt{130}}{4}$ ≒**2.85**。

研究 **2**：在 **1x1xn** 的長方體中，找出頂點 A 到長方體表面上有最大值的 minAP 點的位置與距離。

研究 **2.1**：在 1x1xn 的長方體中，找出頂點 **A** 到頂點 **F** 的 **minAF**。

1. 畫出展開圖找出所有可能的路徑，如下圖：六個路徑 AF_1、AF_2、AF_3、AF_4、AF_5、AF_6，但其中 AF_1、AF_2、AF_3 與 AF_4、AF_6、AF_5 對稱，可以視爲相同不必分別討論。

研究分析：分成 **3** 部分討論（**1**）**n**＞**1**　（**2**）**n=1**　（**3**）**n**＜**1**

（1）n＞1　 畫展開圖找出所有可能為 **minAF** 的路徑如下圖 **2-1**

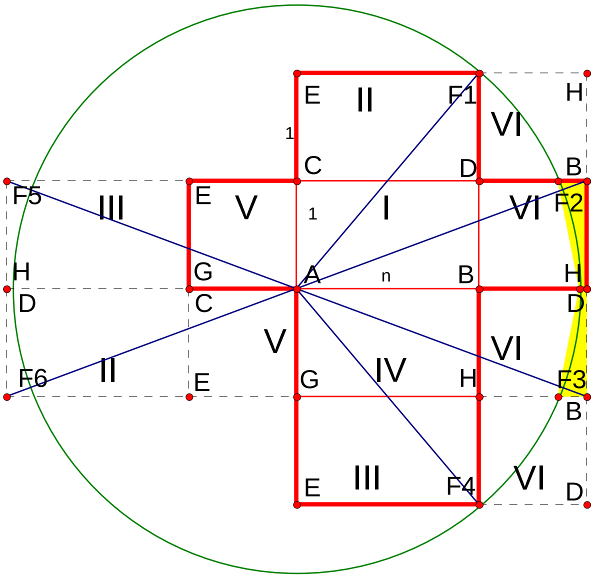


圖 2-1

$AF_1=AF_4=\sqrt{n^2+(1+1)^2}=\sqrt{n^2+4}$，$AF_2=AF_6=AF_3=AF_5=\sqrt{1^2+(1+n)^2}=\sqrt{n^2+2n+2}$

因 n＞1 所以 2n+2＞4 則 $\sqrt{n^2+2n+2}>\sqrt{n^2+4}$， **minAF**$=\sqrt{n^2+(1+1)^2}=\sqrt{n^2+4}$

結論 2.1.1：在 1x1xn 體中若 **n＞1**，**頂點 A 到頂點 F 的 minAF 為通過Ⅰ、Ⅱ兩面或Ⅳ、Ⅲ兩面之路徑**，**minAF**$=\sqrt{n^2+(1+1)^2}=\sqrt{n^2+4}$

（2）n=1　 此時為正立方體，頂點 **A** 到 **F** 點的所有路徑均有相同距離。

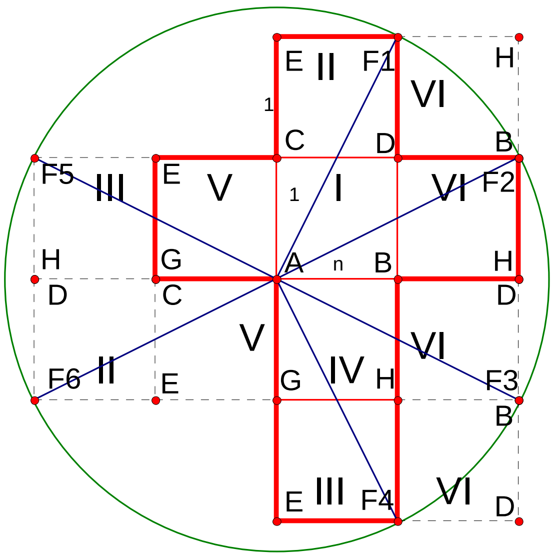


圖 2-2

此時 minAF$=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

結論 2.1.2：在 1x1xn 的長方體中若 **n=1**，**頂點 A 到頂點 F 的 minAF**$=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

（3）**n＜1**

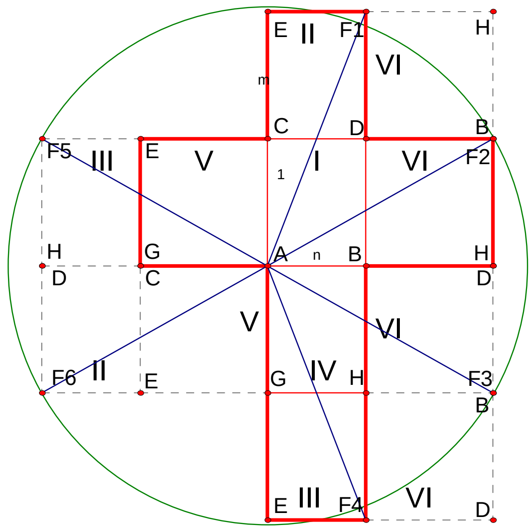


圖 2-3

$AF_2＝AF_3＝AF_5＝AF_6＝\sqrt{1^2+(1+n)^2}$，$AF_1＝AF_4＝\sqrt{n^2+2^2}$

∵n＜1　∴2n+2＜4 則 $\sqrt{n^2+2n+2}<\sqrt{n^2+4}$

故 minAF＝AF_2（AF_3、AF_5、AF_6）＝$\sqrt{1^2+(1+n)^2}$

結論 2.1.3：在 1x1xn 的長方體中若 **n＜1**，**頂點 A 到頂點 F 的 minAF 爲通過Ⅰ、Ⅵ或Ⅳ、Ⅵ或Ⅴ、Ⅲ或Ⅴ、Ⅱ兩面之路徑，minAF＝**$\sqrt{1^2+(1+n)^2}$

研究 2.2：在 1x1xn 的長方體中，探討頂點 **F** 是否爲頂點 **A** 到長方體表面上有最大值的 **minAP** 的點？

研究分析：分成兩部分討論　**1. n≦1**　**2. n＞1**

（一）若 **n≦1**

由上圖 2-2、2-3 可看出在Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ面上，均在以 A 爲圓心，minAF 爲半徑的圓內。故 minAP 小於 minAF，所以 minAF 爲最大值。

結論 2.2.1：**若 n≦1，在** $1\times1\times n$ **的長方體中，頂點 A 到長方體表面上一點 P 的有最大值 minAP 的位置爲 F 點。此時最大值 minAP＝minAF＝**$\sqrt{1^2+(1+n)^2}$ 。

（二）若 **n＞1**

1. 由圖 2-4 可知，若 P 點在Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ面上，均在以 A 爲圓心，minAF 爲半徑的圓內，故 minAP 小於 minAF。若 P 點在 VI 面上，有些點在圓外，可使 minAP＞minAF，所以**頂點 A 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點應在** VI 面上。

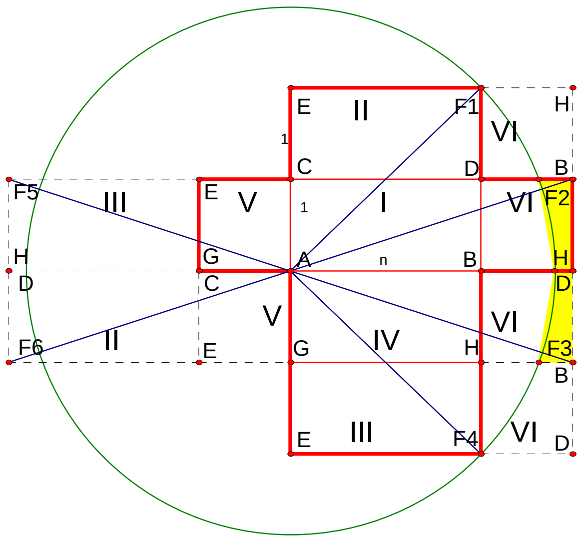


圖 2-4

2． **利用 GSP 作圖動畫模擬，*以第 VI 面爲中心***，畫展開圖找出所有可能爲 P 到 A 的 minAP 的路徑，**設** P 點爲 A_1A_2 中垂線與 A_1A_4 中垂線的交點，當 n 改變時 AF 與 AP 大小也跟著改變，於是我們做下列討論--**在 $1\times1\times n$ 的長方體中，找出頂點 A 到長方體表面上有最大的 minAP 的點 P 的位置與距離。**

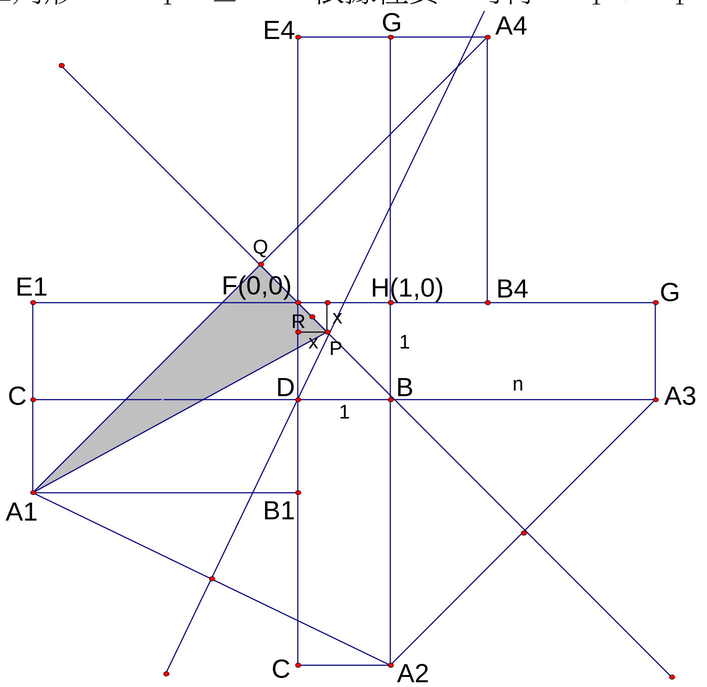
研究分析：**再分成 2 部分討論 1. n≧2 2. 1＜n<2**

1. 當 n≥2 時，

（1）以第VI面爲中心，畫展開圖找出所有可能爲 P 到 A 的 minAP 的路徑：如下圖

（2）此展開圖爲對稱圖形，其對稱軸爲直線 BF，若 P 在 BF 上，則 $PA_1=PA_4$、$PA_2=PA_3$

（3）利用 GSP 作圖發現：當 n≥2 時，A_1A_4 中點 Q 會落在第 VI 面外部或 F 點上，$\triangle A_1QP$ 則爲直角三角形，$\angle A_1FP \geqq 90^\circ$，根據性質二可得：$A_1P > A_1F$



（4）設 P 點爲 A_1A_2 中垂線與 A_1A_4 中垂線的交點，則 $PA_1=PA_2=PA_4=PA_3 > A_1F$

求出 P 點位置：如上圖

設 P 點到 FD 的距離爲 x

因爲角 DFP 爲 45 度所以 P 點到 FH 的距離爲 x

因 $PA_1=PA_2$，我們可以列出此算式：

$$\sqrt{(n+x)^2+(2-x)^2}=\sqrt{(n+1-x)^2+(1-x)^2}$$

$$\sqrt{n^2+2nx+x^2+4-4x+x^2}=\sqrt{n^2+2nx+1-2nx-2x+x^2+1-2x+x^2}$$

$$2nx+4=2n-2nx+2$$

$$4nx=2n-2$$

$$x=\frac{2n-2}{4n}=\frac{n-1}{2n}>0\,(n>1)$$

$$PA_1=\sqrt{\left(n+\frac{n-1}{2n}\right)^2+\left(2-\frac{n-1}{2n}\right)^2}=\sqrt{\frac{(2n^2+n-1)^2}{4n^2}+\frac{(3n+1)^2}{4n^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{4n^4+4n^3+6n^2+4n+2}}{2n}$$

同研究 1.3 可得到：

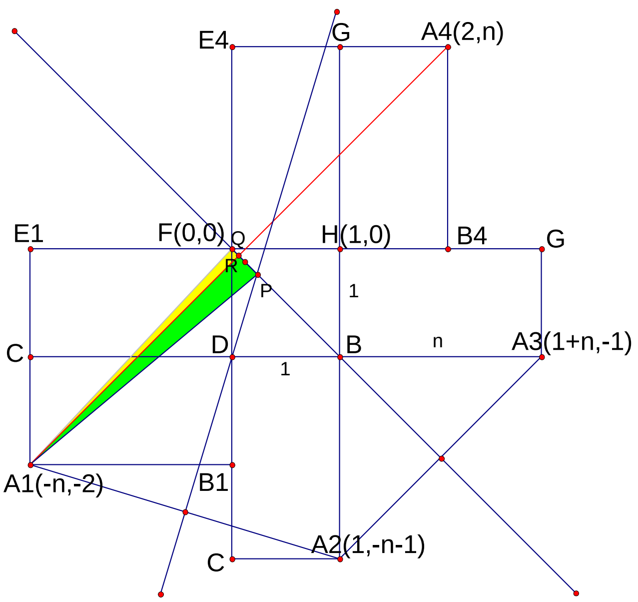
> ***結論 2.2.2：***在 1x1xn 的長方體中**(n≧2)，頂點 A 到長方體表面上有最大值的** minAP **的點** P **的位置爲當 PF=**$\frac{n-1}{2n}$**FB 處有最大值爲**$\frac{\sqrt{4n^4+4n^3+6n^2+4n+2}}{2n}$。

2. 當 1＜n<2 時，

（1）將展開圖標上座標，令

F(0，0)、A_1A_4 中點 $Q\left(\frac{2-n}{2},\frac{n-2}{2}\right)$，$A_1A_4$ 與 A_1A_2 的中垂線交點 $P\left(\frac{n-1}{2n},\frac{1-n}{2n}\right)$

FP 中點 $R\left(\frac{n-1}{4n},\frac{1-n}{4n}\right)$



（2）利用 **GSP 作圖**發現：當 n＜2 時，A_1A_4 中點 Q 會落在第Ⅵ面內部，ΔA_1QF 則爲直角三角形，則 $A_1F^2=A_1Q^2+FQ^2, A_1P^2=A_1Q^2+PQ^2$

① 若$FQ \le PQ$ 則$A_1F \le A_1P$

也就是 Q 在 F、R 之間或 Q 在 R 上

$\frac{2-n}{2}=\frac{n-1}{4n} \Rightarrow 2n^2-3n-1=0 \Rightarrow \because n>0 \therefore n=\frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$

$\frac{2-n}{2} \le \frac{n-1}{4n} \Rightarrow 2n^2-3n-1 \ge 0 \Rightarrow n \ge \frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$

可得最大值的 minAP=A_1P＝$\frac{\sqrt{4n^4+4n^3+6n^2+4n+2}}{2n}$

② 若$FQ > PQ$ 則$A_1F > A_1P$

也就是 Q 在 R 之右邊

⇨ $\frac{2-n}{2}>\frac{n-1}{4n} \Rightarrow 2n^2-3n-1<0 \Rightarrow n<\frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$，

可得最大值的 minAP=AF＝$\sqrt{n^2+4}$

同研究 1.3 可得到：

結論 2.2.3：**在 1x1xn 的長方體中，**

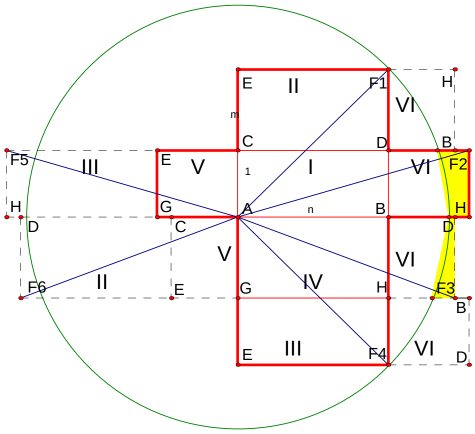
1. **當**$n \ge \frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$**，頂點 A 到長方體表面上有最大值的** minAP **的點** P **的位置為當 PF=** $\frac{n-1}{2n}$**FB 處有最大值為**$\frac{\sqrt{4n^4+4n^3+6n^2+4n+2}}{2n}$ 。
2. **當 1＜**$n<\frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$ **，頂點 A 到長方體表面上有最大值的** minAP **的點** P **的位置為 F 點，此時最大值的 minAP=minAF＝**$\sqrt{n^2+4}$ 。

研究 3：在 1xmxn 的長方體中，找出頂點 A **到長方體表面上有最大值的** minAP **的** P **點的位置與距離。（1＜m＜n）**

研究 3.1 在 1xmxn 的長方體中，找出頂點 A 到頂點 F 的 minAF。

1. 畫展開圖找出所有可能為 minAF 的路徑
2. $AF_1=AF_4=\sqrt{n^2+(1+m)^2}$ ，$AF_2=AF_5=\sqrt{1^2+(m+n)^2}$ ，$AF_3=AF_6=\sqrt{m^2+(1+n)^2}$

   $\because 1<m<n$ $\therefore$ $\sqrt{1^2+(m+n)^2} > \sqrt{m^2+(1+n)^2} > \sqrt{n^2+(1+m)^2}$
3. 由下圖可知，若 P 點在 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、V 面上，均在以 A 為圓心，minAF 為半徑的圓內，故 minAP 小於 minAF。若 P 點在 VI 面上，有些點在圓外，可使 minAP＞minAF，所以**頂點 A 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點應在** VI 面上。



結論 3.1.1：在 **1xmxn** 的長方體中若 **1＜m＜n**，頂點 **A** 到頂點 **F** 的 **minAF** 爲通過Ⅰ、Ⅱ面或Ⅳ、Ⅲ面之路徑，**minAF**＝$\sqrt{n^2+(1+m)^2}$

研究 3.2：在 1xmxn 的長方體中，找出頂點到長方體表面上有最大值的 minAP 的 P 點的位置與距離。(1＜m＜n)

猜想 ：**n 與 m 的值會影響 P 點的位置。**

1. 討論頂點位置不同是否有不同的結果？可分爲四組討論

（1）在$1\times m\times n$的長方體中，① 頂點 A→頂點 F ② 頂點 B→頂點 E

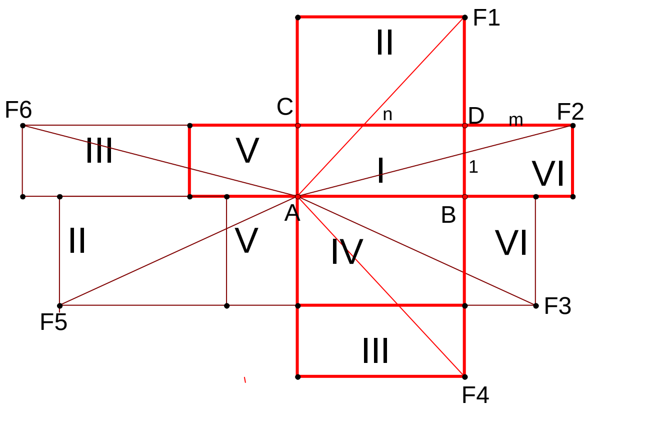
③ 頂點 C→頂點 H ④ 頂點 D→頂點 G

minAF 最大值(可能的 minAF 爲底線文字)

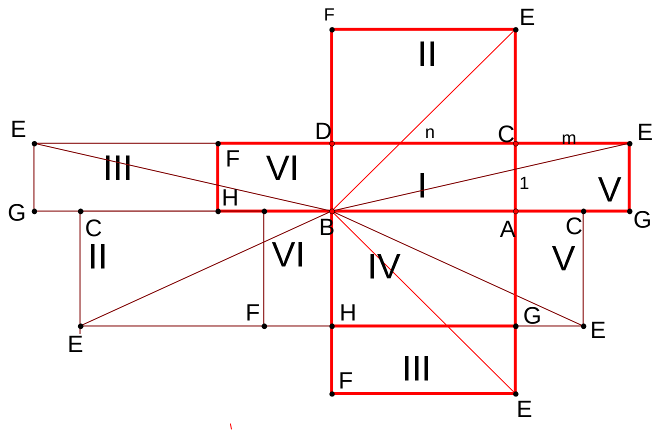
頂點 A→頂點 F	頂點 B→頂點 E	頂點.C→頂點 H	頂點 D→頂點 G
A⇨Ⅰ⇨Ⅱ⇨F	B⇨Ⅰ⇨Ⅱ⇨E	C⇨Ⅰ⇨Ⅳ⇨H	D⇨Ⅰ⇨Ⅳ⇨G
A⇨Ⅰ⇨Ⅵ⇨F	B⇨Ⅰ⇨Ⅴ⇨E	C⇨Ⅰ⇨Ⅵ⇨H	D⇨Ⅰ⇨Ⅴ⇨G
A⇨Ⅳ⇨Ⅲ⇨F	B⇨Ⅳ⇨Ⅲ⇨E	C⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨H	D⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨G
A⇨Ⅳ⇨Ⅵ⇨F	B⇨Ⅳ⇨Ⅴ⇨E	C⇨Ⅱ⇨Ⅵ⇨H	D⇨Ⅱ⇨Ⅴ⇨G
A⇨Ⅴ⇨Ⅱ⇨F	B⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨E	C⇨Ⅴ⇨Ⅳ⇨H	D⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨G
A⇨Ⅴ⇨Ⅲ⇨F	B⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨E	C⇨Ⅴ⇨Ⅲ⇨H	D⇨Ⅵ⇨Ⅳ⇨G

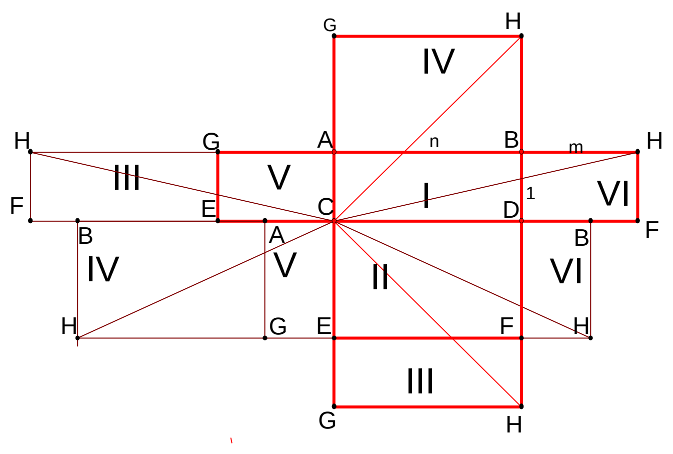
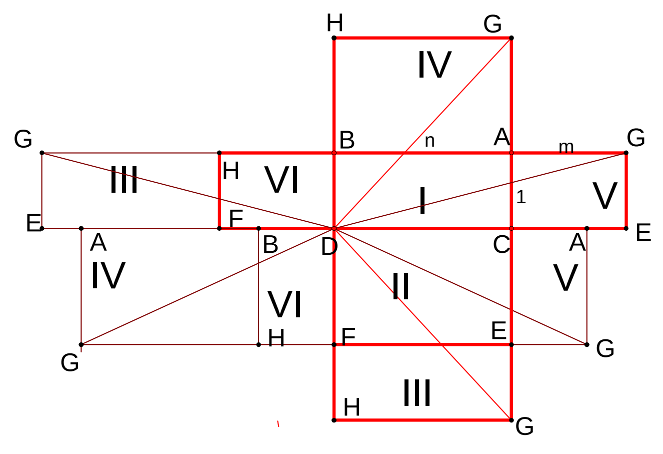
（2）四組頂點路徑的展開圖

A-F



B-E



C-H	D-G
	

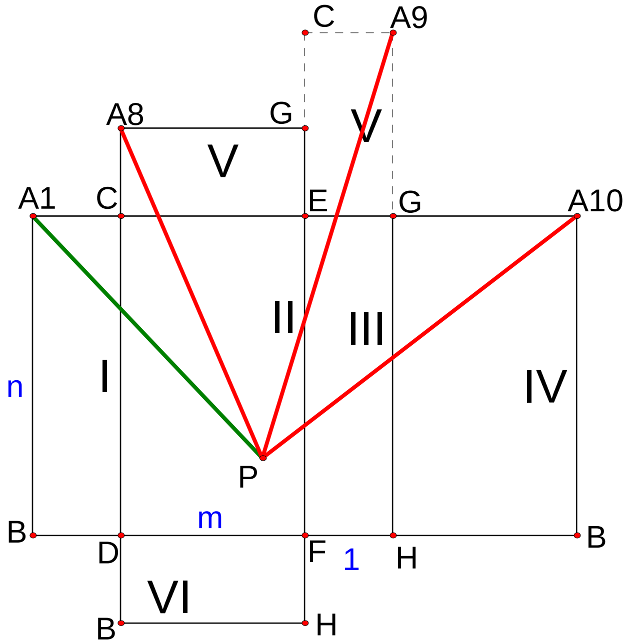
（3）比較結果：四組頂點的路徑對稱相同。

結論 3.2.1：因長方體爲對稱圖形，所以四組頂點的結果均相同，故我們只討論頂點 A→頂點 F 一種就可以。

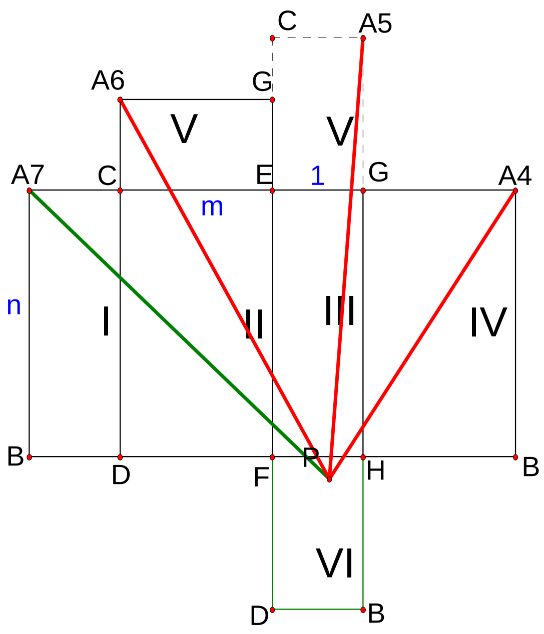
2. 找出第Ⅵ面上 P 點到 A 點的所有路徑，以及 minAP 最大值(可能的最大值爲底線文字)

經第 I 面：	經第 II 面：	經第 III 面：	經第 IV 面：
<u>P⇨Ⅵ⇨ Ⅰ⇨A</u>	P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅴ⇨A <u>P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨ Ⅰ⇨A</u> P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨Ⅴ⇨A P⇨Ⅵ⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨Ⅳ⇨A	P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅴ⇨A <u>P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅳ⇨A</u> P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅱ⇨ Ⅰ⇨A P⇨Ⅵ⇨Ⅲ⇨Ⅱ⇨Ⅴ⇨A	<u>P⇨Ⅵ⇨Ⅳ⇨A</u>

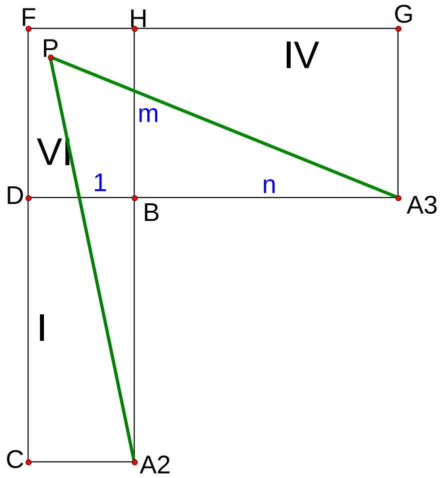
(1).經第 II 面：



(2).經第 III 面：



(3).經第 I 、IV面：



3. $\boxed{\text{求出 P 點位置}}$：

如下圖，P 爲 A_3A_4 中垂線與 A_1A_4 中垂線的交點

設 P 點到 FD 的距離爲 x

∵∠DFP＝45° ∴P 點到 FH 的距離爲 x

因 $PA_1=PA_3$，我們可以列出此算式：

$$\sqrt{(n+x)^2+[(m+1)-x]^2}=\sqrt{[(n+1)-x]^2+(m-x)^2}$$

$$(n^2+2nx+x^2)+\left[(m+1)^2-2\cdot(m+1)\cdot x+x^2\right]=\left[(n+1)^2-2(n+1)x+x^2\right]+(m^2-2mx+x^2)$$

$$n^2+2nx+x^2+\left[(m^2+2m+1)-(2mx+2x)+x^2\right]=\left[(n^2+2n+1)-(2nx+2x)+x^2\right]+m^2-2mx+x^2$$

$$n^2+2nx+x^2+\left[(m^2+2m+1)-2mx-2x+x^2\right]=\left[(n^2+2n+1)-2nx-2x+x^2\right]+m^2-2mx+x^2$$

$$n^2+2nx+x^2+\left[(m^2+2m+1)-2mx-2x+x^2\right]=\left[n^2+2n+1-2nx-2x+x^2\right]+m^2-2mx+x^2$$

$$\cancel{n^2}+2nx\cancel{+x^2}\cancel{+m^2}+2m\cancel{+1}\cancel{-2mx}\cancel{-2x}\cancel{+x^2}=\cancel{n^2}+2n\cancel{+1}-2nx\cancel{-2x}\cancel{+x^2}\cancel{+m^2}\cancel{-2mx}\cancel{+x^2}$$

$$2nx+2m=2n-2nx$$

$$2nx+2nx=2n-2m$$

$$4nx=2n-2m$$

$$x=\frac{2n-2m}{4n}=\frac{n-m}{2n}$$

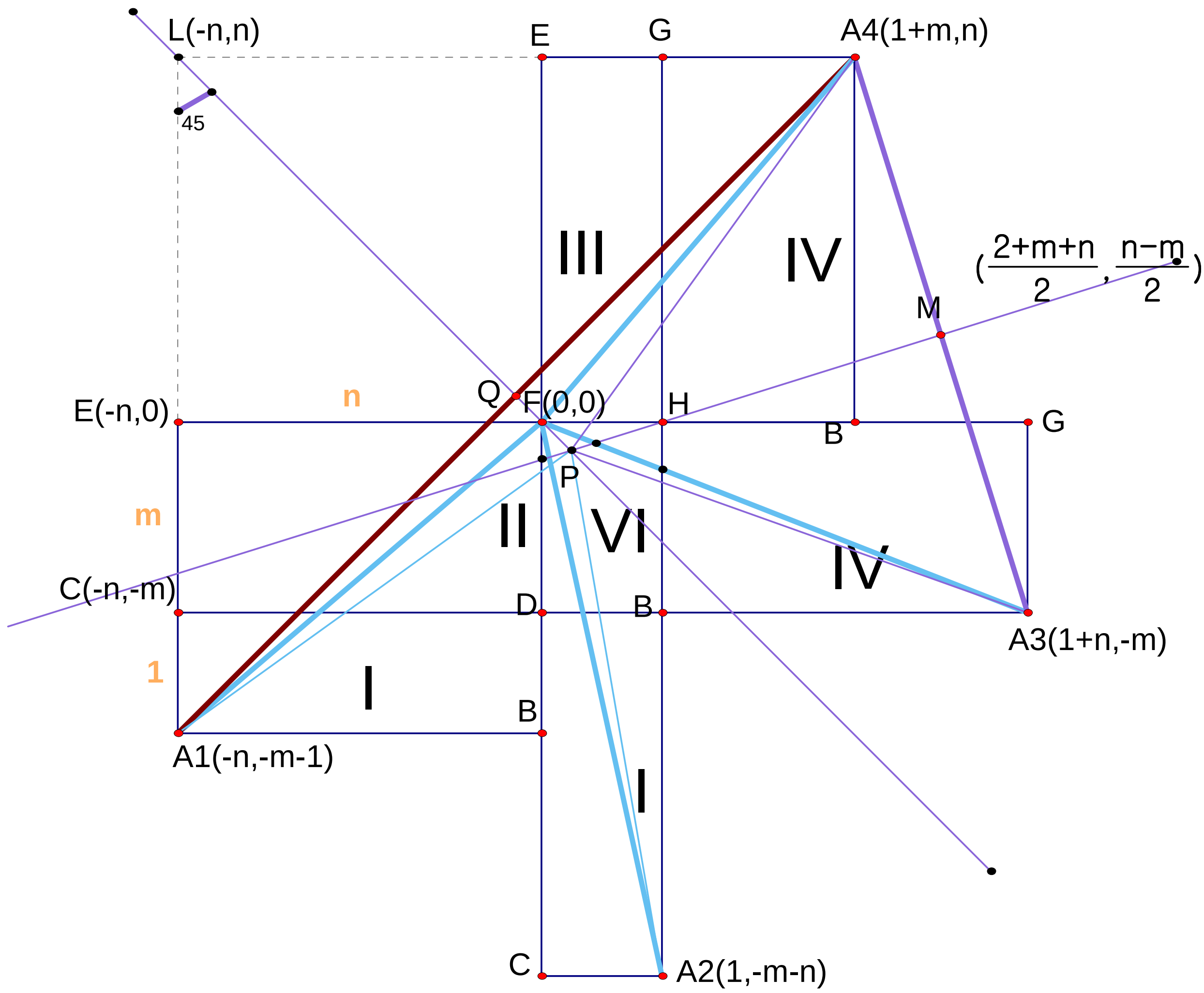
4. 展開圖經 GSP 作圖後將 F 標爲原點(0,0)，並將其他各點標示出其坐標，依序如下：

$F(0,0)$

$A_1A_4\text{中點}Q\left(\frac{1+m-n}{2},\frac{n-1-m}{2}\right)$

$A_1A_4\text{與}A_3A_4\text{的中垂線交點}P(\frac{n-m}{2n},\frac{m-n}{2n})$

$FP\text{中點}R(\frac{n-m}{4n},\frac{m-n}{4n})$



<table>
<tr><td>

發現：**m、n** 會決定 **A_1A_4** 中點 **Q** 與 **F、P** 的相對位置，進而影響最大值 **minAP** 的位置所在，其結果可分爲四類，如下圖所示

（**1**）**Q** 在 **F** 左側或 **F** 上

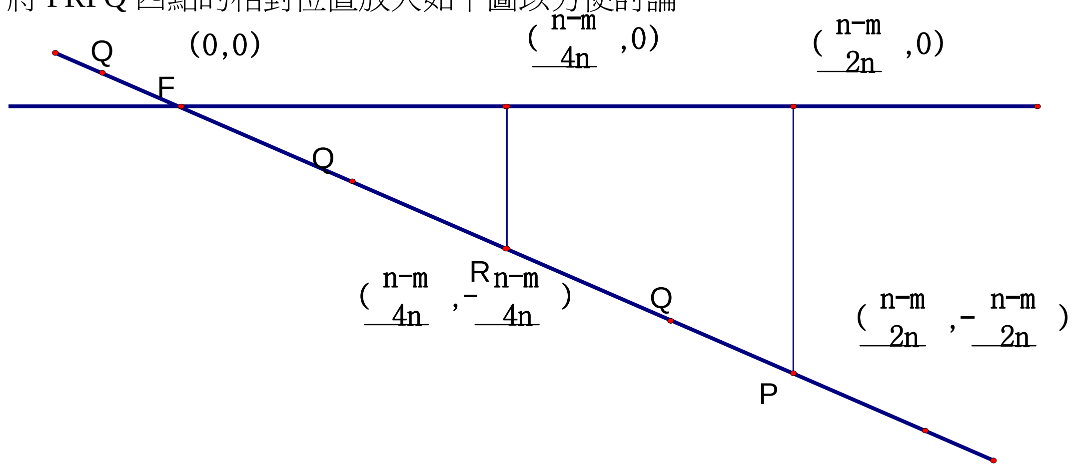
（**2**）**Q** 在 **F、R** 之間

（**3**）**Q** 在 **R** 上

（**4**）**Q** 在 **R** 的右側

</td></tr>
</table>

5. 將 FRPQ 四點的相對位置放大如下圖以方便討論



（1）若Q 在F 左側或F 上

$$Q\left(\frac{1+m-n}{2},\frac{n-1-m}{2}\right)\text{在F左側或F上} \Rightarrow FQ < PQ \Rightarrow PA_1 > FA_1$$

$$\Rightarrow \frac{1+m-n}{2} \le 0 \Rightarrow 1+m-n \le 0$$

（2）若Q 在F 、R 之內

$$Q\left(\frac{1+m-n}{2},\frac{n-1-m}{2}\right)\text{在F右側且}FQ < PQ \Rightarrow A_1P > A_1F$$

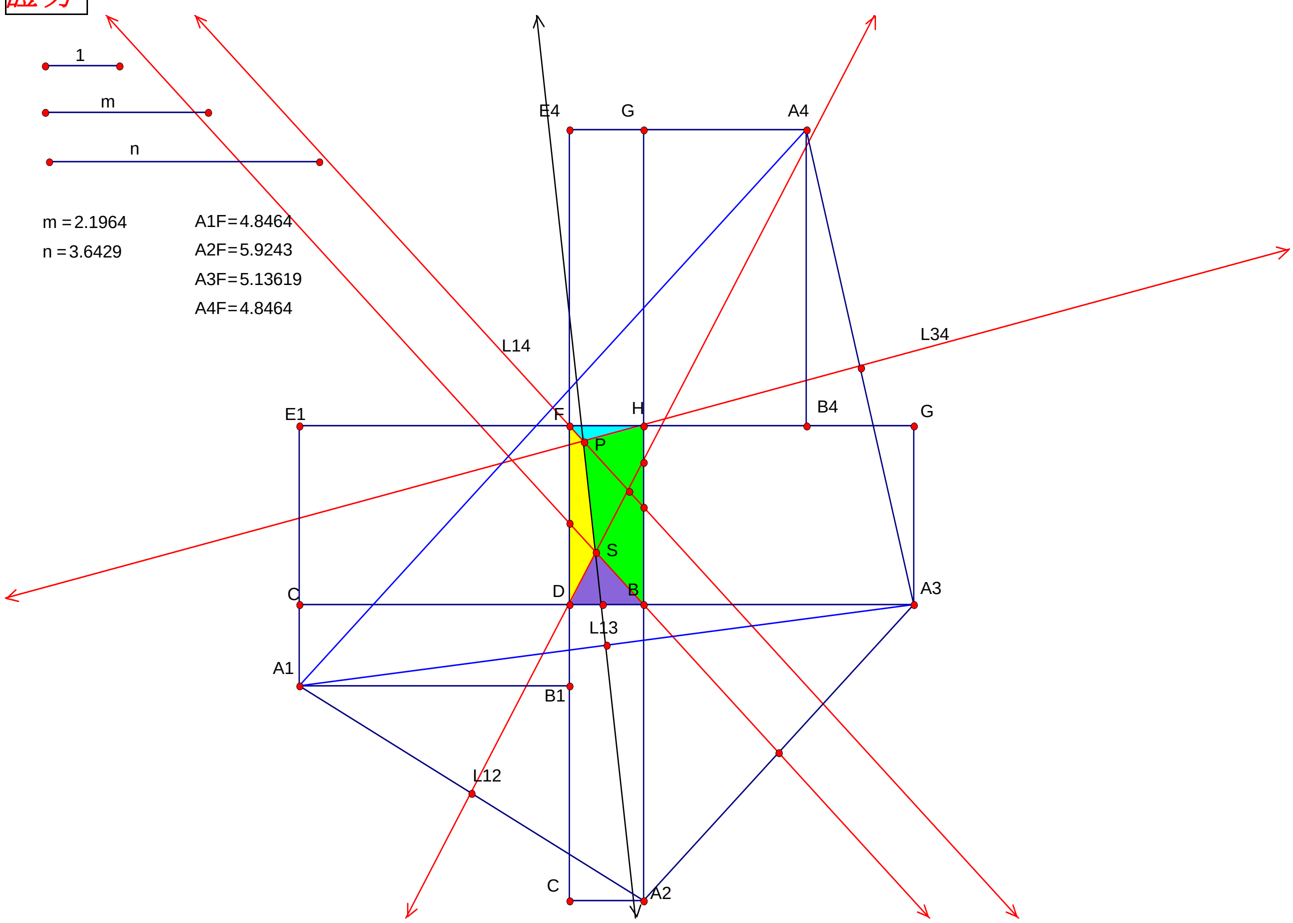
$$\Rightarrow \frac{1+m-n}{2} < \frac{n-m}{4n}$$

綜合（1）（2）得

$$\Rightarrow \frac{1+m-n}{2} < \frac{n-m}{4n}\text{，}A_1P > A_1F$$

猜想：在 1xmxn 的長方體中，若$\frac{1+m-n}{2} < \frac{n-m}{4n}$，頂點 A 到長方體表面上一點 P 的最大值的 minAP 為 A_1P

證明：



分別作 A_1A_4、A_1A_2、A_2A_3、A_1A_3、A_3A_4的中垂線 L_{14}、L_{12}、L_{23}、L_{13}、L_{34}

1. 若點落在四邊形 FDSP 內或上，則此點與 A_1 在中垂線 L_{12}、L_{13}、L_{14}的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_1 的距離，又由性質二的證明可推得 A_1P 爲最大值。
2. 若點落在△SDB 內或上，則此點與 A_2 在中垂線 L_{12}、L_{23} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_2 的距離，又由性質二的證明可推得 A_2S 爲最大值。
3. 若點落在四邊形 HPSB 內或上，則此點與 A_3 在中垂線 L_{13}、L_{23}、L_{34} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_3 的距離，又由性質二的證明可推得 A_3P 爲最大值。
4. 若點落在△FPH 內或上，則此點與 A_4 在中垂線 L_{34}、L_{14} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_4 的距離，又由性質二的證明可推得 A_4P 爲最大值。

又很明顯的 $A_1P = A_3P = A_4P > A_2S$　　*∴A_1P 爲最大值的 minAP*

結論 3.2.2：在 1xmxn 的長方體中（1<m<n），若 $\frac{1+m-n}{2} < \frac{n-m}{4n}$，頂點 A 到長方體表面上一點 P 的最大值 minAP 的位置爲 P 到 FD 和 FH 距離爲 $\frac{n-m}{2n}$ 處有最大值的

$$\min AP = \sqrt{\left(\frac{n-m}{2n}+n\right)^2 + \left(\frac{m-n}{2n}+m+1\right)^2}$$

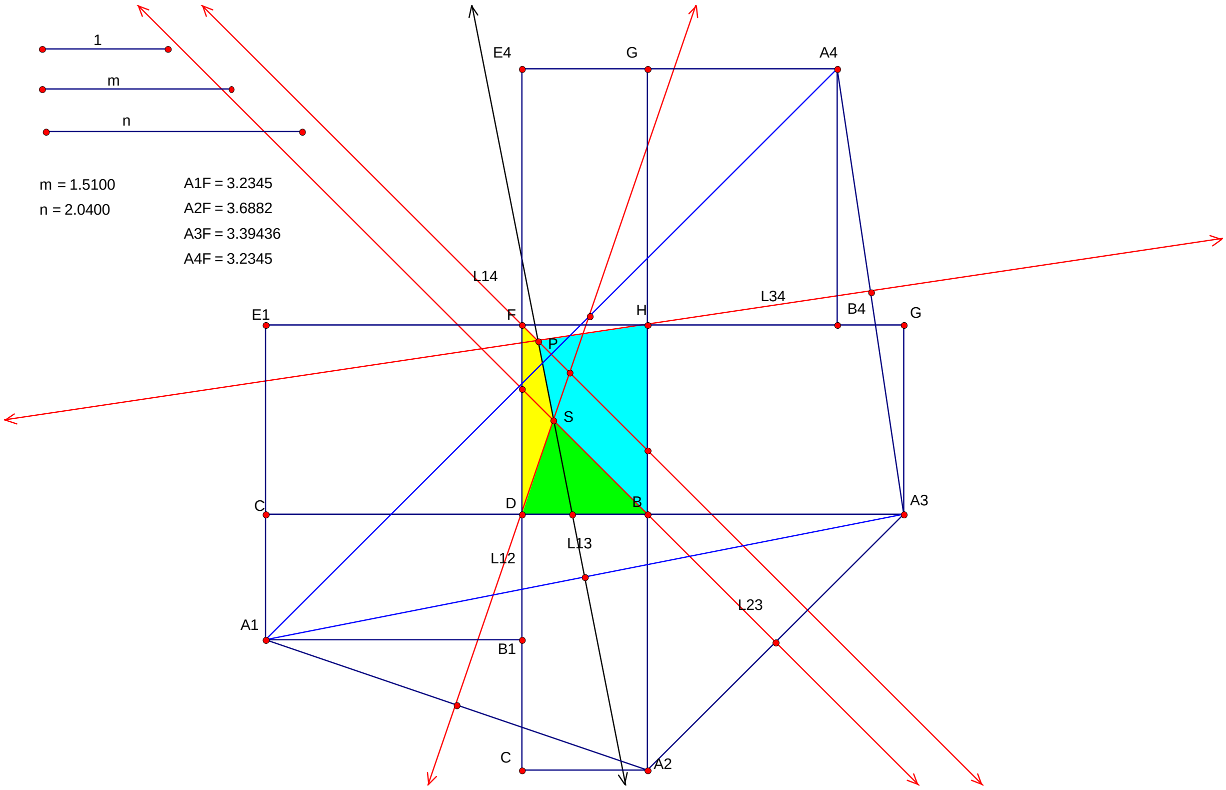
（3）若 Q＝R $\Rightarrow$ FQ＝PQ $\Rightarrow$ $PA_1 = FA_1$ $\Rightarrow \frac{1+m-n}{2} = \frac{n-m}{4n}$

（4）若 Q 在 R 的右側 $\Rightarrow$ FQ＞PQ $\Rightarrow A_1F > A_1P \Rightarrow \frac{1+m-n}{2} > \frac{n-m}{4n}$

綜合（3）、（4）得　$\frac{1+m-n}{2} \ge \frac{n-m}{4n}$，$A_1F \geqq A_1P$。

猜想：在 1xmxn 的長方體中，若 $\frac{1+m-n}{2} \ge \frac{n-m}{4n}$，頂點 A 到長方體表面上一點 P 的最大值 minAP 爲 minAF

證明：



1. 若點落在四邊形 FDSP 內或上，則此點與 A_1 在中垂線 L_{12}、L_{13}、L_{14} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_1 的距離，又由性質二的證明可推得 A_1F 爲最大值。
2. 若點落在△SDB 內或上，則此點與 A_2 在中垂線 L_{12}、L_{23} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_2 的距離，又由性質二的證明可推得 A_2S 爲最大值。
3. 若點落在四邊形 HPSB 內或上，則此點與 A_3 在中垂線 L_{13}、L_{23}、L_{34} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_3 的距離，又由性質二的證明可推得 A_3P 爲最大值。
4. 若點落在△FPH 內或上，則此點與 A_4 在中垂線 L_{34}、L_{14} 的同側，由性質一可得其最短距離取與 A_4 的距離，又由性質二的證明可推得 A_4F 爲最大值。

   又很明顯的 $A_1F = A_4F > A_3P > A_2S$ ***∴A_1F 爲最大值的 minAP***

結論 3.2.3：**在 1xmxn 的長方體中（1<m<n），若** $\frac{1+m-n}{2} \ge \frac{n-m}{4n}$ **，頂點 A 到長方體表面上一點 P 的最大值 minAP** 爲 minA F＝$\sqrt{n^2+(1+m)^2}$

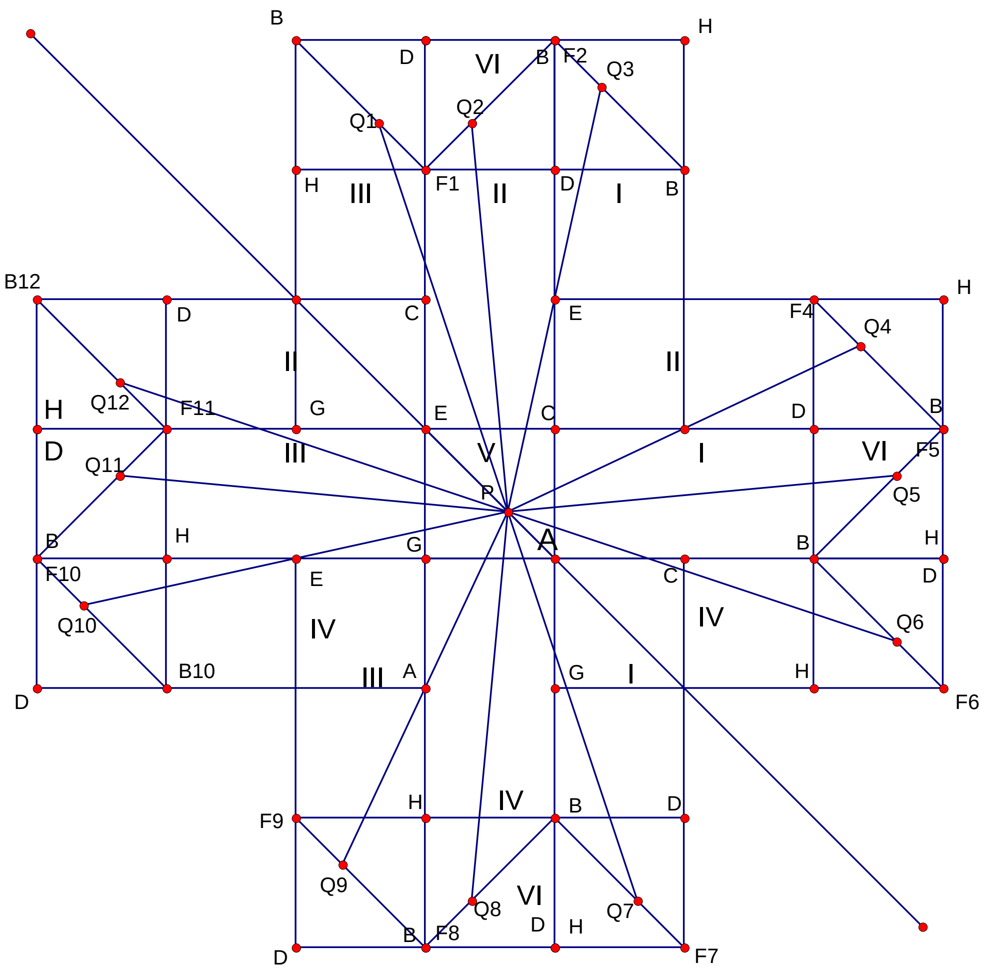
研究 4：在 1x1x2 的長方體中，找出長方體表面上任意兩點的最大值 minPQ 的位置與距離。

我們猜測最大值的 **minPQ** *並非*由一個正方面的中心到另一正方面的中心，這個距離是 **3**。我們找到一距離約為 **3.01** 的 **minPQ**。

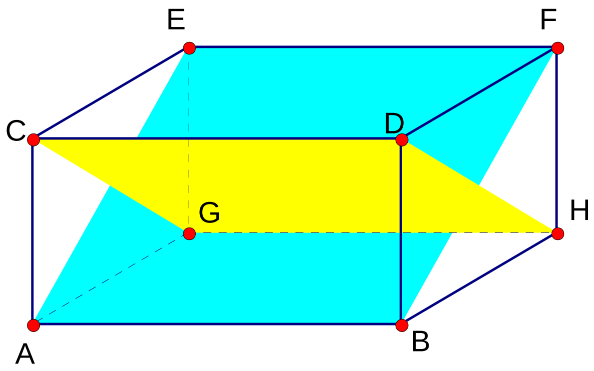
1. 從第 **V** 面上一點 **P** 到第Ⅵ面上的 **Q** 點所有可能為 **minPQ** 的路徑有 **12** 條，如下表：

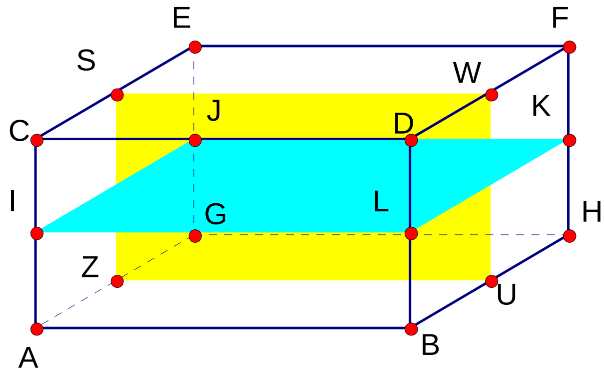
經第Ⅰ面	經第Ⅱ面	經第Ⅲ面	經第Ⅳ面
一. P⇨Ⅴ⇨Ⅰ⇨Ⅵ⇨Q	一. P⇨Ⅴ⇨Ⅱ⇨Ⅵ⇨Q	一. P⇨Ⅴ⇨Ⅲ⇨Ⅵ⇨Q	一. P⇨Ⅴ⇨Ⅳ⇨Ⅵ⇨Q
二. P⇨Ⅴ⇨Ⅰ⇨Ⅱ⇨Ⅳ⇨Q	二. P⇨Ⅴ⇨Ⅱ⇨Ⅰ⇨Ⅳ⇨Q	二. P⇨Ⅴ⇨Ⅲ⇨Ⅱ⇨Ⅳ⇨Q	二. P⇨Ⅴ⇨Ⅳ⇨Ⅲ⇨Ⅳ⇨Q
三. P⇨Ⅴ⇨Ⅰ⇨Ⅳ⇨Ⅵ⇨Q	三. P⇨Ⅴ⇨Ⅱ⇨Ⅲ⇨Ⅵ⇨Q	三. P⇨Ⅴ⇨Ⅲ⇨Ⅳ⇨Ⅵ⇨Q	三. P⇨Ⅴ⇨Ⅳ⇨Ⅰ⇨Ⅵ⇨Q

2. 以第 **V** 面為中心，畫展開圖找出所有可能為第Ⅴ面上的 **P** 點到第Ⅵ面上的 **Q** 點的 **minPQ** 的路徑



3. 發現：**1x1x2** 的長方體對稱面有 **BFEA** 與 **DHGC** 與 **BD.FH.EG.CA** 之中點所連成的面與 **AG.CE.DF.BD** 之中點所連成的面，根據性質 **1** 可得--最大值的 **minPQ** 必出現在對稱面上・也就是在 **BF**、**AE**、**DH**、**CG**、**WU**、**ZS**、**LK**、**IJ** 上。如下圖





4. 若 **Q** 點在對稱面有 **BFEA** 的 **BF** 上，其 **P** 點到 **Q** 點的 **minPQ** 的路徑展開圖為線對稱圖形，其對稱軸為直線 **AE**。故只需要比較 **PQ_1~PQ_6** 之長度變化且由性質 **1** 可判定最大值的 **minPQ** 必在 *AE* 上。

5. 且由性質 **1** 可得 **$PQ_2 < PQ_1$，$PQ_5 < PQ_6$**，故只需討論 **PQ_2、PQ_3、PQ_4、PQ_5**

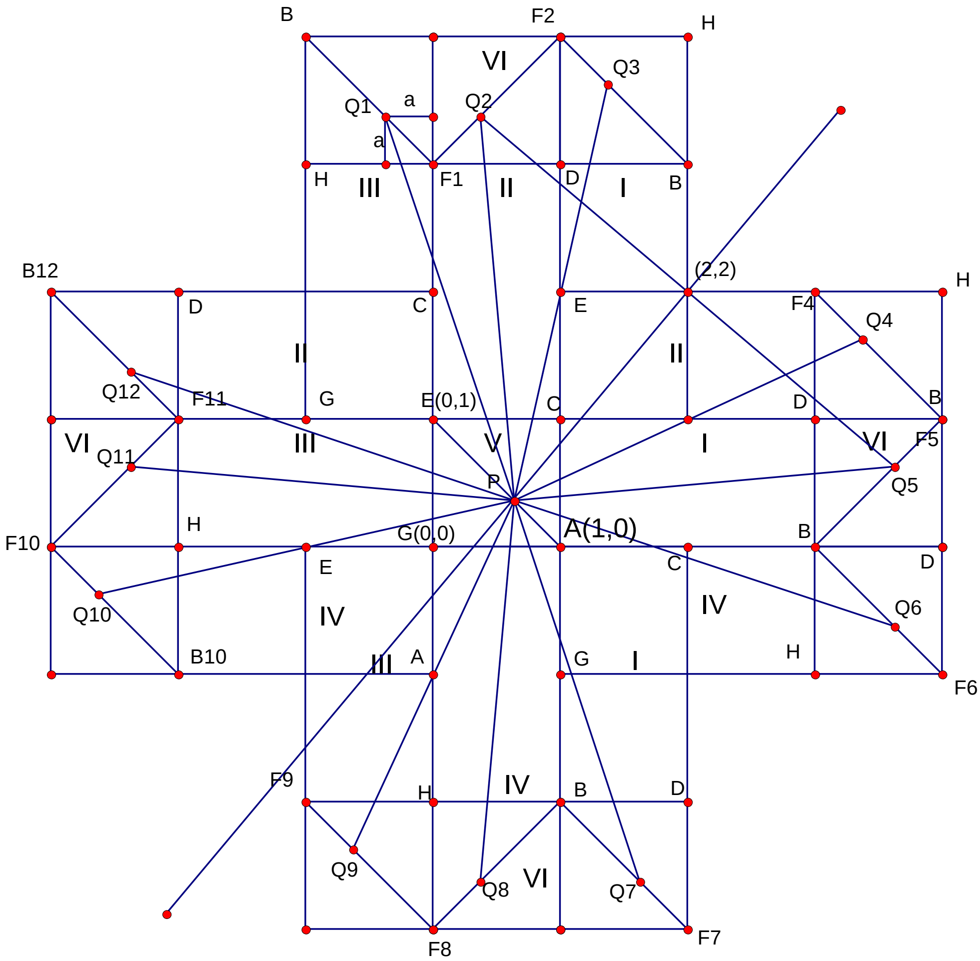
（1）根據 GSP 觀察 PQ_2、PQ_3、PQ_4、PQ_5的變化情形，我們試著討論 Q_2Q_5的中垂線。

（2）將圖形標示座標，G 為原點，A(1,0)，E(0,1)，令 Q 到 FH 距離為 a，因 V、VI 面為正方形故 Q 到 FD 也距離 a，Q_2(a，3+a)，Q_5(4-a，1-a)，Q_2Q_5中點為(2,2)，Q_3(1+a，4-a)，Q_4(3+a，2-a)

<u>設 Q_2Q_5的中垂線與 AE 交點 P(1-b,b)，此時 $PQ_2 = PQ_5$</u>

$$(1-b-a)^2+(3+a-b)^2=(4-a-1+b)^2+(1-a-b)^2$$
$$(3+a-b)^2=(3-a+b)^2$$
$$9+a^2+b^2+6a-6b-2ab=9+a^2+b^2-6a+6b-2ab$$
$$12a=12b \Rightarrow a=b$$
$$\Rightarrow P(1-a,a)$$
$$PQ_1=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}=PQ_6$$
$$PQ_2=\sqrt{3^2+(1-2a)^2}=\sqrt{4a^2-4a+10}=PQ_5$$
$$PQ_3=\sqrt{(2a)^2+(4-2a)^2}=\sqrt{8a^2-16a+16}$$
$$PQ_4=\sqrt{(2+2a)^2+(2-2a)^2}=\sqrt{8a^2+8}$$

$\Rightarrow$ <u>**Q_2Q_5 的中垂線與 AE 交點 P(1-a,a)，此時 $PQ_2 = PQ_5$**</u>



（3）<u>**當 PQ_2＝PQ_4，則 PQ_2＝PQ_5＝PQ_4**</u>

$$(2a-1)^2+3^2=(2+2a)^2+(2-2a)^2$$

$$4a^2+4a-2=0 \Rightarrow 2a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \because a>0 \therefore a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$P_1=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\text{，}\ FQ_2=\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$PQ_3=\sqrt{2a^2+(4-2a)^2}=\sqrt{20-24a}=\sqrt{32-12\sqrt{3}}>3.01$$

$$PQ_2=PQ_5=PQ_4=\sqrt{(2+2a)^2+(2-2a)^2}=\sqrt{8+8a^2}=\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$$

所以 $\min PQ=\sqrt{(2+2a)^2+(2-2a)^2}=\sqrt{8+8a^2}=\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$

結論 4.1：在 **1x1x2** 的長方體中，最大的 **minPQ** 並非由一個正方面的中心到另一正方面的中心，這個距離是 **3**，可以找到兩點一個在正方面的對角線上距離 **A** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **F** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 為 $\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

（4）當 PQ_2＝PQ_3，則 PQ_2＝PQ_3＝PQ_5

$$(2a-1)^2+3^2=(2a)^2+(4-2a)^2$$

$$4a^2-12a+6=0 \Rightarrow 2a^2-6a+31=0 \Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2} \because 1>a>0 \therefore a=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$P_2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)，FQ_2=\sqrt{2}a=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$PQ_4=\sqrt{(2+2a)^2+(2-2a)^2}=\sqrt{8+8a^2}=\sqrt{32-12\sqrt{3}}>3.01$$

$$\min PQ=\sqrt{3^2+(1-2a)^2}=\sqrt{10-4a+4a^2}=\sqrt{8a+4}=\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$$

結論 4.2：在 **1×1×2** 的長方體中，最大的 **minPQ** 並非由一個正方面的中心到另一正方面的中心，這個距離是 **3**，可以找到兩點一個在正方面的對角線上距離 **A** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **F** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 為 $\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

（5）$\because \frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=1 \therefore P_1 \cdot P_2$ 為對稱點

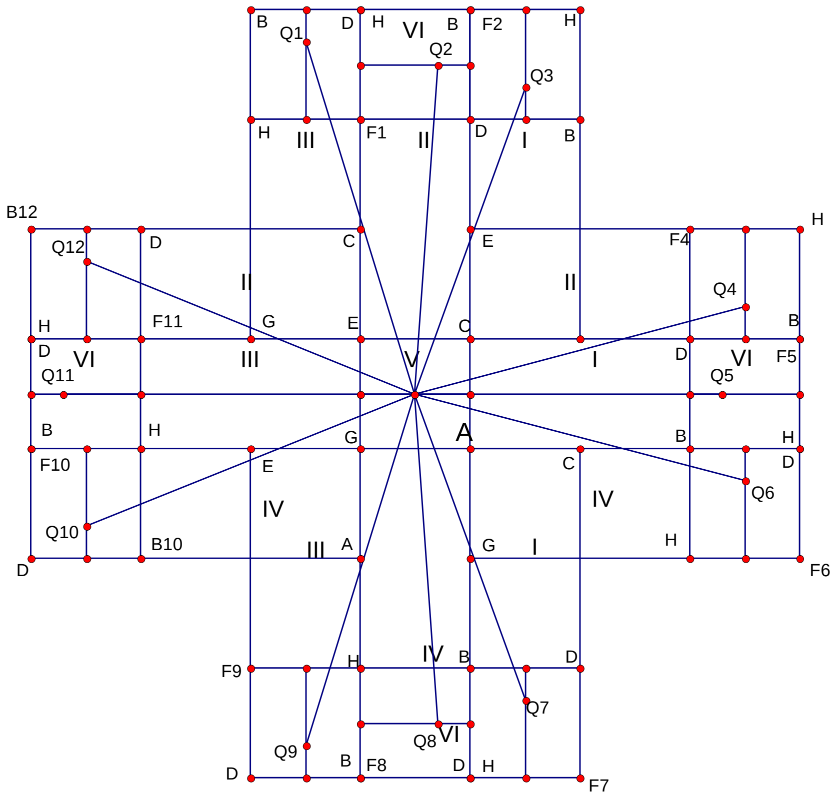
6. 同理可發現：若 Q 點在**對稱面 DHGC 的** DH 上，其 P 點到 Q 點的 minPQ 的路徑展開圖為線對稱圖形，其對稱軸為直線 CG。同 5 之（1）到（5）可得：

結論 4.3：在 **1×1×2** 的長方體中，最大的 **minPQ** 並非由一個正方面的中心到另一正方面的中心，這個距離是 **3**，可以找到兩點

1. 一個在正方面的對角線上距離 **G** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **D** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 為 $\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

2. 一個在正方面的對角線上距離 **G** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **D** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 為 $\sqrt{16-4\sqrt{3}}\fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

7. 同理可發現：若 Q 點在**對稱面 SWUZ 的** WU 上，其 P 點到 Q 點的 minPQ 的路徑展開圖為線對稱圖形，其對稱軸為直線 SZ。



同 5 之（1）到（5）可得：P 點在 V 面中點 Q 在 VI 面中點為 minPQ，但其值為 3 小於結論 4.3 之結果故不是最大之 minPQ。

8. 同理可發現：若 Q 點在**對稱面 IJKL 的** KL 上，其 P 點到 Q 點的 minPQ 的路徑展開圖為線對稱圖形，其對稱軸為直線 IJ。同 6，P 點在 V 面中點 Q，在 VI 面中點為 minPQ，但其值為 3 小於結論 4.3 之結果故不是最大之 minPQ。

伍、研究結果

一、 在 1x1x2 的長方體中，

（一） 頂點 A 到頂點 F 的 minAF 為通過 I 、II 兩面或IV、III 兩面之路徑，minAF＝$\sqrt{8}$ 約 2.83

（二）頂點 A 到長方體表面上任一點 P 有最大值 minAP 的 P 點位置為當 PF=$\frac{1}{4}$FB 處有最大值為 $\frac{\sqrt{130}}{4}$≒2.85。

二、 在 1x1xn 的長方體中，

（一） 頂點 A 到頂點 F 的 minAF

1. 若 n＞1，minAF＝$\sqrt{n^2+(1+1)^2}=\sqrt{n^2+4}$

2. 若 n=1， minAF＝$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

3. 若 n＜1， minAF＝$\sqrt{1^2+(1+n)^2}$

（二） 頂點 **A** 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點 P 的位置與距離。

1. 當 $n \ge \frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$，頂點 **A** 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點 P 的位置爲當 **PF**= $\frac{n-1}{2n}$ **FB** 處有最大值爲 $\frac{\sqrt{4n^4+4n^3+6n^2+4n+2}}{2n}$。

2. 當 $1<n<\frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$，頂點 **A** 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點 P 的位置爲 **F** 點，此時最大值的 **minAP=minAF**＝$\sqrt{n^2+4}$。

3. 當 $n \le 1$，頂點 **A** 到長方體表面上有最大值的 minAP 的點 P 的位置爲 **F** 點，此時最大值的 **minAP=minAF**＝$\sqrt{1+(1+n)^2}$。

三、 在 **1×m×n** 的長方體中（**1<m<n**）

（一） 頂點 **A** 到頂點 **F** 的 **minAF** 爲通過Ⅰ、Ⅱ面或Ⅳ、Ⅲ面之路徑，**minAF**＝$\sqrt{n^2+(1+m)^2}$。

（二） 頂點 A 到長方體表面上任一點 P 使其有最大值的 minAP 的點 P 的位置與距離。

1. 若 $\frac{1+m-n}{2}<\frac{n-m}{4n}$，頂點 **A** 到長方體表面上一點 **P** 的最大值 **minAP** 的位置爲 **P** 到 **FD**、**FH** 的距離均爲 $\frac{n-m}{2n}$ 處有最大值 $\min AP=\sqrt{\left(\frac{n-m}{2n}+n\right)^2+\left(\frac{m-n}{2n}+m+1\right)^2}$

2. 若 $\frac{1+m-n}{2} \ge \frac{n-m}{4n}$，頂點 **A** 到長方體表面上一點 **P** 的最大值 **minAP** 爲 **minAF**＝$\sqrt{n^2+(1+m)^2}$

四、 在 **1×1×2** 的長方體中，最大值的 **minPQ** 並非由一個正方面的中心到另一正方面的中心，這距離是 **3**，

（一） 可以找到兩點一個在正方面的對角線上距離 **A** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **F** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 爲 $\sqrt{16-4\sqrt{3}} \fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

（二） 可以找到兩點一個在正方面的對角線上距離 **A** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **F** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 爲 $\sqrt{16-4\sqrt{3}} \fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

（三） 一個在正方面的對角線上距離 **G** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **D** 點 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 爲 $\sqrt{16-4\sqrt{3}} \fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

（四） 一個在正方面的對角線上距離 **G** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **P** 點到另一個在正方面的對角線上距離 **D** 點 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ 的 **Q** 點，其 **minPQ** 爲 $\sqrt{16-4\sqrt{3}} \fallingdotseq 3.01$ 大於 **3**。

陸、結論與討論

一、 在「打開魔數箱」書中提到在 **1×1×2** 的長方體上，當 n≧1 時，沿著對角線從 F 到 B 的距離為 $\frac{n-1}{2n}$ 的位置 P 處，則 P 到 A 的距離為最長的測地線 (註：測地線為連接曲面兩點間的最短距離) 。<u>但在我們的研究中發現那是錯誤的，這個部分可以修正為：</u>

（一）**當 $n \geq \frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$，則 P 到 A 的距離 minAP 為最大值**

（二）**當 $n < \frac{3+\sqrt{17}}{4} \fallingdotseq 1.78$，則 F 到 A 的距離 minAF 為最大值**

二、 **由 1×m×n 長方體上最大值 minAP 的結果，利用相似的概念可以推廣至 a×b×c 的長方體上（其中 $a \leqq b \leqq c$ ）。**令 $m=\frac{b}{a}$ ，$n=\frac{c}{a}$

（一） 若 $\frac{1+m-n}{2} < \frac{n-m}{4n}$ ，頂點 A 到長方體表面上任一點 P 的**最大值 minAP** 的位置為當 P 到 FH、FD 距離為 $\frac{n-m}{2n}$ 的 a 倍有最大值為

minAP= $a \times \sqrt{\left(\frac{n-m}{2n}+n\right)^2+\left(\frac{m-n}{2n}+m+1\right)^2}$

（二） 若 $\frac{1+m-n}{2} \geq \frac{n-m}{4n}$ ，頂點 A 到長方體表面上任一點 P 的**最大值 minAP** 為 minAF $= a \times \sqrt{n^2+(1+m)^2}$

三、 在本次研究的過程中，透過展開圖、樹狀圖、整理分析、猜想、證明等一連串的方法，進而得到一般化的結果。

四、 利用 GSP 動態幾何系統使我們精確的畫出展開圖及節省繪圖時間，並經由動態幾何圖形的變換及度量，增強我們的猜測與研究。

柒、延伸與發展

一、 有了這一次的研究經驗，未來我們將再繼續研究

（一）**1×1×n**、**1×m×n** 的長方體中，表面上任兩點的最**大值 minPQ** 的找法與位置。

（二）正三角錐、正四角錐表面上兩點的最**大值 minPQ** 的位置與距離。

捌、參考資料及其他

一、參考資料

（一）Artin Gardner 著，胡守仁譯（民 93）。長方體上的螞蟻。載自**打開魔數箱（195-198 頁）**。台北市：遠流出版社。

（二）部編版數學第二冊、第三冊、第四冊。

（三）翰林版數學第五冊。

二、備註：

（一）性質 1：**一線段的中垂線上任一點到此線段的兩端點等距離，若 AB 中垂線 L，P 與 A 在 L 同側，則 PA＜PB。**

證明：如右圖

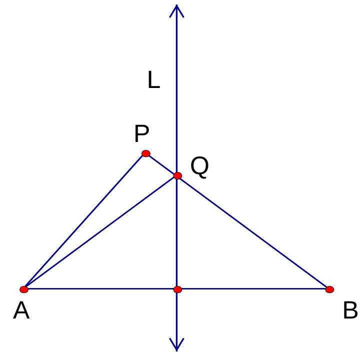
連 AQ，因 Q 在 AB 中垂線 L 上

所以 AQ=BQ

又 AQ＋PQ＞PA

所以　BQ＋PQ＞PA

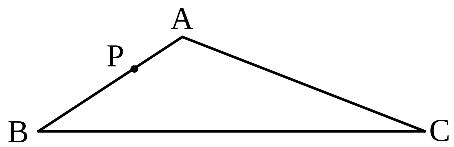
則 **PA＜ PB**



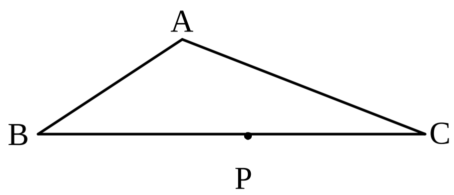
（二）性質 2：**△ABC 中，90°≦∠A＜180°，若 P 為△ABC 內部或邊上任一點，則 BC≧BP**

證明：

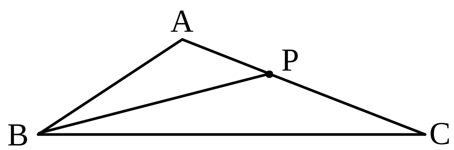
1. 若 P 在 AB 上
   ∵ 90°≦∠A＜180°
   ∴ BC＞AB＞BP



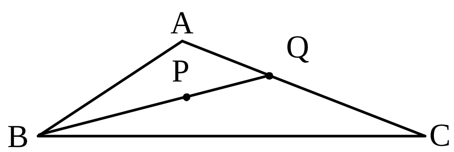
2. 若 P 在 BC 上，BC＞BP



3. 若 P 在 AC 上，作 BP
   △BCP 中
   ∵∠BPC＞∠A≧90°
   ∴ BC＞BP



4. 若 P 在△ABC 內部，作 BP 交 AC 於 Q
   由第 3 點證明可知 BC＞BQ
   又 BQ＞BP
   ∴ BC＞BP



【評　語】　030422　長方體上的螞蟻--兩點間最短路徑之最大值研究

利用長方體的展開圖，對所有可能的路徑計算其長度，並比較大小。由此，得出由一頂點計算而得的最遠點的位置(一般的長方體)。對特殊的長方體(1*1*2 的長方體)上距離最遠的兩點的距離，也作了一些討論。透過基本的計算分析得到這樣的結果，十分不容易。如果能對距離最遠的兩點作更清楚的刻劃分析，並進一步的將結果擴展到正多面體或任意的多面體，會是十分精彩的作品。