中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030417

卡特三明治

學校名稱：臺中市立育英國民中學

作者：	指導老師：
國三 張晏綸	謝綉鈴
國三 林佩誼	游政潘
國三 朱鈺茹	
國三 朱冠緯	

關鍵詞：直線方程式　三角形面積切割

摘要

我們利用公式解來求出通過任意點的直線Ｌ，使其將三角形分割成任意要求的比例，我們將任意比例設為Ｋ：Ｓ，其中Ｋ為較小的部份，Ｓ為較大的部份。我們在計算過程中，將三角形的其中一銳角放置在Ｏ點，以Ｘ軸為邊，則三角形將會有三種情況，分別為：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形，我們將各個三角形再分為三種情況。

我們將任意點設為 P，座標設為(u,v)，設直線 L 通過 x 軸的點為 Q，且 Q 要在 O 點與 A 點之間。通過三角形的左邊的點設為 R，通過右邊的點設為 T，且 R 點要在 B 點與 O 點間，T 點要在 B 點與 A 點之間。則我們可以求出過任意點將任意三角形分割成任意比例的直線方程式公式。

壹、研究動機

在台中市的歷屆作品中，有一件「公平的裁判，一刀兩半分割直角三角形」，內容主要研究過直角三角形內部一點，做一條直線，分割三角形面積成任意比例。對於這篇作品，我們覺得很有趣，希望能藉由這篇作品來進行延伸的研究。

我們將歷屆文獻探討如下：

第四十一屆台中市參賽科展作品「公平的裁判」，作者針對任意直角Δ，過Δ內部任一點P求出直線L將Δ分割成任意比例k : s，但是對其他Δ及過Δ外任一點的P的結果如何，我們在文獻上並沒找到資料，我們開始著手研究，嘗試將其推廣到任意三角形，且P點也不侷限在Δ內部。

在第二十七屆全國科展作品「N等分三角形面積研究」，藉由作圖法作出過任意點P的n - 1條直線ｎ等分三角形面積，我們試圖推其結果至任意比例一直線分割，並將此直線公式化。

貳、研究目的

我們決定將「過直角三角形內部一點，做一條直線，分割三角形面積成任意比例」來進行延伸，也就是過**任意三角形**內、外部任一點，作一條直線，分割三角形面積成任意比例。

我們的命題為：過任意一點 P 做一條直線，將任意三角形 ΔABO 面積任意分割成 k：s 比例，則此直線方程式為何？

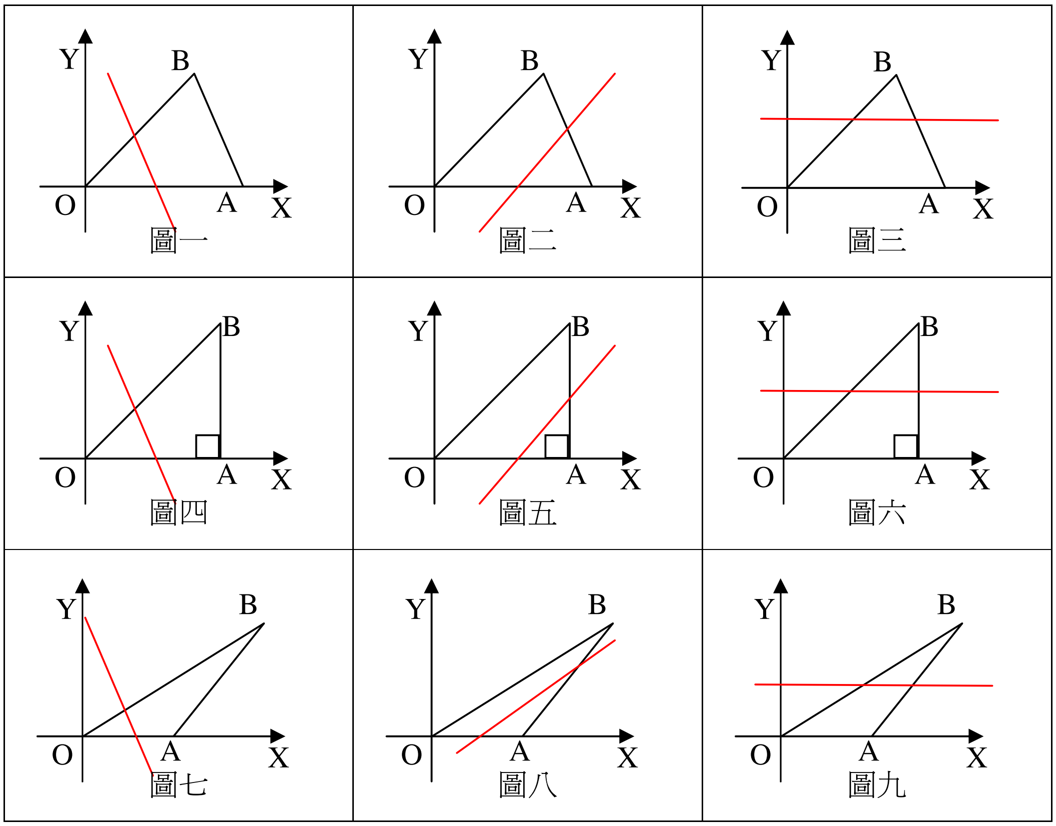
參、研究設備與器材

筆、尺、計算機、電腦

肆、研究過程與方式

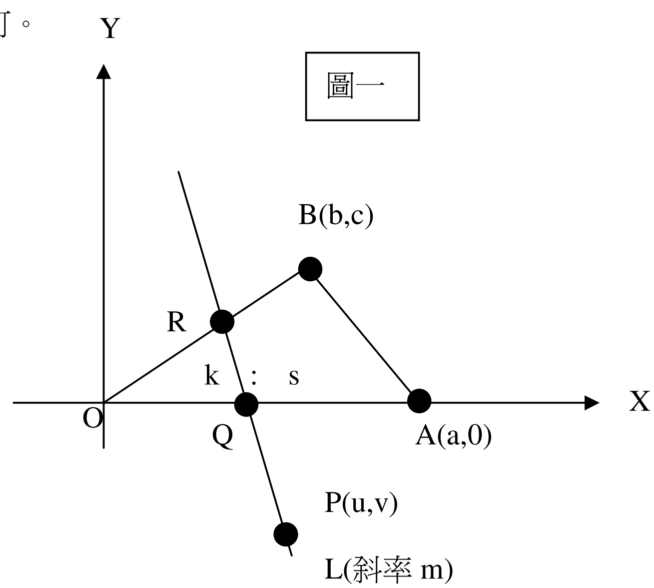
不失其一般性，我們將任意三角形設定在直角座標系上的第一象限並以ΔABO表之，而P點設爲$P(u,v)$，所求直線設爲L，其斜率設爲m。

因爲有不同的三角形和不同的切法，我們將三角形的討論情形分爲：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形，切法分爲：從三角形左側邊的邊切到 X 軸、從三角形右側邊的邊切到 X 軸、切過三角形左側邊與右側邊的邊。圖形共有如下九種：



一、圖一：銳角三角形，直線切左側：

設直線方程式爲 L，直線斜率爲 m，再分別將 Q 與 R 點用 m 來表示，最後利用面積比爲 k：s，將 m 求出來即可。



解法

∵直線 L 過 P(u,v)且斜率爲 m

∴直線 L 方程式爲:y=m(x-u)+v

解聯立方程式

$$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{求 Q}$$

$$m(x-u)+v=0 \Rightarrow m(x-u)=-v$$

$$\Rightarrow x-u=-\frac{v}{m} \Rightarrow x=u-\frac{v}{m}$$

$Q(u-\frac{v}{m},0)$ 且 $0 < \mathrm{u} - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}} < \mathrm{a}$

解聯立方程式：

$$\begin{cases} y=m(x-u)+v \\ y=\frac{c}{b}x \end{cases}$$ 求 R:

$$mx-mu+v=\frac{c}{b}x \Rightarrow -mu+v=\frac{c}{b}x-mx \Rightarrow -mu+v=x(\frac{c}{b}-m)$$

$$\Rightarrow x=\frac{-mu+v}{\frac{c}{b}-m}=\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}}$$

將 x 代入 $y=\frac{c}{b}x$ ：

$$y=\frac{c}{b}(\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}})=\frac{c(mu-v)}{bm-c}$$

$R(\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}},\frac{c(mu-v)}{bm-c})$ 且 $0<\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}} \le \mathrm{b}$

ΔORQ三角形面積$\frac{1}{2}\times a\times c\times\frac{k}{k+s}=\frac{1}{2}(u-\frac{v}{m})(\frac{c(mu-v)}{bm-c})$

約掉$\frac{1}{2} \Rightarrow \therefore \frac{ack}{k+s}=(u-\frac{v}{m})(\frac{c(mu-v)}{bm-c})$

$$\frac{ack}{k+s}=\frac{c(mu-v)(mu-v)}{m(bm-c)}=\frac{c(mu-v)^2}{m(bm-c)}$$

約掉$c \Rightarrow \dfrac{ak}{\mathrm{k+s}} = \dfrac{(mu-v)^2}{bm^2-cm} \Rightarrow ak(bm^2-cm) = (mu-v)^2(k+s)$

$\Rightarrow abkm^2 - ackm = (k+s)(m^2u^2 - 2muv + v^2) = (k+s)u^2m^2 - 2(k+s)muv + (k+s)v^2$

$\Rightarrow (ku^2+su^2)m^2 - abkm^2 + ackm - (2kuv+2suv)m + (k+s)v^2 = 0$

$\Rightarrow (ku^2+su^2-abk)m^2 + (ack-2kuv-2suv)m + (k+s)v^2 = 0$

利用公式解求m

$$m = \frac{2kuv+2suv-ack \pm \sqrt{(ack-2kuv-2suv)^2 - 4(ku^2+su^2-abk)(k+s)v^2}}{2(ku^2+su^2-abk)}$$

判別式$\mathrm{D} = (ack-2kuv-2suv)^2 - 4(ku^2+su^2-abk)(k+s)v^2$

$= a^2\mathrm{c}^2k^2 + 4u^2v^2k^2 + 4u^2v^2s^2 - 4k^2a\mathrm{cuv} - 4\mathrm{acksuv} + 8u^2v^2ks - 4k^2u^2v^2 - 4ksu^2v^2$

$\quad - 4ksu^2v^2 - 4s^2u^2\mathrm{v}^2 + 4abk^2v^2 + 4abksv^2$

$= a^2\mathrm{c}^2k^2 - 4k^2a\mathrm{cuv} - 4\mathrm{acksuv} + 4abk^2v^2 + 4abksv^2 = a^2\mathrm{c}^2k^2 + 4akv(k+s)(bv-cu)$

所以，$m = \dfrac{2kuv+2suv-ack \pm \sqrt{a^2\mathrm{c}^2k^2 + 4akv(k+s)(bv-\mathrm{cu})}}{2(ku^2+su^2-abk)}$

$\therefore$通過點 P(u,v)，切割三角形的左側將面積分成 k：s 的直線方程式爲

$$y = \frac{2kuv+2suv-ack \pm \sqrt{a^2\mathrm{c}^2k^2 + 4akv(k+s)(bv-\mathrm{cu})}}{2(ku^2+su^2-abk)}(x-u)+v$$

<例 1>已知 A(16,0)、B(12,10)，求過 P(14，-5)且將ΔOAB分成 5:11 的直線方程式。

[解法]令 a=16、b=12、c=10、u=14、v=-5、k=5、s=11 代入圖一公式得

D=2400^2，m=$-\dfrac{5}{34}$或$-\dfrac{5}{4}$

得此直線方程式爲：

L_1： $y = -\dfrac{5}{34}(x-14)-5$ 或 L_2： $y = -\dfrac{5}{4}(x-14)-5$

[驗算] L_1： $y = -\dfrac{5}{34}(x-14)-5$

此直線與 X 軸的交點在 X 軸的負向上，故不合

L_2： $y = -\dfrac{5}{4}(x-14)-5$

此直線與 X 軸交點爲 Q(10,0)，與$\overleftrightarrow{OB}$交點爲 R(6,5)

ΔOQR 面積=$\dfrac{1}{2}\times 10\times 5 = 25$

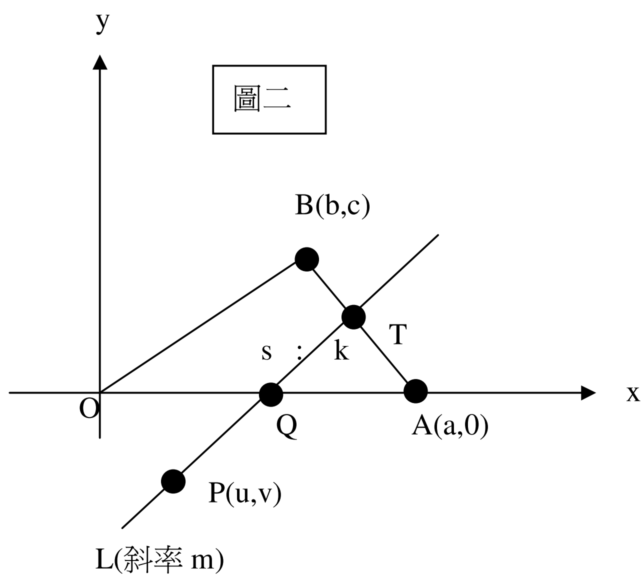
ΔOAB 面積=$\dfrac{1}{2}\times 16\times 10 = 80$

四邊形 ABRQ 面積=80-25=55

$25:55=5:11$ 故符合

二、銳角三角形，直線切右側：

設直線方程式為 L，直線斜率為 m，再分別將 Q 與 T 點用 m 來表示，最後利用面積比為 K:S，將 m 求出來即可。



解法

∵直線 L 過 P(u,v)且斜率為 m

∴可設直線 L 方程式為:y=m(x-u)+v

解聯立方程式

$$\begin{cases} y=m(x-u)+v \\ y=0 \end{cases}$$ 求 Q:

$$m(x-u)+v=0$$

$$\Rightarrow m(x-u)=-v$$

$$\Rightarrow x-u=-\frac{v}{m}$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}=\mathrm{u}-\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}}$$

$$\therefore \text{Q點的座標為}(\mathrm{u}-\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}},0)$$

且 $0<\mathrm{u}-\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}<\mathrm{a}$

解聯立方程式

$$\begin{cases} y=m(x-u)+v \\ y=\dfrac{c}{b-a}(x-a) \end{cases}$$ 求 T:

$$mx-mu+v=\frac{c}{b-a}x-\frac{ac}{b-a}\Rightarrow$$

$$x(m-\frac{c}{b-a})=mu-v-\frac{ac}{b-a}$$

$$x=\frac{mu-v-\dfrac{ac}{b-a}}{m-\dfrac{c}{b-a}}$$

$$\text{代入}y=\frac{c}{b-a}(x-a)\Rightarrow y=\frac{c}{b-a}\left(\frac{mu-v-\dfrac{ac}{b-a}}{m-\dfrac{c}{b-a}}-a\right)$$

$$y=\frac{c}{b-a}\left(\frac{mu-ma-v-\frac{ac}{b-a}+\frac{ac}{b-a}}{m-\frac{c}{b-a}}\right)\Rightarrow y=\frac{c}{b-a}\left(\frac{mu-ma-v}{m-\frac{c}{b-a}}\right)$$

$$y=\frac{c(mu-ma-v)}{(b-a)m-c}$$

$\therefore$ T點座標爲$\left(\dfrac{\mathrm{mu-v-\frac{ac}{b-a}}}{\mathrm{m-\frac{c}{b-a}}},\dfrac{\mathrm{c(mu-am-v)}}{\mathrm{(b-a)m-c}}\right)$ ，且$\mathrm{b}\le\dfrac{\mathrm{mu-v-\frac{ac}{b-a}}}{\mathrm{m-\frac{c}{b-a}}}<\mathrm{a}$

$$\Delta \mathrm{ATQ}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{a-u}+\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{\mathrm{c(mu-am-v)}}{\mathrm{(b-a)m-c}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{ac}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k+s}}\right)$$

$$\left(\mathrm{a-u}+\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{\mathrm{c(mu-am-v)}}{\mathrm{(b-a)m-c}}\right)=\frac{\mathrm{ack}}{\mathrm{k+s}}$$

$$\frac{ma-mu+v}{m}\times\frac{c(mu-am-v)}{(b-a)m-c}=\frac{ack}{k+s}$$

約掉C $\Rightarrow \dfrac{-(ma-mu+v)^2}{(b-a)m^2-cm}=\dfrac{ak}{k+s}\Rightarrow -(k+s)(ma-mu+v)^2=ak\left[(b-a)m^2-cm\right]$

$$\Rightarrow -(k+s)[m^2a^2+m^2u^2+v^2-2am^2u-2muv+2amv]=abkm^2-a^2km^2-ackm$$

$$\Rightarrow -ka^2m^2-sa^2m^2-ku^2m^2-su^2m^2-kv^2-sv^2+2akum^2+2am^2su+2kmuv$$
$$+2msuv-2akmv-2amsv=abkm^2-a^2km^2-ackm$$

$$\Rightarrow m^2(abk+a^2s+u^2k+u^2s-2aku-2asu)+m(2avk+2sav-2suv-2kuv-ack)+kv^2+sv^2=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{\mathrm{-2akv-2asv+2suv+2kuv+ack}\pm\sqrt{D}}{2abk+2a^2s+2ku^2+2su^2-4aku-4asu}$$

其中$D=4a^2k^2v^2+4a^2ksv^2-4aksuv^2-4ak^2uv^2-2a^2ck^2v+4a^2ksv^2+4a^2s^2v^2-4as^2uv^2$
$-4aksuv^2-2a^2cksv-4aksuv^2-4as^2uv^2+4s^2u^2v^2+4sku^2v^2+2acksuv-4ak^2uv^2$
$-4aksuv^2+4sku^2v^2+4k^2u^2v^2+2ack^2uv-2a^2ck^2v-2a^2cksv+2acksuv+2ack^2uv$
$+a^2c^2k^2-4abk^2v^2-4a^2ksv^2-4k^2u^2v^2-4ksu^2v^2+8akuv^2+8aksuv^2-4abksv^2-$
$4a^2s^2v^2-4ksu^2v^2-4s^2u^2v^2+8aksuv^2+8as^2uv^2$
$=4a^2k^2v^2-4a^2cksv-4a^2ck^2v+4acksuv+4ack^2uv+a^2c^2k^2-$
$4abk^2v^2+4a^2ksv^2-4abksv^2$

$\therefore$通過 P 點(u,v)，切割三角形的右側，將面積分成 k：s 的直線方程式爲

$y=\dfrac{\mathrm{-2akv-2asv+2suv+2kuv+ack}\pm\sqrt{D}}{2abk+2a^2s+2ku^2+2su^2-4aku-4asu}(x-u)+v$ ，其中

$D = 4a^2k^2v^2 - 4a^2cksv - 4a^2ck^2v + 4acksuv + 4ack^2uv + a^2c^2k^2 -$
$4abk^2v^2 + 4a^2ksv^2 - 4abksv^2$

<例 2> 已知 A(14,0)、B(8,12)，求過 P(10,4)且將 ΔOAB 分成 3：11 的直線方程式。

[解法]令 a=14、b=8、c=12、u=10、v=4、k=3、s=11 代入圖二公式得

D=168^2，m=2 或-4

得此直線方程式為

L_1： $y = 2(x-10)+4$ 或 L_2： $y = -4(x-14)+4$

[驗算] L_1： $y = 2(x-10)+4$

此直線與 X 軸交點為 $Q_1(8,0)$，與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交點為 $T_1(11,6)$

ΔAQT_1 面積=$\frac{1}{2} \times (14-8) \times 6 = 18$

ΔOAB 面積=$\frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$

四邊形 OBT_1Q 面積=84-18-=66

18：66=13：11 符合

L_2： $y = -4(x-14)+4$

此直線與 X 軸交點為 $Q_2(11,0)$，與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交點為 B (8,12)

ΔAQ_2B 面積=$\frac{1}{2} \times (14-11) \times 12 = 18$

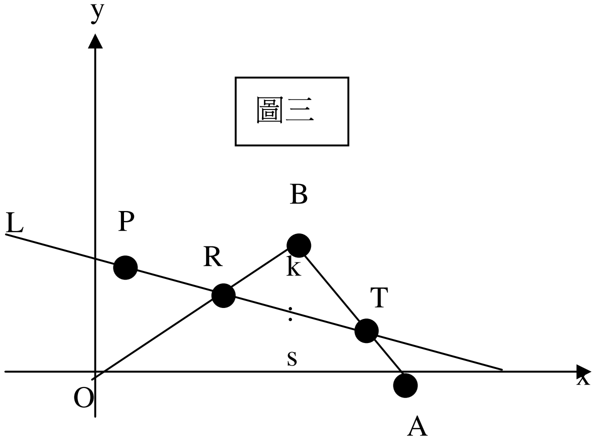
ΔOBQ_2 面積=84-18=66

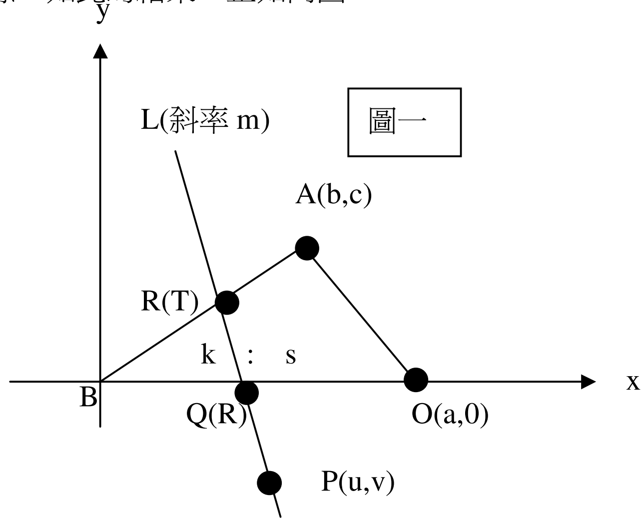
18：66=13：11 符合

三、銳角三角形，直線切上方：

設直線方程式為 L，直線斜率為 m，再分別將 R 與 T 點用 m 來表示，最後再利用面積比為 k：s，將 m 求出來即可。

在處理這個圖形時，我們可以將圖三旋轉個方向來處理，讓 B 點落在原點上，O 點落在 X 軸正向，重新定義出坐標，如此的結果，正如同圖一。





解法

解聯立方程式：

$$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = 0 \end{cases} \quad 求\ Q:$$

$\Rightarrow \therefore$ Q點的座標爲$(u - \frac{v}{m},0)$ 且 $0<u-\frac{v}{m}<a$

解聯立方程式：

$$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = \frac{c}{b}x \end{cases} \quad 求得R(\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}},\frac{c(mu-v)}{bm-c}) \quad 且\ O<\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}}\le b$$

利用面積比例求出

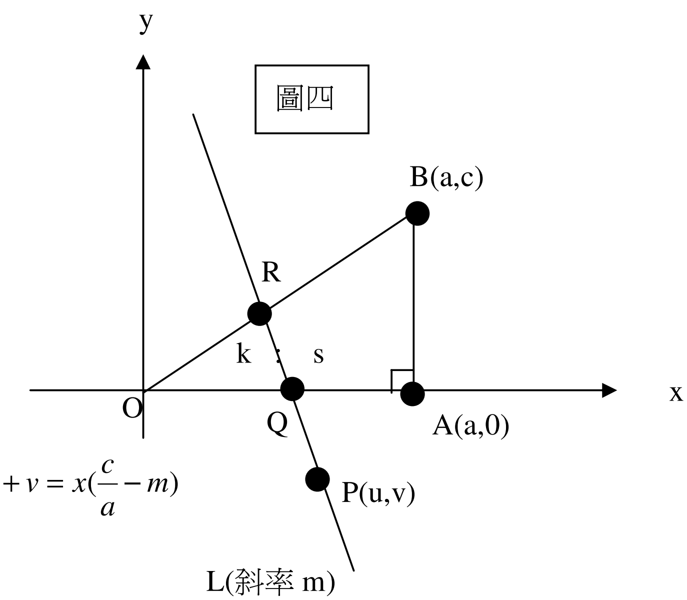
$$m = \frac{2kuv+2suv-ack \pm \sqrt{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}}{2(ku^2+su^2-abk)}$$

$\therefore$通過 P 點，切割三角形 ΔOAB 面積成 k：s 的直線方程式爲

$$y = \frac{2kuv+2suv-ack \pm \sqrt{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}}{2(ku^2+su^2-abk)}(x-u)+v$$

四、直角三角形，直線切左側：

設直線方程式爲 L，直線斜率爲 m，再分別將 Q 與 R 點用 m 來表示，最後再利用面積比爲 k：s，將 m 求出來即可。



圖四

解法

解聯立方程式$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = 0 \end{cases}$

求得$Q(u-\frac{v}{m},0)$

解聯立方程式$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = \frac{c}{a}x \end{cases}$ 求 R:

$$mx-mu+v=\frac{c}{a}x \Rightarrow -mu+v=\frac{c}{a}x-mx \Rightarrow -mu+v=x(\frac{c}{a}-m)$$

$$\Rightarrow x=\frac{-mu+v}{\frac{c}{a}-m}=\frac{mu-v}{m-\frac{c}{a}}=\frac{a(mu-v)}{am-c}$$

將 x 代入 $y=\dfrac{c}{a}x$ 中

$$y=\frac{c}{a}\left(\frac{mu-v}{m-\frac{c}{a}}\right)=\frac{c(mu-v)}{am-c}$$

$\therefore$ R坐標爲$\left(\dfrac{a(mu-v)}{am-c},\dfrac{c(mu-v)}{am-c}\right)$

ΔORQ面積$=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{a}\times \mathrm{c}\times\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{k+s}}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{u}-\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}})(\dfrac{\mathrm{c(mu-v)}}{\mathrm{am-c}})$

約掉$\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{\mathrm{ack}}{\mathrm{k+s}}=(\mathrm{u}-\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}})(\dfrac{\mathrm{c(mu-v)}}{\mathrm{am-c}})$

$$\frac{\mathrm{ack}}{\mathrm{k+s}}=\frac{c(mu-v)(mu-v)}{m(am-c)}=\frac{c(mu-v)^2}{m(am-c)}$$

約掉 C

$$\frac{ak}{\mathrm{k+s}}=\frac{(mu-v)^2}{am^2-cm}\Rightarrow ak(am^2-cm)=(mu-v)^2(k+s)$$

$$a^2km^2-ackm=(k+s)(m^2\mathrm{u}^2-2muv+v^2)=(k+s)u^2m^2-2(k+s)\mathrm{m}uv+(k+s)v^2$$

$$(ku^2+su^2)m^2-a^2km^2+ackm-(2kuv+2suv)m+(k+s)v^2=0$$

$$(ku^2+su^2-a^2k)m^2+(ack-2kuv-2suv)m+(k+s)v^2=0$$

利用一元二次方程式的公式解得知：

$$\mathrm{m}=\frac{2kuv+2suv-\mathrm{ack}\pm\sqrt{(ack-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-a^2k)(k+s)v^2}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}$$

判別式$\mathrm{D}=(ack-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-a^2k)(k+s)v^2$

$=\mathrm{a^2c^2k^2+4u^2v^2k^2+4u^2v^2s^2-4k^2acuv-4acksuv+8u^2v^2ks-4k^2u^2v^2-4ksu^2v^2}$

$\mathrm{-4ksu^2v^2-4u^2s^2v^2+4a^2k^2v^2+4a^2ksv^2}$

$=\mathrm{a^2c^2k^2-4k^2acuv-4acksuv+4a^2k^2v^2+4a^2ksv^2=a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)}$

$$\therefore \mathrm{m}=\frac{2kuv+2suv-\mathrm{ack}\pm\sqrt{\mathrm{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)}}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}$$

$\therefore$ 通過 P 點，切割直解三角形左側使面積成 k：s 的直線方程式爲

$$y=\frac{2kuv+2suv-\mathrm{ack}\pm\sqrt{\mathrm{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)}}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}(x-u)+v$$

五、直角三角形，直線切右側：

設直線方程式爲 L，直線斜率爲 m，再分別將 Q 與 T 點用 m 來表示，如圖六，最後再利用面積比爲 k：s，將 m 求出來即可。

解法

解聯立方程式$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = 0 \end{cases}$

求得 Q 點坐標為

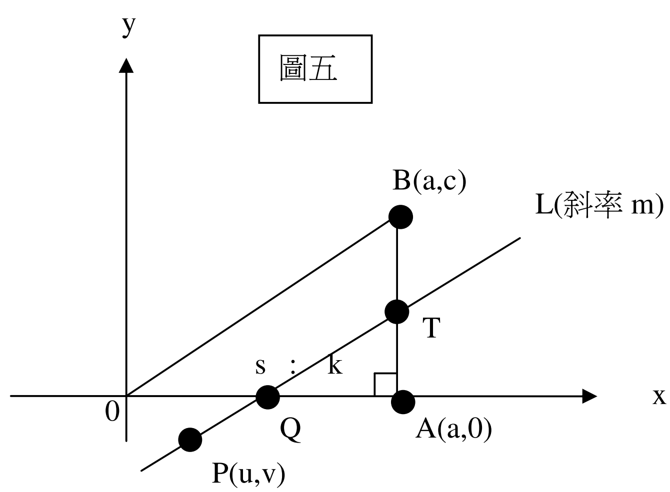
$(u-\frac{v}{m},0)$　且 O<$u-\frac{v}{m}$<a

解聯立方程式$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ x = a \end{cases}$

求 T:

$\Rightarrow y = m(a-u)+v$

$\Rightarrow T(a, am-mu+v)$



三角形ΔATQ $= \frac{1}{2}\times a\times c\times\frac{k}{k+s} = \frac{1}{2}(a-u+\frac{v}{m})(am-mu+v)$

$$\Rightarrow \frac{ack}{k+s} = (\frac{am-um+v}{m})(am-um+v)$$

$$\Rightarrow \frac{ackm}{k+s} = (am-mu+v)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ackm}{k+s} = m^2a^2+m^2u^2+v^2-2aum^2-2muv+2amv$$

$$\Rightarrow m^2a^2+m^2u^2-2aum^2-\frac{ackm}{k+s}-2muv+2amv+v^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2(a^2-2au+u^2)+m(2av-2uv-\frac{ack}{k+s})+v^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{\frac{ack}{k+s}-2av+2uv\pm\sqrt{(2av-2uv-\frac{ack}{k+s})^2-4(a^2-2au+u^2)v^2}}{2(a^2-2au+u^2)}$$

判別式$D=(2av-2uv-\frac{ack}{k+s})^2-4(a^2-2au+u^2)v^2$

$=\frac{a^2c^2k^2}{(k+s)^2}+4u^2v^2+4a^2v^2+\frac{4ackuv}{k+s}-8auv^2-\frac{4a^2ckv}{k+s}-4a^2v^2+8auv^2-4u^2v^2$

$=\frac{a^2c^2k^2}{(k+s)^2}+\frac{4ackuv}{k+s}-\frac{4a^2ckv}{k+s}$

$=\frac{a^2c^2k^2+4ack^2uv+4acksuv-4a^2ck^2v-4a^2cksv}{(\mathrm{k+s})^2}$

$=\frac{ack(ack-4akv-4asv+4kuv+4suv)}{(\mathrm{k+s})^2}$

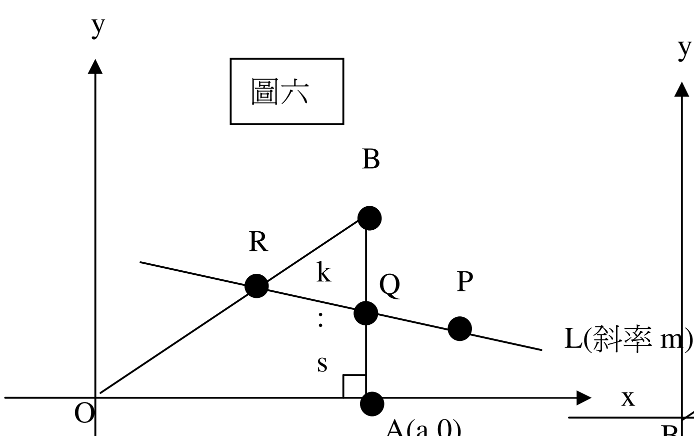
$$m=\frac{\frac{ack}{k+s}-2av+2uv\pm\sqrt{\frac{ack(ack-4akv-4asv+4kuv+4suv)}{(k+s)^2}}}{2(a^2-2au+u^2)}$$

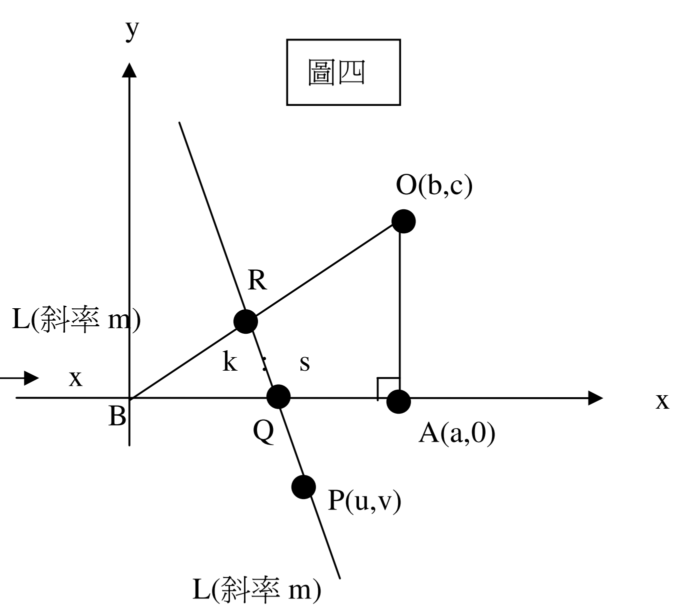
∴通過 P 點，切割直角三角形ΔOAB 右側使面積成 k：s 的直線方程式為

$$y=\frac{\frac{ack}{k+s}-2av+2uv\pm\sqrt{\frac{ack(ack-4akv-4asv+4kuv+4suv)}{(k+s)^2}}}{2(a^2-2au+u^2)}(x-u)+v$$

六、直角三角形，直線切上方：

在處理這個圖形時，因為直線 L 切過直角三角形的斜邊和一股，所以我們可將之翻轉成圖四來處理。





解聯立方程式$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = 0 \end{cases}$

求得$Q(u-\frac{v}{m},0)$

解聯立方程式$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = \frac{c}{a}x \end{cases}$ 求 R:

$$mx - mu + v = \frac{c}{a}x \Rightarrow -mu + v = \frac{c}{a}x - mx \Rightarrow -mu + v = x(\frac{c}{a} - m)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-mu+v}{\frac{c}{a}-m} = \frac{mu-v}{m-\frac{c}{a}}$$

將 x 代入 $y = \frac{c}{a}x$中

$$y = \frac{c}{a}(\frac{mu-v}{m-\frac{c}{a}}) = \frac{c(mu-v)}{am-c}$$

$\therefore$ R坐標爲$(\frac{a(mu-v)}{am-c},\frac{c(mu-v)}{am-c})$

ΔBRQ 面積： $= \frac{1}{2}\times \mathrm{a} \times \mathrm{c} \times \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k+s}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u} - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}}\right)\times \frac{\mathrm{c}(\mathrm{mu - v})}{\mathrm{am - c}}$

$$\frac{ak}{\mathrm{k+s}} = \frac{(mu-v)^2}{am^2-cm} \Rightarrow ak(am^2-cm) = (mu-v)^2(k+s)$$

$$a^2km^2 - ackm = (k+s)(m^2\mathrm{u}^2 - 2muv + v^2) = (k+s)u^2m^2 - 2(k+s)\mathrm{m}uv + (k+s)v^2$$

$$(ku^2+su^2)m^2 - a^2km^2 + ackm - (2kuv+2suv)m + (k+s)v^2 = 0$$

$$(ku^2+su^2-a^2k)m^2 + (ack-2kuv-2suv)m + (k+s)v^2 = 0$$

利用一元二次方程式公式解可得：

$$m = \frac{2kuv+2suv-\mathrm{ack} \pm \sqrt{(ack-2kuv-2suv)^2 - 4(ku^2+su^2-a^2k)(k+s)v^2}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}$$

判別式$D=(ack-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-a^2k)(k+s)v^2$

$=a^2c^2k^2+4u^2v^2k^2+4u^2v^2s^2-4k^2acuv-4acksuv+8u^2v^2ks-4k^2u^2v^2-4ksu^2v^2$

$-4ksu^2v^2-4u^2s^2v^2+4a^2k^2v^2+4a^2ksv^2$

$=a^2c^2k^2-4k^2acuv-4acksuv+4a^2k^2v^2+4a^2ksv^2=a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)$

所以，$m=\dfrac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}$

∴通過 P 點，切割直角三角形 ΔOAB 上方使面積成 k：s 的直線方程式爲

$$y=\frac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}(x-u)+v$$

七、鈍角三角形，直線切左側：

設直線方程式爲 L，斜率爲 m，再分別將 Q 與 R 點用 m 來表示，最後再利用面積比爲 k：s，將 m 求出來即可。

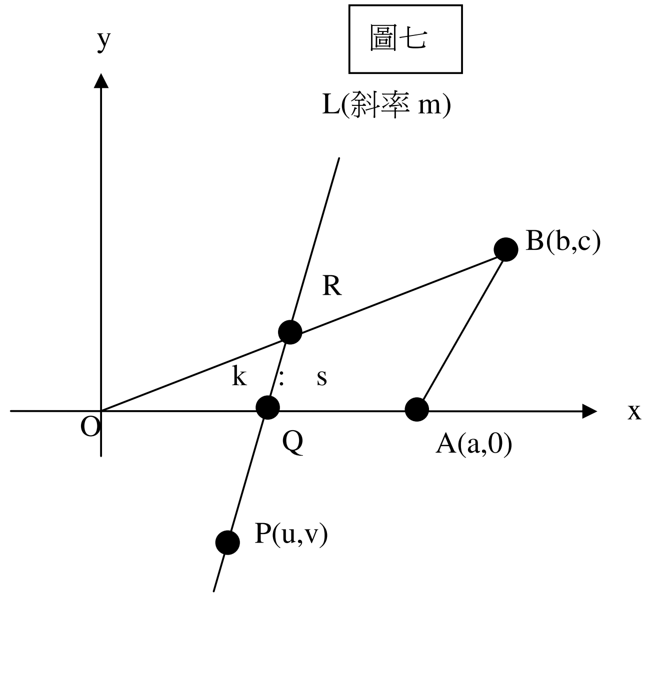
解法

解聯立方程式$\begin{cases} y=m(x-u)+v \\ y=0 \end{cases}$

求得 Q 坐標爲 $(u-\dfrac{v}{m},0)$

解聯立方程式$\begin{cases} y=m(x-u)+v \\ y=\dfrac{c}{b}x \end{cases}$ 求 R

圖七



$mx-mu+v=\dfrac{c}{b}x$

$-mu+v=\dfrac{c}{b}x-mx$

$-mu+v=x(\dfrac{c}{b}-m)$

$x=\dfrac{-mu+v}{\dfrac{c}{b}-m}=\dfrac{mu-v}{m-\dfrac{c}{b}}$

代入$y=\dfrac{c}{b}x$

得$y=(\dfrac{c}{b})(\dfrac{mu-v}{m-\dfrac{c}{b}})=\dfrac{c(mu-v)}{bm-c}$

R坐標爲$\left(\dfrac{mu-v}{m-\frac{c}{b}},\dfrac{c(mu-v)}{bm-c}\right)$

ΔORQ面積$=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{a}\times \mathrm{c}\times \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{k+s}}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{u}-\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}})(\dfrac{\mathrm{c(mu\text{ - }v)}}{\mathrm{bm\text{ - }c}})$

約掉$\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{\mathrm{ack}}{\mathrm{k+s}}=(\mathrm{u}\text{ - }\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}})(\dfrac{\mathrm{c(mu\text{ - }v)}}{\mathrm{bm\text{ - }c}})$

$$\frac{\mathrm{ack}}{\mathrm{k+s}}=\frac{c(mu-v)(mu-v)}{m(bm-c)}=\frac{c(mu-v)^2}{m(bm-c)}$$

約掉 C

$$\frac{ak}{\mathrm{k+s}}=\frac{(mu-v)^2}{bm^2-cm}\Rightarrow ak(bm^2-cm)=(mu-v)^2(k+s)$$

$$abkm^2-ackm=(k+s)(m^2u^2-2muv+v^2)=(k+s)u^2m^2-2(k+s)muv+(k+s)v^2$$

$$(ku^2+su^2)m^2-abkm^2+ackm-(2kuv+2suv)m+(k+s)v^2=0$$

$$(ku^2+su^2-abk)m^2+(\mathrm{a}ck-2kuv-2suv)m+(k+s)v^2=0$$

利用一元二次方程式的公式解m

$$\mathrm{m}=\frac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{(\mathrm{a}ck-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-abk)(k+s)v^2}}{2(ku^2+su^2-abk)}$$

判別式$\mathrm{D}=(ack-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-abk)(k+s)v^2$

$=\mathrm{a^2c^2k^2+4u^2v^2k^2+4u^2v^2s^2-4k^2acuv\text{ - }4acksuv+8u^2v^2ks-4k^2u^2v^2-4ksu^2v^2}$

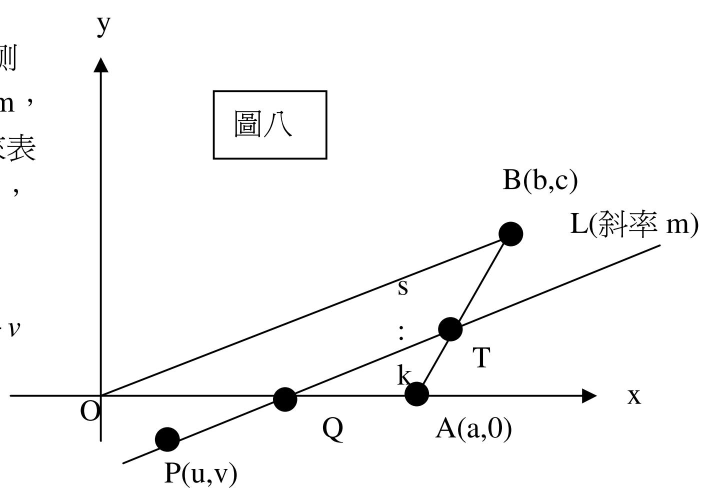
$\quad\mathrm{-4ksu^2v^2-4s^2u^2v^2+4abk^2v^2+4abksv^2}$

$=\mathrm{a^2c^2k^2-4k^2acuv-4acksuv+4abk^2v^2+4abksv^2=a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv\text{ - }cu)}$

所以，$\mathrm{m}=\dfrac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{\mathrm{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv\text{ - }cu)}}}{2(ku^2+su^2-abk)}$

八、鈍腳三角形，直線切右側

設直線方程式爲 L，斜率爲 m，再分別將 Q 點與 T 點用 m 來表示，最後再利用面積比爲 k:s，將 m 求出來即可



解聯立方程式$\begin{cases} y=m(x-u)+v \\ y=0 \end{cases}$

求 Q:

$m(x-u)+v=0$

$m(x-u)=-v$

$x-u=-\frac{v}{m}$

$\mathrm{x=u-\frac{v}{m}}$

所以，Q點的座標爲$\mathrm{(u-\frac{v}{m},0)}$

解聯立方程式

$$\begin{cases} \mathrm{y=m(x-u)+v} \\ \mathrm{y=\frac{c}{b-a}(x-a)} \end{cases}$$

求 T:

$\mathrm{mx-mu+v=\frac{c}{b-a}x-\frac{ac}{b-a}}$

$\mathrm{x(m-\frac{c}{b-a})=mu-v-\frac{ac}{b-a}}$

$$\mathrm{x=\frac{mu-v-\frac{ac}{b-a}}{m-\frac{c}{b-a}}}$$

代入$\mathrm{y=\frac{c}{b-a}(x-a)}$得

$$\mathrm{y=\frac{c}{b-a}(\frac{mu-v-\frac{ac}{b-a}}{m-\frac{c}{b-a}}-a)}$$

$$\mathrm{=\frac{c}{b-a}(\frac{mu-am-v-\frac{ac}{b-a}+\frac{ac}{b-a}}{m-\frac{c}{b-a}})}$$

$$\mathrm{=\frac{c}{b-a}(\frac{mu-am-v}{m-\frac{c}{b-a}})}$$

$$\mathrm{=\frac{c(um-am-v)}{(b-a)m-c}}$$

得T坐標爲$\mathrm{(\frac{mu-v-\frac{ac}{b-a}}{m-\frac{c}{b-a}},\frac{c(mu-am-v)}{(b-a)m-c})}$

$$\Delta ATQ=\frac{1}{2}(a-u+\frac{v}{m})(\frac{c(mu-am-v)}{(b-a)m-c})=\frac{1}{2}ac(\frac{k}{k+s})$$

$$(a-u+\frac{v}{m})(\frac{c(mu-am-v)}{(b-a)m-c})=\frac{ack}{k+s}$$

$$\frac{ma-mu+v}{m}\times\frac{c(mu-am-v)}{(b-a)m-c}=\frac{ack}{k+s}$$

約掉C $\Rightarrow\frac{-(ma-mu+v)^2}{(b-a)m^2-cm}=\frac{ak}{k+s}\Rightarrow -(k+s)(ma-mu+v)^2=ak[(b-a)m^2-cm]$

$$-(k+s)[m^2a^2+m^2u^2+v^2-2am^2u-2muv+2amv]=abkm^2-a^2km^2-ackm$$

$$-ka^2m^2-sa^2m^2-ku^2m^2-su^2m^2-kv^2-sv^2+2akum^2+2am^2su+2kmuv$$
$$+2msuv-2akmv-2amsv=abkm^2-a^2km^2-ackm$$

$$m^2(abk+a^2s+u^2k+u^2s-2aku-2asu)+m(2avk+2sav-2suv-2kuv-ack)+kv^2+sv^2=0$$

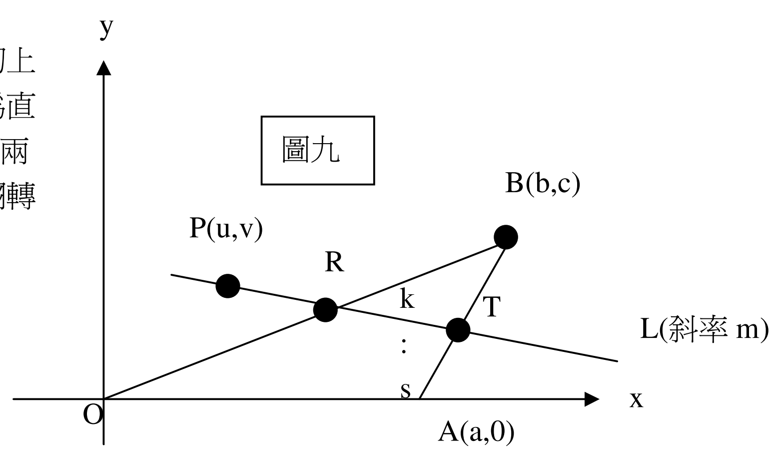
$$m=\frac{-2akv-2asv+2suv+2kuv+ack\pm\sqrt{D}}{2abk+2a^2s+2ku^2+2su^2-4aku-4asu}$$

其中$D=$

$$4a^2k^2v^2+4a^2ksv^2-4aksuv^2-4ak^2uv^2-2a^2ck^2v+4a^2ksv^2+4a^2s^2v^2-4as^2uv^2$$
$$-4aksuv^2-2a^2cksv-4aksuv^2-4as^2uv^2+4s^2u^2v^2+4sku^2v^2+2acksuv-4ak^2uv^2$$
$$-4aksuv^2+4sku^2v^2+4k^2u^2v^2+2ack^2uv-2a^2ck^2v-2a^2cksv+2acksuv+2ack^2uv$$
$$+a^2c^2k^2-4abk^2v^2-4a^2ksv^2-4k^2u^2v^2-4ksu^2v^2+8akuv^2+8aksuv^2-4abksv^2-$$
$$4a^2s^2v^2-4ksu^2v^2-4s^2u^2v^2+8aksuv^2+8as^2uv^2$$
$$=4a^2k^2v^2-4a^2cksv-4a^2ck^2v+4acksuv+4ack^2uv+a^2c^2k^2-$$
$$4abk^2v^2+4a^2ksv^2-4abksv^2$$

九、鈍角三角形，直線切上

在處理這個圖形時，因爲直線 L 切過銳角 ∠OAB 的兩邊，所以我們可以將它翻轉成圖七來處理



解聯立方程式

$$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = 0 \end{cases}$$ 求 Q:

得 $Q(u-\frac{v}{m},0)$

解聯立方程式

$$\begin{cases} y = m(x-u)+v \\ y = \frac{c}{b}x \end{cases}$$ 求 R:

$$mx - mu + v = \frac{c}{b}x$$

$$-mu + v = \frac{c}{b}x - mx$$

$$-mu + v = x(\frac{c}{b} - m)$$

$$x = \frac{-mu+v}{\frac{c}{b}-m}$$

$$= \frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}}$$

代入$y = \frac{c}{b}x$

得$y = (\frac{c}{b})(\frac{mu - v}{m - \frac{c}{b}})$

$$= \frac{c(mu-v)}{bm-c}$$

R坐標爲$(\frac{mu-v}{m-\frac{c}{b}},\frac{c(mu-v)}{bm-c})$

ΔORQ面積$= \frac{1}{2}\times a\times c\times\frac{k}{k+s} = \frac{1}{2}(u-\frac{v}{m})(\frac{c(mu - v)}{bm - c})$

約掉$\frac{1}{2}$，所以$\frac{ack}{k+s} = (u - \frac{v}{m})(\frac{c(mu - v)}{bm - c})$

$$\frac{ack}{k+s} = \frac{c(mu-v)(mu-v)}{m(bm-c)} = \frac{c(mu-v)^2}{m(bm-c)}$$

約掉 C

$$\frac{ak}{\mathrm{k+s}}=\frac{(mu-v)^2}{bm^2-cm}\Rightarrow ak(bm^2-cm)=(mu-v)^2(k+s)$$

$$abkm^2-ackm=(k+s)(m^2u^2-2muv+v^2)=(k+s)u^2m^2-2(k+s)muv+(k+s)v^2$$

$$(ku^2+su^2)m^2-abkm^2+ackm-(2kuv+2suv)m+(k+s)v^2=0$$

$$(ku^2+su^2-abk)m^2+(a\mathrm{ck}-2kuv-2suv)m+(k+s)v^2=0$$

利用一元二次方程式的公式解m

$$\mathrm{m}=\frac{2kuv+2suv-a\mathrm{ck}\pm\sqrt{(a\mathrm{ck}-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-abk)(k+s)v^2}}{2(ku^2+su^2-abk)}$$

判別式$\mathrm{D}=(ack-2kuv-2suv)^2-4(ku^2+su^2-abk)(k+s)v^2$

$$=\mathrm{a^2c^2k^2+4u^2v^2k^2+4u^2v^2s^2-4k^2acuv-4acksuv+8u^2v^2ks-4k^2u^2v^2-4ksu^2v^2}$$

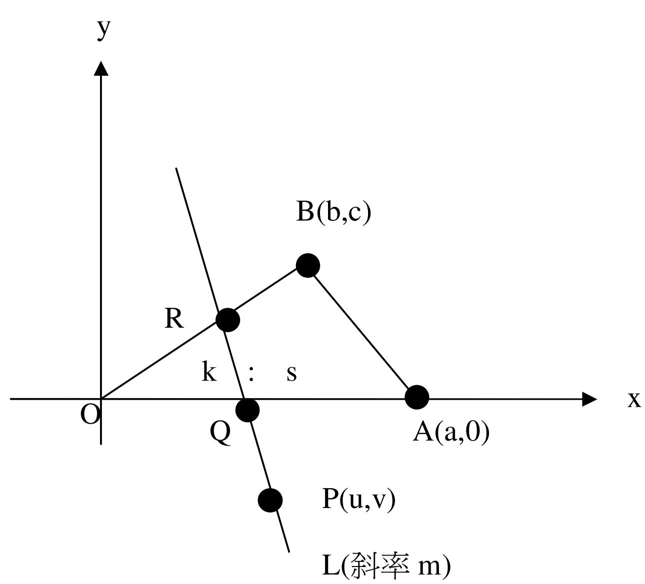
$$\mathrm{-4ksu^2v^2-4s^2u^2v^2+4abk^2v^2+4abksv^2}$$

$$=\mathrm{a^2c^2k^2-4k^2acuv-4acksuv+4abk^2v^2+4abksv^2=a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}$$

所以，$\mathrm{m}=\dfrac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{\mathrm{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}}}{2(ku^2+su^2-abk)}$

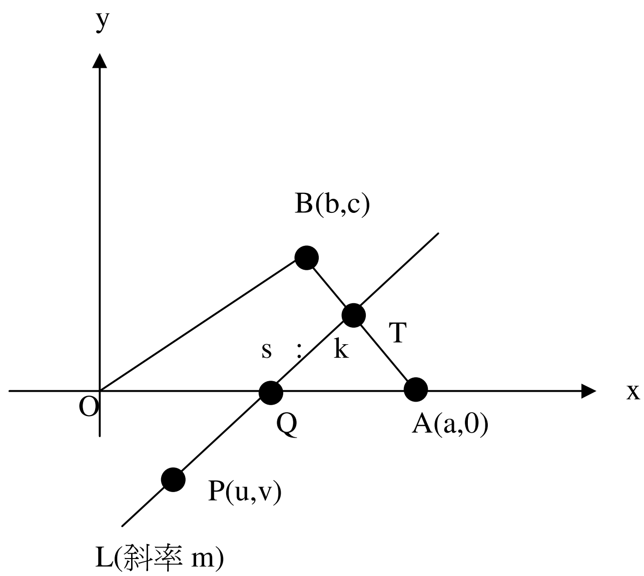
七、討論:

圖一、



公式: $\mathrm{m}=\dfrac{2kuv+2suv-a\mathrm{ck}\pm\sqrt{\mathrm{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}}}{2(ku^2+su^2-abk)}$

圖二、

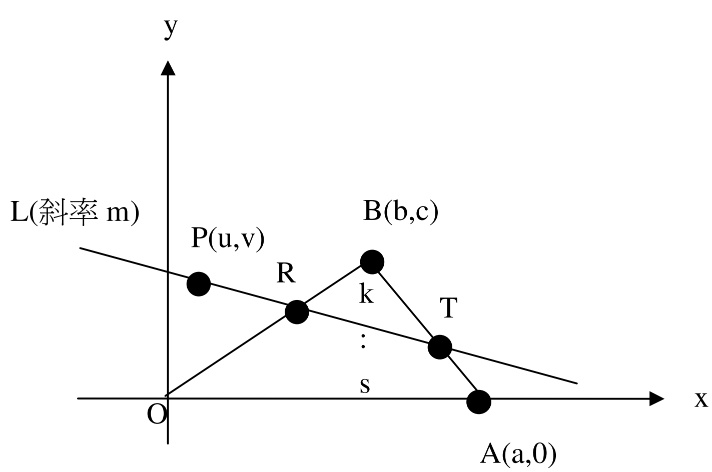


公式

$$m=\frac{-2akv-2asv+2suv+2kuv+ack\pm\sqrt{D}}{2abk+2a^2s+2ku^2+2su^2-4aku-4asu}$$

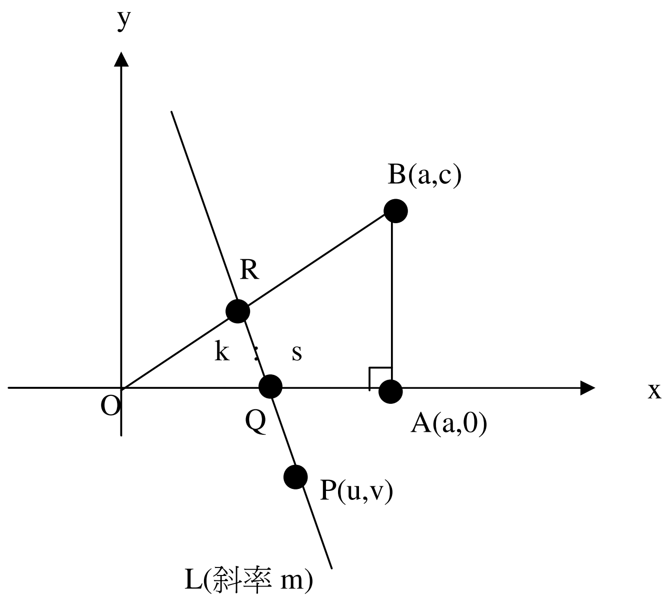
其中$D=4a^2k^2v^2-4a^2cksv-4a^2ck^2v+4acksuv+4ack^2uv+a^2c^2k^2$
$-4abk^2v^2+4a^2ksv^2-4abksv^2$

圖三、



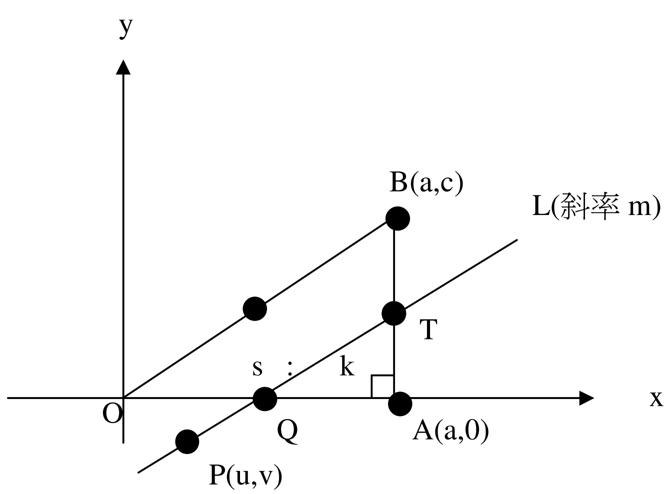
公式: $m=\dfrac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}}{2(ku^2+su^2-abk)}$

圖四、



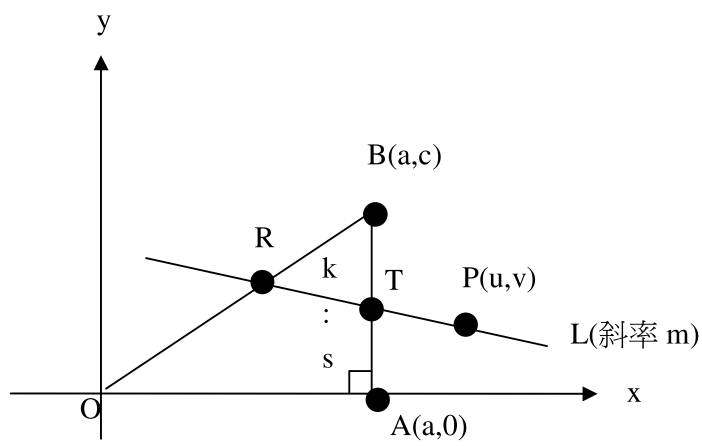
公式: $m=\dfrac{2kuv+2suv-\mathrm{ack}\pm\sqrt{\mathrm{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(av-cu)}}}{2(ku^2+su^2-a^2k)}$

圖五、



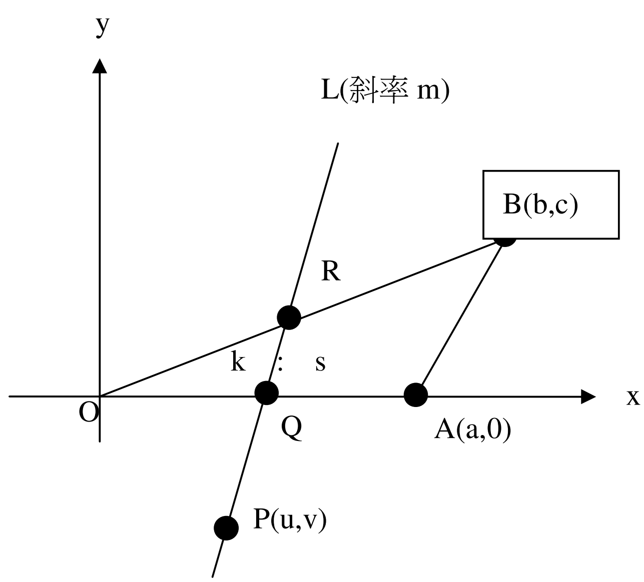
公式: $m=\dfrac{\dfrac{ack}{k+s}-2av+2uv\pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{ack(ack-4akv-4asv+4kuv+4suv)}}{(k+s)^2}}}{2(a^2-2au+u^2)}$

圖六、



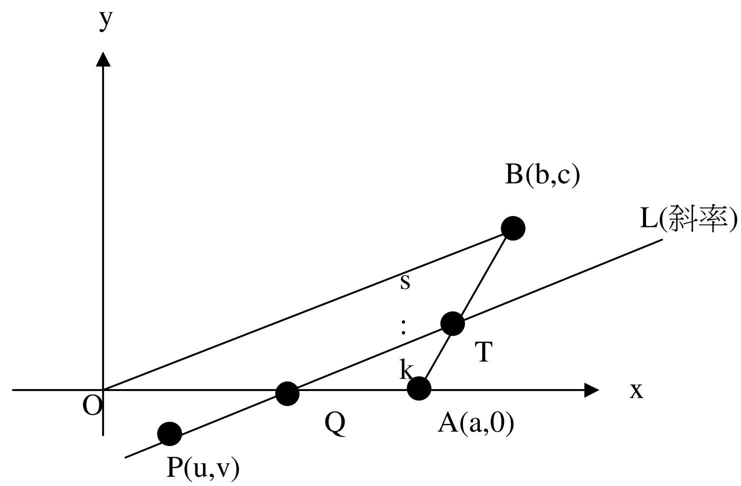
公式: $m = \dfrac{2kuv + 2suv - ack \pm \sqrt{a^2c^2k^2 + 4akv(k+s)(av-cu)}}{2(ku^2 + su^2 - a^2k)}$

圖七、



公式: $m = \dfrac{2kuv + 2suv - ack \pm \sqrt{a^2c^2k^2 + 4akv(k+s)(bv-cu)}}{2(ku^2 + su^2 - abk)}$

圖八、



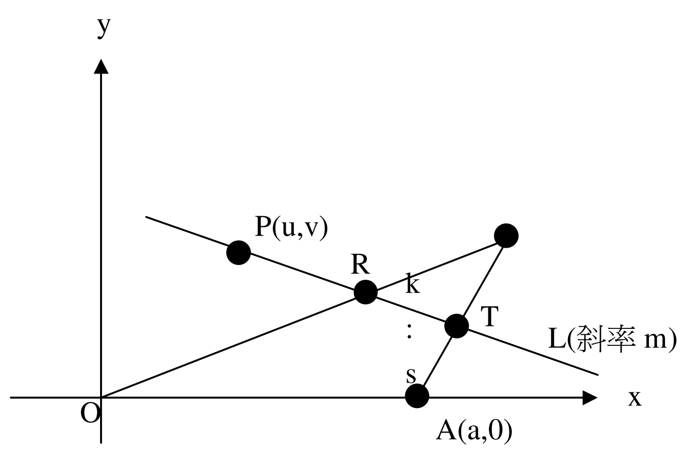
公式:

$$m=\frac{-2akv-2asv+2suv+2kuv+ack\pm\sqrt{D}}{2abk+2a^2s+2ku^2+2su^2-4aku-4asu}$$

其中$D=4a^2k^2v^2-4a^2cksv-4a^2ck^2v+4acksuv+4ack^2uv+a^2c^2k^2$

$-4abk^2v^2+4a^2ksv^2-4abksv^2$

圖九、



公式: $m=\dfrac{2kuv+2suv-ack\pm\sqrt{a^2c^2k^2+4akv(k+s)(bv-cu)}}{2(ku^2+su^2-abk)}$

在我們做圖三、圖六、圖九的時候，發現其中的 K 區面積難以計算，所以我們將圖三逆時針旋轉，使 B 點落在 O 點上，A 點落在第一象限，O 點落在 X 軸正向上。則所有條件就與圖一、圖四、圖七相同。所以算法也與圖一、圖四、圖七相同。

在公式解 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的加減符號上，我們發現正負會因點的不同跟比例的不同而有所差別。所以公式解的加減符號將由題目所給的三角形、P 點和比例來決定。

八、結論：

我們知道圖三可以轉成圖一來做，圖四~圖六爲圖一~圖三的特例，圖七~圖九的公式等於圖一~圖三的公式

圖一的公式

$$m = \frac{2kuv + 2suv - ack \pm \sqrt{a^2 \mathrm{c}^2 k^2 + 4akv(k+s)(bv - \mathrm{c}u)}}{2(ku^2 + su^2 - abk)}$$

而圖二需要利用這種公式

$$m = \frac{-\mathrm{2akv} - \mathrm{2asv} + \mathrm{2suv} + \mathrm{2kuv} + \mathrm{ack} \pm \sqrt{D}}{2abk + 2a^2 s + 2ku^2 + 2su^2 - 4a\mathrm{ku} - 4a\mathrm{su}}$$

其中 $D = 4a^2k^2v^2 - 4a^2cksv - 4a^2ck^2v + 4acksuv + 4ack^2uv + a^2c^2k^2$

$-4abk^2v^2 + 4a^2ksv^2 - 4abksv^2$

九、參考文獻：

第四十一屆參賽作品：公平的裁判，一刀兩半分割直角三角形

第二十七屆參賽作品： N等分三角形面積研究

【評　語】　030417　卡特三明治

透過解析幾何來找出過一點將任意三角形作切割的直線方程式，並作詳盡分類，但若能補以尺規作圖的方式來畫出此直線，作品將會更加完整。