中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030420

三角形內心、重心、垂心的另類推導

學校名稱：屏東縣立潮州國民中學

作者：	指導老師：
國二 鍾政霖	吳啟彰
國二 賴芊卉	

關鍵詞：內心　重心　垂心

三角形內心、重心、垂心的另類推導

摘要

本文由三角形幾何開起動機，並結合力學的觀念，來推導幾個已知的三角形幾何，其中包括三角形內心、重心、與垂心，推導的過程主要是以力學中「作用在剛體上的三個共面不平行的力是平衡的，則它們的作用線交於一點」的結論來做推論，三角形內心以力的合成與力的分解兩部份做推論，三角形重心以六個相等力做推論，三角形垂心則以力的垂直分量相加來做推論，而這另類的推導也得到合理的結果。

壹、研究動機

在某次數學課中，老師提到三角形的一些幾何概念，包括三角形內角和、外角和，同時也順道提及三角形內心、外心、重心、垂心等，這些三角形的心分別是三角形內角平分線、中線與高線等的交點，喜歡自然課的我們，就在想自然與生活科技課程中也有學到平衡力系的作用線也是交於一點，它引發了我們的興趣，我們想這些數學幾何，是否也可以用平衡力系的觀念來推導，因此展開一連串的探討。

貳、研究目的

一、力的觀念有那些?
二、三角形的內心如何用力的觀念來推導?
三、三角形的重心如何用力的觀念來推導?
四、三角形的垂心如何用力的觀念來推導?

參、研究內容與過程

一、力的觀念

(一)力的三要素：力是一個向量，可用力的三要素即力的大小、方向、和作用點來描述，力沿著它作用的直線稱爲作用線。

(二)滑動向量：作用在剛體上的力(向量)可以在它的作用線上任意移動。

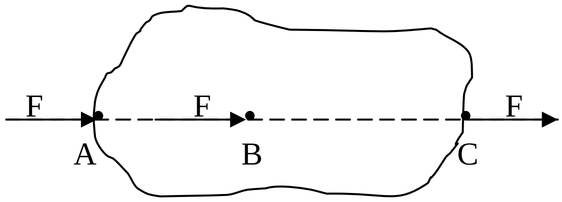

圖 1 力的可傳性(滑動向量)

(三)平衡力系：作用在一個物體上的一組力稱爲一個力系，如果一個力系作用在靜止的剛體上，不引起剛體產生運動效應，則稱這力系處於平衡狀態，爲一平衡力系。(受力後形狀與大小總保持不變的物體稱爲絕對剛體)

(四)等值力系：作用在一個剛體上，能產生相同的運動狀態的兩個力系稱爲等值力系。

(五)若兩個力的大小相同，方向相反且有同一條作用線，則此兩力亦爲平衡狀態，如圖 2、圖 3 所示。

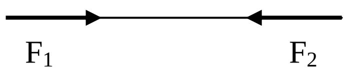

圖 2

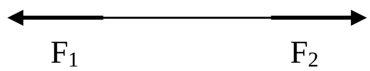

圖 3

(六)如果一個力系與一個單獨的力 **R** 等值(價)，則稱力 **R** 是這個力系的合力。

(七)平行四邊形法則：作用在同一點上的兩個力 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$ 有合力 **R**，其中 **R** 與 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$ 有相同的作用點，且以 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$ 爲鄰邊的平行四邊形的對角線來表示，如圖 4 所示。

力的合成：依據力的平行四邊形法則，我們可以用 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$ 來合成力 **R**

力的分解：也可以將已知力 **R** 分解爲 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$，其中 $\mathbf{F_1} = \mathbf{R\sin\Theta}$，$\mathbf{F_2} = \mathbf{R\cos\Theta}$

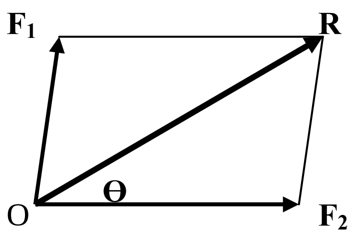

圖 4 力的平行四邊形法則

因此作用點不同的幾個力，只要它們的作用線相交，就可以相加。假設我們需要把力 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$ 相加，由於這些力向量是滑動的，於是我們可以把它們平移到點 **O**，其中 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_1'}$ 等價 $\mathbf{F_2}$ 與 $\mathbf{F_2'}$，然後再依平行四邊形法則得到 $\mathbf{F_1}$ 與 $\mathbf{F_2}$ 的合力 **R**，如圖 5 所示。

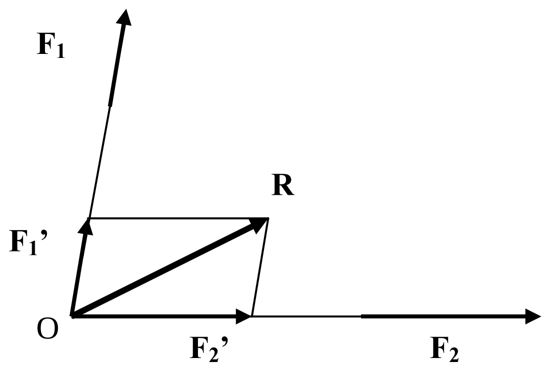

圖 5 力的滑動與合力

綜合以上所述，我們可以得到一個結論：「**作用在剛體上的三個共面，而不互相平行的一組力系如果是平衡的，則它們的作用線交於一點，亦即平衡力系的作用線會交於一點**」。如圖 6，如果把 F_1 與 F_2 平移到點 **O**，得到合力 $\mathbf{R_{12}}$，因爲力 F_3 與 $\mathbf{R_{12}}$ 等值(價)爲平衡力系，所以它們有相同的作用線，即 F_3 的作用線也通過 **O** 點，如此三個力的作用線相交於 **O** 點。

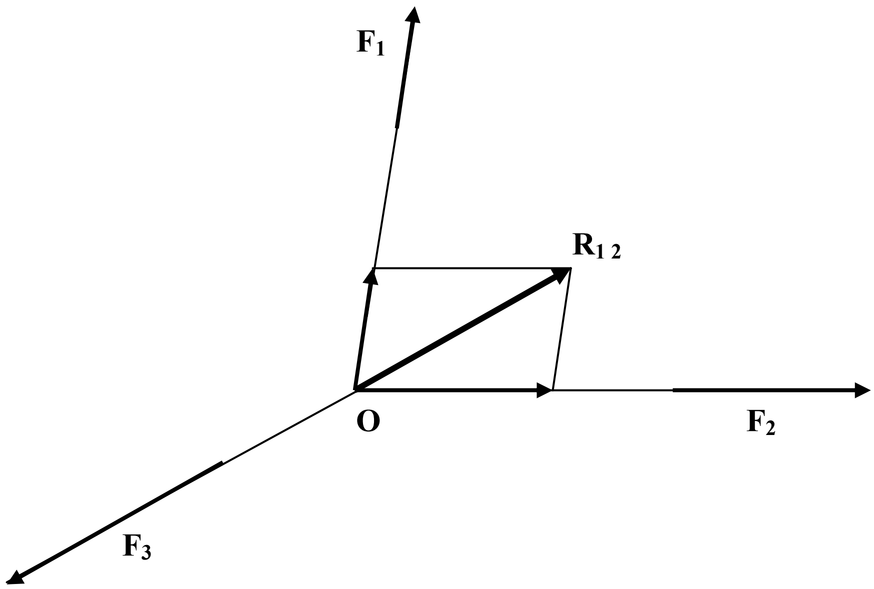

圖 6 三個平衡力的作用線相交於 **O** 點

(二)三角形內心的推導（力的合成）

我們知道三角形內心的定義爲：任意一個三角形，分別作出三個角的平分線，三條內角平分線的交點 I 稱爲「內心」。

我們試著以「平衡力系的作用線相交於一點」的結論，來推導三角形內心的定義，假定有沿著三角形三邊作用的六個相等力 F_1、F_2、…、F_6，如圖 7 所示，由於這些力

沿著三邊兩兩相互抵消，所以整個力系處於平衡狀態，且它們的合力 $\mathbf{R_{12}}$、$\mathbf{R_{34}}$與 $\mathbf{R_{56}}$ 也是平衡的，而此三個合力正沿著三角形 ABC 的三個內角平分線方向（依據平行四邊形法則知道平行四邊形的對角線恰爲內角平分線），由於三個合力的作用線相交於一點，因此我們可導出「三角形的內角平分線交於一點」，而此正是三角形內心的定義。

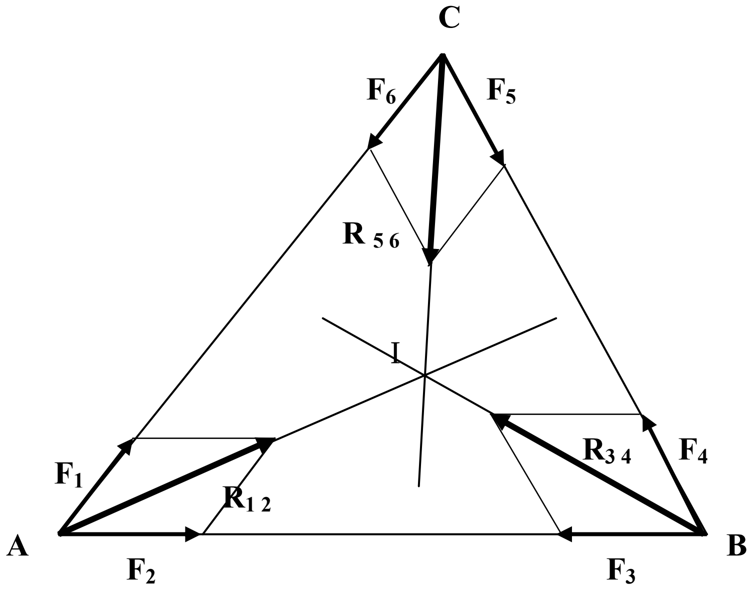

圖 7 平衡力系的三條合力作用線(內角平分線)交於一點

(三)三角形內心的推導（力的分解）

已知三角形 **ABC**，首先作直線 **L** 把角 **A** 分成 a_1 與 a_2 兩個內角，作直線 **M** 把角 **B** 分成 b_1 與 b_2 兩個內角，作直線 **N** 把角 **C** 分成 $\mathbf{c_1}$ 與 $\mathbf{c_2}$ 兩個內角，如圖 8 所示。

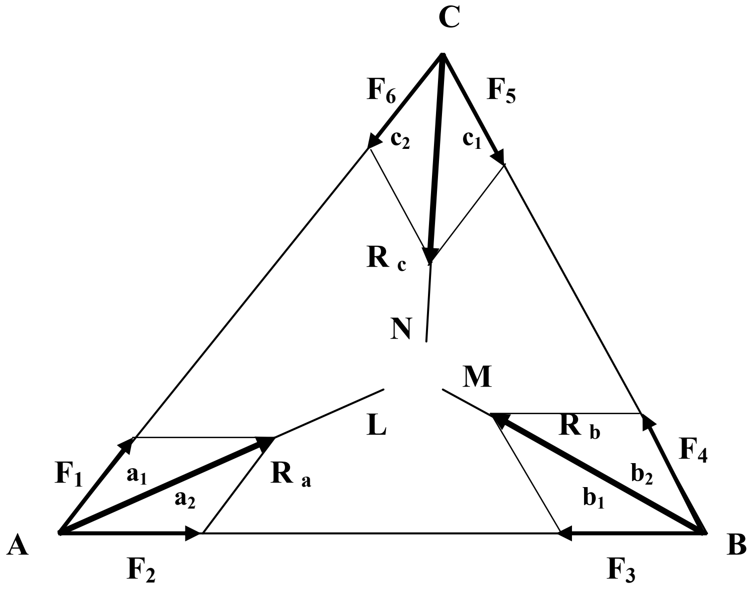

圖 8 三條分角線(平衡力系合力作用線)交於一點

其次在點 **A** 處沿著直線 **L** 施加任意力 $\mathbf{R_a}$，而且將 $\mathbf{R_a}$ 分解成沿著邊 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 的兩個分量 F_1 與 F_2，同樣的我們在點 **B** 與點 **C** 處，分別沿著直線 M、N 施加力 $\mathbf{R_b}$ 與 $\mathbf{R_c}$，並且將它們分解成分量 F_3 與 F_4 以及 F_5 與 F_6，我們令分量 F_1 與 F_6 以及 F_2 與 F_3 因大小相同，方向相反而抵消，此時我們可以得到力系($\mathbf{R_a}$，$\mathbf{R_b}$，$\mathbf{R_c}$)等值(價)於力系(F_4，F_5)。

接著在三角形 ABC 三個頂點的平行四邊形中推出如下的關係式：

$$\frac{R_a \sin a_2}{R_a \sin a_1} = \frac{F_1}{F_2} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\frac{R_b \sin b_2}{R_b \sin b_1} = \frac{F_3}{F_4} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$$\frac{R_c \sin c_2}{R_c \sin c_1} = \frac{F_5}{F_6} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

因此將上列 ① × ② × ③ ，可以得到下列的等式

$$\frac{\sin a_2}{\sin a_1}\frac{\sin b_2}{\sin b_1}\frac{\sin c_2}{\sin c_1} = \frac{F_1}{F_2}\frac{F_3}{F_4}\frac{F_5}{F_6}$$

其中因為 $F_1 = F_6$ 且 $F_2 = F_3$，所以

$$\frac{\sin a_2}{\sin a_1}\frac{\sin b_2}{\sin b_1}\frac{\sin c_2}{\sin c_1} = \frac{F_5}{F_4}$$

探討一： $F_5 = F_4$ $\left(\frac{\sin a_2}{\sin a_1}\frac{\sin b_2}{\sin b_1}\frac{\sin c_2}{\sin c_1} = 1\right)$

也就是當力 F_5 與 F_4 是平衡的，此時與其等值(價)的力系($\mathbf{R_a}$，$\mathbf{R_b}$，$\mathbf{R_c}$)亦為平衡的，又因其沿著直線 L 、M、 N 作用，且因為每一個因子 $\frac{\sin a_2}{\sin a_1}, \frac{\sin b_2}{\sin b_1}, \frac{\sin c_2}{\sin c_1}$ 也等於 1，所以我們可以推得直線 L 、M、 N 為三個角的角平分線，且相交於一點 I，而此正是三角形內心的定義。

探討二： $F_5 \neq F_4$ $\left(\frac{\sin a_2}{\sin a_1}\frac{\sin b_2}{\sin b_1}\frac{\sin c_2}{\sin c_1} \neq 1\right)$

在此情形下，F_5 與 F_4 為不平衡的狀態，與其等值(價)的力系($\mathbf{R_a}$，$\mathbf{R_b}$，$\mathbf{R_c}$)亦為不平衡，但我們知道僅有平衡力系的作用線才會交於一點，因此沿著直線 L 、M、 N 作用的力系($\mathbf{R_a}$，$\mathbf{R_b}$，$\mathbf{R_c}$)不交於一點，所以直線 L 、M、 N 也不交於一點，亦即直線 L 、M、 N 非角平分線。

(四)三角形重心的推導

我們知道三角形重心的定義為：任意一個三角形，分別作出三條中線，三條中線的交點 G 稱為「重心」，而且「重心」都在三角形裏面。

我們再試著以「平衡力系的作用線相交於一點」的結論，來推導三角形重心的定義。假定有沿著三角形三邊作用的六個力 F_1、F_2、…、F_6，每個力的大小等於作用邊長度的一半，如圖 9 所示，由於相似三角形由力的平行四邊形所構成，於是 F_1 與 F_2 的合力恰為邊 $\overline{BC}$ 的中線，F_3 與 F_4 的合力恰為邊 $\overline{AC}$ 的中線，F_5 與 F_6 的合力恰為邊 $\overline{AB}$ 的中線，沿著三角形三邊作用的六個力兩兩相互抵消，所以整個力系處於平衡狀態，它們的合力正沿著三角形 ABC 的三個中線方向（平行四邊形的對角線恰為中線），由於三個合力的作用線相交於一點，所以三角形 ABC 的三條中線亦相交於一點 G，因此我們可導出「三角形的三中線交於一點」，而此正是三角形重心的定義。

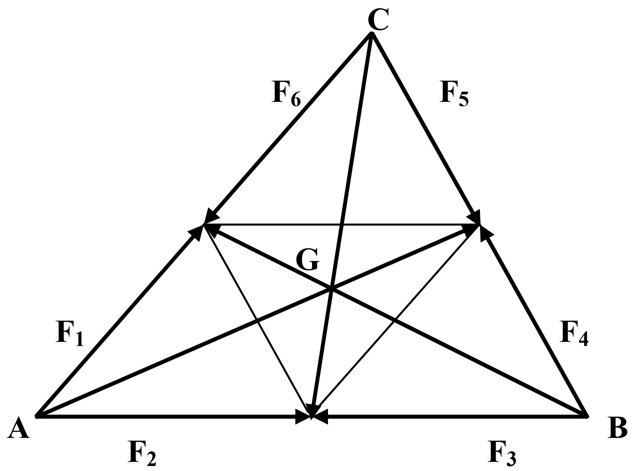

圖9 三角形三條中線(平衡力系合力作用線)交於一點

(五)三角形垂心的推導

我們知道三角形垂心的定義為：任意一個三角形，分別作出三條高線，三條高線的交點 H 稱為「垂心」。

同樣的我們以「平衡力系的作用線相交於一點」的結論，來推導三角形垂心的定義。假定有沿著三角形三邊作用的六個力 F_1、F_2、…、F_6，其中

$\mathbf{F_1} = -\mathbf{F_6}$

$\mathbf{F_2} = -\mathbf{F_3}$

$\mathbf{F_4} = -\mathbf{F_5}$

我們試著將作用在頂點 C 的力 $\mathbf{F_5}$ 與 $\mathbf{F_6}$ 分別分解成水平分量與垂直分量，其中水平分量平行於邊 $\overline{AB}$，垂直分量則垂直於邊 $\overline{AB}$，如圖 10 所示。

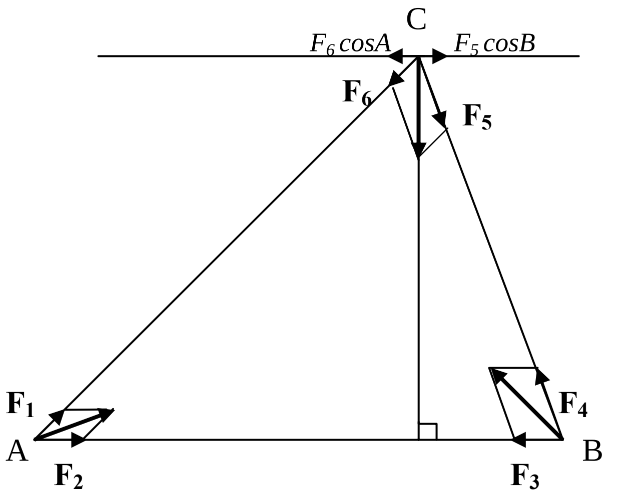

圖 10　F_5 與 F_6 的水平分量 $F_5 cosB$ 與 $F_6 cosA$

從圖中我們可以知道 $\mathbf{F_5}$ 與 $\mathbf{F_6}$ 的水平分量分別等於 $F_5 cosB$ 與 $F_6 cosA$，同時爲了讓 F_5 與 F_6 的合力方向能垂直於邊 $\overline{AB}$，必須假定下列等式成立：

$F_5 cosB = F_6 cosA$

此時 $\mathbf{F_5}$ 與 $\mathbf{F_6}$ 的水平分量因相等方向相反而互相抵消，垂直分量 $F_5 sinB$ 與 $F_6 sinA$ 則因方向相同而相加，成爲合力 $\mathbf{R_{56}}$ 且垂直於邊 $\overline{AB}$，亦即沿著三角形 ABC 高線的方向垂直於 $\overline{AB}$。同樣的我們也可以推導出合力 $\mathbf{R_{12}}$ 與 $\mathbf{R_{34}}$，分別沿著三角形 ABC 的另外兩條高線。

由於這些力沿著三角形三邊作用，而兩兩相互抵消，所以整個力系處於平衡狀態，且它們的合力 $\mathbf{R_{12}}$、$\mathbf{R_{34}}$ 與 $\mathbf{R_{56}}$ 也是平衡的，其作用線必定相交，由於作用線方向即爲三條高線的方向，所以三條高線亦交於一點 H，而此正是三角形垂心的定義。

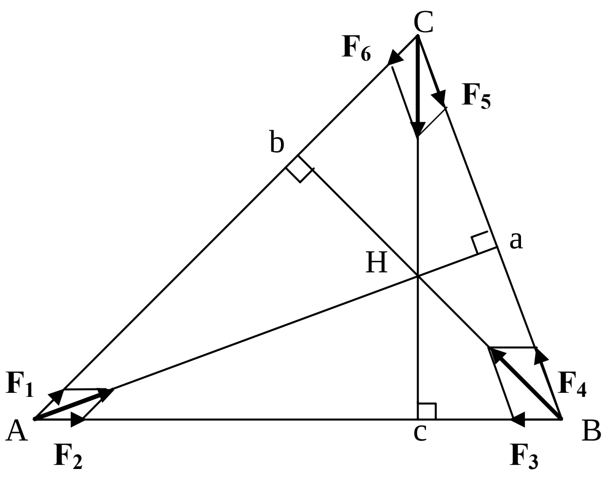

圖 11 三角形三條高線(平衡力系合力作用線)交於一點

垂心的推導，除了上述的方法之外，我們也可以依照之前內心推導的過程，再推導一次。我們畫直線 a、b、c 成三角形 ABC 的三高線，同時此三高線將三內角 A、B、**C** 分成 $\mathbf{a_1}$ 與 $\mathbf{a_2}$、$\mathbf{b}_1$ 與 $\mathbf{b}_2$ 、$\mathbf{c}_1$ 與 $\mathbf{c}_2$，如圖 12 所示。

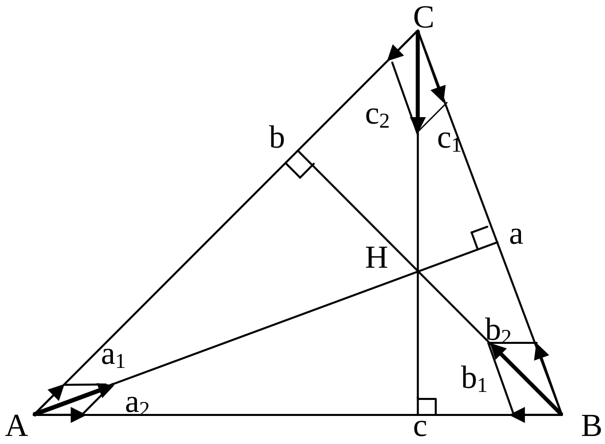

圖 12 三角形三條高線交於一點

我們在三角形 ABC 三個內角中推出如下的關係式：

$$\frac{\overline{AC}\sin a_1}{\overline{AB}\sin a_2}=\frac{\overline{AC}\cos C}{\overline{AB}\cos B} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{\overline{AB}\sin b_1}{\overline{BC}\sin b_2}=\frac{\overline{AB}\cos A}{\overline{BC}\cos C} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{\overline{BC}\sin c_1}{\overline{AC}\sin c_2}=\frac{\overline{BC}\cos B}{\overline{AC}\cos A} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

因此將上列 ① × ② × ③ ，我們得到下列的等式

$$\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\frac{\sin c_1}{\sin c_2}=\frac{\cos C}{\cos B}\frac{\cos A}{\cos C}\frac{\cos B}{\cos A}=1$$

因爲 $\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\frac{\sin b_1}{\sin b_2}\frac{\sin c_1}{\sin c_2}=1$ 所以我們可以知道三條高線 a、b、c 相交於一點 H，而此正是三角形垂心的定義。

肆、結論與討論

在本文中我們試著用力學的觀念，來推導幾個已知的三角形幾何定理，其中包括三角形內心、重心、與垂心，推導的過程主要是以力學中「作用在剛體上的三個共面而不互相平行的力是平衡的，則它們的作用線交於一點」的結論來做三角形幾何的推論，而這另類的推導也得到合理的結果。最後仍覺得可惜的是三角形外心的推導我們還是無法突破，希望未來能有更進一步的推論。

伍、參考資料

一、國民中學數學第五冊第四章，台南，南一書局，民 95 年 8 月。
二、國民中學自然與生活科技第四冊第五章，台南，南一書局，民 95 年 8 月。
三、范秋君譯，力學在幾何學中的應用，台北，九章出版社，p9~p11，民 93 年 7 月。
四、李榮華，機械力學 I ，台北，龍騰文化，p3~p56，民 95 年。

【評　語】　030420　三角形內心、重心、垂心的另類推導

1. 利用力的概念來討論，內心、重心及垂心的想法相當有創意及新意。
2. 推理討論可再更完整。