

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030404

巧算 24 點

學校名稱：臺東縣立卑南國民中學

作者： 國二 曾雅妃 國二 鄭礎馨	指導老師： 黃健育
-------------------------	--------------

關鍵詞：24 點 撲克 魔術

摘要：

將一副撲克牌中任意取出四張牌，以牌面數字為準，A代表1、2代表2、3代表3……J代表11、Q代表12、K代表13。以得到的四個數字任意排列作四則運算（加減乘除），不限定運算符號之運用次數，但每個數字僅能使用一次，以此來求出24。

以系統的方法嘗試找出24點所有的組合，並尋求其規律，為我們的研究的主要目標。

壹、 研究動機：

我們班的數學老師平常即會拿一些網路上常見的轉寄信件，來引導我們思考其中的數學原理，在這樣反覆訓練思考下，我們赫然發現很多乍看之下很神奇的信件內容，都蘊含著數學的原理。而上學期，在仁林版數學第三冊中，“因式分解”佔其中很大的部分，在因式分解的諸多方法中，以十字交乘法最受學生喜愛，而為了鍛鍊我們對數字的敏感度，老師更帶來撲克牌，向大家展示了很多撲克魔術與遊戲，原來這些也都是有數學技巧隱藏其中。而在這些遊戲裡，就以“巧算24點”最為有趣，變化性也最多，因而引起我們研究的興趣。

貳、 研究目的：

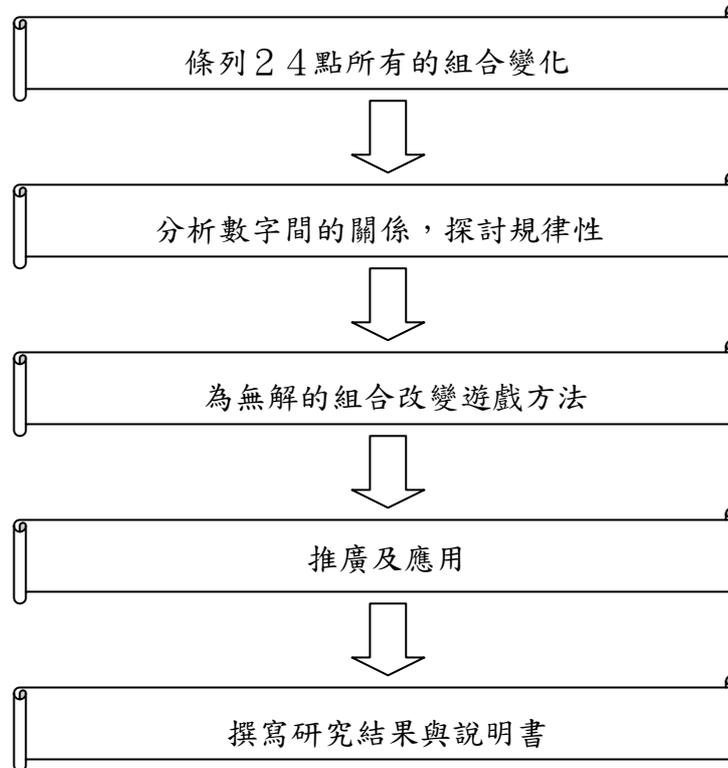
- 一、盡可能找出24點所有的變化。
- 二、探討數字間的關係與規律性。
- 三、運用創意解決無解的組合。
- 四、變化遊戲方法

參、 研究設備器材：

撲克牌、電腦、紙、筆、無限的耐心與熱情。

肆、 研究過程或方法：

一、 流程圖



二、 2 4 點遊戲的起源

關於 24 點遊戲的起源，眾說紛紜，但咸認應是由華人孫士傑先生所創。話說孫士傑先生由上海移民至美國後，拿一副撲克牌讓鄰家孩子算 24 點，誰知這一玩，竟讓美國孩子著了迷，這些孩子又把遊戲拿回家中和學校，人們發現遊戲對開發智力十分有益，後來就在全美推廣開了。

孫士傑先生洋名為羅伯特·孫，宣稱自己在 1988 年發明了 24 點遊戲，並且設立名為“Suntex International.Inc.”的公司，註冊了“24”這個商標，搶注了“24game.com”這個功能變數名稱，並且據此賺取著高額的利潤。

如今這間公司已成爲一個跨國公司，在全美、歐洲、甚至非洲都開設了辦事處，主辦著全美算 24 點錦標賽，有索尼、麥當勞等大公司的贊助，有高級官員的捧場，一副算 24 的牌賣 20 美金……

那這個遊戲真的就是由孫士傑先生所發明的嗎？根據對岸錢江晚報的報導，他們並不認爲如此，因爲算 24 點遊戲早在 1950 年代就在大陸流傳開來，並且有許多專門研究 24 點的相關著作。並非是如孫士傑先生所稱是由他在 1988 年所發明，至多是由他帶往美國發揚光大。

那 24 點遊戲到底是由誰所創，至今已不可考，其玩法亦各有不同，但主要分爲不算撲克臉（J、Q、K）與有算撲克臉兩種，在這裡我們針對第二種玩法來進行探討。

三、24 點遊戲之樂趣

24 點遊戲在台灣雖未相當風行，但在世界各地均有許多愛好者，甚至有很多 24 點的大型比賽，而在對岸更是超“火”的一種遊戲，而其之所以風靡全球，當然有其魅力所在。

- （一）簡單易學：僅運用簡單的加減乘除四則運算，不需要高深的數學技巧，人人皆能輕鬆上手。
- （二）變化多端：沒有公式可以套用，問題具有相當的開放性，解法常常不止一種，越多人一起計算，越能激盪出更多不一樣的想法。
- （三）攜帶方便：只要一副撲克牌就可以進行，撲克牌體積小，攜帶方便，走到哪便可玩到哪。
- （四）人數不限：一個人可以就可以玩，一副牌最多也可 1-3 人一起玩，在多加幾副撲克牌，要幾個人玩就能幾個人玩。
- （五）玩法不拘：雖然大致的玩法相同，但可以比誰算的快，也可以比誰算的多，還可以比誰的解法多元有創意，玩法可自由變換。

(六) 難度不一：玩起來講究靈感，快者一眼即看出答案，慢者想個三天三夜依舊想不出來。

四、2 4 點遊戲的所有組合變化

從一副撲克牌中任取四張牌，根據所得到的四個號碼進行四則運算，總共可以得到 1820 種組合，其中有 4 5 8 種組合依照正常四則運算無法找到解答，我們先針對能求出解的組合研究其有無規律性、關聯性，並嘗試尋找能更快速運算的訣竅。而那 458 種無解的組合，則嘗試以跳脫常規的方式改變規則來尋求解答。

(一) 1 8 2 0 種組合

1 8 2 0 是怎麼算出來的？其列式如下：

$$\begin{aligned} & C_4^{13} + C_3^{13} \times C_1^3 + C_2^{13} \times (C_1^2 + C_1^1) + C_1^{13} \times C_1^1 \\ & = 715 + 286 \times 3 + 78 \times 3 + 13 \\ & = 715 + 858 + 234 + 13 \\ & = 1820 \end{aligned}$$

C_4^{13} ：代表四張牌四個號碼都不同，是從 13 個號碼中去挑的。

$C_3^{13} \times C_1^3$ ：代表四張牌三個號碼不同，其中一個號碼重複，如 1233。

$C_2^{13} \times (C_1^2 + C_1^1)$ ：代表四張牌有兩種號碼，其中兩個號碼重複，如 2233。

$C_1^{13} \times C_1^1$ ：代表四張牌號碼都一樣，如 1111。

(二) 這 1 8 2 0 種牌組，在網路上可以找到很多小程式可以幫忙運算，但是數字還是得用人工手動一個一個輸入計算。在經過小組員們不眠不休的努力輸入後，終於完成一份兩千三百二十二頁的總表，詳見附件一。

伍、研究結果

一、尋求有解牌組的共同點

從一副撲克牌中任取四張牌，根據所得到的四個號碼進行四則運算，總共可以得到 1 8 2 0 種組合，其中有 4 5 8 種組合依照正常四則運算無法找到解答，因此我們針對可以找到解答的 1 3 6 2 組牌組進行研究，嘗試尋找其規律，整理如下：

在有解的牌組中，用得最為廣泛的是以下六種解法：（我們用 a 、 b 、 c 、 d 表示牌面上的四個數）

(一) $(a-b) \times (c+d)$

如 2、2、4、10，以 $(10-4) \times (2+2) = 24$ 等。

(二) $(a+b) \div c \times d$

如 2、2、4、10，以 $(10+2) \div 2 \times 4 = 24$ 等。

(三) $(a-b \div c) \times d$

如 2、2、3、12，以 $(3-2 \div 2) \times 12 = 24$ 等。

(四) $(a+b-c) \times d$

如 2、2、5、9，以 $(9+5-2) \times 2 = 24$ 等。

(五) $a \times b + c - d$

如 1、3、10、11，以 $11 \times 3 + 1 - 10 = 24$ 等。

(六) $(a-b) \times c + d$

如1、4、6、6，以 $(4-1) \times 6 + 6 = 24$ 等。

根據上面的牌組變化，我們歸納具有下面幾種特徵的牌組較為好算：

(一)、數字小的比較好算：

數字小的牌組動輒幾百種解法，而數字大的牌組，卻常常有無解的狀況。

(二)、數字中有2、4的因數的比較好算：

2、4的因數有1、2、3、4、6、12、24。除了1、12、24外，如果牌組中有這些因數，會比較好算。

(三)、有重複數字的不是很好算就是很難算：

四個數字中有重複數字的，不是很好算就是很難算。

(四)、有連續數字的不是很好算就是很難算：

四個數字若為連續數字，除了8、9、10、11這組無解外，其他均有解，但若只有三個連續數字，則有可能無解。

(五)、三張相同的牌加上Q：

任意三張數字一樣的牌加上Q，一定能解。

(六)、四張相同的牌：

四張3、四張4、四張5、四張6、四張12，有解；其他無解。

二、快速看牌術：

根據上面的有解牌組共通點，我們歸納出幾個可以較快速尋求解答的原則：

(一)、全部加起來：

有時最簡單的方法，反而是最容易忽略的方法，在正式開始算之前，可以先將四個數字全部加起來看看，有時答案出乎意料的簡單喔。而將四個數字加起來值小於9者，無解的機會相當的高，值若太大者，無解的機會也很高。經由將四個數字全部先加在一起，可先大略預估其是否有解。

(二)、湊24的因數：

24的因數有1、2、3、4、6、12、24。除了1跟24外，只要四張牌四個號碼中，出現這些因數，則我們可以嘗試使用倍數（乘法，如 3×8 、 6×4 等）來解決，若四個號碼中無這些因數，亦可以藉由將數字加減來湊出因數。實踐證明，這種方法是利用率最大、命中率最高的一種方法。

(三)、靈活運用相同數字：

在運算時，拿到有相同數字的，通常都不太好算，尤其是遇到撲克臉時（J、Q、K），此時可運用相同數字的特性求解，將兩數字相減為零，相除為1，便可降低相同數字帶來的困擾。如3、4、4、8可組成 $3 \times 8 + 4 - 4 = 24$ 或者 $3 \times 8 \times (4 \div 4)$ 等。

(四)、將數字個數減少

在剛開始玩這個遊戲時，老師是先拿三張牌讓我們湊24點，比起算四張牌簡單許多，我們可以運用此特性，先將數字做加減，將比較討厭的數字(通常是奇數)去除掉。這可與第二個方法湊因數一起運用，如遇四個數字為2、3、9、13，將數字13減去9變成4，如此便變成2、3、4三個數字做湊24，相形之下簡單許多。

(五)、將數字值變小

與第四點有異曲同工之妙，我們去觀察可以算去解答的牌組後，發現牌面數字

如果比較小而且有解，通常能算出來的解可以有很多種變化。如果不同兩組牌，其中一組的牌面數字較小，一組較大(撲克臉)，通常前面那組會比較好算，而且解法較多種。這是因為數字小時，可以呈現的變化較多，以2而言，可以用2、4、6、8、10、12……可能形成的數字較多，故解出24的可能性變大，而如13，一增加就馬上跳到26、39……較不好運用。所以若遇到牌面數字較大者(撲克臉)，可以先考慮將其相減，以將牌面數字變小。

三、實際應用：

上面的快速看牌術，算是正式算之前的心理建設，為大方向之理論，而在實際應用上可掌握幾個訣竅以增加獲勝的機會：

(一) 最後一個運算步驟是乘法：想辦法將四個數字湊成24的兩個因數。

1. 固定單一個因數：

四個數字中有一個因數者，先將其固定，再將剩餘3個數字湊成24的另一個因數(將24除以固定之因數，可得另一因數)。如數字2、5、7、8，裡面有兩個24的因數(2、8)，若先固定2，則另三個數要想辦法湊成12，但在此失敗。改為固定8，則另三個數要湊成3，而 $2 \times 5 - 7$ 可得3，因此成功。

2. 組合兩個因數：

先取兩個數湊成一個24的因數，再把剩下兩個數湊成24的另一個因數(將24除以湊出的第一個因數，可得另一個因數)，如1、2、4、5，能湊成因數2的有 $4 - 2$ 或 $4 \div 2$ ，但餘下1與5不能湊成12，能湊成3的有 $1 + 2$ 、 $4 - 1$ 、 $5 - 2$ ，但各自剩下的兩個數都不能湊成8，能湊成4的有 $5 - 1$ ，餘下 $2 + 4$ 能成爲6，因此答案爲： $(5 - 1) \times (4 + 2) = 24$ 。

(二) 最後一個運算步驟爲加法：把四個數字湊成24的兩個加數。

1. 統加法：把四個數全部加起來正好為 24。如 1、2、10、11，四個數字和正好為 24。

2. 固定一個加數法，先固定一個加數，餘下的三個數湊成 24 的另一個加數（以 24 減去一開始固定的加數）。如 4、5、7、9，先固定 9，再把 4、5、7 湊成 15，即 $(7 - 4) \times 5 = 15$ ，問題解決。

(三) 最後一個運算步驟是減法：把四個數湊成一個被減數與一個減數，使其差為 24。

1. 固定一個減數法，當四個數的和大於 24 時，這個數與 24 之間有一差值，而題目中正好有一個數是這個差值的一半，此時我們只要將其他三個數相加在減去第四個數即可。如 4、9、9、10，數字和 32，與 24 差 8，一半為 4，其中正好有 4 這個數字，因此即可用此法，即 $9 + 9 + 10 - 4 = 24$ 。

2. 合成被減數、減數法。先選兩數相乘，使其大於 24，在努力湊後面兩個數字，使整個式子的值等於 24，如 2、5、6、8，先算 $5 \times 6 = 30$ ，比 24 多 6，再把 2 與 8 湊成 6，因此 $5 \times 6 - (8 - 2) = 24$ 。

四、無解牌組：

無解的牌組總共有 458 組，詳見附件二。觀察無解的牌組後，我們歸納出具有下列特徵的牌組，較易無解。

(一) 數字和小於 9：

四個數字和比 9 還要小的牌組，一定無解。

(二) 數字和過大：

當四張牌中出現撲克臉（10、J、Q、K）時，容易出現無解。其中以出現 J 跟 K 最容易無解。

(三) 同樣的號碼：

四張牌中出現相同號碼越多，則越容易出現無解。

陸. 討論

一、無解牌組之另類想法：

對於無解牌組我們嘗試跳脫常規，改變規則，以尋求解答，而可用的方法如下：

(一)、將數字重新組合：

如1、1、1、2，本為無解，將兩個1看成11，即可算。 $(11 + 1) \times 2 = 24$ 。

(二)、將數字運算後再合併：

如1、1、1、3，先 $1 + 1 = 2$ ，在將2與1看成21，則 $21 + 3 = 24$ 。

(三)、將數字視為次方數：

如1、1、1、5， $1 + 1 = 2$ ，而5的2次方為25，則 $25 - 1 = 24$

(四)、將數字視為開根號：

如1、2、8、12， $1 + 2 = 3$ ，而8開3次方為2，則 $12 \times 2 = 24$ 。

(五)、將數字配合階乘：

如3、4、6、7，其中 $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ，則 $(7 - 3!) \times 4 \times 6 = 24$ 。

(六)、將數字變換成分數：

如1、3、4、6，將3與4看為 $3/4$ ，則 $(1 - 3/4) \div 6 = 24$

二、爲什麼是算24點？

爲什麼是算24點？爲什麼不是算23點、算25點、算36點。

根據維基百科，數字24有下列的特性。

- (一)、合數：其因數有：1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24。
- (二)、第6個高合成數。
- (三)、每個因子減一（包括本身，不包括1, 2）得到的數都是質數，24是具有這樣的性質的最大的數。
- (四)、是4的階乘。

其實並不是一定非得要24點才能算，理論上高興算幾點就能算幾點，但以算24點變化性最多。主要是根據上面特性的第一點跟第三點，在第一點中，24的因數除了本身外，其他均爲撲克牌13個號碼之一，能夠擁有最多的變化。以乘除法而言，24可以是 2×12 、 3×8 、 4×6 三種組合，如果是算23點，就少了乘除法的變換，如果是算25點，也只有 5×5 一種，算36點，有 3×12 、 4×9 、 6×6 ，雖有三種，但 6×6 爲同數字相乘，遇到機會相形變小，因此以算24點擁有最多變化性，且24的每個因數減去1後得到的數都是質數，大部分也均在撲克牌13點數之中，也增加了加減法的變化，因此以算24點最爲有趣。

柒、結論

24點遊戲之迷人之處，在於其變化多端，就算你只是個初解基本四則運算之兒童，也未必會輸給學富五車之老學究，就如同圍棋般講究天份悟性，在加上沒有可以一定套用之公式，更增加了各種可能之變數，越是研究越是發覺其深奧。在台灣日前最流行的是數獨，算24點跟數獨一樣均不需要高深的數學基礎，而且均號稱可以增進智力。但數獨玩起來較爲

費時費力，且較難自創題目，要玩還得帶著報紙跟筆。相形之下，24點就沒這些負擔了，走到哪可以玩到哪，坐火車，等公車時可玩、下課十分鐘時可玩，甚至上廁所無聊時也可以玩個幾把，真的是妙不可言，希望能在台灣多多推廣這個遊戲，讓更多同好激盪出更多有趣的玩法。

捌、參考資料及其它

一、參考書籍：

- 1.林革、劉祥丰。趣談24點(一)。初中生數學學習初一版。2004(3)-35-36。
- 2.倪明。撲克”算24點”的技巧。華東師範大學出版社。1997-2-1。

二、參考網路：

- 1.錢江晚報網路版。2006年12月24日。取自
http://qjwb.zjol.com.cn/html/2006-11/24/content_1285495.htm
- 2.維基百科。取自 <http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=24&variant=zh-tw>

【評語】 030404 巧算 24 點

1. 研究主題富趣味性。
2. 書面資料自「p.13 最末起至 p.24」與「p.1 至 p.13」完全重覆。
3. 口頭報告的部份宜加強組織性，方能更突顯研究的內涵。