

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030405

繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究

學校名稱：新竹市立光華國民中學

作者： 國二 史謹誌 國二 胡晉傑 國二 張佐安	指導老師： 蕭慶利
-----------------------------------	--------------

關鍵詞：Escher Tiling Fractal Tiling

摘要

本研究主要以正三角形作為基本單元，透過窮舉討論得到正三角形邊的作用方式只有五種，再經由排列組合歸納出 11 種正三角形密鋪磁磚設計方法。進一步，運用我們的研究結果，配合數學簡報系統製圖，創作新圖樣，也彌補了 Escher 在手繪時所造成的誤差，達到完全密鋪的效果。碎形磁磚的部份，我們也依據其背後的數學理論創作幾套結構圖，利用結構解析，碎形密鋪磁磚將變得十分容易，學習者將可輕鬆製作富有創意的新圖樣。

繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究

壹、研究動機：

一天，在網路(www.mcescher.com)上偶然看到了如下圖般的動物磁磚。仔細觀察，似乎每一隻鳥的形狀都一模一樣。欣賞那邊與邊的緊密結合，鳥頭與翅膀竟然可由一條線牽引出，且連接得天衣無縫。再經過我們深入了解這個網站後，發現這網站的站主 M.C. Escher 在其網站所繪的所有密鋪磁磚圖形全是 Escher 本人手繪出來的。於是我們開始好奇其中的數學奧妙，並且自己試著創造出屬於我們的動物磁磚。而且在夏令營中的老師曾經教授數學簡報系統軟體(MathPS)的基本操作，在這些助益之下我們開始研究其中的奧妙，一探究竟！！



資料來源 (<http://www.mcescher.com/>)

貳、研究目的：

- 一、分析 Escher 所作磁磚圖之結構
- 二、分析以正三角形作為基本圖形做密鋪之邊的變化種類與方法
- 三、找出 Fractal Tiling(碎形密鋪磁磚)背後的數學方法與原理
- 四、透過我們的理論方法，配合數學簡報系統，繪製圖樣

參、研究器材與儀器：

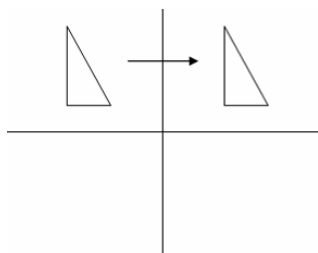
紙、筆、電腦、Math PS 數學構圖軟體(數學簡報系統)〈此為 PowerPoint 的增益集，為免費傳播軟體〉

肆、文獻探討：

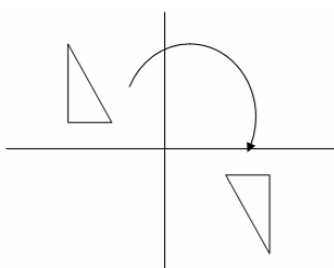
一、前言：

在二維重複連續圖樣中，所有等量變換(Isometry)皆出自以下四種類型：
平移 (Transformation)、旋轉 (Rotation)、鏡射 (Reflection)、滑動鏡射 (Glide-reflection)：

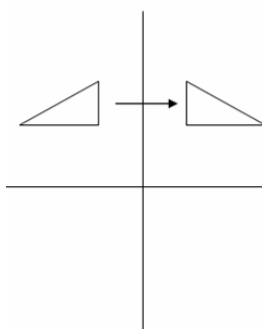
(一) 平移(Transformation)：



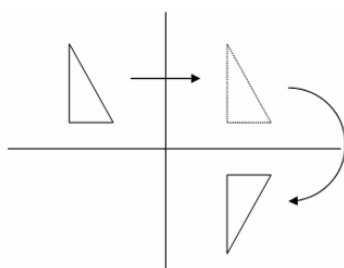
(二) 旋轉(Rotation)：



(三) 鏡射(Reflection)：

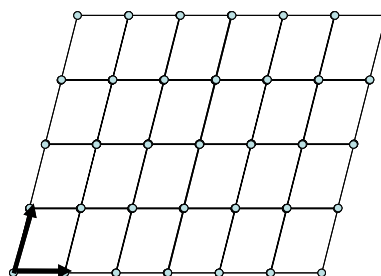
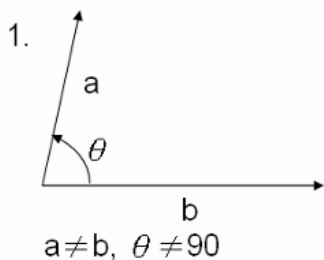


(四) 滑動鏡射(Glide-reflection)：

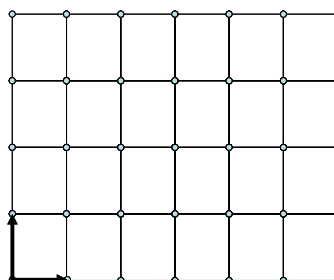
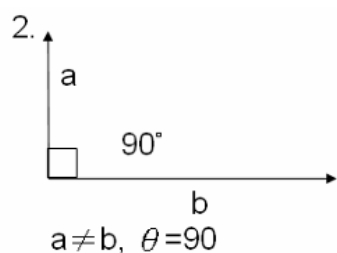


二、二維重複連續圖樣背後的網狀格線系統有以下五種。(依國際結晶學)

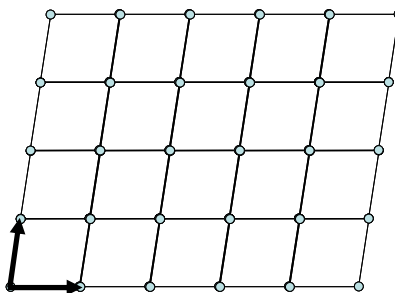
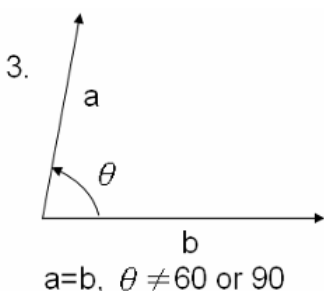
(一) 兩組向量不等長，夾角不等於 90 度(平行四邊形) Ex: p1、p2



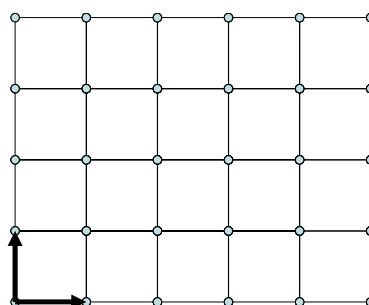
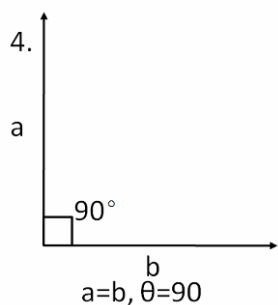
(二) 兩組向量不等長，夾角等於 90 度(矩形) Ex: pm、pg、pmm、pmg、pgg



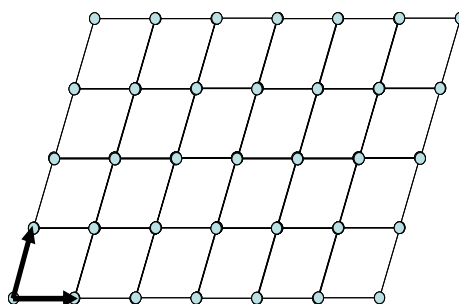
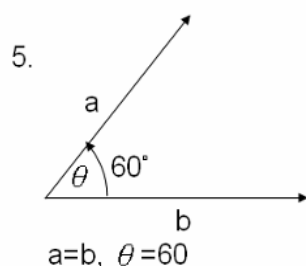
(三) 兩組向量等長，夾角不等於 90 度、60 度(菱形) Ex: cm、cmm



(四) 兩組向量等長，夾角等於 90 度(正方形) Ex: p4、p4m、p4g



(五) 兩組向量等長，夾角等於 60 度(含 60°之菱形) Ex: p3、p3m1、p31m、p6、p6m



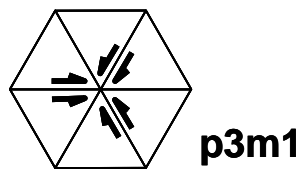
三、十七種二維圖樣：

二維圖樣的分類，由於平移、旋轉、鏡射與滑動鏡射產生無限種看似複雜的組合，但所謂的「結晶學限制」(crystallographic restriction) 說明了只可能有十七種二維圖樣。這些限制，包括旋轉角度只可能有 180° 、 120° 、 90° 、 60° 四種，即二重旋轉、三重旋轉、四重旋轉及六重旋轉；旋轉的角度受到限制，同時影響了鏡射軸之間的夾角，使得最後僅剩十七種可能的組合。

其表示法是由 S1-S2-S3-S4 四個連續符號所組成，各字母與數字代表的意義如下：

- (1) S1 = {c, p}，單位格子為中心矩形時符號為「c」，其他為「p」。
- (2) S2 = {1, 2, 3, 4, 6}，表示最高階旋轉對稱，「1」表無旋轉對稱。
- (3) S3 = {m, g, 1}，「m」表鏡射，「g」表滑動鏡射，「1」表無鏡射也無滑動鏡射。
- (4) S4 = {m, g, 1}，同 S3，表示另一方向的鏡射或滑動鏡射。

Ex:



- (1) ∴ 單位格子不是中心矩形
∴ S1 → p
- (2) ∴ 最高旋轉次數為 3(如下圖 1)
∴ S2 → 3
- (3) ∴ S3 表示中心點到頂點的線段所做的作用(如下圖 2 紅線部分)
∴ S3 → m
- (4) ∴ S4 表示兩頂點間的線段所做的作用(如下圖 3 紅線部分)
∴ S4 → 1

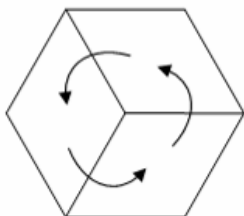


圖 1



圖 2

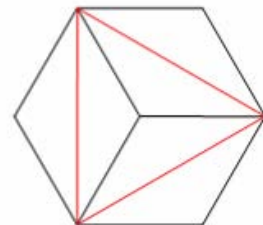
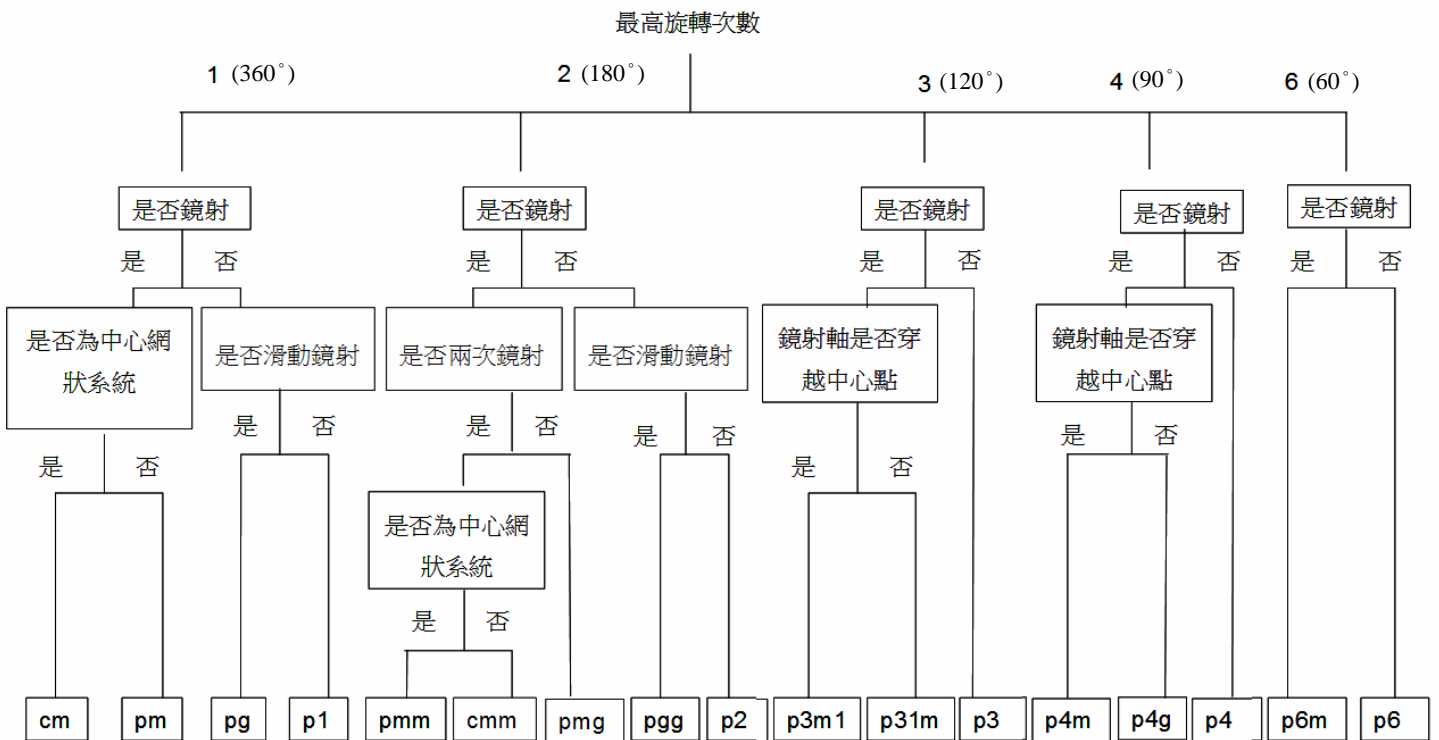


圖 3

四、十七種圖樣型態分類：

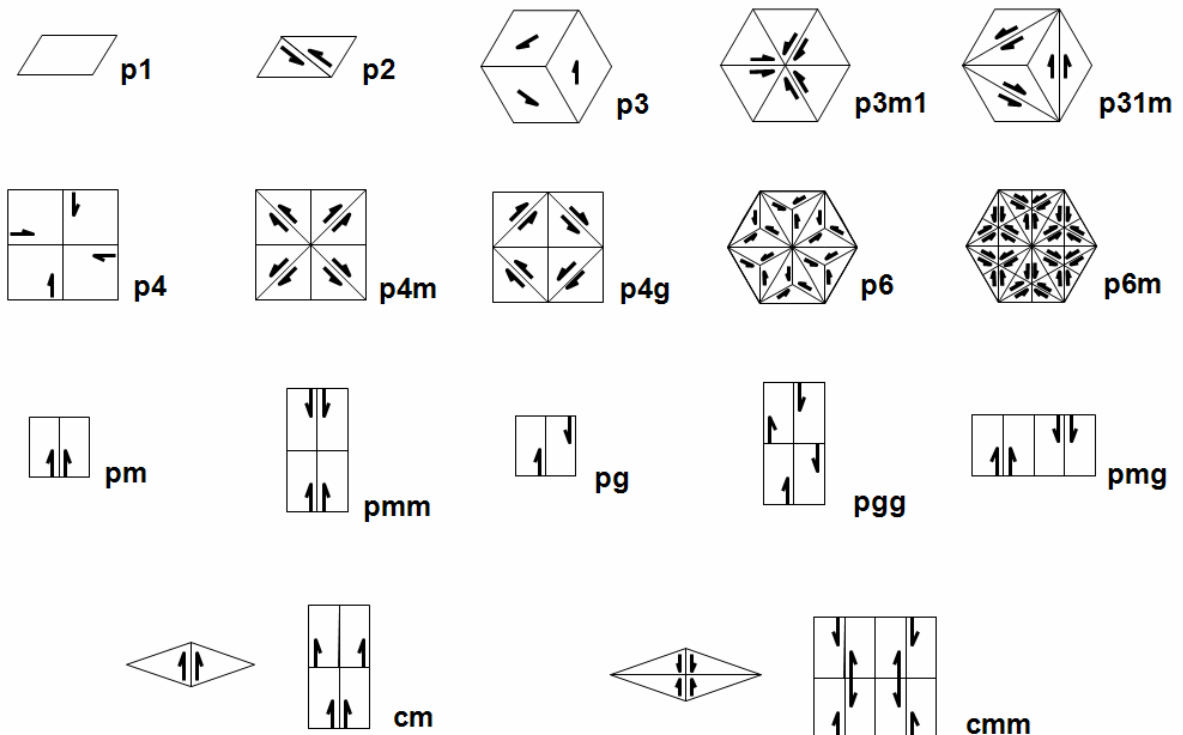
1.分類分法：



資料來源：<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowel/>

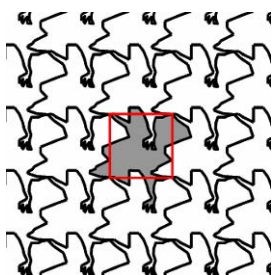
2.十七種圖形樣態：

17種圖樣型態

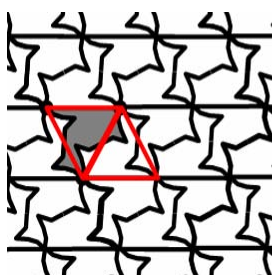


3.自製 17 種圖形：

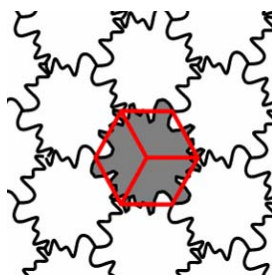
利用軟體及對觀念的了解畫出基本形，再加以密鋪形成一張美麗的瓷磚密鋪，
 以下為我們的作品。



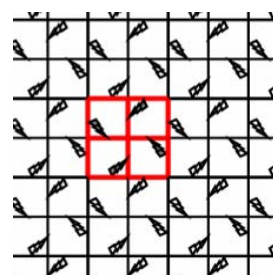
p1



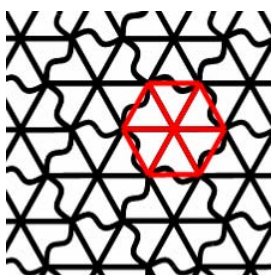
p2



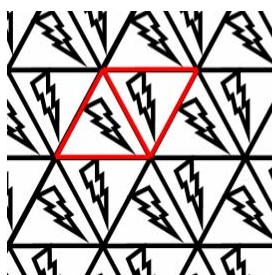
p3



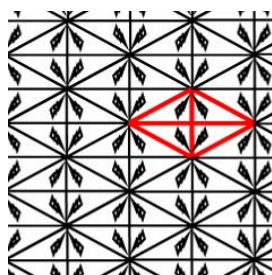
p4



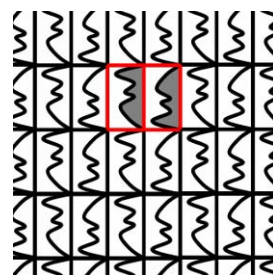
p6



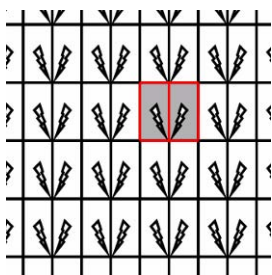
cm



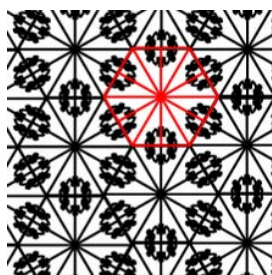
cmm



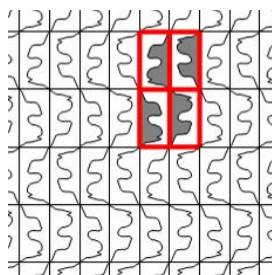
pg



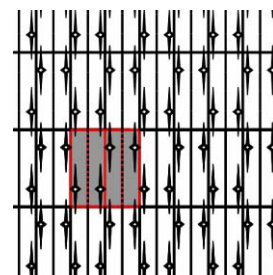
pm



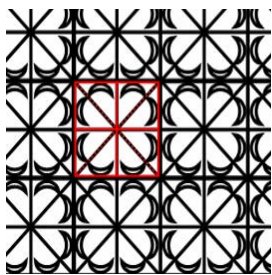
p6m



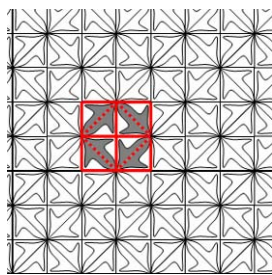
pgg



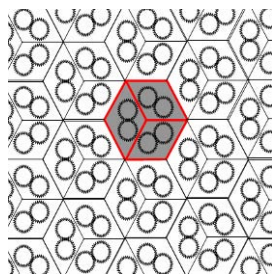
pmg



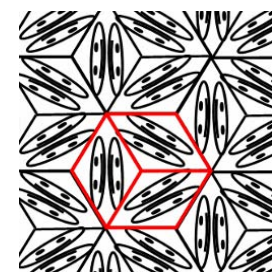
p4m



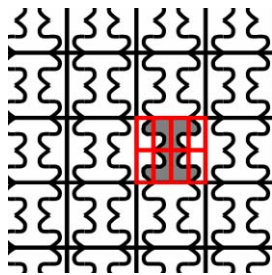
p4g



p3m1



p31m

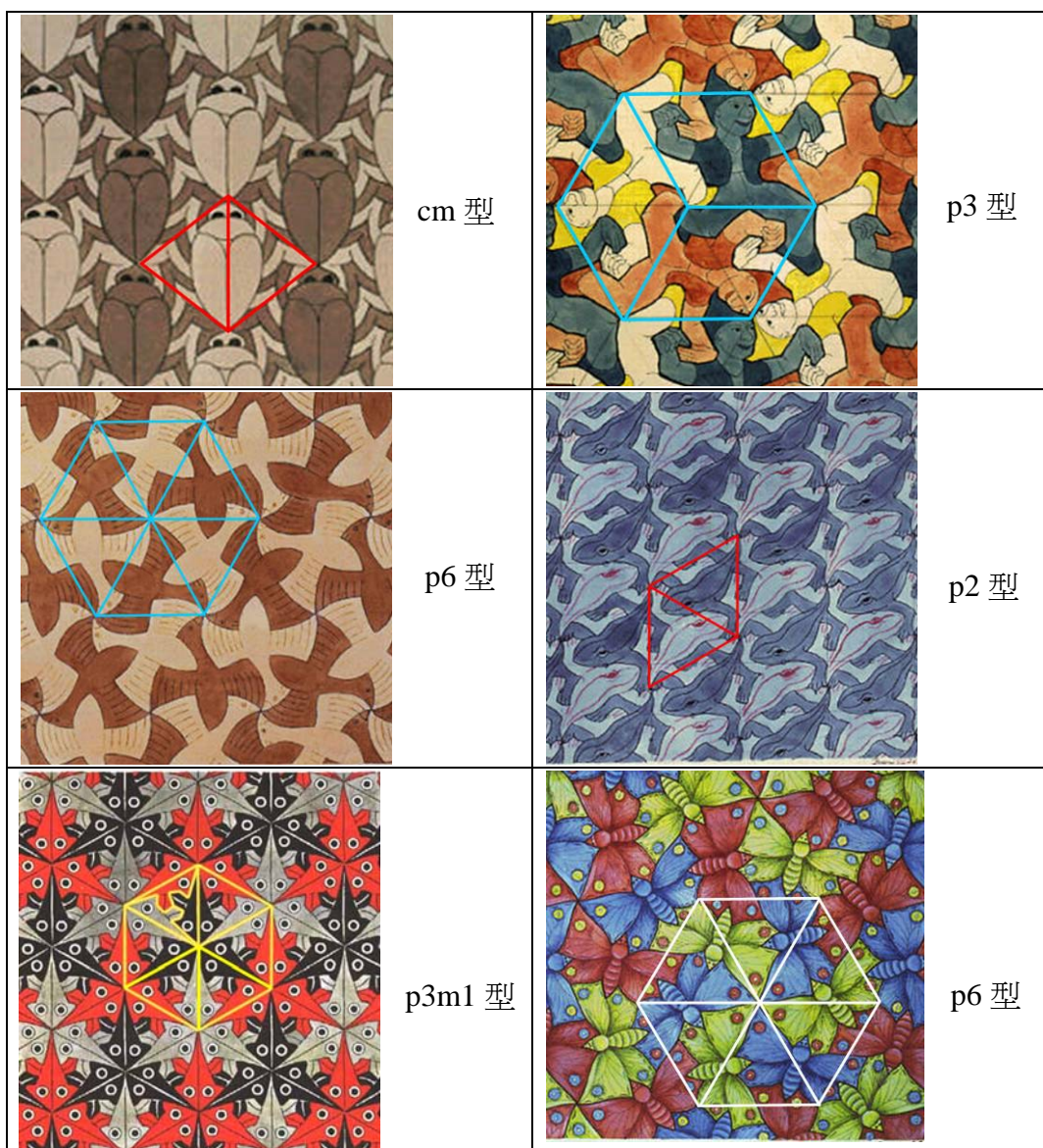


pmm

伍、研究過程：

研究一、分析 Escher 所作磁磚圖之結構：

我們將 Escher 網站中的磁磚圖形做分析，畫出其結構圖，如下：



根據我們的分析，以上的圖幾乎都是以正三角形作結構的，所以我們決定以正三角形作為基本圖形做密鋪之邊的作用種類。

研究二、分析正三角形作為基本圖形做密鋪之邊的變化種類：

自訂符號：

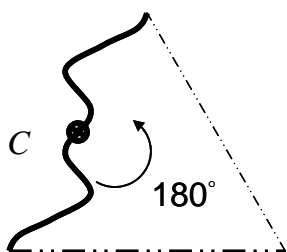
1. 在 Escher 的網站(www.mcescher.com/)中，我們將其所繪製的密鋪磁磚進行初步結構分析，而我們決定以正三角形做研究。
2. 由以上資料得知，在二維重複連續圖樣中，所有等量變換只有以下四種類型：平移(Translation)、旋轉(Rotation)、鏡射(Reflection)、滑動鏡射(Glide-reflection)。
3. 我們歸納出正三角形邊之變化共有五種運算符號：

(1) I (Identity) 不做任何變化。



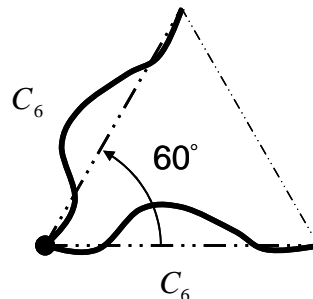
(2) C (Center point rotation)

以邊中點為旋轉中心旋轉 180°：



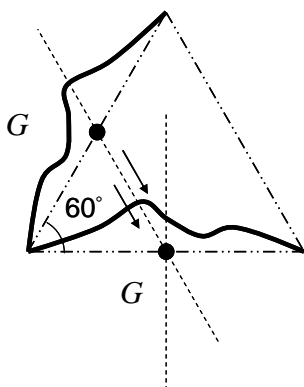
(3) C_6 (Corner rotation 60°)

以一端為旋轉中心旋轉 60°：



(4) G (Glide reflection, adjacent sides)

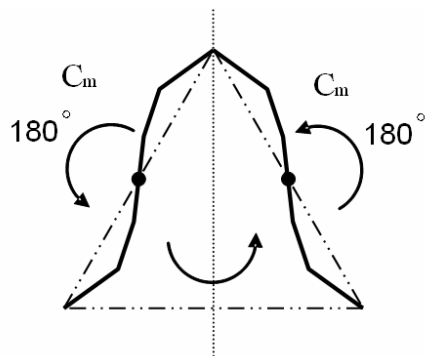
以一端為旋轉中心旋轉後再鏡射：



(5) C_m (Center point rotation, mirror)

作 C 作用後

以第二邊中垂線當鏡射軸鏡射到第三邊

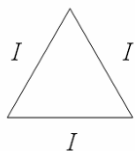


(一) 前因：由上述四種變化，我們要找出所有可以形成密鋪磁磚的組合。

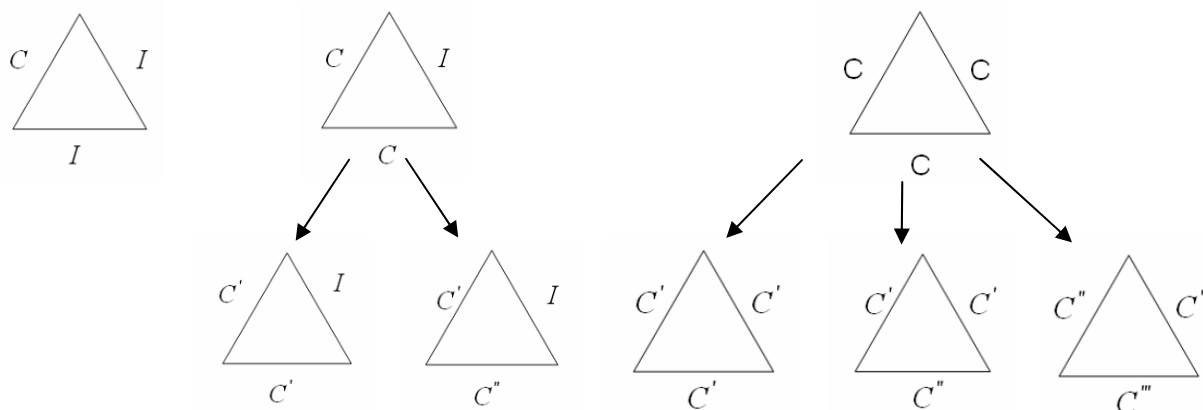
(二) 方法：利用窮舉法找出所有組合。

(三) 過程：

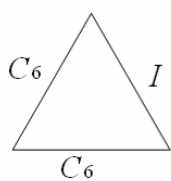
1. 不做任何變化：



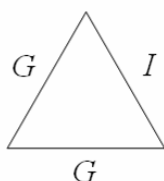
2. 只考慮 C：



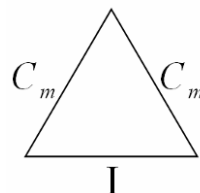
3. 只考慮 C_6 ：



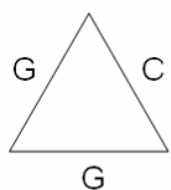
4. 只考慮 G：



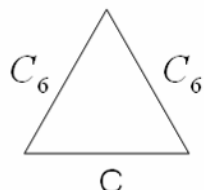
5. 只考慮 C_m ：



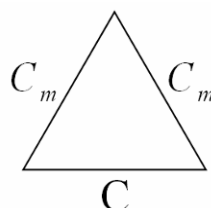
6. 考慮 C 和 G：



7. 考慮 C 和 C_6 ：



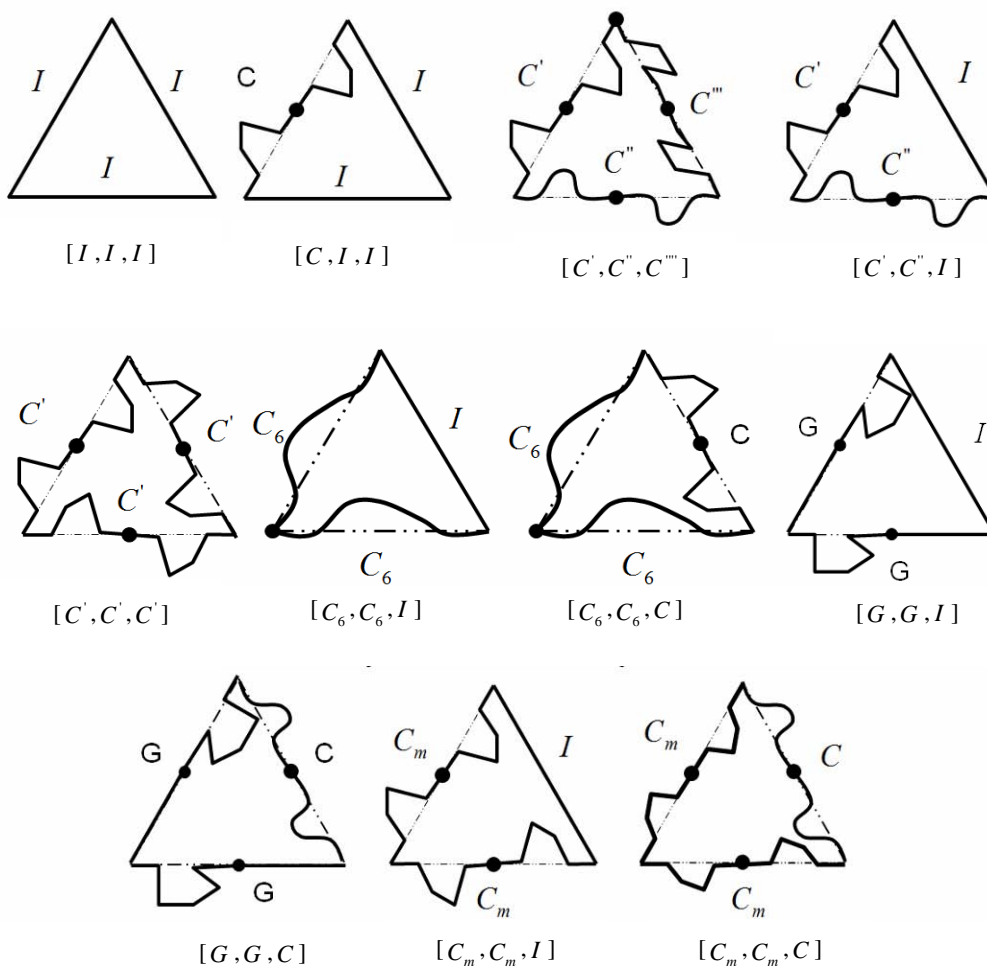
8. 考慮 C 和 C_m ：



(四) 整理：

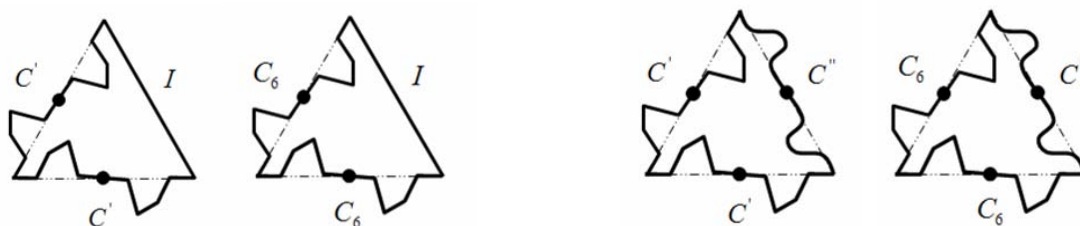
將上頁利用窮舉法所舉出的所有組合整理，且將作用舉例得到以下十一種正三角形邊變化的方式。

十一種正三角形邊變化的結構



特例：

在製作上述圖例時，發現 $[c', c', c']$ 和 $[c_6, c_6, c]$ ， $[c_6, c_6, I]$ 和 $[c', c', I]$ 有重複之部分。以下是我們的分析：



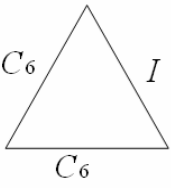
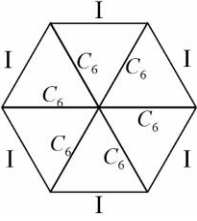
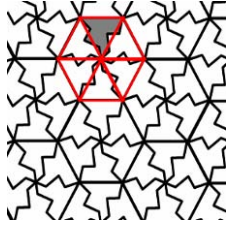
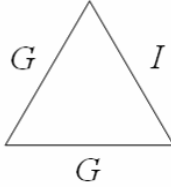
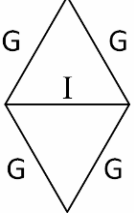
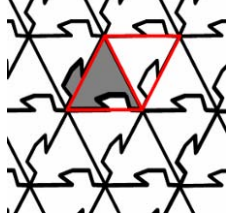
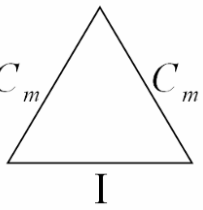
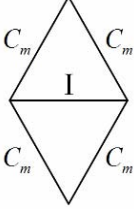
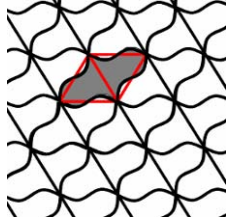
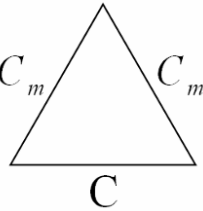
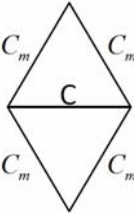
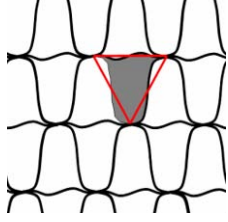
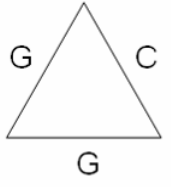
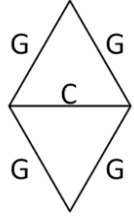
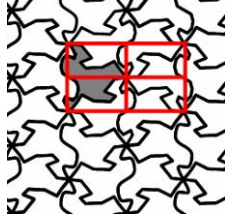
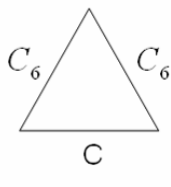
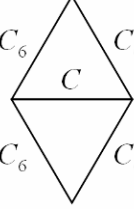
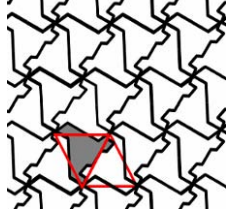
C 的作用是 c_6 的作用中的一種，所以我們將 $[c', c', I]$ 和 $[c', c', c']$ 包含到範圍較大的 $[c_6, c_6, I]$ 和 $[c_6, c_6, c]$ 中。

(五) 結果統整：

我們依據以上 11 種運算搭配各種情況自製磁磚密鋪：

	基本運算	密鋪情況	例圖	結構
不做變化				$p6m$
只考慮 C				$p2$
				$p6$
				pmg
				$p6$
				$p2$

在上述表格我們發現有一些結構可以拼出兩種基本圖形，此特殊狀況是因為可以在頂點進行六重旋轉，而且也可以在邊上進行二重旋轉，因此形成了兩種密鋪狀況，或是同一種 C 可以不一樣也可以一樣。如： $[c, I, I]$ ， $[C, C, C]$ 。

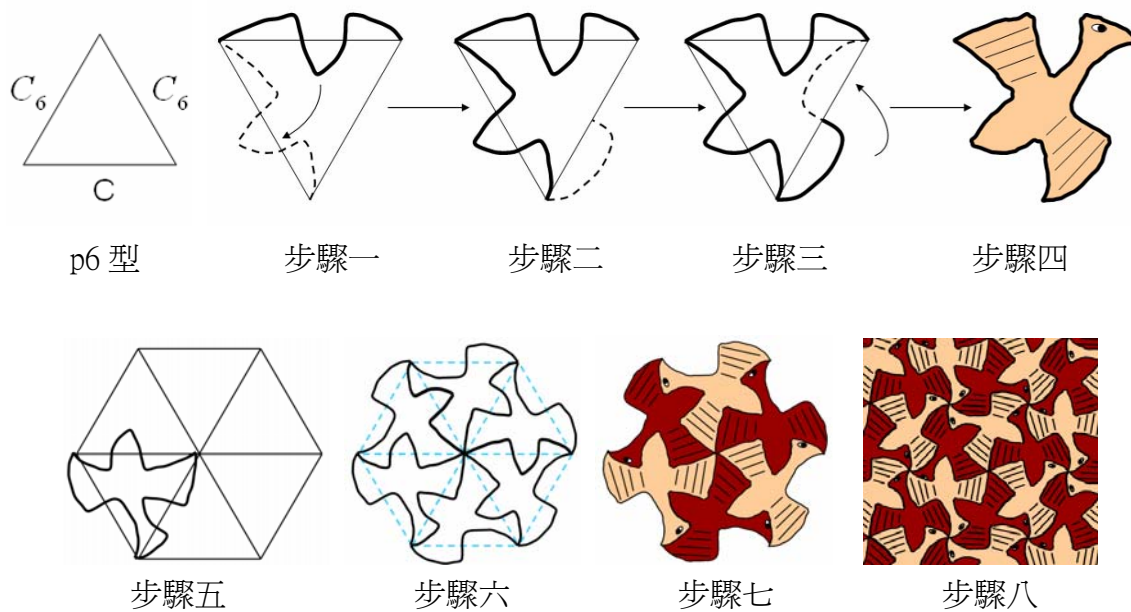
只考慮 C_6				p6
只考慮 G				cm
只考慮 C_m				cmm
考慮 C 和 C_m				p2
考慮 C 和 G				pgg
考慮 C 和 C_6				p2

(六) 製作應用：

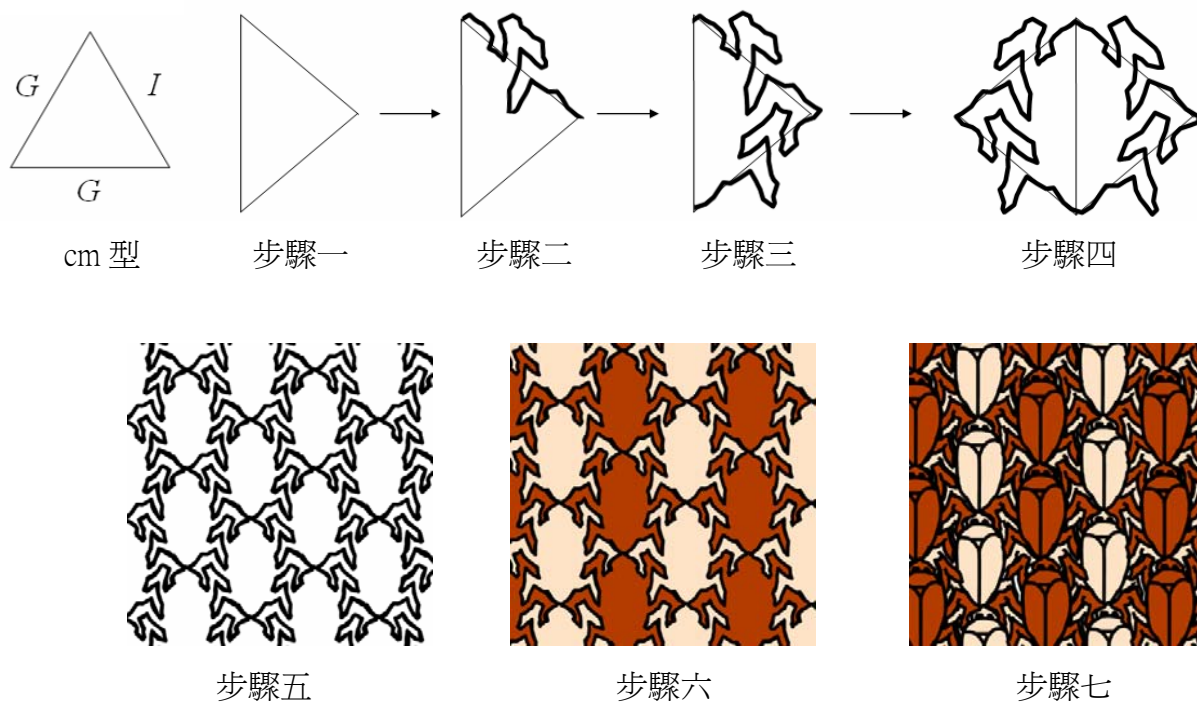
1. 檢測應用是否符合所研究之理論：

上述的十一種三角邊之變化方法中，Escher 用手繪的方法畫出幾種圖形，畫出各種動物磁磚。但因為手繪會有些許的誤差，所以接下來我們將以理論製圖，將誤差降到最小。

Ex：(此圖為 Escher 的作品之一，鳥)

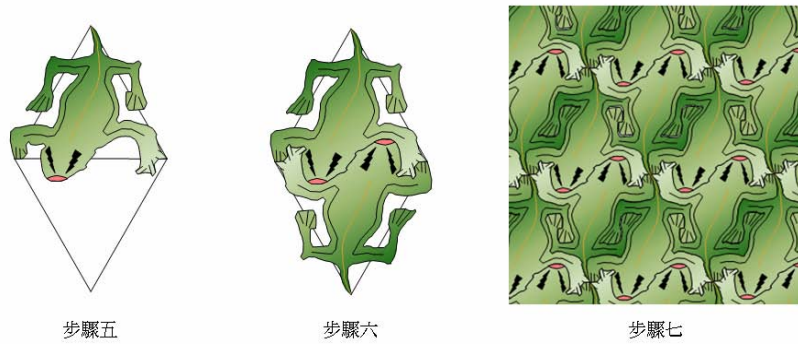
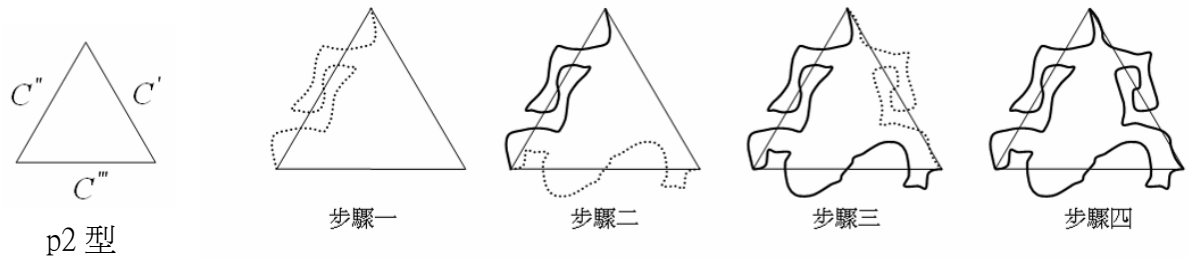


以下是我們仿製 Escher 的另一種邊變化並加以改良的動物磁磚(螳螂)。

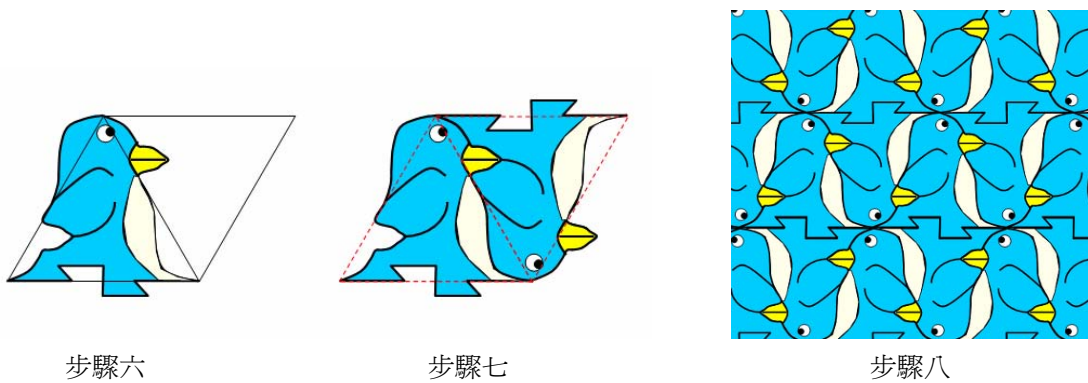
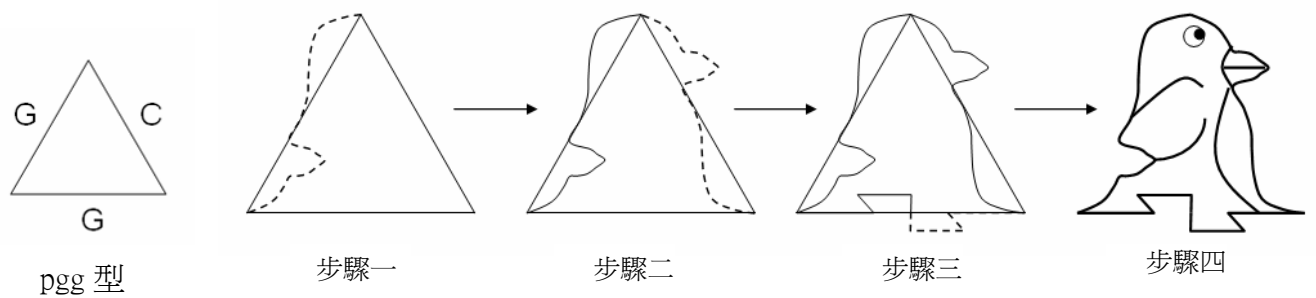


以下之組圖，為我們仿製 Escher 並加以改良的一種動物磁磚(蜥蜴)。
密鋪原理：

因其各邊之作用為 C，所以在作旋轉之後一定可以密鋪，因為 C 是「以所作用之邊中點為對稱中心」，旋轉後可以完整的密鋪。

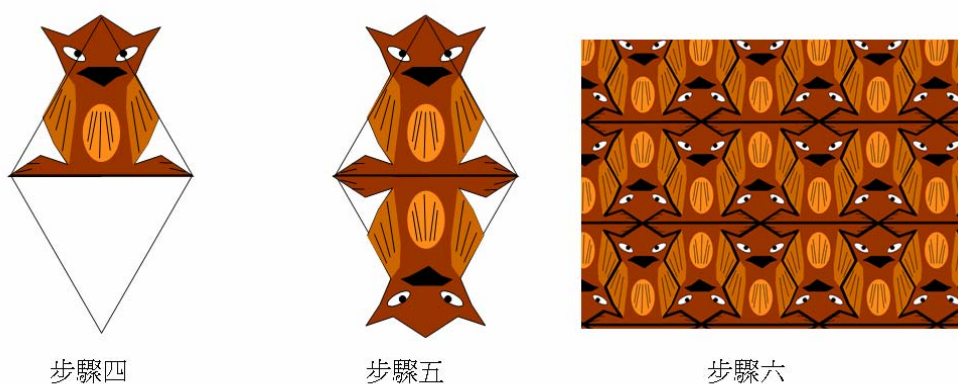
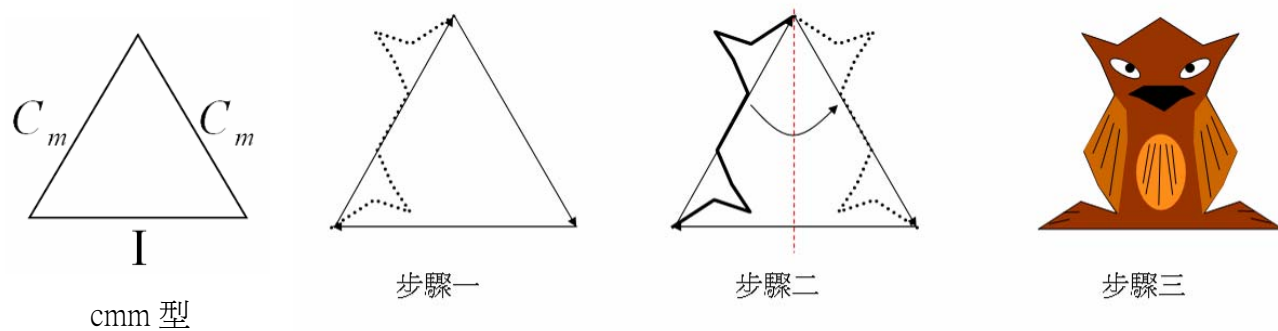


以下是另一種邊變化之圖，我們仿製並加以改良(企鵝)。
步驟：

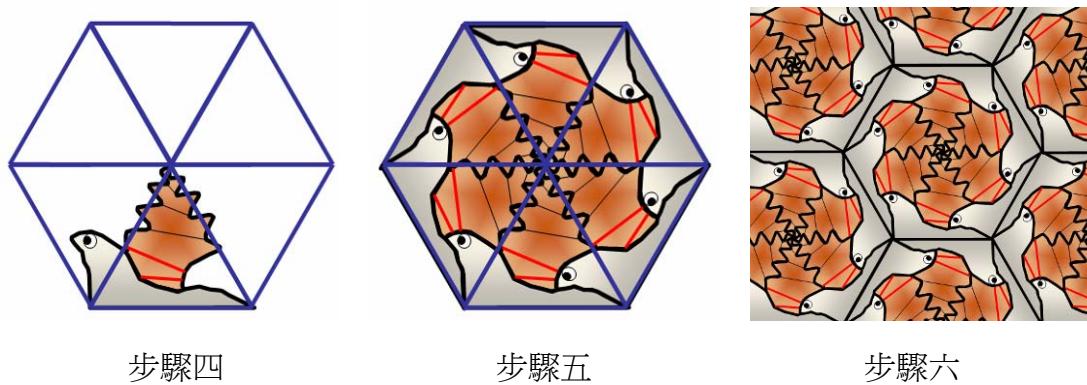
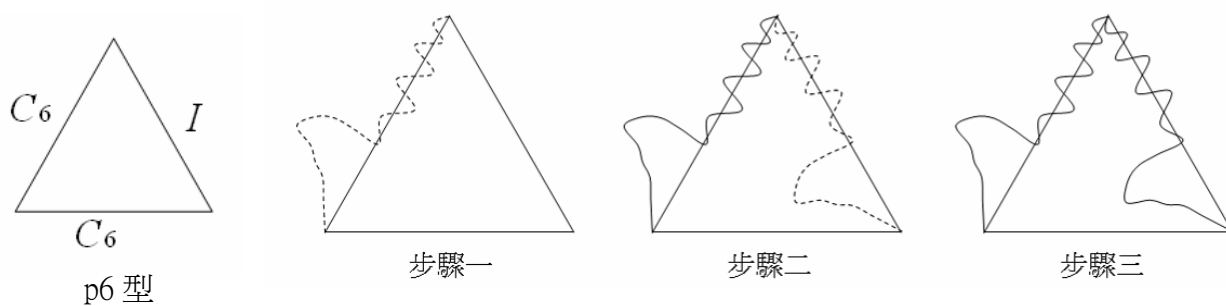


參考資料[4]

以下之組圖為我們依照理論自製的圖(貓頭鷹)。

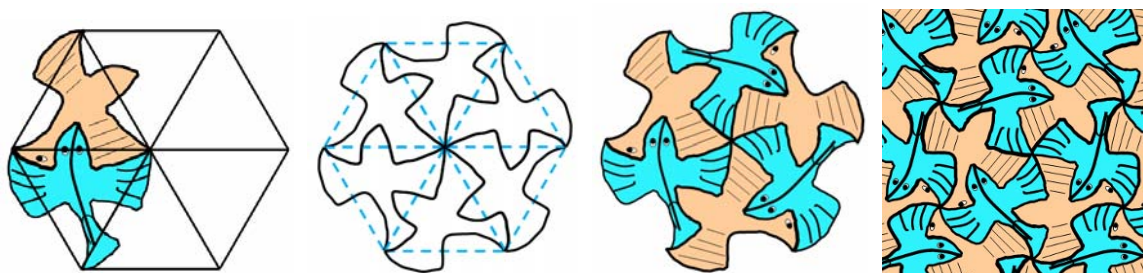


以下之組圖也是我們依照理論自製的圖(蝸牛)。



若將我們正三角形邊的設計方法，配合內部做變化，一樣可以設計出兩種動物的磁磚，以下為我們製作的圖例。

EX：



左下圖與右下圖的邊變化完全一樣，但我們在其內部做不同的變化，即可變成兩種動物磁磚。(鳥：皮膚色，飛魚：藍綠色)



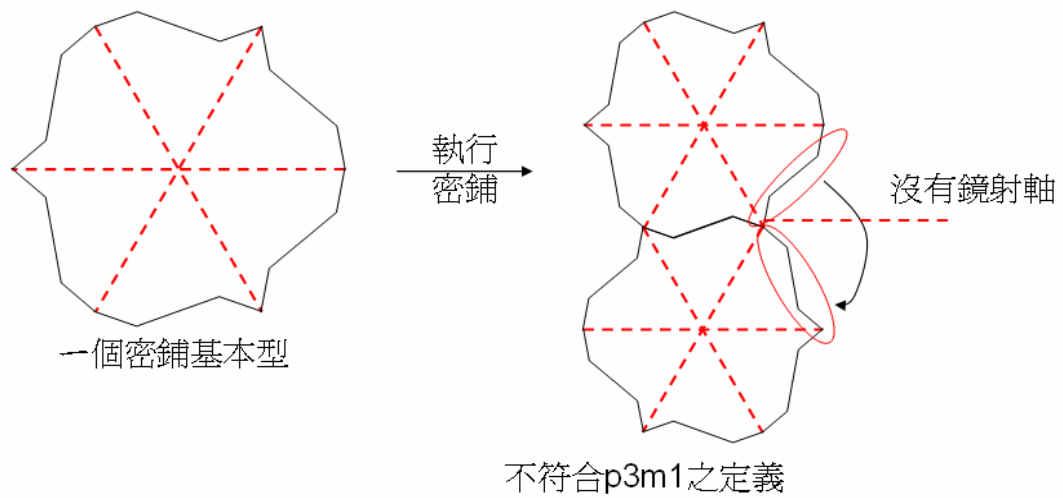
以下還有類似的例子，也是邊作相同變化，而內部不同(鳥與飛魚)：



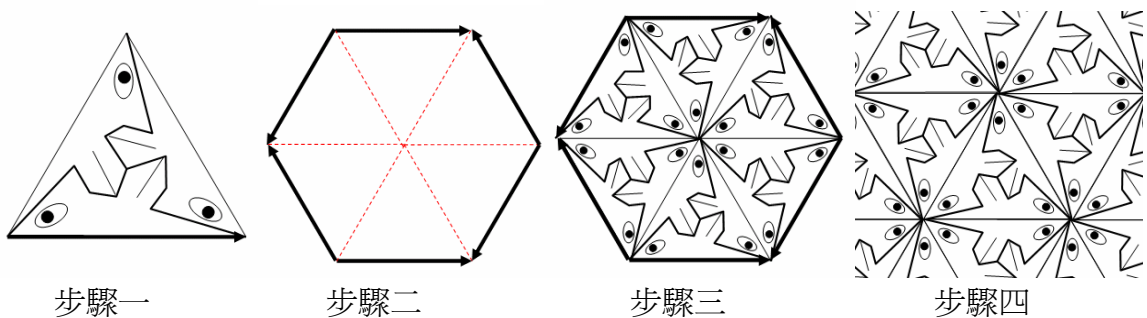
繪完外邊變化後，加上格線，再在其內部做不同變化，則一種圖樣可做出兩種動物的磁磚。

在製作 17 種圖例時，我們發現 $p3m1$ 型之邊不可以做變化，否則會在其密鋪時，發生矛盾，因此我們不可以在邊上作用。

如圖例：



我們可以用 [I,I,I] 形密鋪後改變其內部變化，才可以製成 $p3m1$ 型，以下為我們從 Escher 網站上所找出一個例圖並加以改良。如下：



研究三、碎形密鋪(Fractal Tiling)：

前言：

我們發現 Escher 網站上面還有如圖 2-1-1 般手繪的動物磁磚。這種磁磚有不斷自我相似的特質，經固定比例縮小且可以無限密鋪，是為基本圖樣相同的密鋪磁磚之變形。數學家稱之為碎形密鋪(Fractal)。我們將研究其背後的數學方法與原理。

1.原圖(圖 2-1-1)：



圖 2-1-1

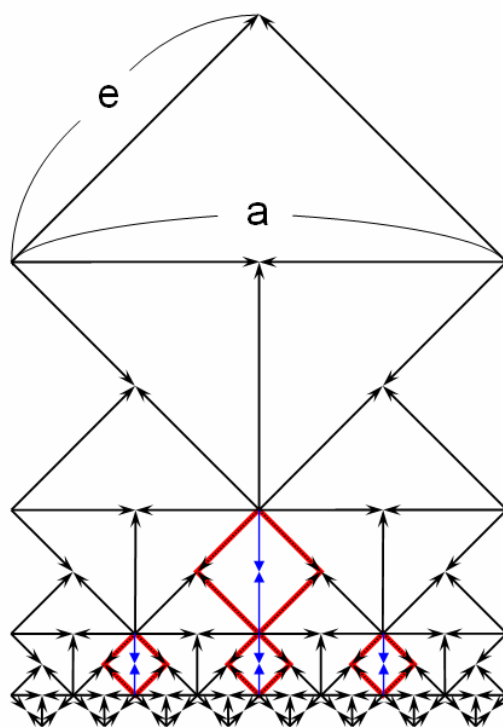


圖 2-1-2

2.分析：

- (1)我們觀察它的基本圖形，且加以分析，可得到如圖 2-1-2 般之結構圖。
- (2)此圖形中每個三角形皆是等腰直角三角形，因此 $a : e = \sqrt{2} : 1$
- (3)結構圖是將正方形與縮小成 1/2 倍後的正方形依照固定的規則排列並無限延伸而成。
- (4)依照該固定排列方法，會發現有多出的空格(紅色正方形部分)。若要達成密鋪的條件，必須將空出的紅色正方形加上兩條鉛直且皆指向正方形中心的結構線(藍色箭號部份)。
- (5)在觀察之後可以發現在結構圖中，只要有一條邊就可以決定整個圖形而且每一個基本單位的三角形皆類似於 $[C_6, C_6, C]$ 型，而“C”的組成又是由兩個 C_6 的變化中點旋轉而成，因此我們可以判斷出這是個可以密鋪的磁磚。

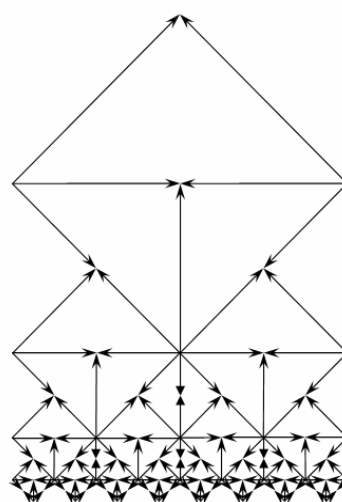
3.製作方法：

利用軟體制作美觀的碎形磁磚，以下為依序的製作過程。

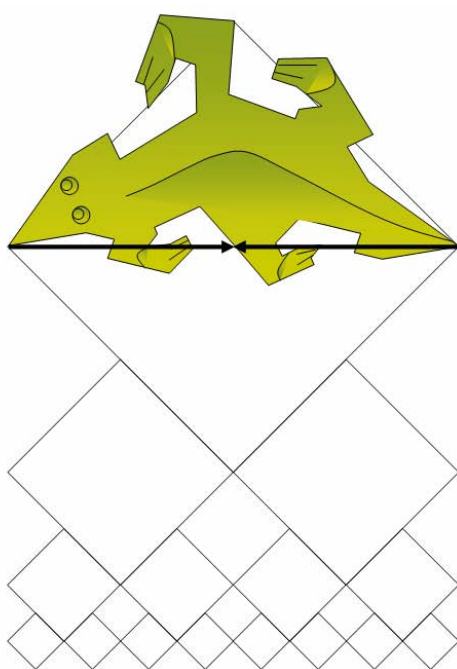
- (1)畫出想要定線複製的線段變化
- (2)畫出分析的結構圖
- (3)利用定線將(1)之線段複製到(2)之結構
- (4)複製完成後得成品



步驟一



步驟二



步驟三



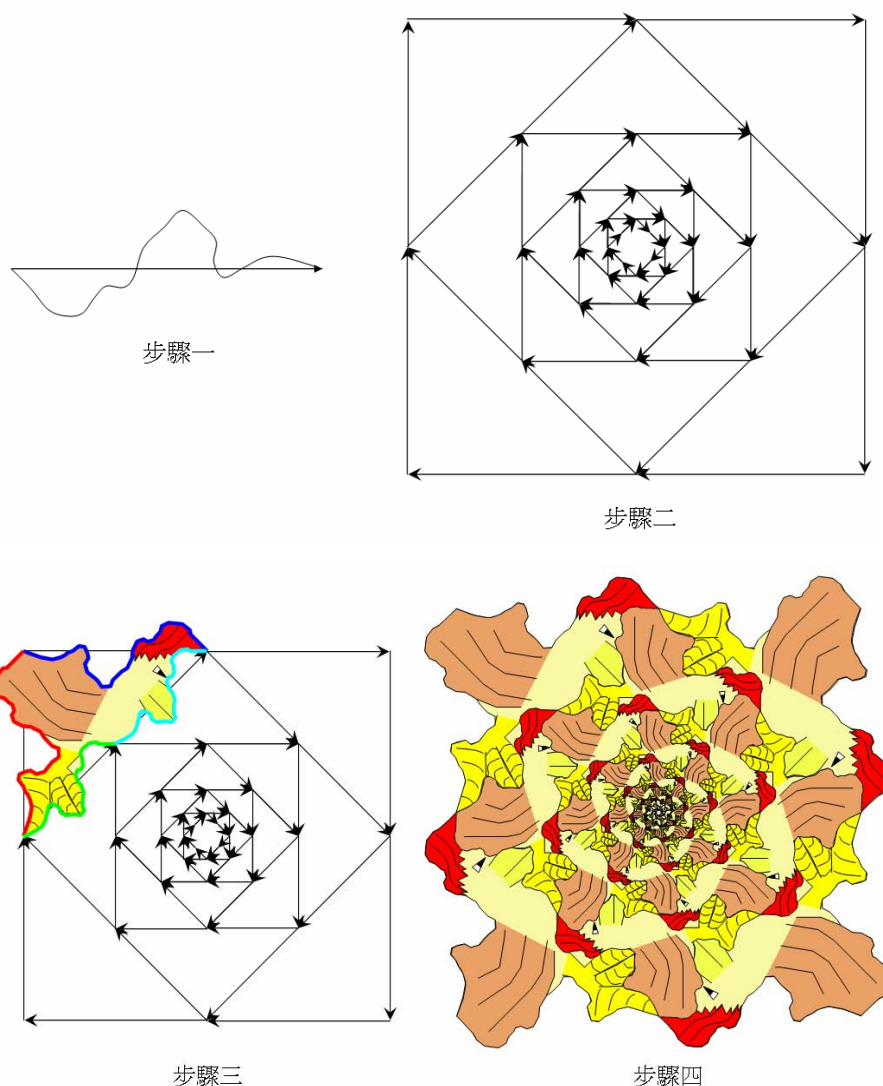
步驟四

此類型之碎形可分成直角三角形的結構，只需將邊長等比例縮小，再在其中一邊任意作用(在圖形不重疊的情況下)。最後再以定線複製法將圖形複製到各個邊上即可輕鬆完成碎形動物磁磚。

同樣的，我們自創有著自我模仿性質的結構，當我們將先前所討論的三角形結構，應用於此，以其中的數學構造，再經過一些藝術上的巧思，就可以輕鬆完成一個漂亮的瓷磚。

如以下步驟：

- (1)畫出想要定線複製的線段變化
- (2)畫出分析的結構圖
- (3)利用定線將(1)之線段複製到(2)之結構
- (4)複製完成後得成品



分析：

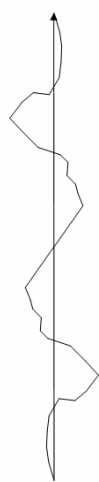
此圖各邊之比例與上頁之圖相同($\sqrt{2} : 1$)，但直角三角形的結構與排列不同，所呈現的效果也不同(看似無限往內延伸密鋪)。

由簡單的步驟和方法，加上自己設計的邊之作用和想要的結構，再配合軟體，可以快速做出自己所想和所需的動物磁磚。(如上圖「公雞」磁磚)

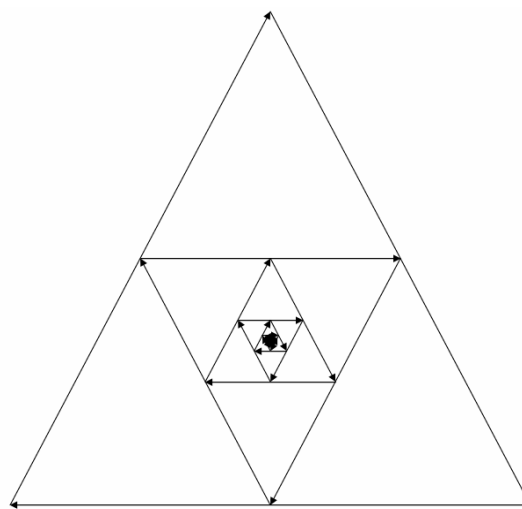
接著，我們將結構圖由直角三角形變成正三角形，其中三角形基本的構造已改變，不過一樣可以由藝術上的構思完成動物瓷磚，但所做出的效果卻更多樣化。

如下步驟一到步驟四：

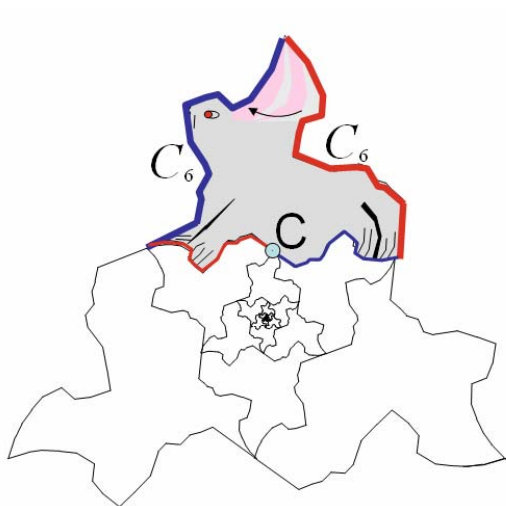
- (1)畫出想要定線複製的線段變化
- (2)畫出分析的結構圖
- (3)利用定線將(1)之線段複製到(2)之結構
- (4)複製完成後得成品



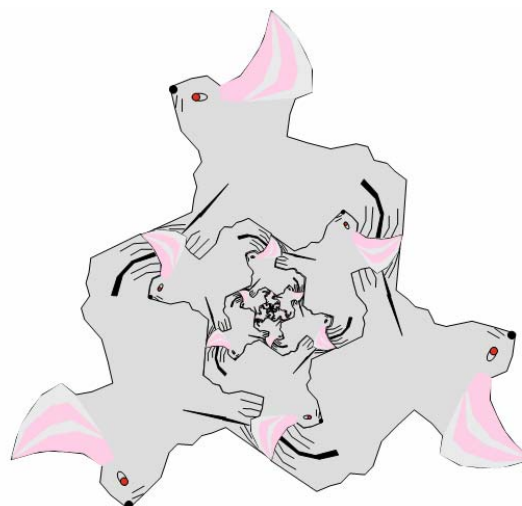
步驟一



步驟二



步驟三



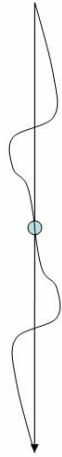
步驟四

利用相同原理，所得到如上圖般的動物密鋪碎形磁磚(兔子)。

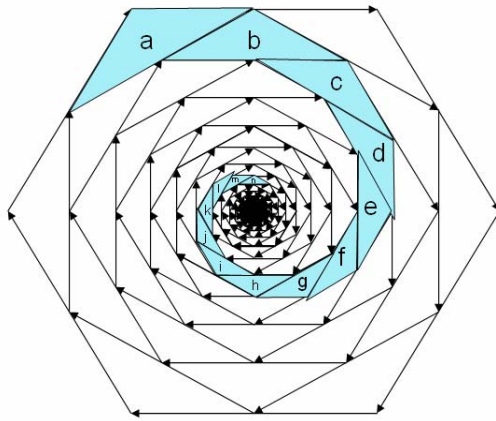
我們於是又聯想到可以用三角形所構成的正六邊形以邊之中點連線，形成與上二圖雷同，但是圖形的縮小程度上比之正方形及三角形有明顯程度上的差異。

如下步驟一到步驟四：

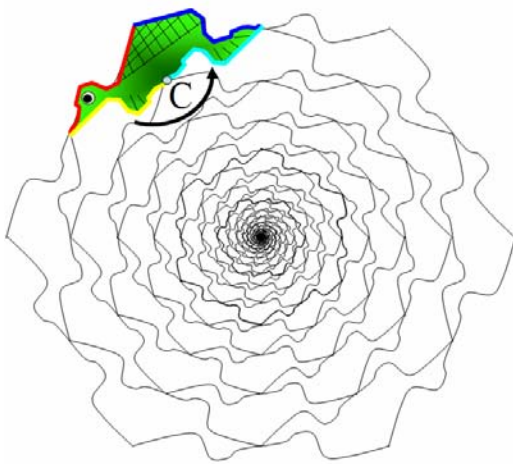
- (1)畫出想要定線複製的線段變化
- (2)畫出分析的結構圖
- (3)利用定線將(1)之線段複製到(2)之結構
- (4)複製完成後得成品



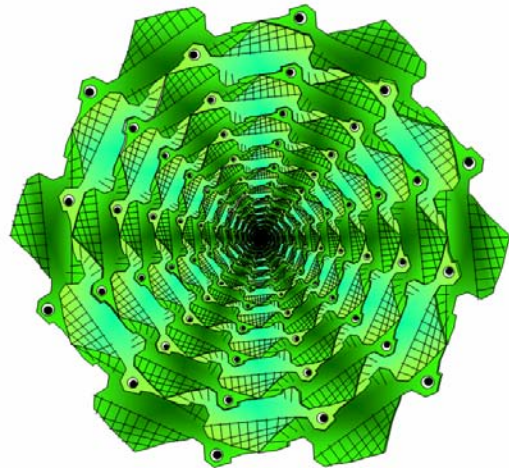
步驟一



步驟二



步驟三



步驟四

在繪製以上的碎形圖案後，我們發現在基本圖形的銜接部分可以達到密鋪的條件，原因是：在任意兩個相鄰的基本圖形中(如步驟三中 A ,B)，會有一個重疊的邊(如步驟三中 L)。若要達成密鋪，該邊的變化必須相同。接下來是基本結構圖的部份。每一層的基本三角形必須依照等比例縮放才符合碎形密鋪磁磚(如步驟二中 $a:b=b:c=c:d=d:e\dots$)。基本結構圖以及基本結構線的方向是決定該磁磚是否可以密鋪的主要原因。因此，我們在製作基本結構圖時，應搭配著邊的變化才可以做出碎形的動物磁磚。

陸、結論：

- 一、我們發現正三角形邊的作用只有五種，分別是 I、C、G、 C_6 、 C_m 。
- 二、正三角形邊的所有作用結構有 11 種。
- 三、只要依據我們的理論，可以自由的作出所想要的動物磁磚。
- 四、Escher 的圖樣均以手繪為主，導致有細部無法密鋪。透過我們的方法論可以以電腦製作出基本圖形完全相同且可以完全密鋪的動物磁磚。
- 五、在 Escher 的網站上只使用其中三、四種結構，我們在一般市面上所搜尋到的結構不超過五種，但我們研究出來卻達十一種之多，有將近一半的結構未被人使用構圖，所以我們的研究結果呈現出所有正三角形鋪磚結構的完整理論，讓作圖者有系統的做出密鋪磁磚。
- 六、在繪製碎形圖案時，我們發現在基本圖形的銜接部分可以達到密鋪的條件，原因是：在任意兩個相鄰的基本圖形中，會有一個重疊的邊。若要達成密鋪，該邊的變化必須相同。基本結構圖以及基本結構線的方向是決定該磁磚是否可以密鋪的主要原因。因此，我們在製作基本結構圖時，應搭配著邊的變化才可以做出碎形的動物磁磚。

柒、未來展望：

- 一、目前研究是以完全相同之三角形圖樣密鋪，希望未來可以以正方形甚至更多種不同的基本圖樣密鋪，做出變化更多的動物磁磚。
- 二、我們的理論希望在未來可以與藝術領域結合製作出美麗的動物圖形。
- 三、希望未來可以用我們研究出來的方法來做出自己創作的動物磁磚。

捌、參考資料來源：

- [1]陳明璋(民 92),MathPS 使用手冊,交通大學。
- [2]塞伊德·蔣·阿巴斯(Syed Jan Abas), 阿默·夏克爾·薩爾曼(Amer Shaker Salman)著, 伊斯蘭的幾何藝術, 廖純中譯, 左岸文化, 台北, 2004。
- [3]Daud Sutton, Miranda Lundy, 典雅的幾何, 台北市, 天下文化。
- [4]林壽福(民 95), 數學樂園——從胚騰(Pattern)學好數學, 如何出版, 台灣。
- [5]<http://www2.spsu.edu/math/tile/grammar/index.htm>
- [6]<http://mathworld.wolfram.com/Tiling.html>
- [7]<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/crowe1/>
- [8]<http://en.wikipedia.org/wiki/Tiling>
- [9]<http://acm.pku.edu.cn/JudgeOnline/problem?id=2663>
- [10]<http://www.mcescher.com/>
- [11]<http://www.fractalwisdom.com/FractalWisdom/fractal.html>
- [12]<http://www.vm.ibm.com/devpages/GREER/CVEX.HTML>
- [13]<http://www.geocities.com/rerewhakaaitu/Fractals3.html>
- [14]<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tiling.html>

【評 語】 030405 繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形
密鋪之研究

本作品充分利用電腦繪圖的功能輔以幾何性質繪出很多碎形密鋪，作者們電腦操作能力非常好，若能有更深入理論基的探討，成績會更好。