

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030414

正三角形的奧祕

學校名稱：桃園縣立山腳國民中學

作者：	指導老師：
國二 楊子葳	曾文暉
國二 劉達昊	王健寧
國二 林建宏	
國二 張珮怡	

關鍵詞：正三角形 等邊三角形 幾何

壹、摘要

在方格紙上的方格點是否可連成正三角形是一道蠻有趣的問題;這個問題藉由兩種正三角形面積的算式,可以很清楚看出答案是否定的,幾何上的直觀不見得代表其正確性,更須以客觀精準的數據來輔助;除此之外,我們將正三角形條件放寬,以代數的基礎逐一探討各種可能的情況。

貳、研究動機

在二年級上學期快結束的時候,發下了這學期的課本,其中第三章就是介紹 Δ 的基本性質,當老師在課堂上講解下學期的進度時,同時也出了這個問題給我們思考:「在方格紙上,是否可找出三個方格點連成正 Δ 。」起初我們認為這很簡單,畫出圖形並拿給老師看,但是老師說要驗證是否為真的正 Δ ,並提示我們用面積算法求證,因此我們利用反證法,假設方格點(正整數)可連成正 Δ ,因此面積為有理數;但是正 Δ 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 為無理數(其中 a 為有理數),顯然是矛盾;所以方格點是無法連成正 Δ 。但是我們還不甘心,於是將條件放寬,只在平行線與不平行線中,試圖尋找正 Δ ,並決定以這作為我們科展題材,開始了我們的研究。

參、研究目的

- 一、討論方格點是否可連成正 Δ ?
- 二、從三條平行線上(各取一點)尋找正 Δ 。
- 三、從二條平行線及一條截線上(各取一點)尋找正 Δ 。
- 四、從三條線兩兩互不平行中(各取一點)尋找正 Δ 。

肆、研究設備及器材

一、硬體部分

- | | |
|-------------------------------|----|
| (一) Asus P4-3.0 電腦 | 四部 |
| (二) Lemel P4-1.7 Dothan 筆記型電腦 | 一部 |

(三) 印表機

1.HP1220C 彩色噴墨印表機 一部

2.HP1280C 彩色噴墨印表機 一部

3.HP5100 雷射印表機 一部

(四) 掃描器 (scanner) 一部

(五) 文具 (含筆、圓規、直尺) 五套

(六) 紙張 (計算紙、方格紙) 二包

(七) 人腦 五只

(八) 金錢 夠用

二、軟體部分

(一) Windows Xp 一套

(二) Office 2003 一套

(三) 繪圖軟體 GSP 一套

(四) 字形軟體 一套

伍、研究過程與討論

一、方格點是否可連成正 Δ

(一) 如圖 1，在方格點中任取三點 O、A、B 所連成 Δ ，其中 m, n, p, q 均為正整數並假設所連成 ΔOAB 為正 Δ 。

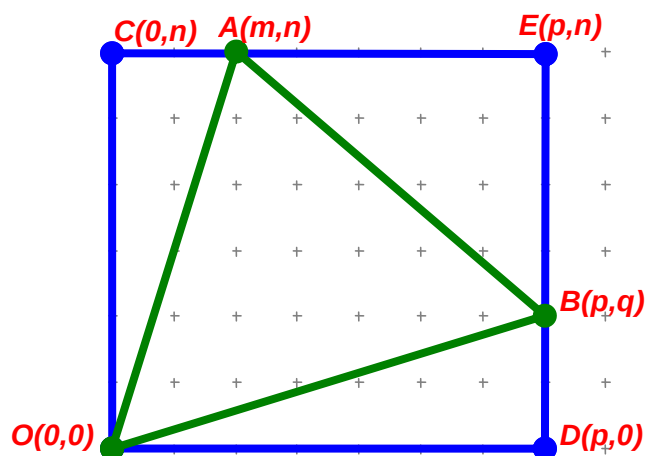


圖 1

(二) 正 $\triangle OAB$ 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}(m^2 + n^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(p^2 + q^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}[(m-p)^2 + (n-q)^2]$ 所以正 $\triangle OAB$ 面積為無理數。

(三) 若從另一觀點來表示正 $\triangle OAB$ 面積，以矩形 $ODEC$ 面積減去直角 $\triangle OCA$ 、直角 $\triangle ODB$ 和直角 $\triangle EAB$ 面積：正 $\triangle OAB$ 面積為 $p \times n - \frac{p \times q}{2} - \frac{m \times n}{2} - \frac{(p-m) \times (n-q)}{2}$ 為有理數。

(四) 根據(二)、(三)推論，可發現矛盾，因此方格點是無法連成正 $\triangle$ 。

二、從三條平行線上，各取一點尋找正 $\triangle$

(一) 如圖 2， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，且間距為 d_1 、 d_2 ($d_1 > d_2$)，假設 $\triangle ABC$ 為正 $\triangle$ 令 $\angle DAB = \theta^\circ$ ，則 $\angle CAF = 30^\circ - \theta$ ， $\angle EBC = 30^\circ + \theta$ ，且邊長均為 a 。

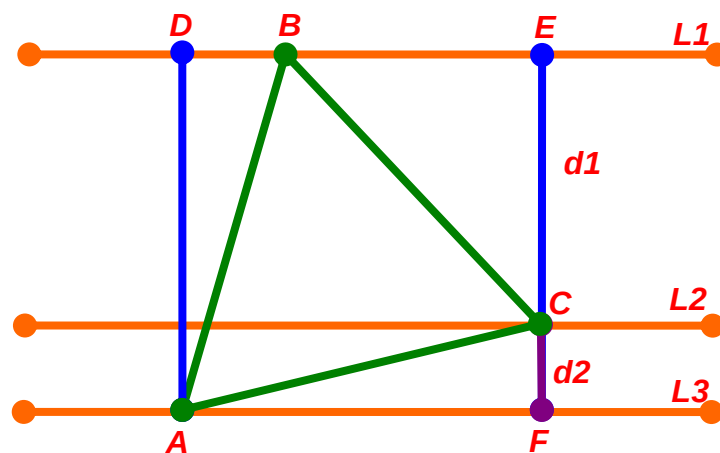


圖 2

(二) 引用三角函數關係得到下列式子：

$$\begin{cases} a \times \sin(30^\circ + \theta) = d_1 & \text{---(1)} \\ a \times \sin(30^\circ - \theta) = d_2 & \text{---(2)} \\ a \times \cos \theta = d_1 + d_2 & \text{---(3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \times (\sin 30^\circ \cos \theta + \cos 30^\circ \sin \theta) = d_1 & \text{---(1)} \\ a \times (\sin 30^\circ \cos \theta - \cos 30^\circ \sin \theta) = d_2 & \text{---(2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1)-(2) \Rightarrow 2a \cos 30^\circ \sin \theta = d_1 - d_2 \Rightarrow \sqrt{3}a \sin \theta = d_1 - d_2$$

$$\Rightarrow a \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(d_1 - d_2) \text{---(4)}$$

$$\Rightarrow (3) \text{式與}(4) \text{式平方和為 } a^2 = \frac{1}{3}(d_1 - d_2)^2 + (d_1 + d_2)^2 = ((d_1 - d_2) \tan 30^\circ)^2 + (d_1 + d_2)^2$$

$$\Rightarrow (4) \text{式除}(3) \text{式為 } \sqrt{3} \tan \theta = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \Rightarrow \tan \theta = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{3}(d_1 + d_2)}$$

(三) 【作圖】如圖 3 作一平行線 L ，使得 $d(L, L_2) = d(L_2, L_1) = d_2$ 則 $d(L, L_3) = d_1 - d_2$ 且 L

交 $\overline{AD}$ 於 G 點。

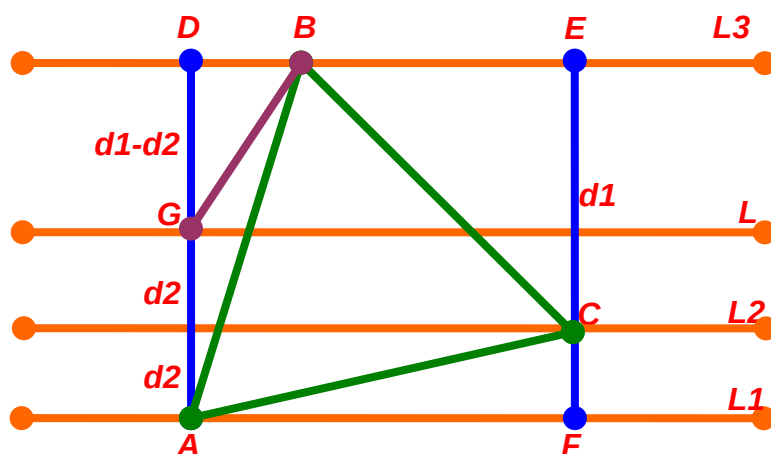


圖 3

1.再以 G 為圓心，作直角 $\triangle DGB$ ($\angle DGB = 30^\circ$)，則 $\overline{DB} = \overline{DG} \tan 30^\circ = (d_1 - d_2) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

2.連接 $\overline{AB}$ ，則 $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = [(d_1 - d_2) \tan 30^\circ]^2 + (d_1 + d_2)^2$ 。

3.再以 A 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_2 於 C 點；所以 $\triangle ABC$ 為一正 $\triangle$ 。

(四)【性質】若三條平行線 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，且間距為 d_1 、 d_2 ($d_1 \geq d_2$)，

1.正 $\triangle$ 邊長 $a = \sqrt{[(d_1 - d_2) \tan 30^\circ]^2 + (d_1 + d_2)^2}$

2.轉角 θ ($\angle DAB = \theta$)： $\tan \theta = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{3}(d_1 + d_2)}$

3.正 $\triangle$ 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{(d_1 - d_2)^2}{3} + (d_1 + d_2)^2 \right]$

4.外圍矩形 $AFED$ 周長為：

$$\overline{AD} = \overline{EF} = d_1 + d_2 ; \overline{DE} = \overline{AF} \Rightarrow \overline{AF}^2 = a^2 - d_2^2$$

$$\overline{AF}^2 = \frac{(d_1 - d_2)^2}{3} + (d_1 + d_2)^2 - d_2^2 = \frac{1}{3} (4d_1^2 + 4d_1d_2 + d_2^2) = \frac{1}{3} (2d_1 + d_2)^2$$

所以 $\overline{AF} = \frac{1}{\sqrt{3}} (2d_1 + d_2) = (2d_1 + d_2) \tan 30^\circ$ ，因此，周長為

$$2 \times (\overline{AF} + \overline{EF}) = 2 \times [(2d_1 + d_2) \tan 30^\circ + (d_1 + d_2)] = (2 + 4 \tan 30^\circ) d_1 + (2 + 2 \tan 30^\circ) d_2$$

5.外圍矩形 $AFED$ 面積為： $\overline{AF} \times \overline{EF} = (d_1 + d_2) \times (2d_1 + d_2) \tan 30^\circ$

三、從二條平行線，及一條截線上各取一點尋找正 Δ

(一)【說明】 $L \perp L_1$ ， $L \perp L_2$ ， $L_1 \parallel L_2$ (L 為 L_1, L_2 之截線)

1. 【A 點在間距中點】

(1) 如圖 4 所示若 L_1, L_2 之間距為 d ，A 恰好在 L_1, L_2 間距之中點，則以 A 為圓心，

$\overline{EF} = d$ 為半徑劃弧交 L_1, L_2 於 B、C 兩點，則 ΔABC 為正 Δ 。

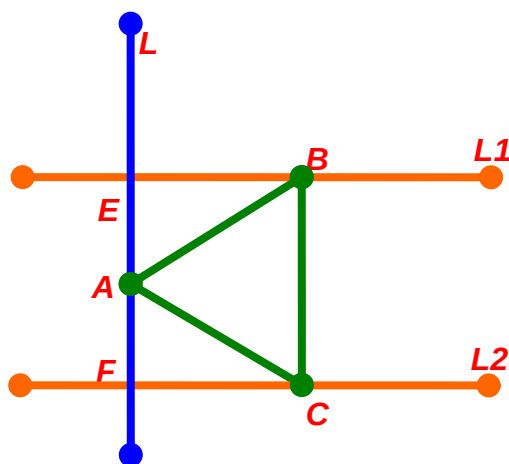


圖 4

(2) 因 $\overline{AB} = \overline{EF} = d$ ，且 $\overline{AE} = \frac{d}{2}$ ，所以 ΔAEB 為 $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ 的直角 Δ ；同理， ΔAFC

亦為 $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ 的直角 Δ 故 $\angle BAC = 60^\circ$ ，所以 ΔABC 為正 Δ 。

2. 【A 點不在間距中點】 假設 ΔABC 為正 Δ 邊長為 a

(1) 如圖 5 所示， $\overline{AD} = d_1$ ， $\overline{AE} = d_2$ ($d_1 > d_2$)，令 $\angle DAB = \theta$ ， $\angle EAC = 120^\circ - \theta$

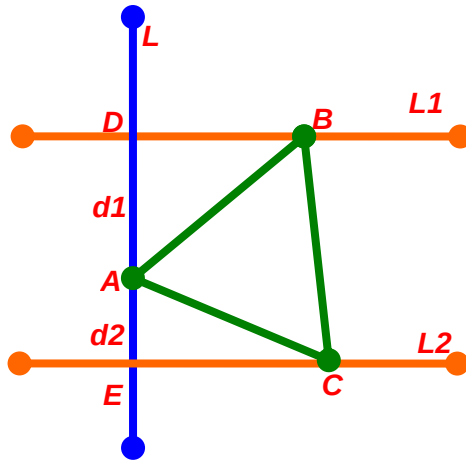


圖 5

(2) 引用三角函數關係得到下列式子：

$$\begin{cases} a \cos \theta = d_1 & \text{-----(1)} \\ a \cos(120^\circ - \theta) = d_2 & \text{-----(2)} \\ a \cos(\theta - 60^\circ) = d_1 + d_2 & \text{-----(3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cos \theta = d_1 & \text{-----(1)} \\ a(\cos 120^\circ \cos \theta + \sin 120^\circ \sin \theta) = d_2 & \text{-----(2)} \\ a(\cos \theta \cos 60^\circ + \sin \theta \sin 60^\circ) = d_1 + d_2 & \text{-----(3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2)\text{式} + (3)\text{式得 } \sqrt{3}a \sin \theta = d_1 + 2d_2 \Rightarrow a \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(d_1 + 2d_2) \text{-----(4)}$$

$$\Rightarrow (1)\text{式與}(4)\text{式平方和為 } a^2 = d_1^2 + \frac{1}{3}(d_1 + 2d_2)^2 = d_1^2 + [(d_1 + 2d_2)\tan 30^\circ]^2$$

$$\Rightarrow (4)\text{式除}(1)\text{式得 } \tan \theta = \frac{d_1 + 2d_2}{\sqrt{3}d_1}$$

(二) 【作圖】 如圖 6 所示

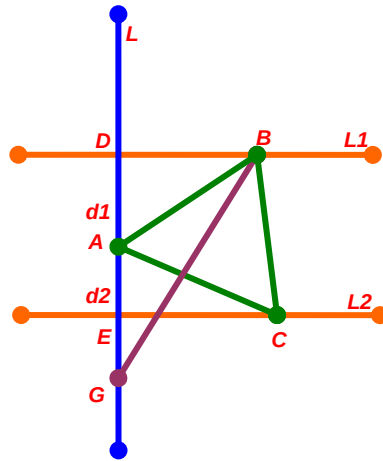


圖 6

1.作 A 點對稱 L_2 於 G 點，則 $\overline{AE} = \overline{EG} = d_2$ ，所以 $\overline{GD} = d_1 + 2d_2$ 。

2.作 $\angle DGB = 30^\circ$ ，則 $\overline{DB} = (d_1 + 2d_2)\tan 30^\circ$ 。

3.連接 $\overline{AB}$ ，以 A 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_2 於 C 點，即為所求。

(三)【說明】 L 不垂直 L_1, L_2 且 $L_1 \parallel L_2$ (L 為 L_1, L_2 之截線)

1.【A 點在 $\overline{GH}$ 中點】如圖 7 所示

(1) 若線截 L 交 L_1 於 G 點，則作 M 垂直 L_1, L_2 因此，取 $\overline{GH}$ 之中點 A，並仿照上述方法做出正 $\triangle ABC$ 。

(2) 將 A 點平移至截線 L 上於 D 點，並做 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ； $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ ，則四邊形 ADEB、

ADFC 為平行四邊形；所以 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ； $\overline{AC} = \overline{DF}$ 且 $\angle BAC = \angle EDF = 60^\circ$ ，故

$\overline{EF} = \overline{BC}$ ，所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ； $\triangle DEF$ 為正 $\triangle$ 。

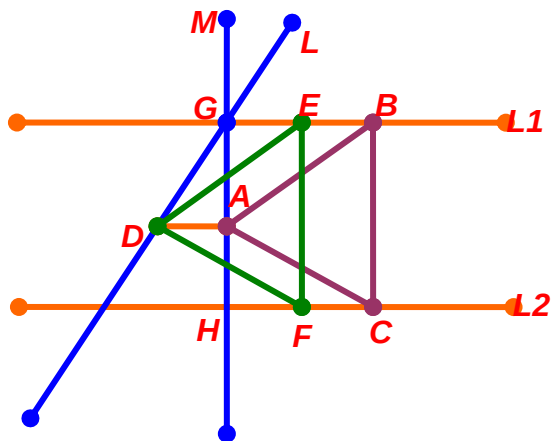


圖 7

2. 【A 點不在 $\overline{GH}$ 中點】如圖 8 所示

(1) 若線截 L 交 L_1 於 G 點，則作 M 垂直 L_1, L_2 ，若 $\overline{GA} = d_1$ ， $\overline{AH} = d_2$ 並仿照上述

方法做出正 $\triangle ABC$ ； $\overline{AB}^2 = d_1^2 + \frac{1}{3}(d_1 + 2d_2)^2$ 。

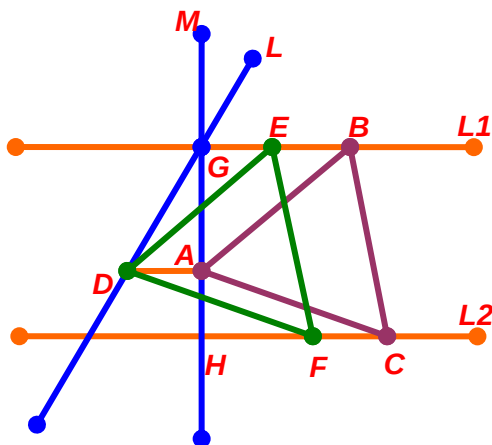


圖 8

(2) 將 A 點平移至截線 L 上於 D 點，並做 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ； $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ ，則四邊形 $ADEB$ 、

$ADFC$ 為平行四邊形；所以 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ； $\overline{AC} = \overline{DF}$ 且 $\angle BAC = \angle EDF = 60^\circ$ ，

故 $\overline{EF} = \overline{BC}$ 所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ； $\triangle DEF$ 為正 $\triangle$ 。

四、從三條線上(兩兩互不平行)各取一點，尋找正 $\triangle$ 。

(一) 【說明】 $L_1 \perp L_2$ ， L_3 不垂直 L_1, L_2 ，如圖 9 所示：

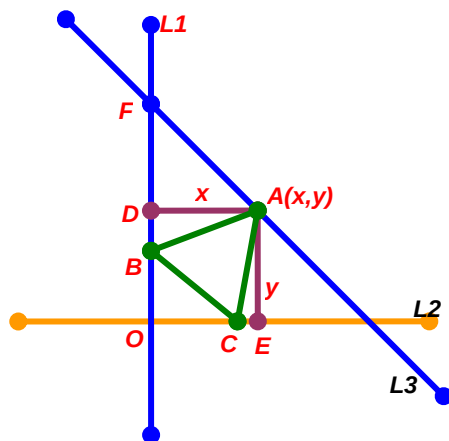


圖 9

1. 在 L_3 任取一點 $A(x, y)$ ，作 $\overline{AD} \perp L_1$ ； $\overline{AE} \perp L_2$ ；則 $\overline{AD} = x$ ； $\overline{AE} = y$ ；並假設正 $\triangle ABC$

邊長為 a 且假設 $\angle BAD = \theta$ ，引用三角函數關係得到下列式子：

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin(\theta + 60^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a(\sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \Rightarrow 2y \cos \theta = x \sin \theta + \sqrt{3} x \cos \theta$$

$$\Rightarrow (2y - \sqrt{3}x) \cos \theta = x \sin \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x}$$

$$2. \begin{cases} x = a \cos \theta \\ 2y = a \sin \theta + \sqrt{3} a \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ 2y - \sqrt{3}x = a \sin \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2y - \sqrt{3}x)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

(二)【作圖】如圖 10 所示

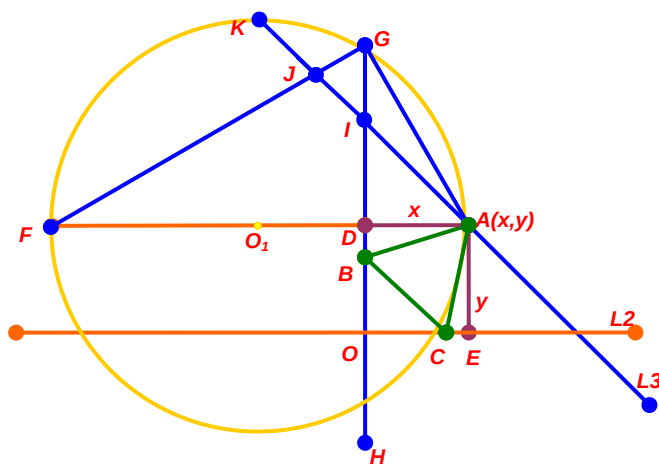


圖 10

1. 在 L_3 任取一點 $A(x, y)$ ，作 $\overline{AD} \perp L_1$ ； $\overline{AE} \perp L_2$ ；則 $\overline{AD} = x$ ； $\overline{AE} = y$ 。

2. 延長 $\overline{AD}$ ，作 $\overline{AF} = 4\overline{AD} = 4x$ ，則 $\overline{FD} = 3x$ 並取 $\overline{AF}$ 之中點 O_1 ，並以 O_1 為圓心， $\overline{AO_1}$ 為半徑畫圓交 L_1 於 G 點，則 $\overline{GD}^2 = \overline{FD} \times \overline{AD}$ ($\because \triangle GDF \approx \triangle ADG$)

$$\text{所以 } \overline{GD} = \sqrt{\overline{FD} \times \overline{AD}} = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x$$

3. 作 D 對稱 L_2 於 H 點，則 $\overline{DH} = 2y$ ，並以 H 為圓心， $\overline{GD} = \sqrt{3}x$ 為半徑畫弧交 L_1 於 B 點。

$$\text{則 } \overline{DB} = 2y - \sqrt{3}x, \quad \overline{AD} = x。$$

4. 連接 $\overline{AB}$ ，則 $\tan \theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x}$ ($\angle BAD = \theta$)， $\overline{AB}^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy$ ，然後以 A 為

圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_3 於 C 點；則 $\triangle ABC$ 為一個正 $\triangle$ 。

(三)【討論】如圖 11、圖 12， $A(x, y)$ 為 L_3 任一點，且 $\tan \theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x}$ ($x \neq 0$)

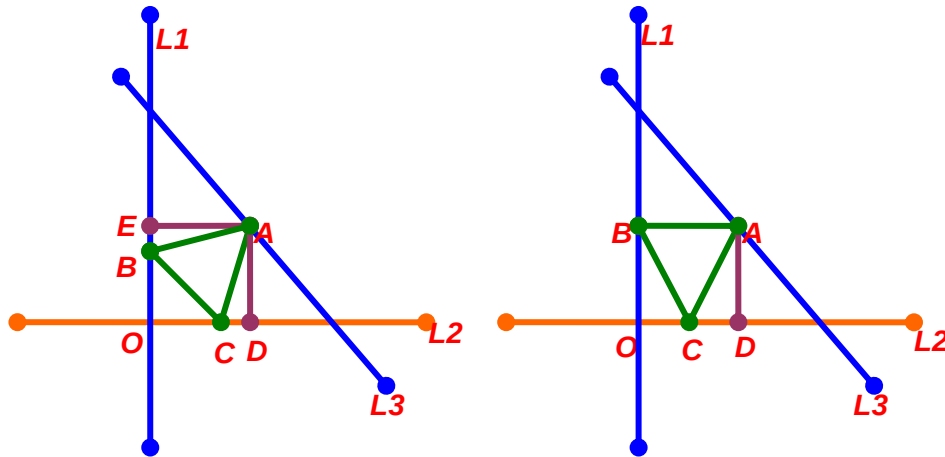


圖 11

圖 12

1. 若 $2y = \sqrt{3}x$ ，也就是 $\tan \theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x} = 0$ ，所以 $\theta = 0^\circ$ 。

2. 若 $y = x$ ，也就是 $\tan \theta = \frac{2x - \sqrt{3}x}{x} = 2 - \sqrt{3} = 0.268$ ，所以 $\theta = 15^\circ$ 。

3. 若 $\tan \theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x} = \frac{y}{x}$ ，則 $2y - \sqrt{3}x = y$ ， $y = \sqrt{3}x$ ，因此，若 $y = \sqrt{3}x$ ，則正 $\triangle ABC$

不存在。

(四)【說明】 L_1 、 L_2 、 L_3 不互相平行，也不垂直。如圖 13 所示：

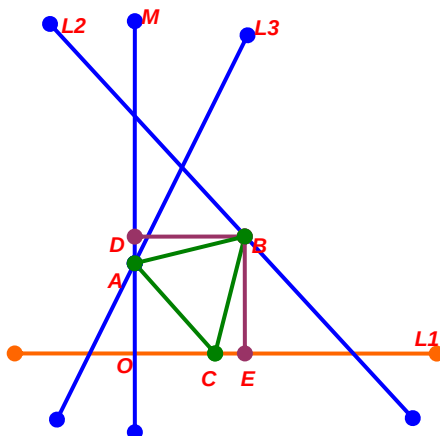


圖 13

1. 在 L_3 任取一點 A，並過 A 點作 L_1 垂直線 M

2. 若 $\overline{AD} = d_1$ ， $\overline{AO} = d_2$ ， $\angle BAD = \theta$ ， $\angle CAO = 120^\circ - \theta$

引用三角函數關係得到下列式子：

$$\begin{cases} a \cos \theta = d_1 & \text{----- (1)} \\ a \cos(120^\circ - \theta) = d_2 & \text{----- (2)} \\ a \cos(\theta - 60^\circ) = d_1 + d_2 & \text{---- (3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cos \theta = d_1 & \text{----- (1)} \\ a(\cos 120^\circ \cos \theta + \sin 120^\circ \sin \theta) = d_2 & \text{---- (2)} \\ a(\cos \theta \cos 60^\circ + \sin \theta \sin 60^\circ) = d_1 + d_2 & \text{---- (3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2)\text{式} + (3)\text{式得 } \sqrt{3}a \sin \theta = d_1 + 2d_2 \Rightarrow a \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(d_1 + 2d_2) \text{----- (4)}$$

$$\Rightarrow (1)\text{式與}(4)\text{式平方和為 } a^2 = d_1^2 + \frac{1}{3}(d_1 + 2d_2)^2 = d_1^2 + [(d_1 + 2d_2)\tan 30^\circ]^2$$

$$\Rightarrow (4)\text{式除}(1)\text{式得 } \tan \theta = \frac{d_1 + 2d_2}{\sqrt{3}d_1}$$

(五)【作圖】如圖 14 所示

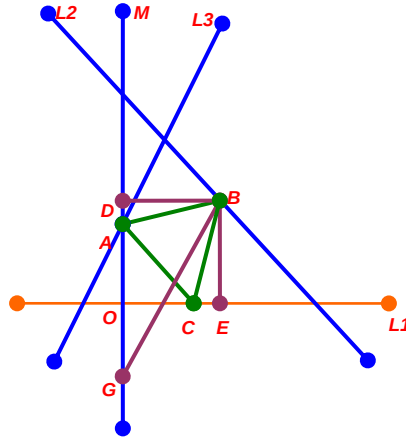


圖 14

1. 在 L_3 任取一點 A，並過 A 點作 L_1 垂直線 M 。
2. 作 A 點對稱 L_1 於 G 點，則 $\overline{AO} = \overline{OG} = d_2$ ，所以 $\overline{GD} = d_1 + 2d_2$ 。
3. 作 $\angle DGB = 30^\circ$ ，則 $\overline{DB} = (d_1 + 2d_2)\tan 30^\circ$ 。
4. 連接 $\overline{AB}$ ，以 A 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_2 於 C 點，則 $\triangle ABC$ 為正 $\triangle$ 。

陸、結論

一、利用反證法推論在方格紙上，格子點無法連成正 $\triangle$ ： $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 為無理數與格子點

所算出 $\triangle ABC$ 面積 $= p \times n - \frac{p \times q}{2} - \frac{m \times n}{2} - \frac{(p-m) \times (n-q)}{2}$ 為有理數矛盾。

二、在三條平行線上(間距 $d_1 > d_2$)，各取一點，連成正 $\triangle$ 邊長為 a ，正 $\triangle ABC$ 與鉛直線夾

角 θ ； $\tan \theta = \frac{(d_1 - d_2)\tan 30^\circ}{(d_1 + d_2)}$ ； $a^2 = ((d_1 - d_2)\tan 30^\circ)^2 + (d_1 + d_2)^2$ 。

三、在兩條平行線及一條截線上各取一點，連成正 $\triangle$ 邊長為 a ：在截線上任取一點 A，並

作鉛直線，將 A 點平移至鉛直線上於 D 點，則 D 點與兩平行線間距分別為 d_1 、 d_2 ；

然後仿照(二)作法，做出正 $\triangle DEF$ ；最後，再將 $\triangle DEF$ 平移回去；所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

四、在三條平行線(兩兩互不平行)上各取一點，連成正 $\triangle$ 邊長為 a ：

(一) 首先，考慮 $L_1 \perp L_2$ ， L_3 不垂直 L_1 ， L_2 在 L_3 任取一點 A(x, y)，作 $\overline{AD} \perp L_1$ ；

$$\overline{AE} \perp L_2 ; \text{ 則 } \overline{AD} = x ; \overline{AE} = y ; \tan \theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x} (\angle BAD = \theta)$$

$$\Rightarrow x^2 + (2y - \sqrt{3}x)^2 = a^2$$

(二) 然後考慮 L_1 、 L_2 、 L_3 不互相平行，也不垂直：在 L_3 上任取一點 A；

並過 A 點做 $M \perp L_1$ ；最後仿照上述 1 作法，做出正 $\triangle ABC$ 。

柒、參考書目

一、黃經良主編 (民 96)，國中數學課本第四冊，初版，台南，翰林企業股份有限公司出版，

P49 ~ P162。

二、周炳男主編 (民 94)，高中數學課本第二冊，修訂版，台南，南一書局出版，P80 ~ P209；

P210 ~ P254。

三、毛爾著，胡守仁譯 (2000)，毛起來說三角，第一版，天下文化出版，P1 ~ P49。

四、Calvin C. Clawson 著，陳可崗譯 (2004)，數學妖法，第一版，天下文化出版，P1

~ P107。

【評 語】 030414 正三角形的奧祕

考慮在不同直線之間尋找頂點在直線上的正三角形，分類清楚，但其中在兩直線互相垂直且與第三條直線各交於一點之情形中，其一開始在直線 L_3 任取一點 $A(X,Y)$ 有誤。