

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第二名

080417

骨牌大變身-新式菱形骨牌「數字花遊戲」之探究

學校名稱：臺北市松山區民權國民小學

作者： 小六 陳奕臻 小六 莊自得 小六 程 婷 小六 歐人瑄 小六 林子南 小六 呂翊亘	指導老師： 連婉婷 林志忠
---	---------------------

關鍵詞：正六角形 數字和 遊戲設計

骨牌大變身～新式菱形骨牌數字花遊戲之探究

壹、摘要

本作品是以自製新骨牌——「菱形骨牌」進行數字花遊戲（一個小正六邊行數字和）的探討。

所研究的問題為：

- 一、新骨牌新遊戲的定義
- 二、菱型骨牌「數字花遊戲」的探討
 - 1、二～十九朵花底板設計的探討
 - 2、二～十九朵花數字和遊戲的探討
 - 3、十九朵花數字和極限值的探討
- 三、數字花遊戲之變形推廣

將二十八張菱形骨牌全用上的不同圖形：中空大菱型（十四朵花）、大心型（19朵花）、阿尼型和四小心型。

我們找出不同數字花的最大值及最小值，並提供玩家一系列不同圖形的有效解題法。

貳、研究動機

骨牌一直都被設計成（ 2×1 ）方形的格子，帶給大家很多的挑戰也帶來不少的樂趣。例如：骨牌地毯、骨牌數字城牆、骨牌方塊舞，甚至骨牌魔方陣…，然而，這些謎題遊戲都已經一一被破解了。

而我們在玩骨牌魔方陣時，想到的不只是要創新傳統骨牌遊戲，而且我們還有一個更大的企圖心～創造新骨牌。於是，一連串的疑問出現了：

- 一、除了直線魔方陣，我們是否可以找出其他形狀的魔方陣？
- 二、既然要改變魔方陣，我們是否可以利用雙正方形骨牌以外的形狀骨牌來玩研究？

所以，我們研發了新式的菱形骨牌，它是由兩個正三角形配對而成的四邊形。它可以用最少張數排出的正多邊形則是用三張牌排出的六角形。因此，我們將它設為我們研究的主軸。

參、研究目的

- 一、一副骨牌的特性
 - （一）菱形骨牌的誕生
 - （二）一副骨牌的特性
 - （三）數字和之母的發想～一朵花
- 二、開發「數字花遊戲」
 - （一）二到十九朵花底板圖形設計
 - （二）二到十九朵花數字和遊戲探討
 - （三）十九朵花數字和遊戲之進階探討探討
- 三、數字花遊戲之變形推廣

肆、 研究設備及器材

- 一、新式菱形骨牌
- 二、記錄紙（正三角形點狀紙）
- 三、文具（鉛筆、橡皮擦、白板筆、板擦、奇異筆）
- 四、數位相機（記錄解答）
- 五、繪圖軟體（將解答數位化）

伍、 研究過程與發現

研究一、一副骨牌的特性

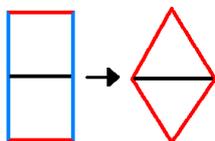
(一) 菱形骨牌的誕生

首先，我們做出了使用雙正三角形來組成的菱形骨牌。

為什麼使用「菱形」來製作呢？

因為它是一個和之前長方形骨牌最接近的圖形，我們只有改變了它的外型，成為四邊等長的圖形，這種特性使原本由傳統骨牌所設計的數學遊戲更具發展性。

《圖一》



《圖一》傳統骨牌的紅色線及藍色線為《1：2》，而在新式骨牌的邊長上，可以看出我們只是改變它的比例，使其四邊等長。

(二) 一副骨牌的特性

因為我們想要玩的遊戲是有關於數字和，所以我們先將一副骨牌，也就是二十八張骨牌按照「數字和」的次序排好。並且排出了下表。

							3						
					4	3	2	2	2				
			5	4	3	2	1	1	1	1	1		
			5	5	5	5	5	4	3	2	1		
	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6	5	4	3	2	1	0
每張骨牌之數字和	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\therefore 12 \times 1 + 11 \times 1 + 10 \times 2 + 9 \times 2 + 8 \times 3 + 7 \times 3 + 6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 168$ \therefore 一副骨牌的總數字和為 168。													

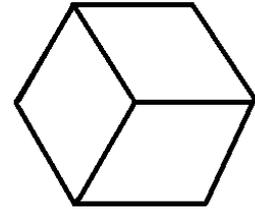
你發現了嗎！！

圖三中最左邊的 6 6 加上最右邊的 0 0 答案等於 1 2，而其他對應的牌（例如 5 6 對 0 1）相加也等於 1 2！因為這是兩張牌的和，所以再將它們除以二，得到了 6。因此，我們猜想每一張牌的平均值都是 6。

(三) 數字和之母的發想～一朵花

一開始，我們嘗試玩過方塊舞和骨牌數字城牆，在研究的過程中，我們發現，這兩個遊戲各有一個很特別的地方，就是方塊舞的方塊，和骨牌數字城牆中的數字和。因此我們想要將這兩樣特色結合在一起，創造出一個獨立的新遊戲～骨牌數字花遊戲。

既然是要研究數字和，那就必須要有一個圖形作為數字和的基礎單位。我們首先考慮了正多邊形，且要是凸邊形。而我們發現，使用最少張數排出，並符合上述條件的只有正六角形。同時，它也是菱形骨牌可以排出最接近圓形的形狀。也因為這樣，它是最節省空間的形狀。如《圖二》。而我們將它設為這次科展我們玩數字和遊戲的基礎單位。



《圖二》

既然設定數字和所選取的圖形了，我們就開始以一副骨牌的特性來研究從一副骨牌中任取三張牌所構成的目標數字和之平均值。

首先，我們利用之前研究出的「單張牌平均值」來做發展，

發現： 6 (單張牌平均值) $\times 3$ (花朵所需牌數) $= 18$ ，

由此推論每一朵花的數字和平均值為 18 。

研究二、開發「數字花遊戲」

(一) 二到十九朵花底板圖形設計

在前面的研究中，我們設定正六角形必須是包含一樣數字和的範圍。既然是要玩數字花遊戲，包含一樣數字和的圖形就必須有一個以上，所以我們開始設計 $2 \sim n$ 朵花的圖形。

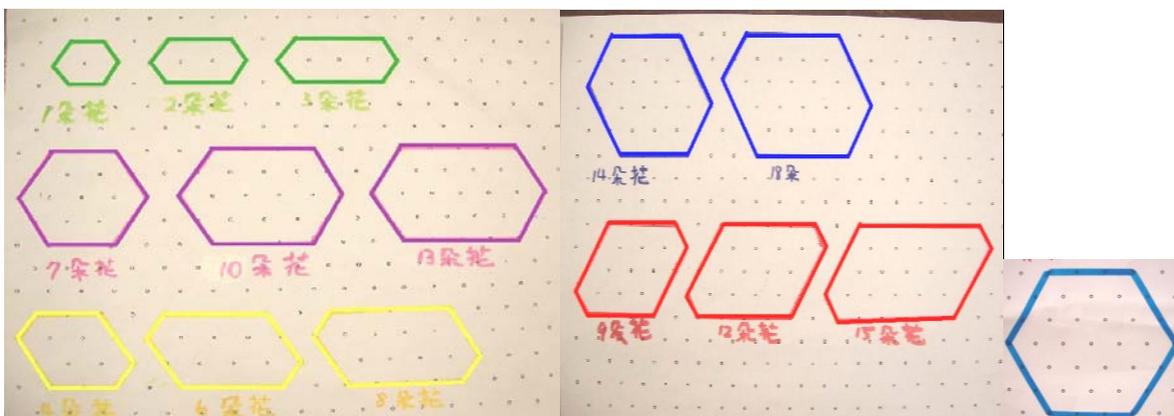
不過因為光是兩朵花就有三種圖形了，分別是～分開的兩朵獨立花（不接合）、相接的兩朵獨立花（雖然重疊處無意義），和合併的兩朵花（成一個拉長的六角形）。所以我們必須選擇其中一種類型，並訂出選擇圖形的規則。

我們訂出了以下三個規則：

- 1、必須使用最少張數
- 2、必須是凸多邊形
- 3、必須是對稱圖形

接下來，我們開始找出了 $2 \sim n$ 朵花的所有圖形。並且發現它最大的極限為十九朵花，因為它是正六角形最大的形狀（邊長三），所以他也最接近圓形，並且最節省空間。

這是我們所找出的二～十九朵花圖形，如下：

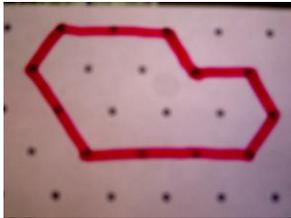


注意到了嗎！！沒有5朵花、11朵花，和17朵花！

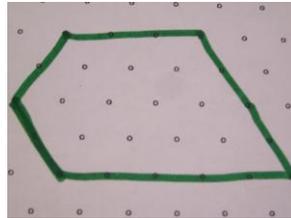
為什麼呢？

因為它們並不完全符合我們所定的三條規則。

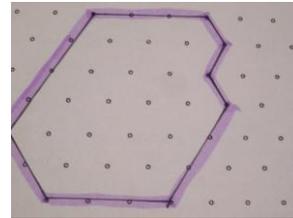
首先，雖然它們都符合最少張數的規則，但是五朵花和十七朵花既不是對稱圖形，也不是凸多邊形。而十一朵花雖然是凸多邊形，卻不是對稱圖形，所以我們並不將他們三個列入後續研究。



五朵花
(凹邊形、不對稱圖形)



十一朵花
(不對稱圖形)



十七朵花
(凹邊形、不對稱圖形)

除此之外，我們對於花朵數與所需要的進行了探討：

花朵數	符合圖形所需張數	關聯性	11	18	$3 \times 11 - 15$
2	5	$3 \times 2 - 1$	12	19	$3 \times 12 - 17$
3	7	$3 \times 3 - 2$	13	20	$3 \times 13 - 19$
4	8	$3 \times 4 - 4$	14	21	$3 \times 14 - 21$
5	10	$3 \times 5 - 5$	15	23	$3 \times 15 - 22$
6	11	$3 \times 6 - 7$	16	24	$3 \times 16 - 24$
7	12	$3 \times 7 - 8$	17	25	$3 \times 17 - 26$
8	14	$3 \times 8 - 10$	18	26	$3 \times 18 - 28$
9	15	$3 \times 9 - 12$	19	27	$3 \times 19 - 30$
10	16	$3 \times 10 - 14$			

發現：

1、一朵花、七朵花，和十九朵花，都是正六角形的相似形。如圖：



研究相似圖形與等比例圖形之後，我們發現：

- 1、增加的花朵數+1=增加的張數；減少時也相同。
- 2、同類型圖形是由基本圖形向右加長。
- 3、同一類相似圖形中，相差朵數都相同。
- 4、相似圖形的放大圖形的面積是小圖形的面積的四倍。

(二) 二到十九朵花數字花遊戲之探討

首先，我們要定義遊戲名稱以及規則：

1、**遊戲名稱**：「二~十九朵花數字花遊戲」

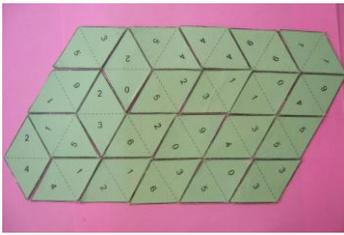
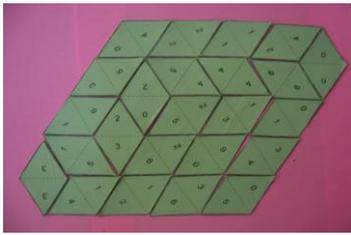
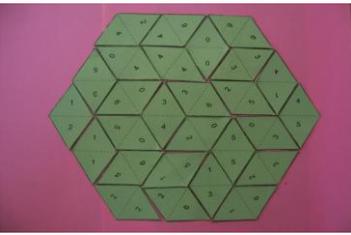
2、**遊戲規則**：

(1) 從二朵花 ~十九朵花的系列圖形中選擇欲挑戰的圖形底板

(2) 根據所選擇的圖形底板設法使該圖形之中的每一朵花(小正六角形共6個數字)內的數字和相等

我們從之前算出的數字和 18 切入。以下為我們做出，數字和 18 的二~十九朵花：

二朵花	三朵花	四朵花
六朵花	七朵花	八朵花
九朵花	十朵花	十二朵花
十三朵花	十四朵花	十五朵花

十六朵花	十八朵花	十九朵花
		

發現一：

以 18 作為遊戲目標數字和來排，從二朵花圖形-十九朵花的圖形都有解。

疑問：

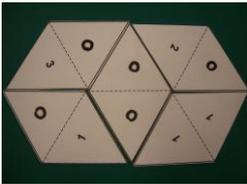
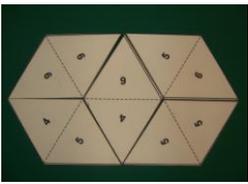
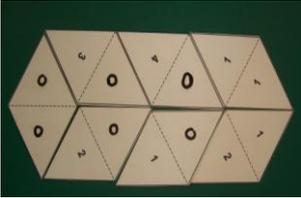
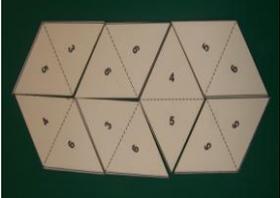
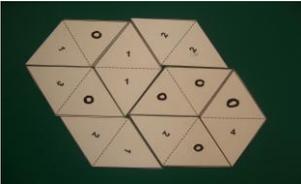
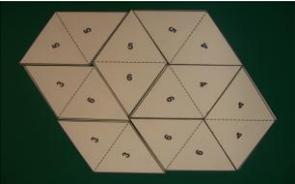
就算數字和 18 做的出來，也不代表其他的目標數字和做不出來呀？

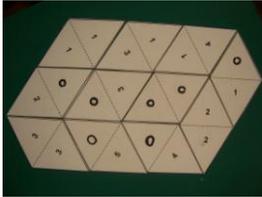
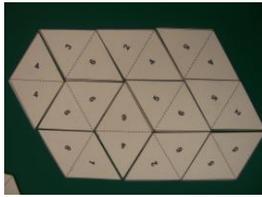
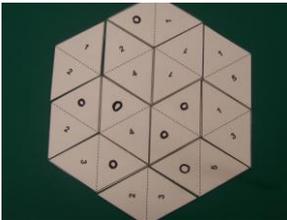
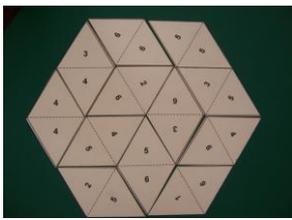
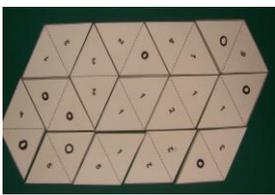
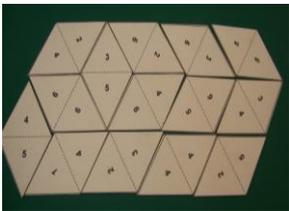
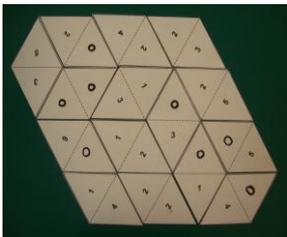
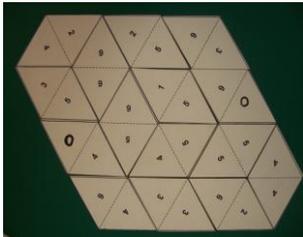
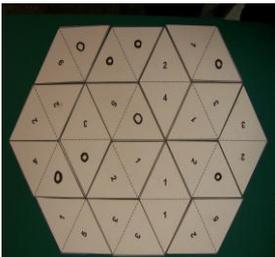
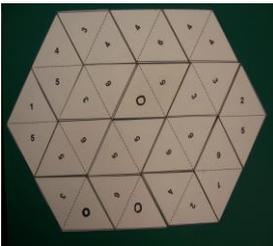
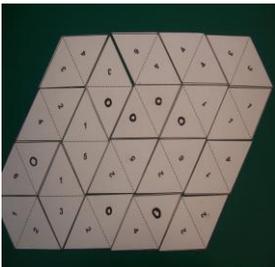
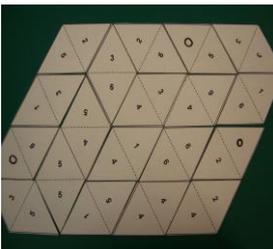
大膽猜測：

由於 168 (整套排的合) \div 28 (整套排張數) = 6 (單張數字和的平均)，
 6×3 (一朵花需要三張牌) = 18 = 平均值。
 所以最大值和最小值，我們推測它們兩個數相加，應該是平均值的兩倍，
 也就是 $18 \times 2 = 36$

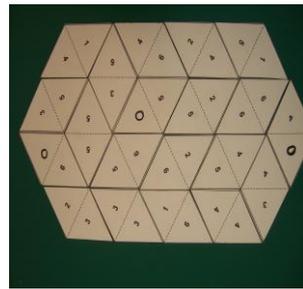
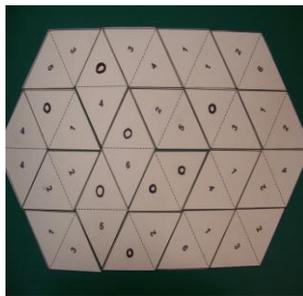
行動：

我們開始研究針對不同朵數的花進行數字和極限：最大值和最小值的研究。
 由於 5 朵花、11 朵花和 17 朵花並不符合我們所設定底板的理想圖形，所以我們不將它們列入「二到十九朵花數字花遊戲」中討論。
 下圖為我們所找到的數字和的極限：

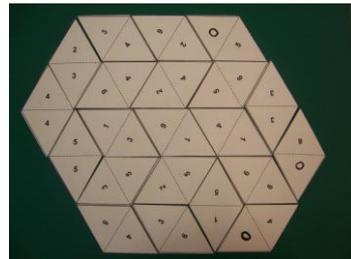
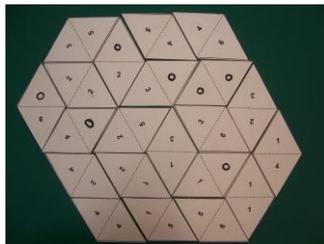
	最小值圖示	最大值圖示
二朵花		
三朵花		
四朵花		

六朵花		
七朵花		
八朵花		
九朵花		
十朵花		
十二朵花		

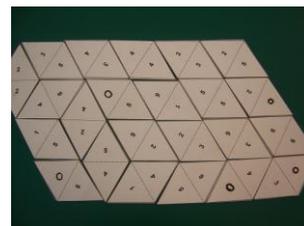
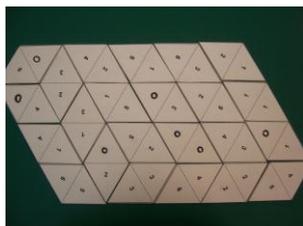
十三朵花



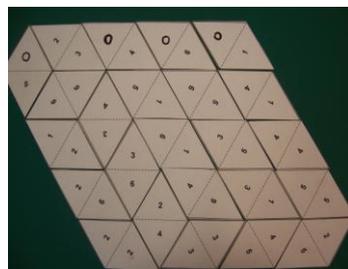
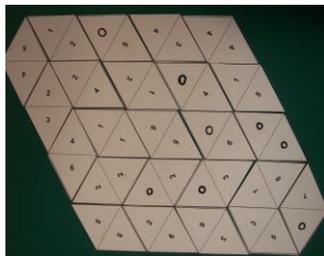
十四朵花



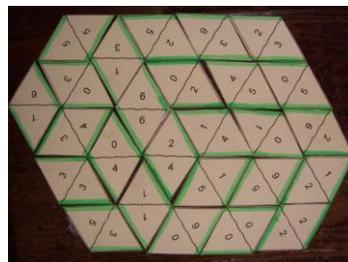
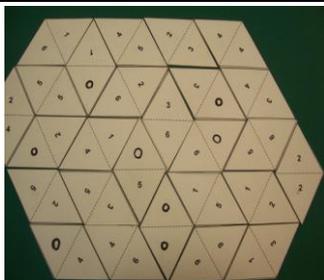
十五朵花



十六朵花



十八朵花



發現二：

花朵數	最小值	最大值	花朵數	最小值	最大值
2	4	3 2	1 1	×	×
3	5	3 1	1 2	1 2	2 4
4	6	3 0	1 3	1 2	2 4
5	×	×	1 4	1 3	2 3
6	7	2 9	1 5	1 4	2 2
7	9	2 7	1 6	1 4	2 2
8	9	2 7	1 7	×	×
9	1 0	2 6	1 8	1 7	1 9
1 0	1 1	2 5	1 9	1 5	2 1

我們實際做出了二朵花到十九朵花的最大值和最小值，並且發現二朵花到十九朵花的最大值和最小值相答案相加為 36！

(三) 十九朵花數字和遊戲之進階探討

為什麼鎖定十九朵花來深入研究呢？

因為它是我們這個遊戲的最大的圖形。

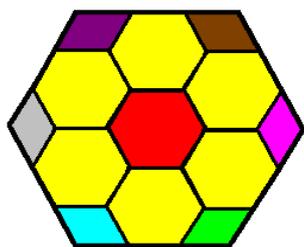
在剛開始研究時，我們認為它是無法成功的，因為當時考慮的面向不夠完整，而現在已經突破這個瓶頸，並且做出了多組的解答。

焦點一：十九朵花目標數字和 18 之探討。

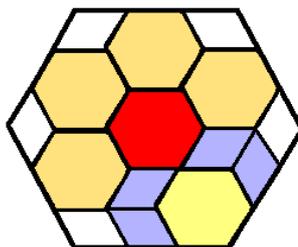
問題一：當目標數字和為 18 時，是否任留一張骨牌都會成功排出？

發現：

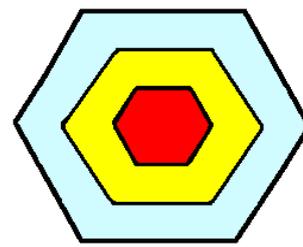
- 1、有解。換句話說，抽掉任何一張牌都可以使目標數字和 18 得到解答。
(請參見附件)
- 2、從所有的成功圖形紀錄中發現圖形結構分為 A、B、C 型三種。



《結構 A》



《結構 B》

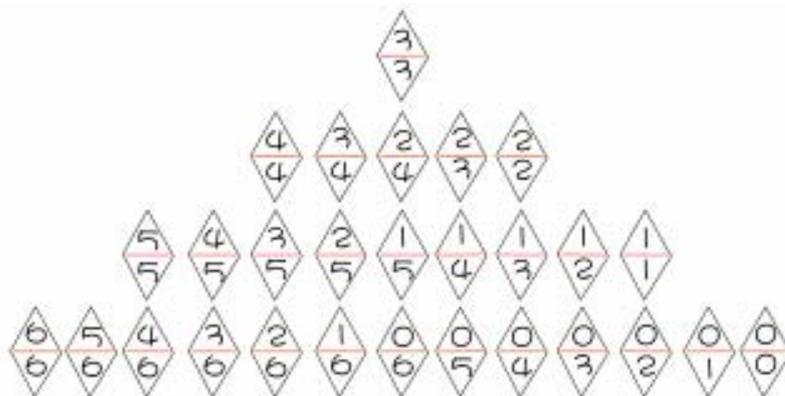
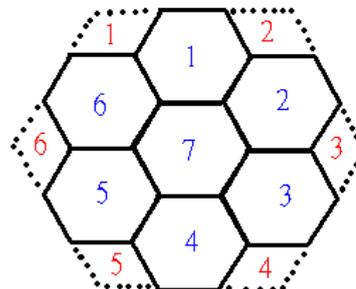


《結構 C》

問題二： 目前的我們在挑戰十九朵花數字和遊戲比過去的我們更容易上手、速度更快了，是否能歸納出能快速排出成功十九朵花圖形以達到數字和18的目標呢？

發現：

- 1、先排出7朵獨立的花數字和為18。
- 2、再選其中一組排在中間。(7)
- 3、將其它組拼湊(1-6)。
- 4、完成實線的部份後，再將剩餘牌排在六個缺角(1, 2, 3, 4, 5, 6)。
- 5、如無法成功，可以把不影響其他朵花數字和的牌翻轉，再試試看。
假設在1的位子的牌是02，就可以利用11來代替。
- 6、可用「拓印法」排出另一組。



* 「拓印法」：就是把數字相互替換過來，例如：0可以替換為6，1替換為5...，所以32-34，04-62，45-21，61-05...以此類推。
但若剩餘的牌值為6，就無法拓印出第二組。例：15-51，42-24。

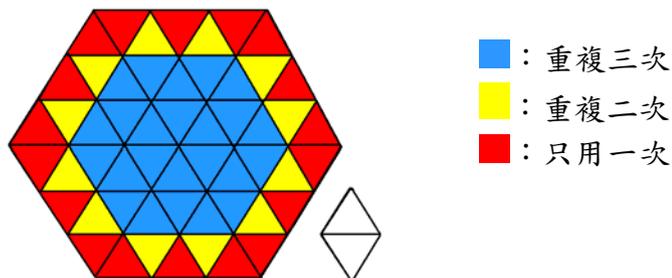
依照拓印法，我們只需要作出14組（也就是一半）即可再拓印10組出來，因為06、15、24、33翻轉過來其實是一樣的，所以無法拓印。最後只要再做出4組就好了（拿掉06、15、24、33的4組解答）

焦點二：十九朵花目標數字和極限範圍的探討。

問題一： 要使十九朵花圖形內每一朵花數字和相等，除了目標數字和18能成功排出之外，是否有其他可行的目標數字和？ 如果有，其數字和極限範圍在哪裡？

發現：

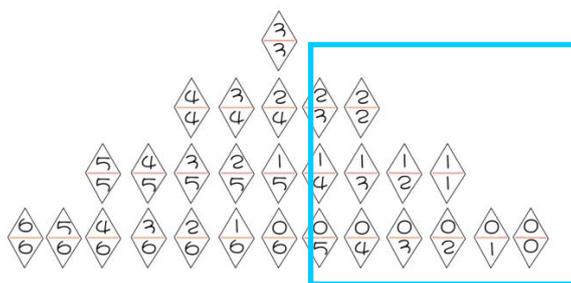
我們先將19朵花做分析，我們發現時十九朵花，每一個三角形的數字最多可重複於3朵花中，也就是重複三次。如下圖所示：



我們若要做成最小，就一定得將最小的 12 張牌放於中間重複三次的地方。

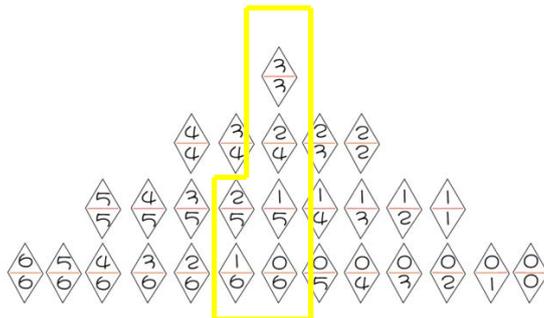
從骨牌結構中，我們可找出了最小的十二張牌，假設放於重複三次的地方。

如圖：



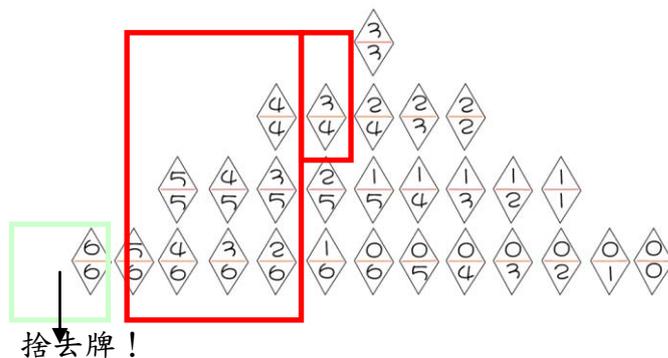
同樣的，再找出次小的六張牌，假設放於重複二次的地方。

如圖：



接著，再繼續將最大的牌找出，假設放於只用一次的地方，但是還必須將一張牌拿掉，才能做成 19 朵花。現在，我們要做的是最小值，所以我們選擇拿掉最大的牌 6, 6。

如圖：



我們將重複三次的牌相加，並乘上 3，再加上重複兩次的牌，乘以二，再加上只用一次的牌，最後除以十九朵花的 19，若答案大於 14，便代表 14 不可能做出，若答案小於 14，答案就有可能成功。

算式：〔重複三次的牌×3+重複二次的牌×2+只用一次的牌〕/19

(0,0)·(0,1)·(0,2)·(1,1)·(0,3)·(1,2)·(0,4)·(1,3)·(2,2)·(0,5)·(1,4)·(2,3)
的總和=38

(0,6)·(1,5)·(2,4)·(3,3)·(1,6)·(2,5) 的總和=38

(3,4)·(2,6)·(3,5)·(4,4)·(3,6)·(4,5)·(4,6)·(5,5)·(5,6) 的總和=80

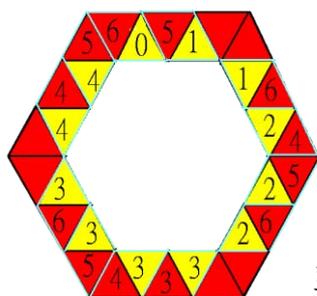
套上數字的算式：〔38×3+38×2+80〕/19=14.21……

由次證明十九朵花最小是15，用拓印法可以證明最大值為21，所以就十九朵花而言，小於15、大於21的，無解。

但我們後來發現重複二次的地方，並不是完整的六張牌，而是單獨的十二個小三角形，因此數字會改變。

所以，扣掉重複三次的牌，還剩下【(0,6)·(1,5)·(2,4)·(3,3)·(1,6)·(2,5) (3,4)·(2,6)·(3,5)·(4,4)·(3,6)·(4,5)·(4,6)·(5,5)·(5,6)】我們要想辦法將小的數字放於重複兩次的地方。所以我們會將【(0,6)的0·(1,5)的1·(1,6)的1·(2,4)的2·(2,5)的2·(2,6)的2·(3,3)的3·(3,4)的3·(3,5)的3·(3,6)的3·(4,4)的4·(4,5)的4】我們按此排了一次，並再重新計算。

以下為試排出的圖：



藍色框內為一張牌

按照這樣我們又再計算了一次

重複三次的區塊仍不改變。

(0,0)·(0,1)·(0,2)·(1,1)·(0,3)·(1,2)·(0,4)·(1,3)·(2,2)·(0,5)·(1,4)·(2,3)
的總和=38

(0,6)的0·(1,5)的1·(1,6)的1·(2,4)的2·(2,5)的2·(2,6)的2·(3,3)的3·
(3,4)的3·(3,5)的3·(3,6)的3·(4,4)的4·(4,5)的4的總和=28

(0,6)的6·(1,5)的5·(1,6)的6·(2,4)的4·(2,5)的5·(2,6)的6·(3,3)的3·
(3,4)的4·(3,5)的5·(3,6)的6·(4,4)的4·(4,5)的5 (5,5)·(5,6)·(4,6)的
總和=90

於是我們將算式再算了一次

〔38×3+28×2+90〕/19=13.68……

研究二、數字花遊戲之變形推廣

(一) 遊戲規則變形-骨牌同時排出獨立花之發展

遊戲一：「雙花齊鳴」遊戲的奧秘

1、遊戲規則：

一副牌同時排出兩個七朵花，兩朵花的數字和相加起來得為36。
骨牌同時排出獨立花-「雙花齊鳴」遊戲示例：一副骨牌同時做出兩個獨立的七朵花

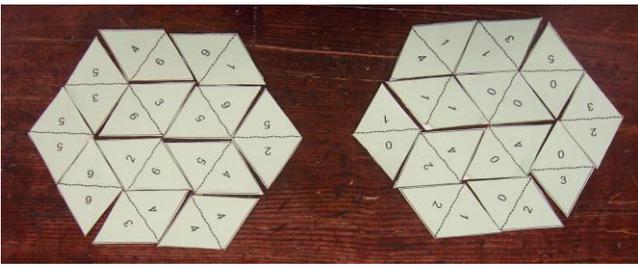
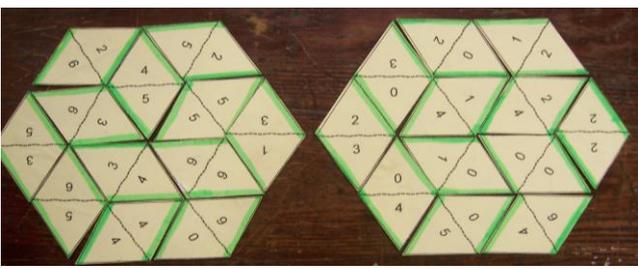
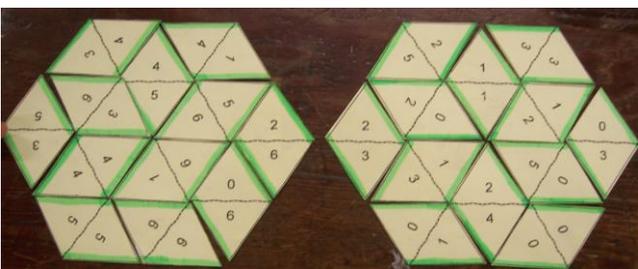
2、作法：

我們以最小值和最大值的數字和慢慢往中間逼近來研究。

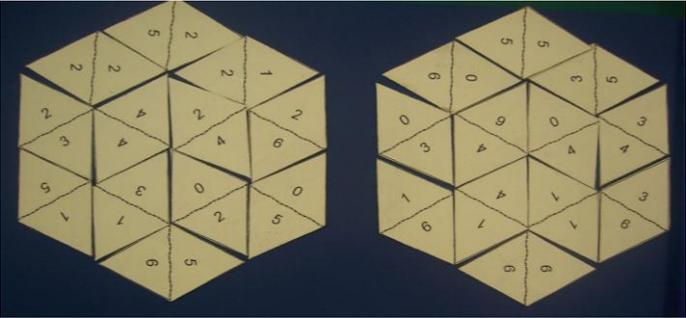
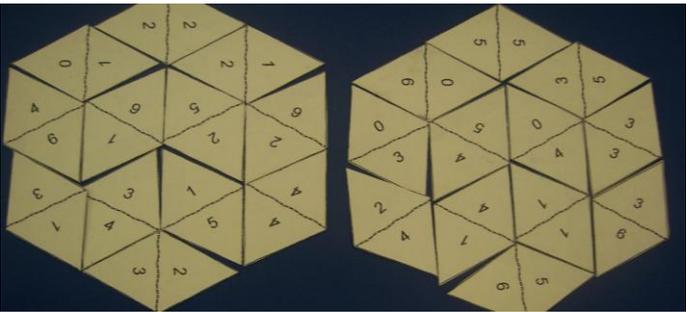
3、策略：

我們以原本七朵花的資料取出其中一組骨牌，並且使用剩下的骨牌來排出另外一組。

4、以下是成功的圖形示例：

兩端數字和	成功圖示	所剩骨牌
9 和 27		00 22 15、33
說明	無法與所剩骨牌中換	
10 和 26		11 15 61
說明	06 可以換成 15 和 33，25 可以換成 61	
11 和 25		04、22 15 64
說明	無法與所剩骨牌中換	

12 和 24		11 13 14 66
說明	32 可以換成 14，02 可以換成 11	
13 和 23		10 33 16 35
說明	42 可以換成 33，52 可以換成 16	
14 和 22		13、22 15、33
說明	04 可以換成 22 或 13，06 可以換成 15 或 33	
15 和 21		03 05 23 44
說明	62 可以換成 44，21 可以換成 03	
16 和 20		00 01 15 56
說明	06 可以換成 15	

17 和 19		00 01 33 45
說明	15 可以換成 33，63 可以換成 45	
18 和 18		00 02 05 66
說明	3 2 可以換成 0 5	

發現：

所剩的骨牌中，有些可以將其中幾張骨牌掉換；若是其中一朵花所使用的骨牌中，有一張和尚未使用過的骨牌數字和相等，並不會影響其結果，因此可以將其互相掉換，即又是另一組解。

例如：「18 和 18」組的「雙花齊鳴」裡的 (2, 3) 骨牌，將其掉換成 (0, 5) 骨牌，不會影響其結果，即又可成為另一組解。

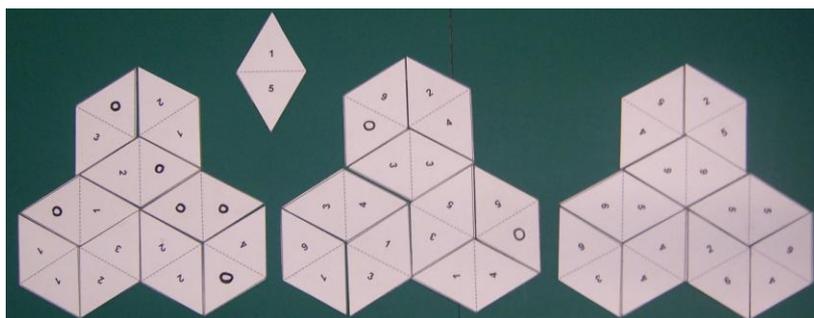
遊戲二：「賓士雙響砲」數字花遊戲

1、**遊戲規則：**

一副牌同時排出三個獨立連結的一朵花；將三朵獨立的花連結起來，並且使其可圈出的四朵花內的數字和相等。

- 2、**策略：**(1) 先將骨牌依數字大小分類。
 (2) 先將最小值做出，在做出最大值。
 (3) 嘗試做中間值 (最大值 + 最小值 ÷ 2 = 中間值)
 (4) 再依中間值改變最大、小值。

3、**以下是「賓士雙響砲」成功的圖形示例：**



最小值：8

中間值：18

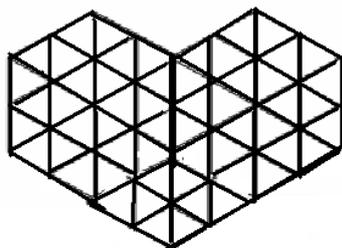
最大值：28

發現：

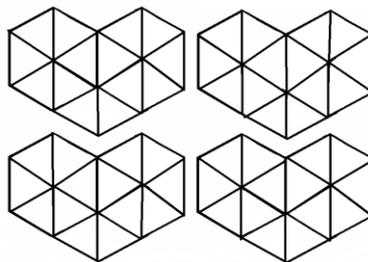
- 1、最小值只能做到 8，我們無法拼湊出賓士花值為 7 的解答。
因為我們已經使用了最小的九張牌。
- 2、最大值只能做到 28，我們無法拼湊出賓士花值為 29 的解答。
因為我們已經使用了最大的九張牌。

(二) 二十八張牌全用上之圖形發展

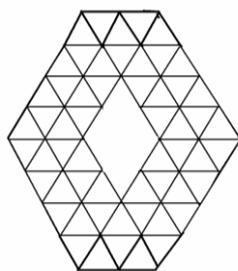
我們所找到一副骨牌二十八張全用上之圖型：



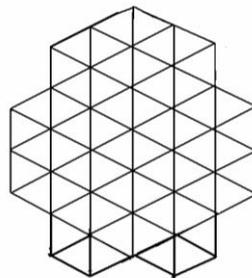
大心型



四小心型〈同時〉



中空菱形



阿尼型

(三) 二十八張牌全用上之遊戲設計

遊戲一：「大心形」數字花

1、遊戲規則：

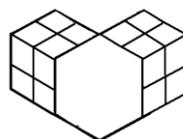
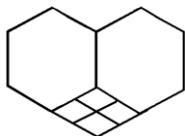
在大心形圖形底板上，用盡一副骨牌使大心形內每一朵花數字和相同且都等於數字和 18。

探討：大心形的圖形，其實可以分成兩種同型結構來分析：

第一：是由兩個七朵花（也就是雙花齊鳴）和另外四張牌排出的。（如圖四）

第二：是由一個七朵花加上左上及右上共 16 張牌組成的。（如圖五）

《圖五》



《圖四》

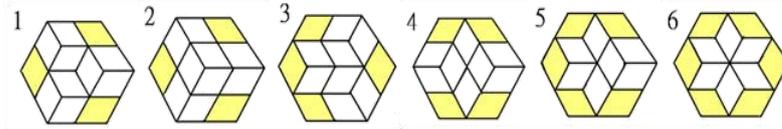
由於我們之前有做過數字和 18 的雙花齊鳴，所以可以將他運用在第一種結構上。而且它所需要變動的牌數也比較少，所以我們選用他來做心形十九朵花。

因為使用雙花齊鳴來做，所以我們回頭對七朵花的結構做了更深入的研究。

發現：

針對七朵花的結構，我們發現：

- 1、總共只有六種結構。
- 2、其中以第6種最適合在大心形圖形遊戲中轉角度及換牌。

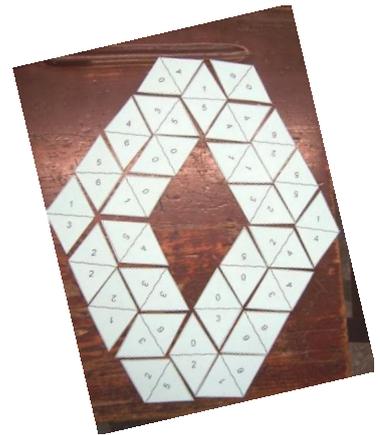


遊戲二：「中空菱形」數字花

1、**遊戲規則：**

使用28張牌，以一朵花為出發點，用接龍的方式環繞一個菱形一圈，使頭尾相接成為兩朵花，即構成內含14朵花的中空菱形。

2、**遊戲目標：**使每朵花內數字和相同。



發現：

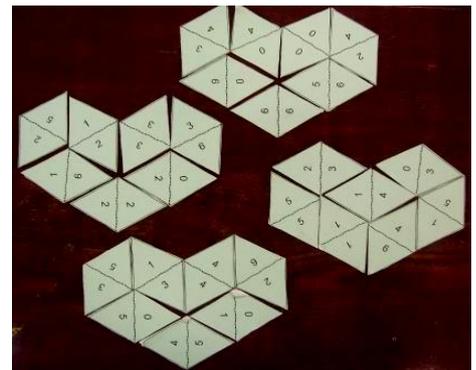
中空菱形這個圖形可以利用先前傳統骨牌研究的

$2 \times N$ 接龍來破解。但如果在排最後一張牌時，這張牌的位子使他必須同時用到兩次，那我們就必須將他周邊不完整的兩朵花目前是同樣的數字和。

遊戲三：「四小心型」數字花

探討：訂定遊戲規則：

使用28張牌，同時做出四個由7張牌排出的小愛心，讓每一個小愛心中的三朵花數字和相同。



發現一：

此圖形和其他的圖形遊戲玩法略有不同，

最大的特色為：「必須使用一副骨牌，

同時排出四個小愛心，並使每一個小愛心做出相同數字和之解。」

大膽猜測：

此圖形有解的數字和範圍會依上述特性有所變化。

發現二：

數字和範圍由16~20。若遊戲目標數字和超過此範圍，則此圖形無解。

分析：

我們試圖探討「為何數字和極值的範圍介於16~20?」、「為何做不出更小的數字和15?或更大的數字和21?」的原因：

當我們在完成3組「小心型」之後，一定會剩下7張牌，如果要做出數字和小於18的解答，7張牌之中單張數字和小於6的牌張數就必須多餘單張數字和大於6的牌張數才能成功。

相反的，如果要做出數字和大於18的解答，7張牌之中單張數字和大於6的牌張數就必須多餘單張數字和小於6的牌張數才能成功。

陸、 討論

- 一、在做完十九朵花的數字和18之後，我們對於十九朵花的數字和抱有懷疑。因為他並不是將所有牌全部用上的圖形，所以應該不會和心形或中空菱形一樣一定要使用18當作數字和。由此，我們想到，既然當初做出十九朵花是因為可以排出七朵獨立花。那我們就大膽預測，其他數字和只要可以排出七朵獨立花便可以做出十九朵花。
- 二、新遊戲的創造—初學者應該怎麼玩?在一連串困難的研究之後，我們成功的做出了二朵花到十九朵花的底板遊戲。由於這個遊戲我們希望可以讓各位從其中感覺到數字和、圖形以及排法的樂趣。也讓剛接觸它的人，可以馬上了解它的遊戲規則與玩法，所以我們研究出了有效的解題策略。
- 三、「舊玩具、新玩法；新玩具、新玩法」，本次專題研究透過對骨牌的方形解法，探討雙正方形骨牌可以排出解答的型式。由基本的小圖形到大圖形，並進而推理驗證，解題過程中偵錯和定位中求真。轉而擴展至雙正三角形骨牌的變化。過程中使用了觀察、實作、分類、歸納、類比、分析、推論、轉化與演繹等方法，歷程雖然艱苦卻得到一系列的解題概念。最後我們也完成了新玩法的基本思考策略，能有效而清晰的解題，令人振奮。

柒、 結論

本研究透過實作和有意義的歸納，開發數學遊戲新世界，到目前為止得到以下的結論：

一、一副骨牌的特性

1、我們以圖形有意義的改變，造型新骨牌；集結不同張數的菱形骨牌，排成新圖案，以每一正六邊形的六個數字和皆相等，完成出新遊戲規則。

2、數字和十八— 平均值：

數字和十八，是我們所找出來的花朵數字和平均數。之所以會找到它，主要是因為我們對二到十九朵花的最大、最小值做了研究。得到解答後，再將他們相加除以二得到了18這個數字。

我們還試過其他算法，以下是我們找出的算法：

$$\text{最大值} + \text{最小值} \div 2 = 18$$

$$168 \text{ (整副牌的和)} \div 28 \text{ (整副牌的張數)} \times 3 \text{ (一朵花所需張數)} = 18$$

二、有效解題策略

1、以二朵花數字和最大值作法為例：

(1) 先找到最大的五張牌

(2) 加總數字和，加上能配對的最大共同數。

(3) 我們找到二朵花的最大值。

2、應用拓印法，可以找到相對應的數字和最小值。

3、此方法也可以用最小值著手，來找出數字和最大值。

三、找出數字18是十九朵花最多解答的數字和。

1、發現十九朵花任留一張牌都可以成功。

2、在所有解答中，找出了A、B、C三種類型。引發我們好奇：十九朵花內是否有其他類型的圖形結構排法？

3、而我們已經著手從3D的 $3 \times 3 \times 3$ 正立方體作為研究工具，來找出十九朵花內所有菱形骨牌的排法。

四、十九朵花其他數字和的極限探究。

1、發現十九朵花的數字和極限是15~21都有解答。

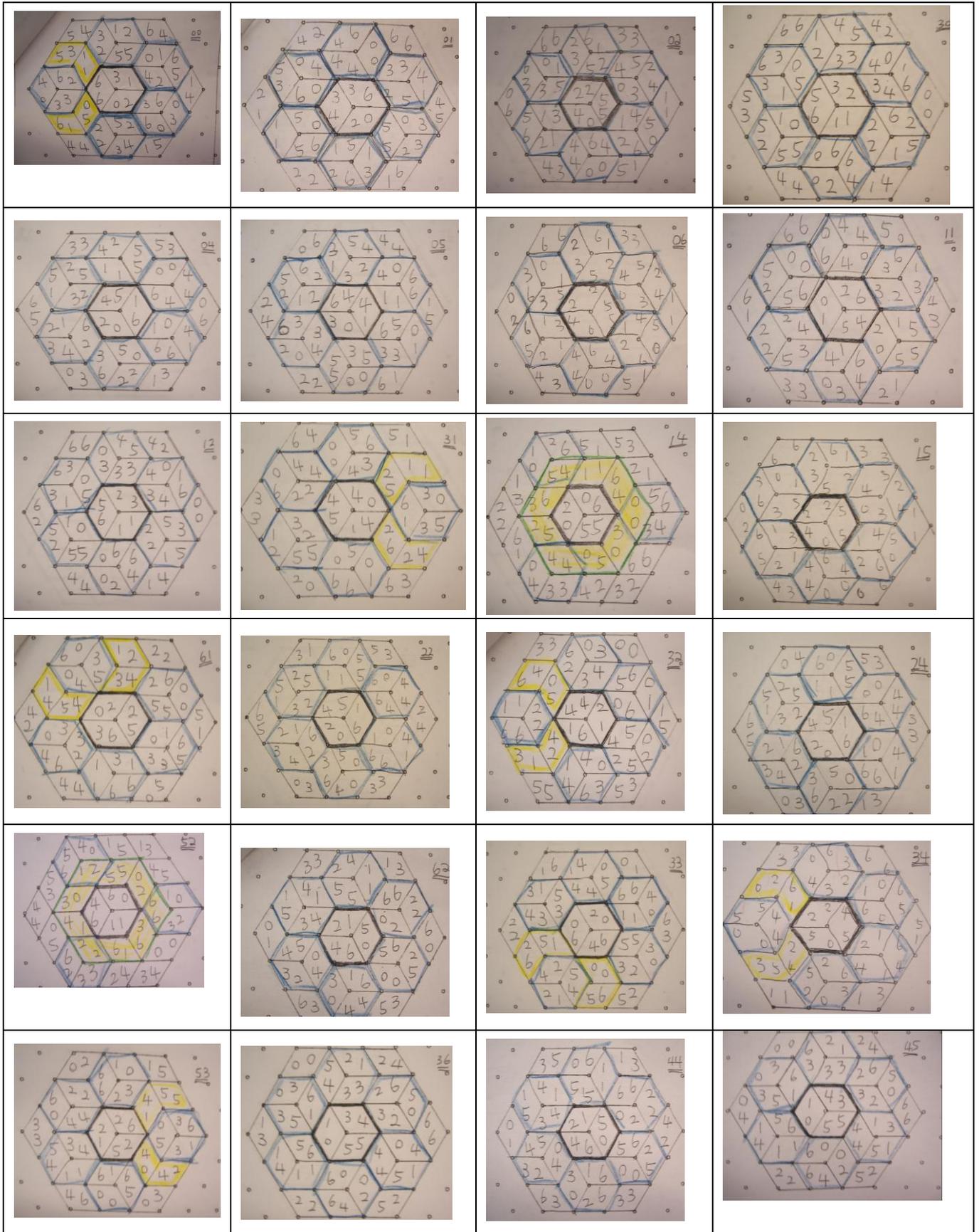
2、證明14和22因為無法同時排出獨立的七朵花所以不會有解答。

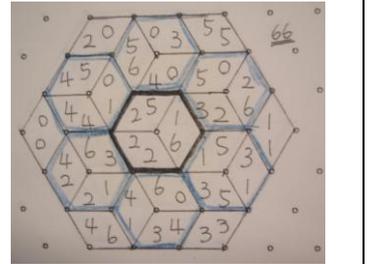
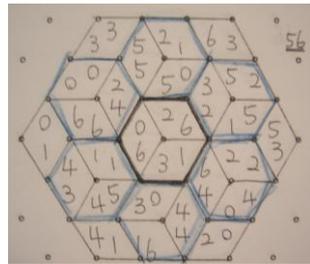
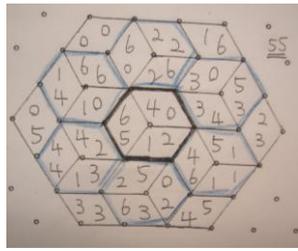
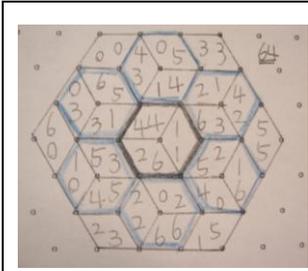
3、在15~21的數字和內，每一種目標數字和，拿掉任一張牌都有解答。

五、骨牌遊戲的變形推廣

將傳統骨牌遊戲進行全新改變，難度雖然增加不少，卻也更具挑戰和趣味性。本研究可持續發展其他有意義的遊戲，尤其我們可以試著發展一系列數學思考和平面空間變化的學習活動。

※ 附件一：





【評語】 080417 骨牌大變身-新式菱形骨牌「數字花遊戲」之
探究

作者將傳統的長方形骨牌變成菱形，再去研究排花遊戲，頗具創意與趣味性。此一作品頗具深度。書面資料敘述清晰，臨場口試也很穩當，回答詢問問題均能切中要點，而且思路清楚。