

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080416

獨「數」一格-探索數獨的奧秘

學校名稱：雲林縣私立維多利亞國民小學

| | |
|---|---------------------|
| 作者： 小五 劉宇翔 小五 施佩綺 小五 林立秦 小五 陳建穎 小五 范鏞璋 小五 李沿叡 | 指導老師： 陳素玲 黃峰文 |
|---|---------------------|

關鍵詞：數獨 九宮格

壹、摘要

一次意外的接觸數獨，開啓了我們研究數獨的興趣，在不斷解題的過程中，我們整理出一些解數獨謎題的方法，探索了數獨題目的難易差別，及設計題目的要領，接著我們利用數獨的對稱位置，創作出有趣的圖形，最後我們嘗試設計出立體的魔術方塊數獨、圓形的雲林縣徽數獨及超炫的布袋戲數獨。

貳、研究動機

上學期教「數列與圖形序列」時，老師給我們一題 81 個格子的東西，peggy 說那是「數獨」，我和 Tony 很有興趣，就試著破解，越做越覺得它很神奇很有趣，又試了很多題，老師看我們那麼投入。於是決定帶我們一起探索數獨的奧妙。

參、研究問題

- 一、解標準數獨需要注意的事項？
- 二、一顆星難度的標準數獨和五顆星難度的標準數獨差別在哪裡？
- 三、如何設計標準數獨謎題（4x4 宮格）與彩色數讀謎題？
- 四、發現對稱數獨的美麗。
- 五、設計新的數獨玩法。

肆、研究文獻

一、數獨的起源

數獨—「Sudoku」名稱來自日文，意思是「獨立的數位」，其概念源自「拉丁方塊」，是十八世紀瑞士數學家歐拉發明的，一開始並沒有得到應有的注目，直到 20 多年前，才漸漸在世界各地受到熱烈迴響。數獨遊戲規則很簡單：在九個九宮格裡，填入 1 到 9 的數字，讓每個數字在每個行、列及九宮格裡都只出現一次。謎題中會預先填入若干數字，其他宮位則留白，解數讀時依謎題中的數字分布狀況，邏輯推敲出剩下的空格裡是什麼數字。以下將標準數獨的規則整理如下：

- （一）由 9 行、9 列共 81 個宮格組成，並區分為九個九宮格。
- （二）在每一行中都要包含數字 1~9。
- （三）在每一列中都要包含數字 1~9。
- （四）在每一個九宮格中都要包含數字 1~9。
- （五）每一格只有一個解。必須可用邏輯的方式解題。

由此看來，「數獨」是一種邏輯思考的遊戲，英國政府出資的「教師」雜誌甚至建議把「數獨」引進課程，作為學生鍛鍊腦力的「教材」。（<http://home.educities.edu.tw/oddest/su101.htm>）

二、目前市面上有的數獨：

數獨的矩陣經計算共有 6,670,903,752,021,072,936,960 種之多。目前市面上有的數獨除了格數增加如 12x12、16x16 等巨無霸數獨之外，有的會將一般數獨轉換成英文字母或花草樹木，

或另外設條件如拼圖數獨、彩色數獨、中央數獨，或重疊二個以上的 9*9 數獨，形成重疊數獨；在 12 階的方陣中，每行、每列都必須包含 3 個數字 1~4，如「多次 12 階數獨」就是在 填製規則上採取本項改變的另類數獨，。(<http://home.educities.edu.tw/oddest/su101.htm>)

三、數獨的特性與難度

(一) 數獨的對稱性不是自然形成的

日本人主張解數獨的過程應是愉快而富有樂趣的，所以堅持以手工打造數獨謎題，爲了和電腦產生的謎題做出區隔，就加上了給定的數字必須是點對稱的限制。的確，對稱的數獨給人較佳的視覺感受，要製作出對稱的數獨也比不對稱的數獨困難一點，但那絕不是自然形成的。不過這項限制對功能強大的電腦程式而言，其實是一點都不受影響的。

(二) 給定數字的多寡並不會影響解的個數和難度。

給定數字的多寡並不會影響解的個數和難度。如果設計不良，即使已給定了 77 個數字，照樣會有兩個解！如圖一。

圖一

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 7 | 5 | 9 | 6 | 2 | 8 |
| 2 | 9 | 5 | 4 | 6 | 8 | 1 | 7 | 3 |
| 7 | 6 | 8 | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 9 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 1 | 2 | 3 | 8 | 6 |
| 1 | 5 | 6 | 3 | 8 | 4 | 7 | 9 | 2 |
| 8 | 3 | 2 | 6 | 9 | 7 | 4 | 5 | 1 |
| 6 | 8 | 3 | 9 | | 5 | 2 | 1 | |
| 9 | 4 | 7 | 2 | 3 | 1 | 8 | 6 | 5 |
| 5 | 2 | 1 | 8 | | 6 | 9 | 3 | |

圖二

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 9 | 3 | | 2 | | | |
| | 1 | | | 5 | | | | 7 |
| | | 7 | | | | | 1 | |
| | 2 | | | | 9 | | | 8 |
| | | | | 1 | | | | |
| 9 | | | 5 | | | | 6 | |
| | 5 | | | | | 9 | | |
| 8 | | | | 9 | | | 5 | |
| | | | 7 | | 4 | 8 | | |

目前發現給定數字最少的數獨謎題需要 18 個數字，如果給定的數字並不要求對稱，那麼則需要 17 個數字。解題的過程中，並沒有因爲數字少而比較困難，所以數獨謎題的難度與給定數字多寡沒有關係。

(三) 任意給的數字不一定會有解

一般坊間數獨的謎題很多。有一種數獨謎題的製作方法爲「挖洞法」，是將填滿的數獨方陣，隨機的挖去部份數字，最後再加以調整，使其可以用邏輯方法解題。大部分的人會用「挖洞法」來設計題目，不過「挖洞法」並不是每一次都會成功，於數獨方陣中隨機放置任意的一些數字，並不是每一次都會有解，即使謎面上的數字完全符合數獨填製的規則，但卻是無解的（如圖二）。 <http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/su303.htm> 數獨雜記 94.10.01

(四) 坊間數獨的解題技巧 (<http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/sumain.htm> 、

<http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku>)

1.直觀式解題技巧

- (1) 基礎摒除法
- (2) 唯一解法

- (3) 區塊摒除法
- (4) 唯餘解法
- (5) 單元摒除法
- (6) 矩形摒除法
- (7) 餘數測試法

2. 候選數法解題技巧

- (1) 唯一候選數法
- (2) 隱性唯一候選數法
- (3) 區塊刪減法
- (4) 數對刪減法
- (5) 隱性數對刪減法
- (6) 三鏈數刪減法
- (7) 隱性三鏈數刪減法
- (8) 矩形頂點刪減法
- (9) 三鏈列刪減法
- (10) 關鍵數刪減法

一般國內坊間除了基本的規則描述，並無較明確的數獨解題技巧，以上的方法出現在外國網站中，由於翻譯關係，不易理解，我們想要再研究出更適合一般人理解的方法。

從以上的文獻中，我們了解了數獨的基本規則與特性，接下來我們將更深入探索破解數獨謎題還有哪些方法；一顆星與五顆星數獨謎題的差別是什麼；除了「挖洞法」之外，設計題目還有哪些可以思考的地方；最後我們從不同的角度欣賞數獨的對稱性，並嘗試設計更新奇有趣的「新」數獨玩法！

伍、研究工具

81 宮格表、魔術方塊

陸、研究方法

爲使問題單純化與深入研究，以下問題與活動將只就標準數獨來探討。

活動一：解標準數獨有哪些小秘方

爲使敘述方便，我們將 81 宮格分成 A~I 九個大格；由上到下分成 1~9 列；由左到右分成 a~i 行（如圖三），所以依圖三來看 $(a, 1) = 1$ ； $(i, 9) = 4$ 。

圖三

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|--|--|--|--|--|--|--|
| A 大格 | B 大格 | C 大格 | | | | | | | |
| D 大格 | E 大格 | F 大格 | | | | | | | |
| G 大格 | H 大格 | I 大格 | | | | | | | |

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | 8 |
| 2 | | | 4 | | 7 | | 1 | | |
| 3 | | 6 | 2 | | | | 3 | 9 | |
| 4 | | | | 4 | | 2 | | | |
| 5 | | 1 | | | | | | 6 | |
| 6 | | | | 1 | | 5 | | | |
| 7 | | 9 | 7 | | | | 5 | 2 | |
| 8 | | | 5 | | 1 | | 8 | | |
| 9 | 2 | | | | | | | | 4 |

從書上、網路上、報紙上，我們嘗試破解許多數獨謎題，從解題中我們整理出一些有用的小秘方，其中若外圍九宮格的數字會影響欲求空格，就將其視爲遠方的「射炮」；欲求九宮格內出現的數字也會影響欲求空格，將其視爲「短刀」，射炮和短刀都可使欲求空格可能的答案減少，進而歸納推理出正確答案。將其整理如下：

- (1) **獨一無二法**：這是解標準數獨最簡單的方法，當某一行、某一行或九宮格中只剩下 1 個數字時，可以從 1 數到 9，看看缺漏哪個數字。再難一點就是從列、行、九宮格中兩方或三方面從 1 數到 9，看看缺漏哪個數字，例如圖四從第 f 個九宮格與第 5 列來看， $(g, 5)$ 不是 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，所以只能是 1。

圖四

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | 8 | | | 6 | 4 | 9 | 1 | 2 | 7 |
| 6 | | | | | | | 5 | 3 | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

- (2) **兩射炮兩短刀法**：除了欲求的九宮格內有兩個位置已出現數字之外（將其視爲短刀），還受外圍九宮格影響，九宮格外有兩個數字（將其視爲射炮）直接刪除這些數字在欲求九宮格內出現的可能。如圖五， $(e, 2) = 5$ 。

圖五

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | 5 |
| 2 | | | | x | 5 | x | | | |
| 3 | | | 5 | | | | | | |

(3) **兩射砲三短刀法**：除了欲求的九宮格內有三個位置已出現數字之外（將其視為短刀），還受外圍九宮格影響，九宮格外有兩個數字（將其視為射砲）直接刪除這些數字在欲求九宮格內出現的可能。如圖六， $(e,2) = 5$ 。

圖六

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | 5 |
| 2 | | | | | 5 | x | | | |
| 3 | | | | x | x | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | 5 | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |

(4) **三射砲一短刀法**：除了欲求的九宮格內有一個位置已出現數字之外（將其視為短刀），還受外圍九宮格影響，九宮格外有三個數字（將其視為射砲）直接刪除這些數字在欲求九宮格內出現的可能。如圖七， $(e,2) = 5$ 。

圖七

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | 5 |
| 2 | | | | | 5 | x | | | |
| 3 | | | 5 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | 5 | | | | | |

(5) **三射砲一局勢**：除了九宮格外有三個數字（將其視為射砲）直接刪除這些數字在欲求九宮格內出現的可能；另外在欲求九宮格的相鄰九宮格（上、下、左或右）出現一列或一行數字，這些數字必須與射砲的數字不同（將此行或此列視為一局勢），其可確定欲求數字的正確位置。如圖八，由三射砲來看， $(e,5)$ 或 $(f,5)$ 都可能是 5，由一局勢來看，如果 $(f,5) = 5$ ，則 B 九宮格內將沒有 5，不可能！所以 $(e,5) = 5$ 。

圖八

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 7 | | | | |
| 2 | | | | | 4 | | | | |
| 3 | | | | | 8 | | | | |
| 4 | | | | | | | | | 5 |
| 5 | | | | | 5 | | | | |
| 6 | | | 5 | | | | | | |
| 7 | | | | 5 | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

(6) **四射砲**：受外圍九宮格影響，九宮格外有四個數字（將其視為射砲）直接刪除這些數字在欲求九宮格內出現的可能。如圖九， $(e,2) = 5$ 。

圖九

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | 5 |
| 2 | | | | | 5 | | | | |
| 3 | | | 5 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | 5 | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | 5 | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

(7) **攻擊一排**：從某一列或行來看，某一個數出現在其他列或行，使得此行或列的部分空格不能再出現這個數字，再加上此行或此列中已出現的數字，即可求出可能出現某數的空格。如圖十從第九列來看，一列中一定只有一個7， $(b,9)$ 、 $(d,9)$ 、 $(f,9)$ 、 $(i,9)$ 都不能是7，所以 $(c,9) = 7$ 。

圖十

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | 7 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | 7 |
| 6 | | | | 7 | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | 7 | | | |
| 9 | x | | 7 | | x | | x | x | |

(8) **先佔領不就位**：由前述七個方法確定哪些格一定是哪些數，雖不清楚正確順序，但先把那些位置占下來，有助求出其他格。如圖十一，第i個九宮格只剩下1、6、8三個數字，從第i行來看，因為6和1已經出現過，所以第 $(i,8)$ 不可能是1和6，1和6一定在 $(g,7)$ $(g,8)$ ，只是確實位置不知，但可知 $(i,8) = 8$

圖十一

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | 6 |
| 4 | | | | | | | | | 1 |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | 3 | 5 | |
| 8 | | | | | | | 4 | 8 | |
| 9 | 6 | | 4 | | | | 2 | 7 | 9 |

(9) **製造矛盾法**：當有 2 格以上都有可能是某個數字時，先假設某一格成立，使某一九宮格或某一列、行出現同一個數字有 2 個的情形。如圖十二，先利用「先佔領不就位」法，從 F 九宮格和第 i 行來看，(i, 4) (i, 6) 一定是 8、9 兩個數字，則 (i, 7) (i, 8) (i, 9) 一定是 1、3、5，只是順序不一定，(g, 4) (h, 4) 一定是 4 和 6 兩個數字。若 (i, 6) = 9，(a, 4) 必定是 9，但第 a 行已經有 9 了，會形成矛盾，所以 (i, 6) = 9 是錯的，則 (i, 4) = 9, (i, 6) = 8。

圖十二

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | 2 |
| 2 | | | | | | | | | 4 |
| 3 | | | | | | | | | 6 |
| 4 | | x | x | | | | | | 9 |
| 5 | | | | | | 9 | 1 | 2 | 7 |
| 6 | | | | | | | 5 | 3 | 8 |
| 7 | 9 | | | | | | | | ※ |
| 8 | | | | | | | | | ※ |
| 9 | | | | | | | | | ※ |

(10) **旁敲側擊法**：在所求的九宮格外沒有足夠的射炮或短刀可以使用，必須利用不斷的『先佔領不就位』法，旁敲側擊求出。例如圖十三 (h, 6) (I, 7) (e, 9) 是 8，以攻擊一排法可看出，對第二列而言，(a, 2) (b, 2) 至少有一個 8；在第 G 個九宮格中，因 (e, 9) = 8, (i, 7) = 8，所以 (a, 8) 或 (b, 8) 至少有一個 8；由於上述兩個原因，所以第 D 個九宮格中的第 a、b 行不可能有 8，又第 e 行有 8，所以 (d, 5) 或 (f, 5) 其中有一個是 8，所以 (c, 5) 不可能是 8，至此，第 D 個九宮格中只剩 (c, 4) 可以是 8。

圖十三

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | x | x | | x | x | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | 8 | x | | x | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | x | | x | | 8 | |
| 7 | | | | | | | | | 8 |
| 8 | | | x | | | | | | |
| 9 | | | | | 8 | | | | |

以上是從簡到難的數獨謎題常使用的一些小秘方，在敘寫方法的過程中，我們也發現要解出一個空格，最少需用到 4 個以上的條件，例如單單只有兩射砲，無法解題，必須再加上 2 個以上的短刀；三射砲則至少需要 1 個以上的短刀才可解題；若有四射砲，則不需要有短刀也可解題。有時候同一空格需要連續用到 2 次以上的某個方法才能解，有時候則是要連續用不同的方法才能解。總之，解數獨謎題真是得要眼看多方。

活動二、一顆星難度的標準數獨和五顆星難度的標準數獨差別在哪裡？

坊間書上、報紙上或網路上的數獨謎題，爲了激發讀者的興趣與挑戰性，通常會爲該題數獨謎題依解題的難易程度由簡至難分爲五級：1.簡易級（一顆星），2.普通級（二顆星）3.困難級（三顆星）4.魔鬼級（四顆星）5.惡魔級（五顆星），一顆星最容易，二顆星次之，五顆星最難。以下將在同一本書（超級數獨4）找到的題目，一顆星（如圖十四）與五顆星（圖十五）的數獨謎題做比較，討論題目的差異與解題技巧的差別，列表如表一。

圖十三 一顆星數獨謎題

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | 8 |
| 2 | | | 4 | | 7 | | 1 | | |
| 3 | | 6 | 2 | | | | 3 | 9 | |
| 4 | | | | 4 | | 2 | | | |
| 5 | | 1 | | | | | | 6 | |
| 6 | | | | 1 | | 5 | | | |
| 7 | | 9 | 7 | | | | 5 | 2 | |
| 8 | | | 5 | | 1 | | 8 | | |
| 9 | 2 | | | | | | | | 4 |

圖十四 五顆星數獨謎題

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | | | 9 | | | 4 | 3 |
| 2 | 4 | | | | | | | | 7 |
| 3 | | | 7 | | 3 | | 9 | | |
| 4 | | | | 2 | | 6 | | | |
| 5 | 7 | | 8 | | | | 2 | | 1 |
| 6 | | | | 3 | | 1 | | | |
| 7 | | | 5 | | 1 | | 8 | | |
| 8 | 2 | | | | | | | | 9 |
| 9 | 1 | 8 | | | 6 | | | 7 | 4 |

表一

| | 圖十三 | 圖十四 |
|---------------|--------|--------|
| 出現的提示數字 | 24 個 | 28 |
| 只使用方法一 | 21.7 次 | 16.4 次 |
| 只使用方法二 | 8 次 | 6.4 次 |
| 只使用方法三 | 4 次 | 3.6 次 |
| 只使用方法四 | 8.3 次 | 2.8 次 |
| 只使用方法五 | 1 次 | 0.6 次 |
| 只使用方法六 | 4.3 次 | 1.6 次 |
| 只使用方法七 | 3.7 次 | 0.2 次 |
| 只使用方法八 | 2.5 次 | 9.8 次 |
| 只使用方法九 | 1.2 次 | 4.2 次 |
| 只使用方法十 | 0 次 | 0 次 |
| 使用某個方法 2 次以上 | 2.8 次 | 5 次 |
| 連續使用 2 個以上的方法 | 1.3 次 | 4.2 次 |
| 解題時間（6 人平均） | 17.3 分 | 36 分 |
| 求法 | 取六人平均 | 取六人平均 |

爲了增加結果的可靠性，我們再從報紙上找出一題一顆星數獨謎題與一題五顆星數獨謎題做比較。

圖十五 一顆星數獨謎題

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | | | 7 | | 3 | | |
| 2 | 5 | | | 1 | | | 4 | 8 | 9 |
| 3 | 8 | | 3 | | | 4 | | 7 | 5 |
| 4 | | | 6 | | | | 9 | | 3 |
| 5 | | 9 | | | 5 | | | 6 | |
| 6 | 2 | | 5 | | | | 7 | | |
| 7 | 6 | 1 | | 9 | | | 5 | | 2 |
| 8 | 3 | 5 | 8 | | | 1 | | | 7 |
| 9 | | | 9 | | 3 | | | 1 | |

圖十六 五顆星數獨謎題

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 9 | | | | | | |
| 2 | | | | | 7 | 1 | | | |
| 3 | 8 | 3 | | | | 6 | 1 | | |
| 4 | | 5 | | | | | | 8 | 2 |
| 5 | 3 | | 7 | | 8 | | 5 | | 4 |
| 6 | 2 | 9 | | | | | | 6 | |
| 7 | | | 5 | 1 | | | | 4 | 6 |
| 8 | | | | 8 | 9 | | | | |
| 9 | | | | | | | 9 | | |

表二

| | 圖十五 | 圖十六 |
|---------------|--------|--------|
| 出現的提示數字 | 35 個 | 25 個 |
| 只使用方法一 | 22 次 | 12.2 次 |
| 只使用方法二 | 6 次 | 3 次 |
| 只使用方法三 | 3 次 | 4.2 次 |
| 只使用方法四 | 3 次 | 2.6 次 |
| 只使用方法五 | 0 次 | 3.4 次 |
| 只使用方法六 | 1.3 次 | 4.6 次 |
| 只使用方法七 | 6.8 次 | 1.2 次 |
| 只使用方法八 | 2 次 | 10.2 次 |
| 只使用方法九 | 0.2 次 | 4.8 次 |
| 只使用方法十 | 0 次 | 0 次 |
| 使用某個方法 2 次以上 | 4.7 次 | 5 次 |
| 連續使用 2 個以上的方法 | 3.5 次 | 8.8 次 |
| 解題時間（6 人平均） | 10.4 分 | 20.8 分 |
| 求法 | 取六人平均 | 取六人平均 |

有時候同一個空格會因不同人解題方法不同，而將其計算入不同的表格中，所以我們取 6 人的平均數填入表格。由表一和表二我們可以發現

- (1) 一顆星和五顆星謎題的提示數字不一定孰多孰寡。
- (2) 不論是一顆星或五顆星題目，都很常使用方法一「獨一無二」法。
- (3) 一顆星謎題在方法一「獨一無二」、方法二「兩射砲兩短刀」、方法四「三射砲一短刀」和方法七「攻擊一排」的使用次數，比五顆星謎題多。
- (4) 五顆星謎題在方法八「先佔領不就位」及方法九「製造矛盾法」的使用次數，比一顆星明顯增多。
- (5) 方法十「旁敲側擊」法在一顆星和五顆星題目都很罕見。

- (6) 五顆星謎題比一顆星謎題在解同一個空格時，較常使用同一個方法兩次以上，同時也常在解同一個空格時，連續使用兩個以上的方法來解題。
- (7) 五顆星謎題的解題時間明顯多於一顆星謎題的解題時間。

將上述發現整理如下

- (1) 提示數字越多不代表解題越困難，驗證文獻中所說的數字多寡不影響難度。
- (2) 一顆星題目求出一個空格後，可以舉一反三 連續求出很多數字，所以使用「獨一無二」法的機會較多，解題速度也較快。
- (3) 一顆星謎題使用射砲短刀的機會較多，五顆星謎題很難只依靠射砲短刀來解題。
- (4) 一顆星謎題缺的數字常常是直排橫排或小九宮格內即可找到。
- (5) 五顆星的謎題要考慮的範圍比較多必須從整個九宮格來看，所以會使用比較多方法八「先佔領不就位」及方法九「製造矛盾法」。且兩法常搭配一起使用，所以五顆星謎題在連續使用兩種方法求同一格的機會也比較多。
- (6) 「旁敲側擊」法屬於較特殊情形所用的方法，所以一般題目不常用。

活動三、如何設計數獨謎題（4x4 宮格）？

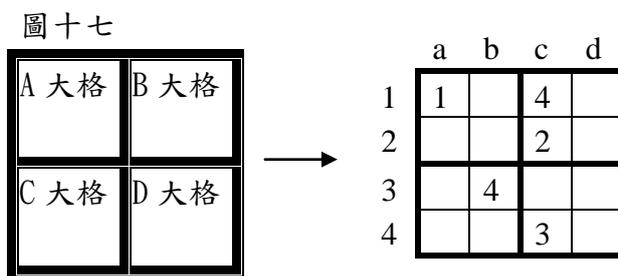
從文獻裡，我們知道數獨謎題的點對稱是「規定」而來的，所以一開始設計題目時，先不必顧慮對稱的問題。

（一）設計標準數獨

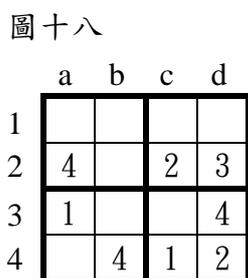
爲了嘗試出題，我們將格數簡化成 4x4，即 4 個四宮格，依據之前推算九宮格謎題的方法，判斷或刪除題目上的數字。首先，將 4x4 宮格謎題的限制規定如下

1. 由 4 行、4 列共 16 個宮格組成，並區分爲 4 個四宮格。
2. 在每一行中都要包含數字 1~4。
3. 在每一列中都要包含數字 1~4。
4. 在每一個四宮格中都要包含數字 1~4。
5. 每一格只有一個解。必須可用邏輯的方式解題。

爲使敘述方便，我們仍將四宮格分成 A~D 四個大格；由上到下分成 1~4 列；由左到右分成 a~d 行（如圖十七）。



設計題目時，我們先將部分數字填入空格中，依照上面的限制規定，增加或刪除數字。我們當中有人先設計出圖十八。



圖十八的解題方法只需用到活動一中的「獨一無二法」。大家開始思考是否有辦法將題目變得深一些。作成以下增加難度的方法

（1）刪除可求出的數字：

如 $(b,4) = 4$ ，可由第 a 行和第 3 列求出，所以不必提示，可以刪除。 $(d,4) = 2$ 可由第 c 行已出現 2，且第 D 個四宮格中 $(d,3)$ 已知求出，所以不必提示，可以刪除。

（2）刪除有兩種以上的方法可以求出的提示數字：

例如因第 d 行已有 2、3、4，所以 $(d,1) = 1$ ，或者可由先佔領不佔位法，得知第 B 個四宮格知 $(c,1)$ 和 $(d,1)$ 爲 1 或 4，又第 d 行有 4，所以也可知 $(d,1) = 1$ ，有兩種方法可求出，所以 $(d,4) = 2$ 可刪除。

（3）刪除藉由先求出其他數字即可求出的提示數字：

刪除非一眼可看出，但藉由先求出其他數字即可求出的提示數字。例如先求出(c,1)=4 之後，第 1、2 兩列必各有一個 4，又 b 行已有 4，所以 (a,2)=4 可刪除。由上述 (1)、(2)、(3) 得到刪除後的四宮格謎題如圖十九。

圖十九

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | 2 | 3 |
| 3 | 1 | | | 4 |
| 4 | | | | |

圖二十

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 4 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | 2 | | 3 | |

圖二十一

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 4 |
| 2 | | | | |
| 3 | 2 | | | |
| 4 | | | 2 | |

(4) 移動數字使無法一眼看出：

圖十九中，2、3、4 的位置太過集中，1 和 4 又在同一列，所以很快可以看出 (c,3)=3。為了令解題者無法迅速找到第一個可求數字，我們把數字分開，如圖二十。

(5) 更改數字：

圖二十中，四個數字都已出現，且藉由射砲和短刀法求出空格並不難，於是我們再想辦法不讓四個數字全部出現，如圖二十一，此謎題中的提示數字沒有 3。此題解法先藉由射砲短刀法求得 (c,3)=4、(d,2)=2、(c,2)=1，再由獨一無二法求得 (c,1)=3、(b,1)=2，接著假設 (d,4)=1，則由「獨一無二」法得到 (d,3)=3、(b,3)=1，因線索不足，無法再求，如圖二十二。若假設 (d,3)=1，則由「獨一無二」法得到 (d,4)=3、(b,3)=3，由「射砲短刀」法得到 (b,4)=1，最後由「獨一無二」法得到 (a,2)=3、(b,2)=4、(b,1)=2、(c,1)=3，如圖二十三，有唯一解，可完整求出。

圖二十二

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | | | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | | | 2 | 1 |

圖二十三

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 1 | 2 | 3 |

由上述方法，圖二十的題目顯然較圖十八的題目還難。所以以上五種方法皆可增加題目的難度。

依據上述設計題目的方法，我們也設計出 9x9 的標準數獨與 12x12 的標準數獨。

圖二十四

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 6 | | 5 | | | | |
| 2 | | | 3 | | 2 | | | 9 | |
| 3 | 7 | | | | | 6 | | | 4 |
| 4 | | | 4 | | | 1 | | | 6 |
| 5 | | 3 | 1 | 6 | | 2 | 4 | 8 | |
| 6 | 8 | | | 7 | | | 1 | | |
| 7 | 9 | | | 4 | | | | | 5 |
| 8 | | 4 | | | 1 | | 2 | | |
| 9 | | | | 7 | | 8 | | | 3 |

圖二十五

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1 | | 12 | 9 | | | | 11 | | |
| 2 | | 10 | 4 | 11 | | | | 6 | |
| 3 | | 2 | 8 | | 3 | | 9 | | |
| 4 | 5 | | | 12 | 9 | 3 | | | 7 |
| 5 | | | 11 | 4 | 2 | | | 5 | 3 |
| 6 | 2 | | 7 | | 5 | 6 | | | |
| 7 | 11 | 4 | | | | 2 | 6 | 12 | |
| 8 | 12 | | 3 | 9 | | | 10 | 8 | 5 |
| 9 | 8 | | | | 12 | | 3 | 9 | |
| 10 | | | 5 | 1 | | 8 | | 3 | |
| 11 | 7 | | | 2 | | | | 10 | 8 |
| 12 | 10 | 8 | 6 | | | 11 | | | 9 |

(二) 設計彩色數獨

設計出標準數獨後，我們希望能再多一點變化，於是老師建議我們嘗試加上顏色限制，為能方便說明，我們仍先將以 4x4 宮格為例。經過幾次試驗後，我們有了以下的心得與結論。

- (1) 先將顏色塗好如圖二十六。
- (2) 將符合 4x4 宮格規定的數字填入 (如圖二十七)。
- (3) 為使進一步符合色彩的限制 (每一種顏色要包含 1~4)，所以要調整某些數字，如 (3,a) 中的 2 換成 4；(3,d) 中的 4 換成 2；(4,a) 中的 4 換成 2；(4,d) 中的 2 換成 4，即可符合 (如圖二十八)。
- (4) 接著依照前述設計標準數獨的規則與增加難度的方法刪掉數字，如圖二十九。在圖二十九中，有的空格需考量到顏色限制才可得到解答。

圖二十六

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

圖二十七

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 1 | 2 |

圖二十八

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 |

圖二十九

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | 2 | | |
| 3 | | | 3 | |
| 4 | | | | 4 |

根據上述 (一) 和 (二) 的結論我們將在活動五有精采的自創數獨。

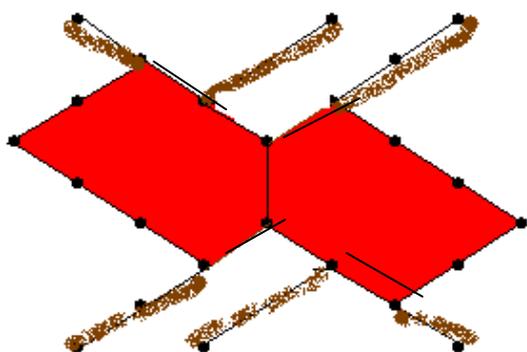
活動四、發現對稱數獨的美麗

有一次當大家在想題目時，有人隨手將這些數字連起來，沒想到變成一個很奇怪的圖形，其他人也各自連連看，結果出現了好多不同的圖形。我們由對稱數獨發現其實數學也有美麗好玩的一面呢！以圖三十的題目為例，我們連出了以下六種有趣的圖形。

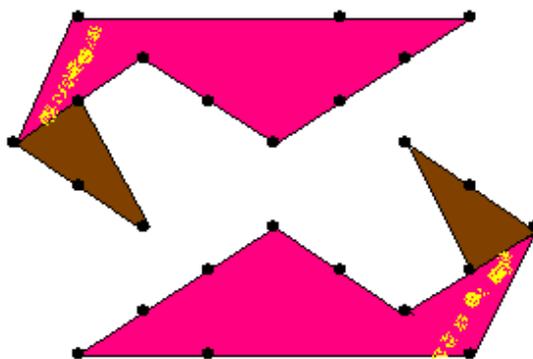
圖三十

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 3 | | | | 5 | | 8 | |
| 2 | | | 1 | | | | 2 | | |
| 3 | | 5 | | 4 | | 9 | | | |
| 4 | 4 | | | | 1 | | 9 | | |
| 5 | | 7 | | | | | | 4 | |
| 6 | | | 5 | | 6 | | | | 1 |
| 7 | | | | 8 | | 6 | | 7 | |
| 8 | | | 6 | | | | 8 | | |
| 9 | | 2 | | 5 | | | | 1 | |

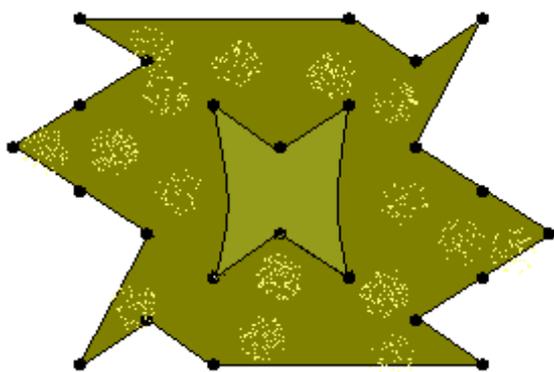
圖三十一 紅螞蟻



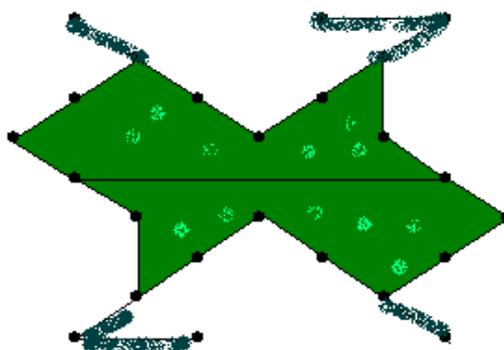
圖三十二 時尚高跟鞋



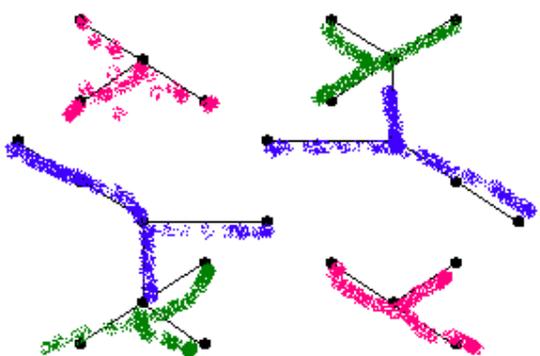
圖三十三 枯葉蝶



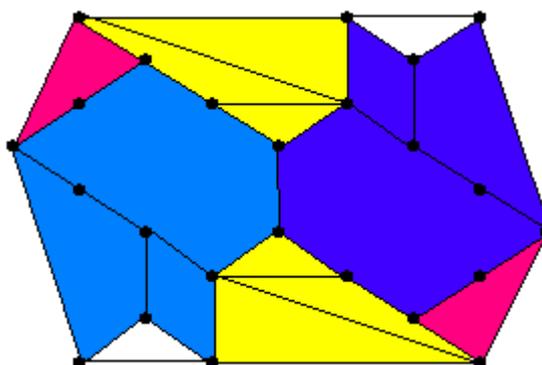
圖三十四 青蛙



圖三十五 Y形



圖三十六 一石二鳥



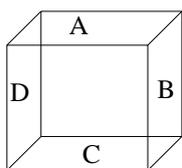
從圖三十一到圖三十六，我們發現即使是相同的位置，只要加一點創意就可以變出許多有趣的點對稱圖案，「數獨」除了高深莫測之外，也有美麗親切的一面。

活動五、設計新的數獨玩法

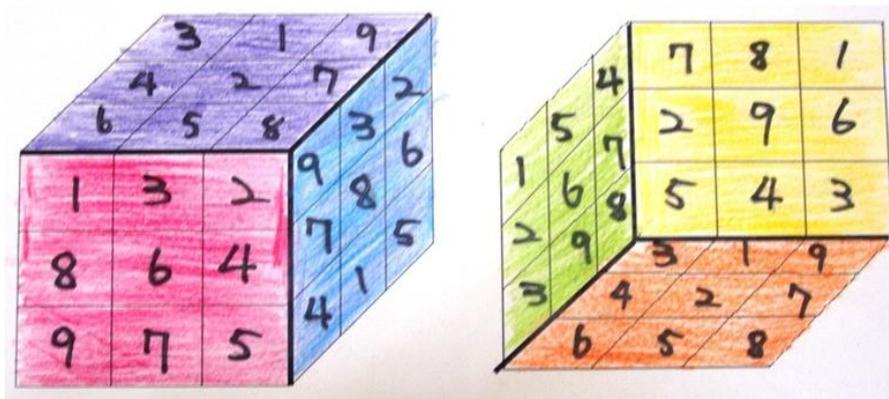
看了這麼多數獨玩法，也有了設計數獨的基本概念，我們想要自己設計一些更有趣好玩的數獨。

- (一) 魔術方塊數獨：玩魔術方塊時，我們突然想像如果方塊裡也有數獨謎題，應該是什麼樣子，有了這個構想，開始著手在每個方格中填數字，因為圍繞正方體的面有四個，會有 12 個數字（如圖三十七中的 ABCD 四個面），但是每個面只有 9 個數字，所以玩法上必須有多一些限制，魔術方塊數獨完成後的透視圖如圖三十八。

圖三十七



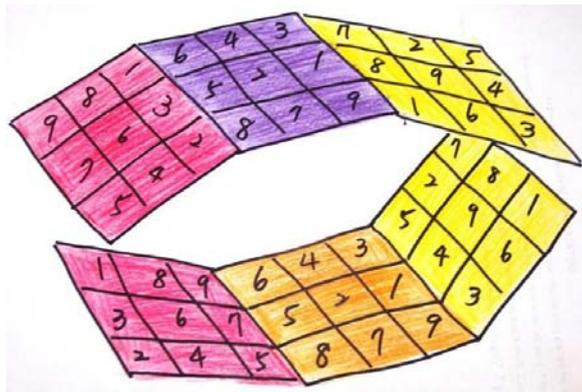
圖三十八



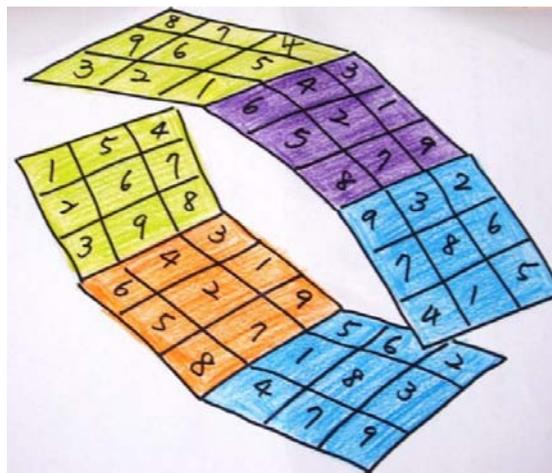
魔術方塊數獨玩法：

1. 方塊的六個面，每一面都要包含數字 1~9。
2. 紅色、紫色、黃色三個連續面的直行要包含數字 1-9，黃色、橘色、黃色三個連續面的直行要包含數字 1-9。（如圖三十九）
3. 綠色、紫色、藍色三個連續面的直行要包含數字 1-9，綠色、橘色、藍色三個連續面的直行要包含數字 1-9。（如圖四十）

圖三十九



圖四十

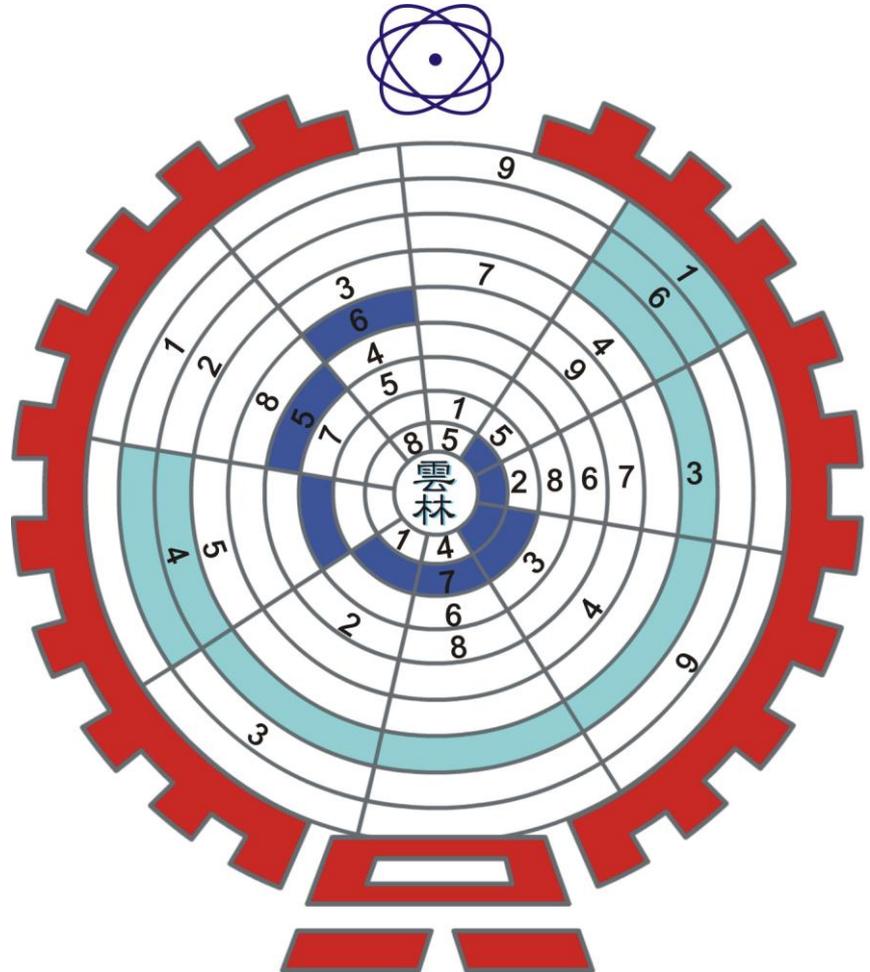


(二) 雲林縣徽數獨：有了立體的數獨（魔術方塊數獨）我們又想要製作出圓形的數獨，先畫一個圓，由內而外，畫出第 1~9 層的同心圓，再將這九個同心圓分成 A~I 九個區域，因為雲林縣縣徽內部也是圓形（如圖四十一），我們將兩者結合，又縣徽內有兩條帶子代表雲林縣內兩條主要河川—濁水溪與北港溪，所以我們又在圓內部加上兩條藍色帶子（如圖四十二）。

圖四十一



圖四十二



雲林縣徽數獨玩法：

1. 縣徽由內而外（第 1~9 層）要包含數字 1~9。
2. 縣徽中每一圈的 A~I 九個區域，要包含數字 1~9。
3. 縣徽中深藍色的格子要包含數字 1~9；淺藍色的格子也要包含數字 1~9。

(三) 布袋戲數獨：如果可以把數獨謎題變成一個有趣的圖形就更棒了！所以我們想到雲林縣最有名的民俗技藝－布袋戲，把設計出的兩個人型數獨放入當紅的布袋戲人偶－素還真與一頁書體內，使數讀謎題除了擁有一般數獨的樂趣，還有彩色數獨的難度（如圖四十三）。

圖四十三



布袋戲數獨玩法：

1. 每個人偶的每一行中都要包含數字 1~9。
2. 每個人偶的每一列中都要包含數字 1~9。
3. 每個人偶中相同顏色要包含數字 1~9。
4. 將每個人偶中最上方的九宮格（即人偶的臉）放回人偶身體的缺口，使得第 10、11、12 列包含數字 1~9。

捌、研究發展與建議

從活動一、活動二、活動三、活動四及活動五，我們有以下結論

- 1.從活動一我們整理出十種解題小秘方，有「獨一無二」法、「兩射砲兩短刀法」、「兩射砲三短刀」法、「三射砲一短刀」法、「三射砲一局勢」法、「四射砲」法、「攻擊一排」法、「先佔領不就位」法、「製造矛盾」法及「旁敲側擊」法。
- 2.從活動一得知要解出一個空格，最少需用到 4 個以上的條件
- 3.從活動二得知提示數字越多不代表解題越容易，驗證文獻中所說的數字多寡不影響難度。
- 4.從活動二得知一顆星題目求出一個空格後，可以舉一反三 連續求出很多數字，所以使用「獨一無二」法的機會較多，解題速度也較快。
- 5.從活動二得知一顆星謎題使用射砲短刀的機會較多，五顆星謎題很難只依靠射砲短刀來解題。
- 6.從活動二得知一顆星謎題缺的數字常常是直排橫排或小九宮格內即可找到。
- 7.從活動二得知五顆星的謎題要考慮的範圍比較多必須從整個九宮格來看，所以會使用比較多方法八「先佔領不就位」及方法九「製造矛盾法」。且兩法常搭配一起使用，所以五顆星謎題在連續使用兩種方法求同一格的機會也比較多。
- 8.從活動三我們得知設計題目時除了遵守數獨的基本規定，還有以下增加難度的方法
 - (1) 刪除可求出的數字
 - (2) 刪除有兩種以上的方法可以求出的提示數字
 - (3) 刪除藉由先求出其他數字即可求出的提示數字
 - (4) 移動數字使無法一眼看出：
 - (5) 更改數字另外我們也嘗試設計出彩色數讀。
- 9.從活動四藉由對稱數獨，我們發現即使是相同的位置，只要加一點創意就可以變許多有趣的點對稱圖案，數獨除了「高深莫測」之外，也有「美麗親切」的一面。
- 10.在活動五裡，我們利用活動一至活動四的結論，自己設計出立體的魔術方塊數獨、圓形的雲林縣徽數獨、超炫的布袋戲數獨。

以上結論希望對於初學數獨者或是數獨高手，對數獨有更深入的了解，除了了解更多解題的方式之外，也能和我們一樣設計出更多更有趣的新數獨。

玖、參考資料

參考書籍

- 1.P.CREATION (2006.9)。超級數獨(4)。尖端出版，城邦文化事業股份有限公司
- 2.張淡譯(2005)。如何解數獨。格林文化出版。
- 3.自由時報副刊數獨。

網路資源：

- 1.<http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/su303.htm> 數獨雜記 94.10.01
2. <http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku>

【評語】 080416 獨「數」一格-探索數獨的奧秘

「數獨」此一遊戲目前在全世界頗為流行，不只具趣味性且具挑戰性。作者將他們的經驗所得歸納為十個小秘方，非常值得參考，同時，他們也設計了幾種不同的圖形與玩法。這些都有賴全體作者團隊合作，才有此一好的作品。