

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080413

翻滾吧!骨牌~旋風魔方陣

學校名稱：臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者： 小六 沈宗郁 小六 黃政岳 小五 邱健樺 小五 蕭宇晨	指導老師： 何鳳珠 張祖銘
---	---------------------

關鍵詞：骨牌 九宮方牌 組型

摘要

推推樂的連鎖效應遊戲是多數人對骨牌的印象，殊不知骨牌上的點數也可以營造出好玩且具思考性的數學拼組活動，有幸在去年高雄市的科展中看到多米諾骨牌的活動介紹，激發了我們深入探究的動力，因此以骨牌拼組的九宮方陣作為本次研究的主題。

本研究將骨牌上的點數改換成數字模式，製作出整組的數字骨牌，進行九宮方陣的拼排，在窮盡所有的組合中，我們歸納出三大組型～對稱型、可逆型及單一型，並分別進行規律的分析與探究。再則，我們也發現同骨同 N 不同組法的骨牌組成元素及同骨不同 N 的骨牌組成元素，並利用自己研發的交錯搭配法來快速研判能否拼組成功。除了九宮方陣外，我們運用九宮方陣的性質延伸設計出更有難度的方連組型及風車組型，並將此本次的研究成果設計成五套益智動腦的遊戲組，讓大家一起來挑戰動腦筋。

關鍵字詞：骨牌、九宮方陣、組型

翻滾吧！骨牌～旋風魔方陣

一、研究動機

去年到科工館參觀了高雄市的科學展覽，有一個組別做了多米諾數字遊戲，那時很驚訝，原來骨牌除了可以玩“推推樂”及“數字接龍”外，還可以玩出很棒的數學遊戲，其中一項圍城之戰的九宮方陣，讓我們感到興趣，因此就利用這一次的科展做深入的探索，它有別於一般的填數字遊戲，因為數字有部分重複，且重複的又有限，讓我們覺得很有意思，因此就一頭栽進了這個數字遊戲的漩渦中。

二、研究目的

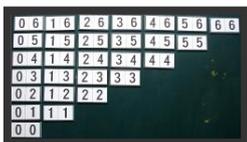
1. 28 片數字骨牌能排出多少種邊數和相同的九宮方陣？
2. 探索暗藏在九宮方陣內之規律與組型。
3. 在有效骨牌範圍內任抽 n 片 ($n=2\sim 4$) 骨牌是否皆能排出九宮方陣？
4. 連環九宮方陣之組型探究。
5. 數字骨牌遊戲套組之應用與設計。

三、實驗研究器材

數字骨牌、九宮方陣圖卡、方連組型圖卡、風車組型圖卡、實驗單、Excel 軟體、數位相機

四、名詞定義

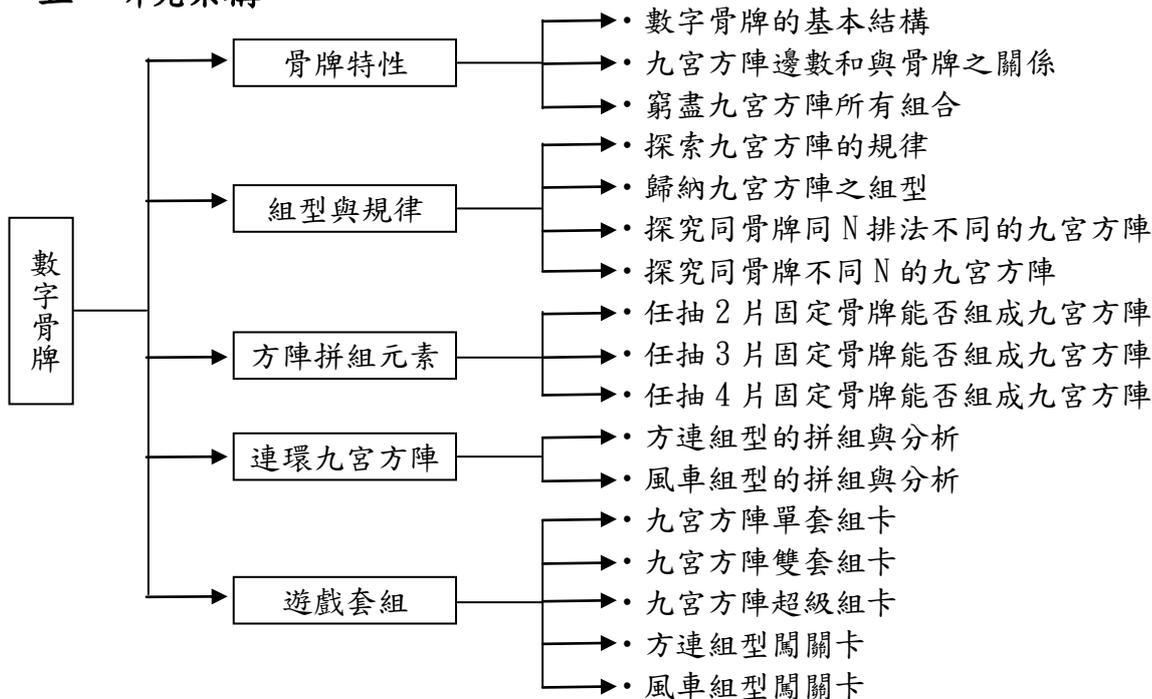
1. 數字骨牌：骨牌上的點數轉換成數字所成的數字骨牌，共 28 片。



2. 九宮方陣：以 4 片骨牌（例：00-20-01-11）圍成的中空方陣。
3. 邊數和：九宮方陣每邊的數字和，在本活動的代碼為 N 。
4. 骨牌和：每片骨牌的數字和。
5. 有效骨牌組：可能拼組成九宮方陣的骨牌組，其大小骨牌和差距在 6 以內。
6. 交錯搭配法：運用骨牌和與 N 之間的差交叉配對，快速組成九宮方陣的方法。
7. 方連組型：直線連環的九宮方陣所形成的組型
8. 風車組型：環形的九宮方陣所形成的組型

0	0	2
1		0
1	1	0

五、研究架構



六、研究歷程與方法

活動一：28 片的數字骨牌能排出多少種邊數和相同的九宮方陣？

【過程 1-1】探究數字骨牌的基本結構

1. 骨牌上的點數為 0~n，依排列組合原理共有 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 片，本實驗骨牌組

n=6，因此共有 $\frac{(6+2)(6+1)}{2} = 28$ 片骨牌。在 Yahoo! Games 中提到的另一種

骨牌組合是二乘九的組合，其組共有 55 片骨牌（最大點數為 9）。【表 1】

最大點數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
骨牌	00	00, 01, 11	00, 01, 02, 11, 12, 22	00, 01, 02, 03, 11, 12, 13, 22, 23, 33	略	略	略	略	略	略	略	略
骨牌片數	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12

另一解題策略：骨牌上的數字可以有 m 種不同的數字，則可以排列出

$$\frac{m(m-1)}{2} + m \text{ 片骨牌。} < \text{此可用在非 0 開始的數字組合}>$$

2. 骨牌和之範圍及張數如下：【表 2】

骨牌							3-3						
				2-2	2-3	2-4	3-4	4-4					
	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	2-5	3-5	4-5	5-5				
骨牌和	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6	1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6
張數	1 張	1 張	2 張	2 張	3 張	3 張	4 張	3 張	3 張	2 張	2 張	1 張	1 張

3. 28 片骨牌中，各數字的出現頻率皆相同。【表 3】

骨牌上的數字	0	1	2	3	4	5	6
出現次數	8 次	8 次	8 次	8 次	8 次	8 次	8 次

【過程 1-2】探討排出的九宮方陣邊數和之範圍

【表 4】

邊數和	0	1	2	3	4	5	6	7																																																																								
骨牌和	0	0~1	0~2	0~3	0~4	0~5	0~6	1~7																																																																								
符合之骨牌數	1 張	2 張	4 張	6 張	9 張	12 張	16 張	18 張																																																																								
九宮方陣成形	×	×	○	○	○	○	○	○																																																																								
示例			<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	2	1		0	1	1	0	<table border="1"><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	0	2	1	3		0	0	1	2	<table border="1"><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	0	2	2	4		1	0	3	1	<table border="1"><tr><td>0</td><td>5</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr></table>	0	5	0	4		1	1	0	4	<table border="1"><tr><td>6</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	6	0	0	0		3	0	3	3	<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>1</td></tr></table>	0	1	6	6		0	1	5	1																		
0	0	2																																																																														
1		0																																																																														
1	1	0																																																																														
0	2	1																																																																														
3		0																																																																														
0	1	2																																																																														
0	2	2																																																																														
4		1																																																																														
0	3	1																																																																														
0	5	0																																																																														
4		1																																																																														
1	0	4																																																																														
6	0	0																																																																														
0		3																																																																														
0	3	3																																																																														
0	1	6																																																																														
6		0																																																																														
1	5	1																																																																														
邊數和	8	9	10	11	12	13	14	15																																																																								
骨牌和	2~8	3~9	4~10	5~11	6~12	7~12	8~12	9~12																																																																								
符合之骨牌數	20 張	20 張	20 張	18 張	16 張	12 張	9 張	6 張																																																																								
九宮方陣成形	○	○	○	○	○	○	○	○																																																																								
示例	<table border="1"><tr><td>2</td><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>0</td></tr></table>	2	0	6	2		2	4	4	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>	1	3	5	4		4	4	5	0	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>	3	1	6	2		4	5	5	0	<table border="1"><tr><td>5</td><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>0</td></tr></table>	5	0	6	1		5	5	6	0	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>0</td></tr></table>	3	3	6	3		6	6	6	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>	1	6	6	6		4	6	4	3	<table border="1"><tr><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	2	6	6	6		3	6	3	5	<table border="1"><tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr></table>	6	4	5	3		6	6	5	4
2	0	6																																																																														
2		2																																																																														
4	4	0																																																																														
1	3	5																																																																														
4		4																																																																														
4	5	0																																																																														
3	1	6																																																																														
2		4																																																																														
5	5	0																																																																														
5	0	6																																																																														
1		5																																																																														
5	6	0																																																																														
3	3	6																																																																														
3		6																																																																														
6	6	0																																																																														
1	6	6																																																																														
6		4																																																																														
6	4	3																																																																														
2	6	6																																																																														
6		3																																																																														
6	3	5																																																																														
6	4	5																																																																														
3		6																																																																														
6	5	4																																																																														
邊數和	16	17	18																																																																													
骨牌和	10~12	11~12	12																																																																													
符合之骨牌數	4 張	2 張	1 張																																																																													
九宮方陣成形	○	×	×																																																																													
示例	<table border="1"><tr><td>6</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	6	6	4	5		6	5	5	6																																																																						
6	6	4																																																																														
5		6																																																																														
5	5	6																																																																														

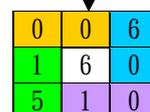
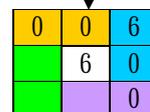
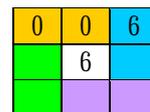
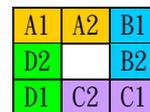
【結論】：能排出的九宮方陣邊數和最小為 2，最大為 16。



【過程 1-3】找出所有九宮方陣的排法

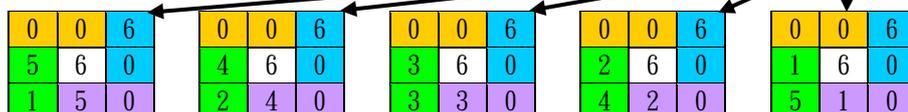
為了能窮盡所有的九宮方陣且避免重覆，我們選擇有規律性的排法。

1. 先將九宮方陣進行定位（如下圖）。
2. 先選擇最小的骨牌放置在 A 區，則 B1 的數字即能確認。
3. 再選擇最小的 B2 骨牌放置在 B 區，則 C1 的數字即能確認，以此類推直到方陣完成。
4. 再逐一改變 C2、B2、A2 或 A1 的數字即可以產生更多的組合。
5. 各種邊數和的排列組合結果如下，合計共 1131 種：（詳細資料請見附件一）



【表 5】

邊數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
組合個數	1	7	19	47	94	139	166	185	166	139	94	47	19	7	1



結論：符合邊數和相等的九宮方陣共有 1131 組，且形成對應關係，以邊數和 2 為例，使用的骨牌為 00-20-01-11，對應到大的數為 66-46-65-55，在邊數和 16 的組合中可以找到此組骨牌組出的九宮方陣；邊數和 4 的某一個九宮方陣也可以在邊數和 14 的組合找到對應方陣。全部 1131 組中，會有 5 組找不到相對應的組，即 50-44-16-22(9)、40-52-26-14(9)、41-43-25-23(9)、23-42-33-34(9)、32-43-24-33(9)，例：16-22-50-44(9)，其數字轉換後為 50-44-16-22(9)與原骨牌數字相同。

0	0	2
1	2	0
1	1	0

6	6	4
5	16	6
5	5	6

0	0	4
1	4	0
3	1	0

6	6	2
5	14	6
3	5	6

活動二：探索暗藏在九宮方陣內之規律與組型。

【過程 2-1】歸納活動一所有九宮方陣之規律

由活動一符合邊數相等的九宮方陣中，我們發現了以下幾點規律：

1. 最大骨牌和與最小骨牌和之差需 ≤ 6 ，才能形成有效骨牌組。

每一片骨牌必定會搭配一數，最小骨牌能搭配的數最大是 6，若此三數之和比最大骨牌和還小，那麼此組骨牌必不能完成拼組，因此，【最小骨牌和】+6 \geq 【最大骨牌和】，推得【最大骨牌和】-【最小骨牌和】 ≤ 6

2. 4 片骨牌其所能組成九宮方陣的邊數和介於【大骨牌和】+【其餘骨牌的最小數字】 \sim 【小骨牌和】+【其餘骨牌的最大數字】之間。

例：11-06-25-16 此組骨牌所可能拼組出的九宮方陣其邊數和範圍為 7 \sim 8。

大骨和(2+5)+最小數 0 \sim 小骨和(1+1)+最大數 6 \rightarrow 7 \sim 8

3. 【邊數和 N】 $\times 4$ -4 片骨牌和=四角數字之和。

依此原則，我們可以挑選 4 片骨牌利用【邊數和 N】 $\times 4$ -4 片骨牌和推算出四角數字，即能很快拼組出九宮方陣。

例：06-11-16-25 此組可能拼組的邊數和為 7 和 8。

\rightarrow 若邊數和為 7，則 25 及 16 皆需要 0 來搭配，但此組骨牌

沒有 2 個 0，所以無法拼組邊數和為 7 的九宮方陣。

\rightarrow 若邊數和為 8，則 $8 \times 4 - (2+6+7+7) = 10$ ，則四角

數字分別為 1、6、2、1，即 11-06-25-16，

再分別擺放在四角上即可完成九宮方陣。

0	6
1	1
1	6
2	5

1	1	6
6		0
1	5	2

4. 兩雙對邊中點的數字和必定相等。

因為【A1+A2+B1】+【D1+C2+C1】=【A1+D2+D1】+【B1+B2+C1】

所以 A2+C2=D2+B2

5. 4 片骨牌中，最大骨牌和與最小骨牌和差距為 6 時必相鄰。

若最小骨牌為 A 骨牌，最大骨牌為 B 骨牌，且 A、B 骨牌和相差

A1	A2	B1
D2		B2
D1	C2	C1

6，當 A、B 骨牌擺放在相對位置時，唯一有可能排出的組合是 $A1=C1$ ， $C2=A2+6$ ，則 D1 及 B2 必為 0，B1 及 D2 必為 6，因此骨牌重複了，所以此 A、B 骨牌不可能排在相對位置。

		6
6		0
0		

【過程 2-2】 歸納活動一所有九宮方陣之組型

由活動一符合邊數和相等的 1131 組九宮方陣中，我們歸納出以下五種組型。【表 6】

組型	對稱型		可逆型		單一型
	對稱 A 型	對稱 B 型	可逆 A 型	可逆 B 型	
組數	350 個	26 個	583 個	116 個	56 個
說明	以對角線為對稱軸形成對稱關係，且逆向時與原方陣相同。	以中線為對稱軸形成對稱關係，且逆向時與原方陣相同，且旋轉 90 度。	數字反向進行又可以形成新的九宮方陣（同 N 不同骨組）	數字反向進行又可以形成新的九宮方陣（同 N 同骨組）	數字反向進行無法形成新的九宮方陣（因為骨牌重複出現）
範例一					
範例二					
特徵	* 四邊中點數字兩兩相同 * 一組對角數相同	* 四角數字兩兩相同 * 一組對邊中數相同	* 無特別的特徵	* 三角數字相同。	* 同數字骨牌兩邊相接的數字也相同。

【過程 2-3】 同一組骨牌能否排出相同點數和但不同排法的九宮方陣？怎樣的骨牌才能排出？

1. 由【過程 2-2】歸納出的組型中“可逆 B 型”符合此條件，因此我們將資料全部輸入電腦並經由排序後，列出所有可逆 B 型的骨牌組合(共 61 組)觀察之。

【表 7】

編號	邊數和	骨牌組	編號	邊數和	骨牌組	編號	邊數和	骨牌組
4	N=3	01 02 03 12	321	N=8	03 05 23 35	847	N=11	14 16 34 46
5	N=3	01 02 03 12	354	N=8	03 05 23 35	871	N=11	14 16 34 46
6	N=3	01 02 11 12	407	N=8	04 13 14 34	896	N=11	15 24 25 45
7	N=3	01 02 11 12	423	N=8	04 13 14 34	909	N=11	15 24 25 45
13	N=4	01 03 04 13	404	N=8	12 15 16 25	889	N=11	23 26 35 36
20	N=4	01 03 04 13	439	N=8	12 15 16 25	928	N=11	23 26 35 36
14	N=4	01 03 12 13	403	N=8	12 15 24 25	899	N=11	24 25 34 45

23	N=4	01	03	12	13	449	N=8	12	15	24	25	912	N=11	24	25	34	45
35	N=5	01	04	05	14	413	N=8	13	14	16	34	969	N=12	06	15	16	56
57	N=5	01	04	05	14	425	N=8	13	14	16	34	977	N=12	06	15	16	56
34	N=5	01	04	13	14	411	N=8	13	14	23	34	986	N=12	06	24	26	46
64	N=5	01	04	13	14	427	N=8	13	14	23	34	1006	N=12	06	24	26	46
40	N=5	02	03	05	23	476	N=9	03	06	33	36	970	N=12	15	16	25	56
47	N=5	02	03	05	23	523	N=9	03	06	33	36	978	N=12	15	16	25	56
38	N=5	02	03	12	23	487	N=9	04	05	14	45	991	N=12	24	26	44	46
48	N=5	02	03	12	23	503	N=9	04	05	14	45	1011	N=12	24	26	44	46
84	N=6	01	05	06	15	542	N=9	12	16	25	26	1032	N=12	25	34	35	45
129	N=6	01	05	06	15	606	N=9	12	16	25	26	1041	N=12	25	34	35	45
83	N=6	01	05	14	15	552	N=9	13	15	33	35	1036	N=12	34	35	36	45
142	N=6	01	05	14	15	584	N=9	13	15	33	35	1042	N=12	34	35	36	45
91	N=6	02	04	06	24	632	N=9	14	23	24	34	1035	N=12	34	35	44	45
113	N=6	02	04	06	24	643	N=9	14	23	24	34	1044	N=12	34	35	44	45
89	N=6	02	04	22	24	637	N=9	23	24	25	34	1062	N=13	16	25	26	56
118	N=6	02	04	22	24	644	N=9	23	24	25	34	1068	N=13	16	25	26	56
156	N=6	03	12	13	23	636	N=9	23	24	33	34	1075	N=13	16	34	36	46
162	N=6	03	12	13	23	647	N=9	23	24	33	34	1088	N=13	16	34	36	46
160	N=6	12	13	14	23	660	N=10	04	06	24	46	1063	N=13	25	26	35	56
163	N=6	12	13	14	23	686	N=10	04	06	24	46	1069	N=13	25	26	35	56
159	N=6	12	13	22	23	710	N=10	05	14	15	45	1080	N=13	34	36	45	46
165	N=6	12	13	22	23	726	N=10	05	14	15	45	1093	N=13	34	36	45	46
173	N=7	01	06	15	16	768	N=10	05	23	25	35	1108	N=14	26	35	36	56
255	N=7	01	06	15	16	793	N=10	05	23	25	35	1112	N=14	26	35	36	56
180	N=7	02	05	23	25	703	N=10	13	16	34	36	1109	N=14	35	36	45	56
231	N=7	02	05	23	25	747	N=10	13	16	34	36	1113	N=14	35	36	45	56
190	N=7	03	04	13	34	713	N=10	14	15	24	45	1126	N=15	36	45	46	56
208	N=7	03	04	13	34	729	N=10	14	15	24	45	1128	N=15	36	45	46	56
279	N=7	12	14	15	24	778	N=10	23	25	26	35	1127	N=15	45	46	55	56
291	N=7	12	14	15	24	795	N=10	23	25	26	35	1129	N=15	45	46	55	56
278	N=7	12	14	23	24	777	N=10	23	25	34	35						
297	N=7	12	14	23	24	802	N=10	23	25	34	35						
311	N=8	02	06	24	26	825	N=11	05	06	15	56						
376	N=8	02	06	24	26	834	N=11	05	06	15	56						

2. 歸納上述之組合，我們發現“可逆B型”的骨牌中有以下幾種特性：

(1)選用的4片骨牌需有3個相同數字且分散在3片骨牌裡，且另一片骨牌上的2個數字分散在前3片骨牌中。

例：02-06-24-26、23-25-26-35、34-35-44-45

例：05-23-33-35，3個3分散在3片骨牌中，但05兩數字並未分散在其它3片骨牌中，所以其非可逆B型。

(2)排序後的4片骨牌A-B-C-D(數字順序由小到大排列)，A與B的後數(骨牌中較大的數)不可相同，且剛好組合D骨牌。

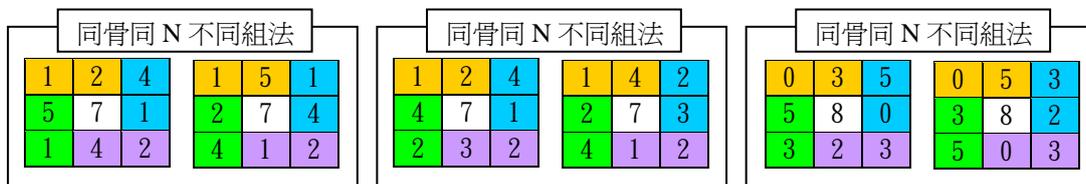
例：02-05-23-25、23-25-34-35、04-13-14-34

3. 選擇4片骨牌(A-B-C-D)使其能組出“可逆B型”的選法有2種：

(1)選擇A、B骨牌(前數相同，後數不同)，再找出由後數共同組成的D骨牌，再另搭一組合已有數字之一且和與B、D骨牌和相同的組合當C骨牌。

例1：12-14尾數各為2、4，因此D骨牌為24，而C骨牌需含有1、2、

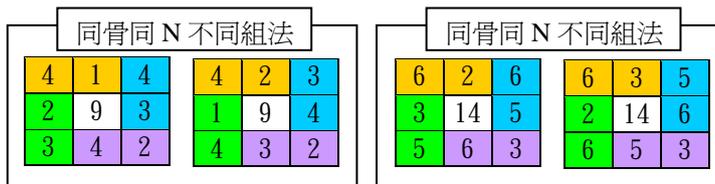
4 其中一數且骨牌和需為 5 或 6，因此符合此條件的 C 骨牌有 $\boxed{15}$ 、 $\boxed{23}$ 兩種可能，所以形成的骨牌組為 12-14-15-24 或 12-14-23-24。
 例 2： $\boxed{03}$ - $\boxed{05}$ 尾數各為 3、5，因此 D 骨牌為 $\boxed{35}$ ，而 C 骨牌需含有 0、3、5 其中一數且骨牌和需為 5 或 8，因此符合此條件的 C 骨牌為 $\boxed{23}$ ，所以形成的骨牌組為 03-05-23-35。



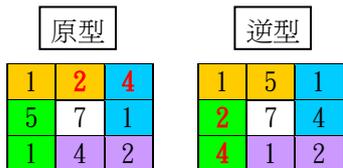
(2) 選擇骨牌和相等的 A、B 骨牌 (共有 13 種組合)，再找出由後數共同組成的 D 骨牌，再另搭一組合已有數字中 (4 個不同數字) 的其中兩個數字組成 C 骨牌 (需注意排序位置，C 骨牌是介於 B 骨牌與 D 骨牌之間)。

例 1： $\boxed{14}$ - $\boxed{23}$ 尾數各為 3、4，因此 D 骨牌為 $\boxed{34}$ ，而 C 骨牌的數字需包含在 1、2、3、4 中，因此符合此條件的 C 骨牌為 $\boxed{24}$ ，所以形成的骨牌組為 14-23-24-34。

例 2： $\boxed{26}$ - $\boxed{35}$ 尾數各為 5、6，因此 D 骨牌為 $\boxed{56}$ ，而 C 骨牌的數字需包含在 2、3、5、6 中，因此符合此條件的 C 骨牌為 $\boxed{36}$ ，所以形成的骨牌組為 26-35-36-56。



4. 分析“可逆 B 型”的九宮方陣之所以會形成的原因：以上述(1)-例 1 (12-14-15-24) 為例，三角數字皆為 1，逆向之後也皆會分別與另外 3 個數搭配成三片骨牌，唯一沒有 1 的骨牌是 $\boxed{24}$ ，因此由原型中可以看出上方的 2、4 未在同一片骨牌上，但逆轉後一定會是同一片骨牌。



【過程 2-4】同一組骨牌最多能排出幾種不同 N (邊數和) 的九宮方陣？

1. 從 1131 種九宮方陣中列出同骨牌但不同 N 的組合 (共 33 組) 觀察之。【表 8】

編號	邊數和	骨牌組			編號	邊數和	骨牌組			編號	邊數和	骨牌組					
18	N=4	02	04	12	13	240	N=7	05	15	16	24	591	N=9	15	25	26	34
167	N=6	02	04	12	13	962	N=11	05	15	16	24	1055	N=12	15	25	26	34

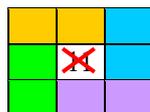
24	N=4	03	11	12	22	382	N=8	06	13	25	44	599	N=9	16	23	24	35
71	N=5	03	11	12	22	791	N=10	06	13	25	44	935	N=11	16	23	24	35
54	N=5	03	13	14	22	259	N=7	06	14	15	25	748	N=10	16	23	34	45
307	N=7	03	13	14	22	957	N=11	06	14	15	25	885	N=11	16	23	34	45
196	N=7	03	14	23	25	371	N=8	06	14	22	35	609	N=9	16	24	25	35
426	N=8	03	14	23	25	755	N=10	06	14	22	35	1049	N=12	16	24	25	35
66	N=5	04	12	13	23	378	N=8	06	22	24	44	752	N=10	16	24	35	45
303	N=7	04	12	13	23	756	N=10	06	22	24	44	1038	N=12	16	24	35	45
125	N=6	04	13	23	24	287	N=7	13	15	23	24	789	N=10	24	26	34	35
470	N=8	04	13	23	24	654	N=9	13	15	23	24	1051	N=12	24	26	34	35
126	N=6	04	14	15	23	298	N=7	14	22	23	33	803	N=10	25	33	34	44
657	N=9	04	14	15	23	465	N=8	14	22	23	33	947	N=11	25	33	34	44
134	N=6	05	12	13	24	434	N=8	14	24	25	33	917	N=11	25	35	36	44
457	N=8	05	12	13	24	822	N=10	14	24	25	33	1103	N=13	25	35	36	44
232	N=7	05	12	23	34	718	N=10	14	25	34	36	930	N=11	26	34	35	45
397	N=8	05	12	23	34	911	N=11	14	25	34	36	1098	N=13	26	34	35	45
145	N=6	05	13	14	24	451	N=8	15	23	24	34	1015	N=12	26	35	45	46
652	N=9	05	13	14	24	814	N=10	15	23	24	34	1121	N=14	26	35	45	46
238	N=7	05	13	24	34	590	N=9	15	24	34	35	1094	N=13	36	44	45	55
640	N=9	05	13	24	34	954	N=11	15	24	34	35	1118	N=14	36	44	45	55

2. 由上表中可以看出，同一骨牌組最多可以組成 2 種不同邊數和的九宮方陣，且組出的九宮方陣之邊數和分別為最大與最小 N 值。

例：16-24-25-35，可能排出的邊數和範圍由 9~12，當能排出邊數和 9 時，再想判斷能否排出其它邊數和時，則只要再跳到邊數和最大的 12 來嘗試即可。

ps. 9 為最大骨牌和+最小數字；12 為最小骨牌和+最大數字

1	6	2							6	1	5
5	9	5							2	12	2
3	4	2							4	3	5



6	1	5									
2	12	2									
4	3	5									

另外，由上例中我們發現邊數和由小的變到大的，其 4 片骨牌似乎都做了轉換，即原本是 $\overline{16}$ (1 在角落)，轉變成 $\overline{61}$ (6 在角落)，我們想，是不是每個皆是如此，因此再繼續深入追究，發現並非如此。例如下例中 $\overline{43}$ 原本的 4 是位在角落，而改換邊數和後，其它 3 片骨牌皆變換了，唯獨 $\overline{43}$ 沒有變換位置。

2	4	4							4	2	6
6	10	3							3	12	2
2	5	3							5	3	4

4	2	6									
3	12	2									
5	3	4									



3. 目前尚無法從任 4 片有效骨牌中，直接判斷此組骨牌能否組成兩種不同邊數和的九宮方陣，頂多只能運用交錯搭配法去試試最大邊數和及最小邊數和能否成形。
4. 綜合上述【過程 2-3】與【過程 2-4】，我們發現若一組骨牌能排出同 N 但不同組法時，那麼它就不能再排出另一種不同 N 的九宮方陣；反之，若一

組骨牌可以排出不同 N 的九宮方陣，那麼它就無法排出同 N 不同組法的九宮方陣(即【表 8】與【表 9】之骨牌組沒有重複)。

活動三：在有效骨牌範圍內任抽 n 片 (n=2~4) 骨牌是否皆能排出九宮方陣？

【過程 3-1】任抽 2 片有效骨牌作為固定牌，再依需求挑選其它 2 片骨牌進行拼組。

1. 抽取的 2 片骨牌分兩兩數字相同、骨牌和相同、骨牌和相異三種
2. 擺放位置分相鄰與相對兩種。

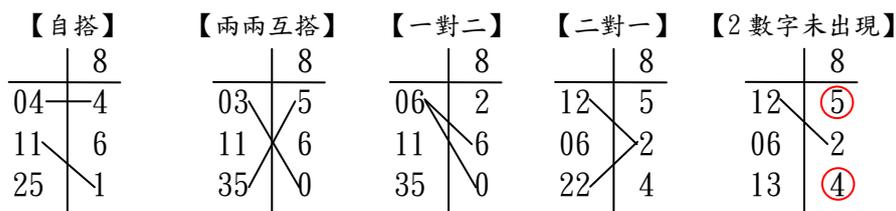
【表 9】

	兩兩數字相同		骨牌和相同		骨牌和相異	
	相鄰	相對	相鄰	相對	相鄰	相對
示例 1						
示例 2						
示例 3						
示例 4						
分析	僅有 11-44 及 22-55 兩組無法拼組	$A1+A2 \geq C1$ 或 $C1+C2 \geq A1$ 所以 2 片骨牌和之差不可 > 2	皆可排出，且依下列方式很容易拼組出來 $B1=C1=D2$ $A1=C2$ $A2=D1$	皆可排出，且 $D2=A2, C2=B2$ ，僅要改變 $B1$ 即可成為新的拼組，且拼出的組型皆屬對稱組型。	大骨和 \leq 小骨大數 +6 或大骨小數 \leq 小骨和的條件下才能拼組	排除活動二歸納出的結論：最大骨牌和與最小骨牌和之差為 6 需擺在相鄰位置外，其餘若要擺放相對位置需符合下列條件 $A1+A2 \geq C1$

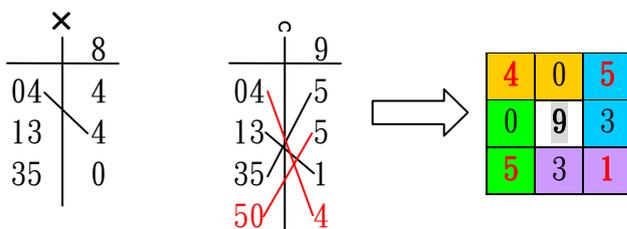
- 結論**：
1. 當 2 片骨牌和相同必定能拼組成九宮方陣，且若擺放在相對位置，則必形成對稱組型。
 2. 當 2 片骨牌和不同時，需符合大骨和 \leq 小骨大數 +6 或大骨小數 \leq 小骨和的條件下才能拼組。
 3. 大骨牌和與小骨牌和之差為 6 需擺在相鄰位置。

【過程 3-2】任抽 3 片有效骨牌作為固定牌，再依需求挑選其它 1 片骨牌進行拼組。

1. 抽取的 3 片骨牌分數字相同、骨牌和 3 同、骨牌和 2 同 1 異、骨牌和 3 異 四種來探究。
2. 為了縮短拼組的時間，我們找到了一種可以快速有效地判斷能否拼組的方式～交錯搭配法，也能用此方法找到適用的第 4 片骨牌，說明如下：
 - a. 列出骨牌組，找出其可能拼組的最大與最小邊數和。
 - b. 填出所需搭配的數字，並進行連線，連線的原則如下：
 - ✓ 不可兩兩互搭及自搭
 - ✓ 不可一對二或二對一
 - ✓ 欲搭配的數字中有 2 個數字沒有出現在三片骨牌中即表示此邊數和無解



- c. 若無法搭配連線，則改換另一個邊數和繼續上述步驟，直到搭配完成。
- d. 依據連線將數字排入九宮方陣中，搭配的數字需排在四角上。



【表 10】

	數字相同	骨牌和 3 同	骨牌和 2 同 1 異	骨牌和 3 異									
示例 1	11	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: blue;">3</td></tr></table>	2	2	3	04	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">0</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: blue;">1</td></tr></table>	0	4	1			
	2	2	3										
	0	4	1										
	22	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: red;">0</td><td style="background-color: white;">○</td><td style="background-color: blue;">3</td></tr></table>	0	○	3	13	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: blue;">3</td></tr></table>	×	3				
0	○	3											
×	3												
33	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: red;">5</td><td style="background-color: purple;">1</td><td style="background-color: purple;">1</td></tr></table>	5	1	1	22	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: purple;">2</td><td style="background-color: purple;">2</td></tr></table>	2	2					
5	1	1											
2	2												
				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">4</td><td style="background-color: white;">0</td><td style="background-color: white;">5</td></tr><tr><td style="background-color: white;">0</td><td style="background-color: white;">9</td><td style="background-color: white;">3</td></tr><tr><td style="background-color: white;">5</td><td style="background-color: white;">3</td><td style="background-color: white;">1</td></tr></table>	4	0	5	0	9	3	5	3	1
4	0	5											
0	9	3											
5	3	1											
示例 2	22	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: yellow;">3</td><td style="background-color: blue;">2</td></tr></table>	3	3	2	05	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">0</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: blue;">1</td></tr></table>	0	5	1			
	3	3	2										
	0	5	1										
	33	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: red;">5</td><td style="background-color: white;">○</td><td style="background-color: blue;">2</td></tr></table>	5	○	2	14	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: blue;">4</td></tr></table>	×	4				
5	○	2											
×	4												
44	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: red;">0</td><td style="background-color: purple;">4</td><td style="background-color: purple;">4</td></tr></table>	0	4	4	23	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: purple;">3</td><td style="background-color: purple;">2</td></tr></table>	3	2					
0	4	4											
3	2												
				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">1</td><td style="background-color: white;">3</td><td style="background-color: white;">0</td></tr><tr><td style="background-color: white;">2</td><td style="background-color: white;">○</td><td style="background-color: white;">4</td></tr><tr><td style="background-color: white;">1</td><td style="background-color: white;">3</td><td style="background-color: white;">0</td></tr></table>	1	3	0	2	○	4	1	3	0
1	3	0											
2	○	4											
1	3	0											
示例 3	33	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: yellow;">4</td><td style="background-color: blue;">3</td></tr></table>	4	4	3	06	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">0</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: blue;">1</td></tr></table>	0	6	1			
	4	4	3										
	0	6	1										
	44	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: red;">6</td><td style="background-color: white;">○</td><td style="background-color: blue;">3</td></tr></table>	6	○	3	15	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: blue;">5</td></tr></table>	×	5				
6	○	3											
×	5												
55	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: red;">1</td><td style="background-color: purple;">5</td><td style="background-color: purple;">5</td></tr></table>	1	5	5	24	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: purple;">4</td><td style="background-color: purple;">2</td></tr></table>	4	2					
1	5	5											
4	2												
				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">2</td><td style="background-color: white;">2</td><td style="background-color: white;">1</td></tr><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: white;">3</td></tr><tr><td style="background-color: white;">0</td><td style="background-color: white;">0</td></tr></table>	2	2	1	×	3	0	0		
2	2	1											
×	3												
0	0												
示例 4	44	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: yellow;">5</td><td style="background-color: blue;">6</td></tr></table>	5	5	6	26	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: yellow;">2</td><td style="background-color: yellow;">6</td><td style="background-color: blue;">3</td></tr></table>	2	6	3			
	5	5	6										
	2	6	3										
	55	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: blue;">6</td></tr></table>	×	6	35	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: blue;">5</td></tr></table>	×	5					
×	6												
×	5												
66	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: purple;">4</td><td style="background-color: purple;">4</td></tr></table>	4	4	44	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: purple;">4</td><td style="background-color: purple;">4</td></tr></table>	4	4						
4	4												
4	4												
				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">4</td><td style="background-color: white;">4</td><td style="background-color: white;">1</td></tr><tr><td style="background-color: white;">×</td><td style="background-color: white;">3</td></tr><tr><td style="background-color: white;">2</td><td style="background-color: white;">2</td></tr></table>	4	4	1	×	3	2	2		
4	4	1											
×	3												
2	2												
				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 20px;"><tr><td style="background-color: white;">6</td><td style="background-color: white;">2</td><td style="background-color: white;">2</td></tr><tr><td style="background-color: white;">3</td><td style="background-color: white;">○</td><td style="background-color: white;">4</td></tr><tr><td style="background-color: white;">1</td><td style="background-color: white;">5</td><td style="background-color: white;">4</td></tr></table>	6	2	2	3	○	4	1	5	4
6	2	2											
3	○	4											
1	5	4											

分析	僅有 11-22-33、22-33-44 及 33-44-55 三組可以拼出九宮方陣	能用的骨牌其骨牌和需在 4~8，且因 3 片骨牌和相等，因此皆需搭配同一個數字，但同一數字要分別出現在三片骨牌上是不可能的，所以 3 片骨牌和相同的骨牌是不可能拼組成九宮方陣。	有些可以拼組成，有些不可以。利用下列交錯搭配法很容易判斷之。以 04-13-35 為例： <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">04 4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13 4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">35 0</td></tr> </table> <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; margin-left: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">04 5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13 5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">35 1</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50 4</td></tr> </table>	8	04 4	13 4	35 0	9	04 5	13 5	35 1	50 4	有些可以拼組成，有些不可以。利用交錯搭配法很容易判斷之。
8													
04 4													
13 4													
35 0													
9													
04 5													
13 5													
35 1													
50 4													

結論：3 片骨牌和相同必定無法拼組成九宮方陣，其餘的骨牌組則有些可以，有些不可以拼組成，目前尚未找到固定特徵可直接判讀能否拼組，僅能利用交錯搭配法試組之。

【過程 3-3】任抽 4 片有效骨牌來進行拼組。

1. 抽取的 4 片骨牌分數字相同、骨牌和 4 同、骨牌和 3 同、骨牌和 2 同、骨牌和 4 異五種來探究。
2. 利用交錯搭配法來進行拼組並記錄之。

【表 11】

	數字相同	骨牌和 4 同	骨牌和 3 同	骨牌和 2 同	骨牌和 4 異					
示例 1	00		06		04		12		06	
	11		15		13		03		13	
	22		24		22		14		25	
	33		33		35		23		44	
示例 2	11			05		26		13		
	22			14		44		24		
	33			23		46		26		
	44			36		55		45		
示例 3	22			15		13		01		
	33			24		22		02		
	44			33		05		12		
	55			26		34		22		
示例 4	33			16		34		13		
	44			25		25		15		
	55			34		26		34		
	66			03		35		36		
	6 12	7	8 9	6 7	8 10					
	00 6 22	06 1	04 4 15 3	12 3 13 3	06 2 13 6					
	11 4 33	15 1	13 4 24 3	03 3 22 3	13 4 24 4					
	22 2 44	24 1	22 4 33 3	14 1 05 2	25 1 26 2					
	33 0 55	33 1	35 0 26 1	23 1 34 0	44 0 45 1					
分析	因為所要搭配的數字需 4 個等差為 2 的數，但骨牌上的數字皆僅能差 1，因此無解。且大骨牌數字和 + 最小數		骨牌和要 4 同，那麼只有和為 6 了 (06, 15, 24, 33)，所需要的數字皆相同，無法在這 4 片骨牌上分別找到 4		在上述過程 3-2 中 3 片骨牌和相等已無法拼組成，因此 4 片骨牌中 3 同 1 異的組合也是不可能拼組成成功的。		當 4 片骨牌為 2 同 2 同時，骨牌上的數字需能找到 2 個差距為兩種骨牌和之差的數各 2 個，且分散在 4 片骨牌		有些可以組成九宮方陣，有些不可以組成，目前尚未找到特殊的規律。	

字已超過小骨牌所能負擔的範圍，因此更不可能解出。	個相同的數字，因此無解。(道理同過程 3-2 的骨牌和 3 同之理由)		上，才能拼出九宮方陣。
--------------------------	-------------------------------------	--	-------------

- 結論**：1. 數字相同的骨牌 4 片無法組成九宮方陣。
 2. 同一組骨牌組中，有 3 片以上的骨牌和相同時，必定無法組成九宮方陣，即排出的九宮方陣中最多只會有兩片骨牌和相同。

活動四：連環九宮方陣之組型探究

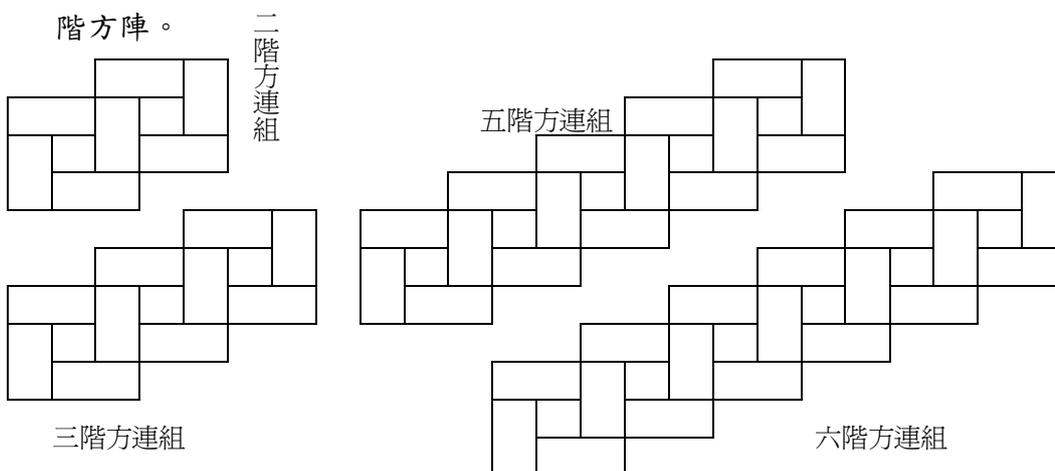
【過程 4-1】 延伸九宮方陣的變化玩法，採接龍方式組成**方連組型**。

1. 探究方連組型階層數與骨牌之關係。

【表 12】

方連組型	二階方連組		三階方連組		四階方連組		五階方連組		六階方連組	
組成張數	7		10		13		16		19	
邊數和範圍	最小	最大								
	4	14	5	13	6	12	6	12	8	10
骨牌和範圍	0~4	8~12	0~5	7~12	0~6	6~12	0~6	6~12	2~8	4~10
可用骨牌張數	9	9	12	12	16	16	16	16	20	20

Ps. 因四階與五階方連組之可使用的最少骨牌張數皆相同，因此本活動不做四階方陣。

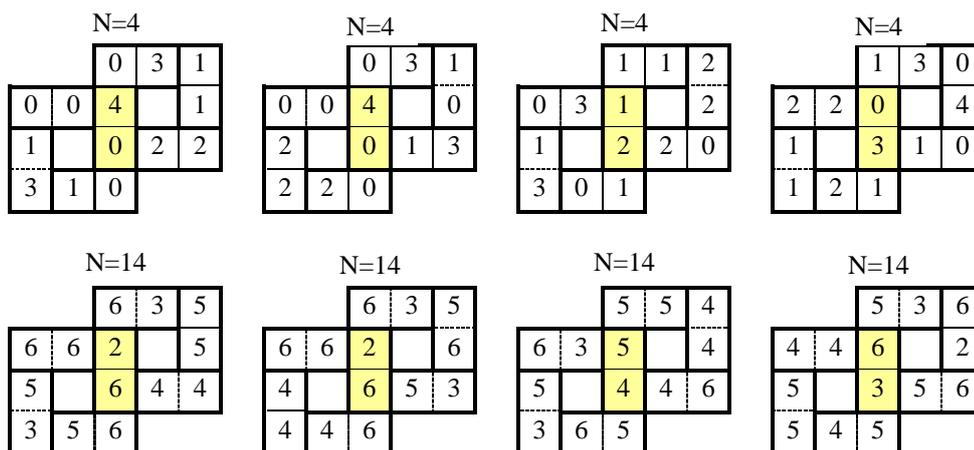


2. 當方連組型可用的骨牌張數愈少時，愈不容易完成，即要組成邊數和最小或最大的方連組型是較有挑戰性的，因此本活動採以組成最小邊數和、次小邊數和亦或是最大邊數和為主。

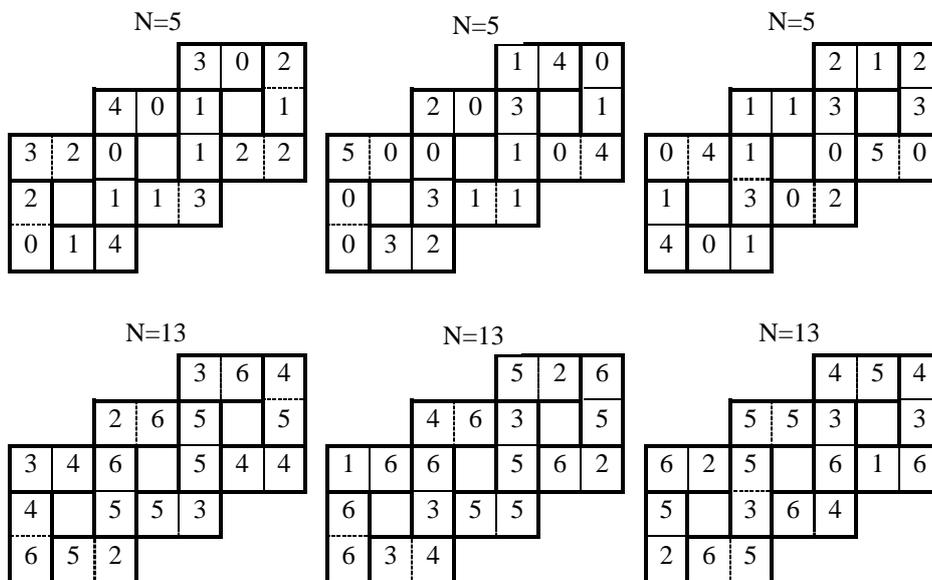
例如：要組成五階方連最少要 16 片骨牌，若以邊數和 6 的條件做拼組，那麼邊數和 6 的可用骨牌剛好 16 片，需同時全部用上才行。若以邊數和 8 為條件拼組五階方陣，其所可使用骨牌有 20 片，有多餘 4 片可隨時作需求調整，因此較容易組成五階方連。

3. 嘗試組出二階方連、三階方連、五階方連、六階方連之最小邊數和及最大邊數和的組合，並探討其規律。

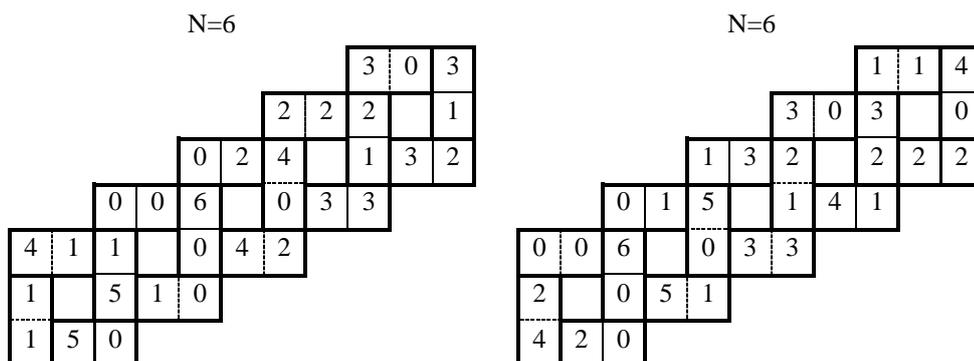
【二階方連】 <邊數和最小 4，最大 14>



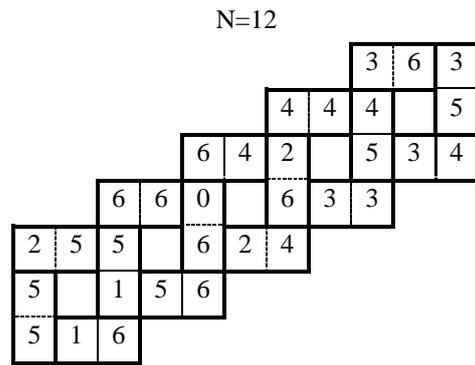
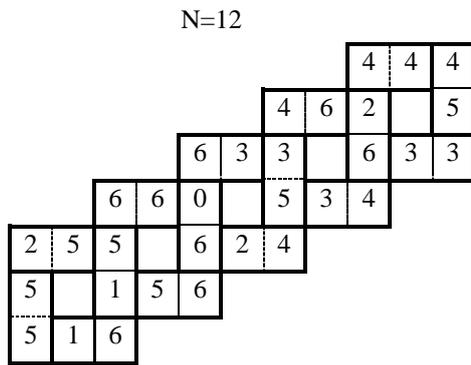
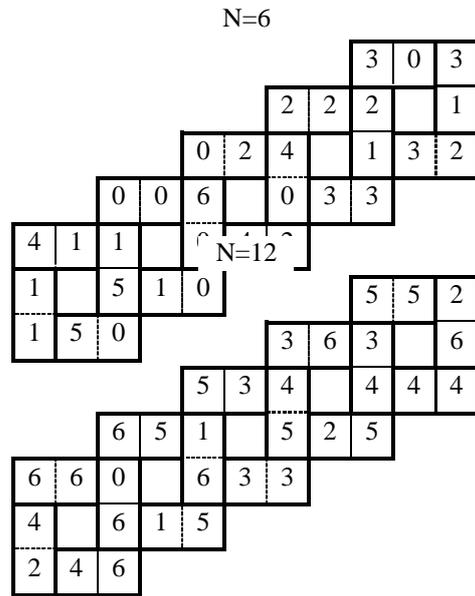
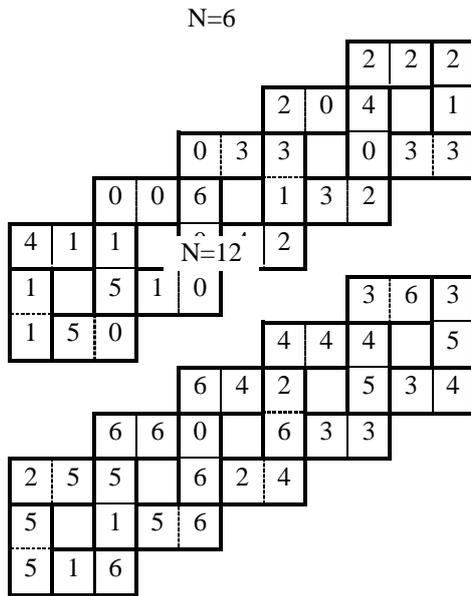
【三階方連】 <邊數和最小 5，最大 13>



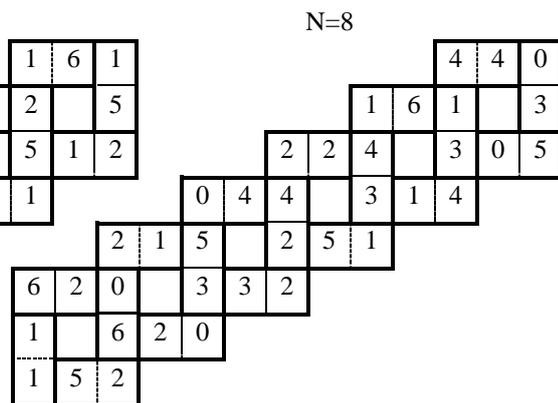
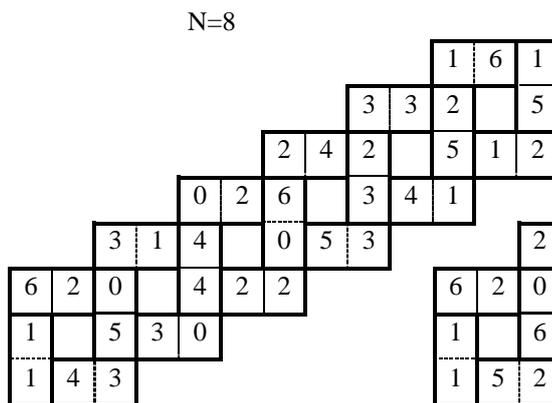
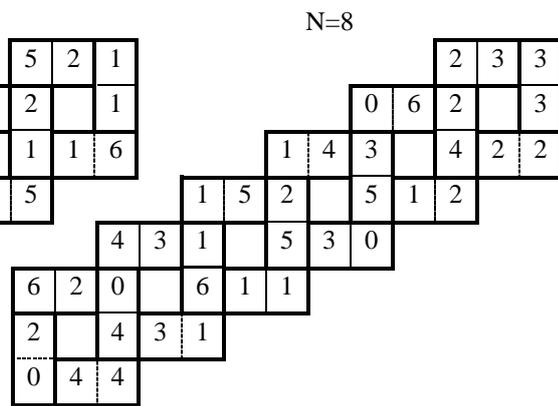
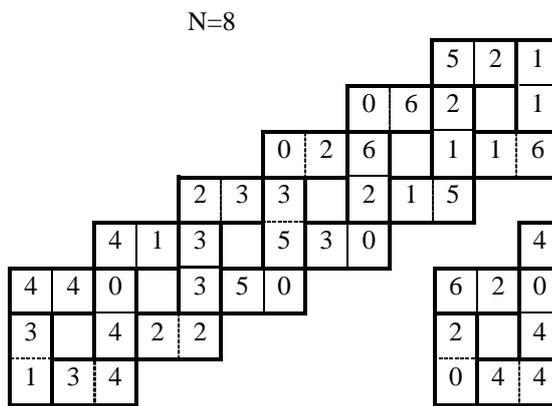
【五階方連】 <邊數和最小 6，最大 12>

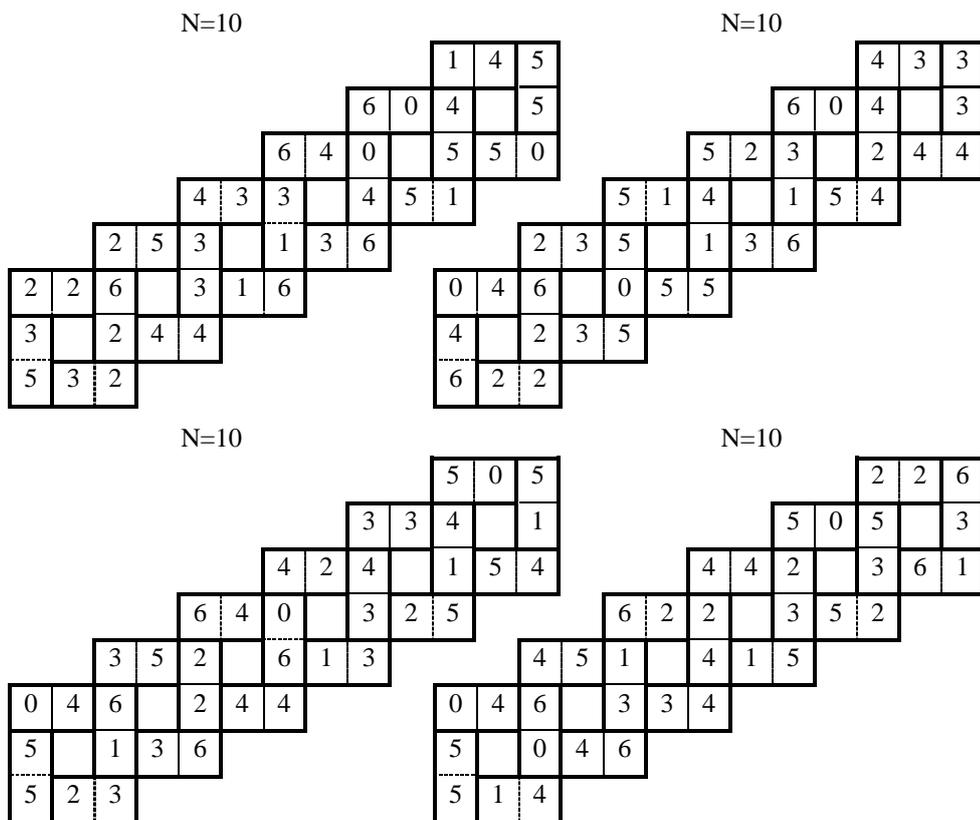


翻滾吧！骨牌~旋風魔方陣



【六階方陣】<邊數和最小8，最大10>





歸納 1：與交疊骨牌（黃色標示區塊）相接的數字會相同。

歸納 2：00（或 66）不能做為交疊骨牌，因為能與之相接的骨牌僅有 1 片，即 40（或 26）。

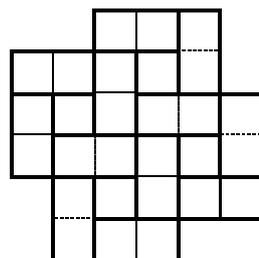
歸納 3：當 $N=6$ 時，0 最適合擺放在角落位置，因為其所能搭配的骨牌較多；當 $N>6$ 時，則 $N-6$ 最適合擺放在角落位置，因為其所能搭配的骨牌較多。

【過程 4-2】 延伸九宮方陣的變化玩法，採接龍方式組成風車組型。

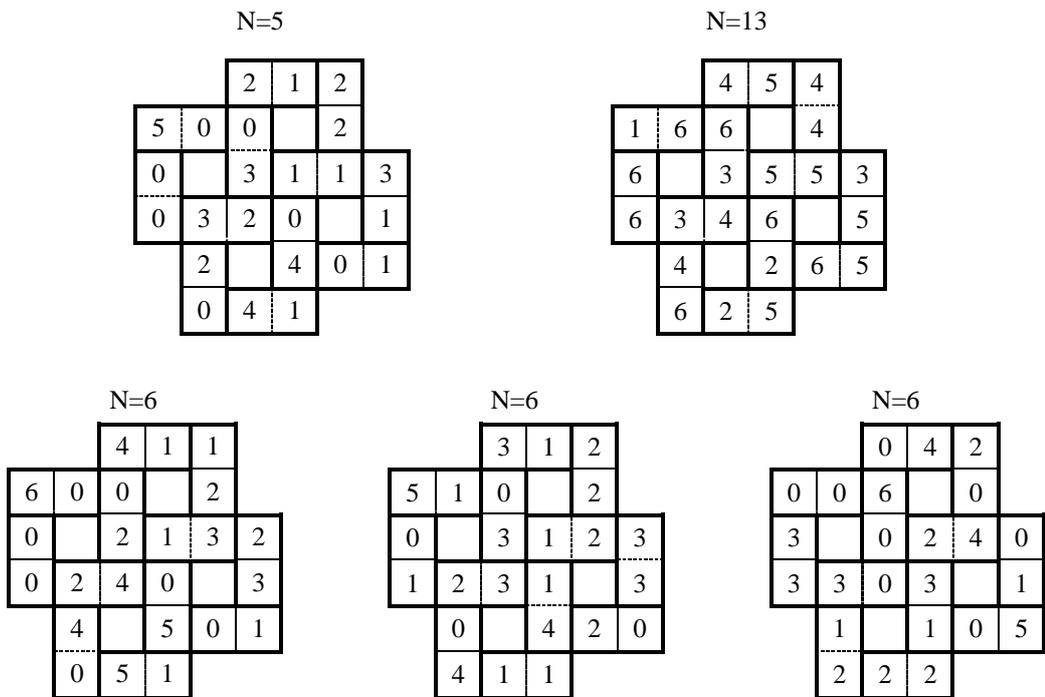
1. 探究方連組型階層數與骨牌之關係。

方連組型的設計其組成張數為 12 張，因此可以組成的邊數和範圍為 5~13。若以最小點數和($N=5$)及最大點數和($N=13$)來排組，可用骨牌數剛好為 12 張，無替換的空間，因此難度較高。

2. 嘗試組出方連組型之最小邊數和及最大邊數和的組合，並探討其規律。

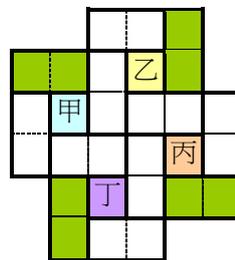


以 12 片骨牌來拼組邊數和為 5 的風車組型，比起方連組型來得難，因為需重疊的骨牌數較多，且環環相扣，經推論及嘗試結果，僅有一組解。當然我們也嘗試拼組邊數和為 6 的風車組型，因為有 4 張骨牌可以替換，所以組起來較容易些。



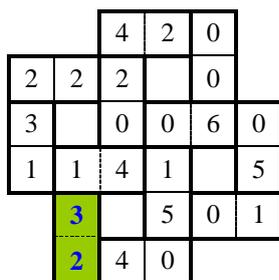
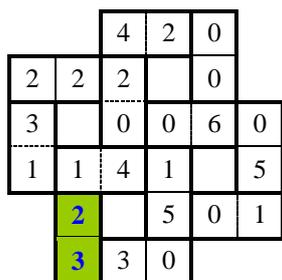
歸納 1：00 與 05 必定相接，且不能放在交疊處。因此以 00-05 之組合來推論 N=5 的風車組型僅有一組解。

歸納 2：利用邊界骨牌(甲-A 骨牌、乙-B 骨牌、丙-C 骨牌、丁-D 骨牌)進行骨牌位置轉換，常又可以形成新的一種排法。例：



剩餘牌

1	1
1	2
3	3
0	4



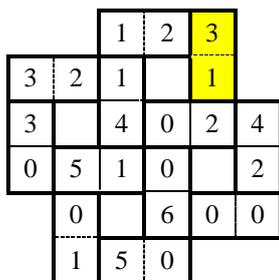
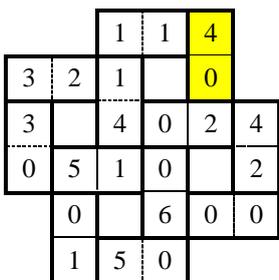
剩餘牌

1	1
0	3
1	2
3	3

歸納 3：利用同和骨牌的替換，常又可以形成新的一種排法。例：

剩餘牌

1	2
1	3
2	2
3	3



剩餘牌

1	1
2	2
3	3
0	4

後記：

在努力拼組的過程中，我們不禁懷疑，方連組型及風車組型究竟有多少組解，為何 4 人拼出的結果常會不同，要窮盡它似乎短時間內是無法達成的，因此，我們請宗郁的舅舅依據我們想要的模式組型幫我們設計電腦程式語言，讓電腦來代工以

窮盡所有解，跑出來的數據竟是如此的驚人（如下），讓我們咋舌。

【表 13】

邊數和	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
二階	32	70	44	16	5	0	5	16	44	70	32
三階		326	1564	1176	790	776	790	1176	1564	326	
四階			3318	15776	19082	24902	19082	15776	3318		
五階			132	16738	69124	105024	69124	16738	132		
六階					12736	26308	12736				
風車		1	60	679	1726	2528	1726	679	60	1	

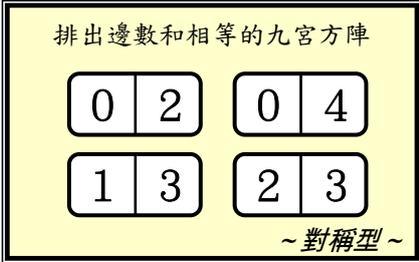
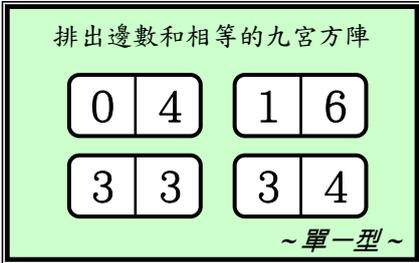
說明：以邊數和 5 來看，二階的 70 組並未包含在三階的 326 組中（此 70 組是無法繼續延伸為三階），而三階的 326 組中，又可以兩兩析出形成二階組合，因此真正能排出就又更多了。

活動五：數字骨牌遊戲套組之應用與設計

起初在拼組九宮方陣時，總是七拼八湊不得其門而入，現在經過一番探討後，覺得還挺有趣的，在拼組和思考上較有頭緒，因此想將這次科展的成果應用在遊戲上，大伙兒集思廣義設計了五套益智動腦遊戲組，也讓大家一起來動動腦。

【設計一】九宮方陣單套組卡

說明：以 4 片骨牌僅能排組出一種九宮方陣之組合，製作成單套組卡（背面附解答），種類分成三種：對稱型、單一型、可逆型。挑戰者需利用卡片上的骨牌拼組出一個邊數和相等的九宮方陣。

正面	<p>排出邊數和相等的九宮方陣</p>  <p>~ 對稱型 ~</p>	背面
正面	<p>排出邊數和相等的九宮方陣</p>  <p>~ 單一型 ~</p>	背面
正面	<p>排出邊數和相等的九宮方陣</p>  <p>~ 可逆型 ~</p>	背面

解答

1	3	2
3		0
2	0	4

~ 對稱型 ~

解答

3	3	4
4		0
3	1	6

~ 單一型 ~

解答

2	4	6
5		2
5	3	4

~ 可逆型 ~

拼組策略：1. 先嘗試大骨牌配上小數字，若不行，則可再嘗試翻轉大骨牌試之。

2. 若有 2 張骨牌和相同，則嘗試找尋可搭配的兩個相同數字組合之。

3. 可利用對邊中數和相同的原則協助拼組。

【設計二】九宮方陣雙套組卡

說明：以一組骨牌可排出 2 種不同的邊數和九宮方陣製作成雙套組卡（背面附解答）。挑戰者需利用卡片上的骨牌拼組出兩種不同邊數和的九宮方陣。

正面	<p>排出 2 種不同邊數和的九宮方陣</p> <table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> </tr> </table>	0	2	0	4	1	2	1	3	背面
0	2	0	4							
1	2	1	3							
正面	<p>排出 2 種不同邊數和的九宮方陣</p> <table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> </tr> </table>	1	5	2	4	3	4	3	5	背面
1	5	2	4							
3	4	3	5							

- 拼組策略：**
1. 先找出可拼組的最小 N 與最大 N 值，再進行拼組之。
 2. 若有 2 張骨牌和相同，則嘗試找尋可搭配的兩個相同數字組合之。
 3. 排最小 N 值時小骨牌的小數常放置在角落位置，反之，排最大 N 值時，小骨牌的大數常放置在角落位置。

【設計三】九宮方陣超級組卡

說明：從所有的九宮方陣拼組中找交集，分別選出 8 片骨牌設計成九宮方陣超級組卡，挑戰者需利用卡片上的 8 片骨牌，拼組出邊數和相同的九宮方陣，在時間限制下拼出愈多組愈好。

正面	<p>【九宮方陣超級組卡】</p> <p>※利用下列骨牌你能排出幾種九宮方陣？</p> <table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">6</td> </tr> </table>	0	1	0	4	0	5	1	1	1	5	2	3	2	4	3	6	背面
0	1	0	4	0	5	1	1											
1	5	2	3	2	4	3	6											
正面	<p>【九宮方陣超級組卡】</p> <p>※利用下列骨牌你能排出幾種九宮方陣？</p> <table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> </tr> </table>	0	2	0	4	0	5	2	2	2	4	2	5	3	4	4	4	背面
0	2	0	4	0	5	2	2											
2	4	2	5	3	4	4	4											

- 拼組策略：1. 先找出能組成的最小 N 值（至少 4 片骨牌以上），再進行拼組。
 2. 先從最小的骨牌定位，再由小至大選用骨牌進行拼組。
 3. 適時地翻轉定位之骨牌，常又能另產生新的組型。

【設計四】方連組型闖關卡

說明：以二階、三階、五階及六階方連組型的模組，依提示的多寡及提示的位置分別設計成初級版、中級版及高級版，供挑戰者選擇闖關。

正面	<p>【方連組型闖關卡—二階】 ★</p> <p>邊數和：4 使用骨牌和：0~4</p>	背面
	<p>解 答</p>	
正面	<p>【方連組型闖關卡—二階】 ★★</p> <p>邊數和：4 使用骨牌和：0~4</p>	背面
	<p>解 答</p>	
正面	<p>【方連組型闖關卡—二階】 ★★★</p> <p>邊數和：4 使用骨牌和：0~4</p>	背面
	<p>解 答</p>	
正面	<p>【方連組型闖關卡—三階】 ★</p> <p>邊數和：5 使用骨牌和：0~5</p>	背面
	<p>解 答</p>	

【方連組型闖關卡—三階】★★

邊數和：5 使用骨牌和：0~5

正面

解答

【方連組型闖關卡—三階】★★★

邊數和：5 使用骨牌和：0~5

正面

解答

【方連組型闖關卡—五階】★

邊數和：6
使用骨牌和：0至6

正面

解答

【方連組型闖關卡—五階】★★

邊數和：6
使用骨牌和：0至6

正面

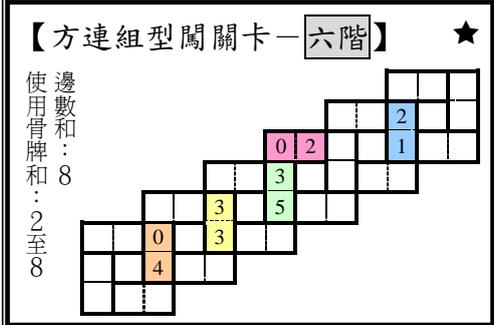
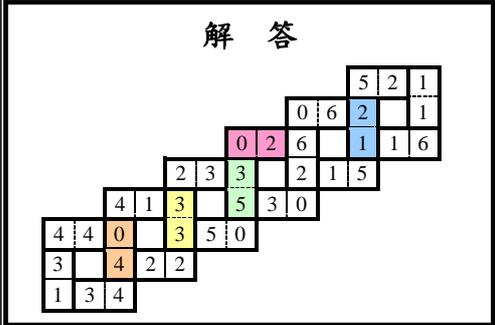
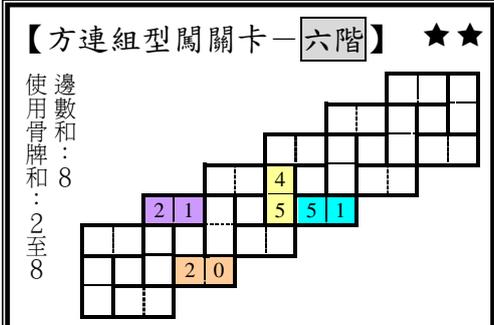
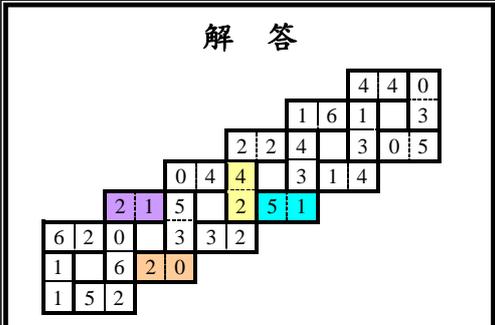
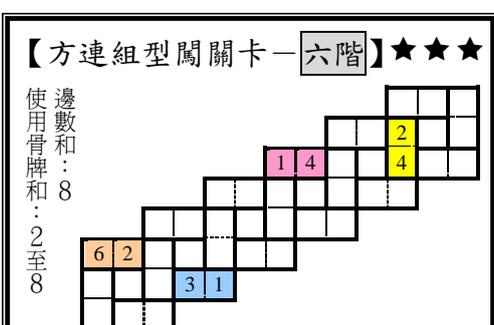
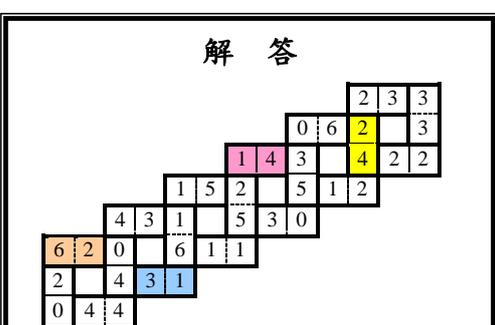
解答

【方連組型闖關卡—五階】★★★

邊數和：6
使用骨牌和：0至6

正面

解答

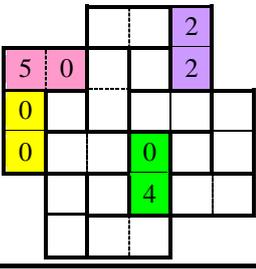
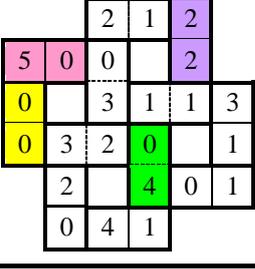
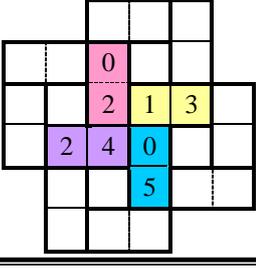
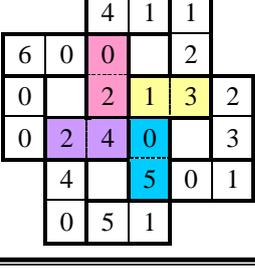
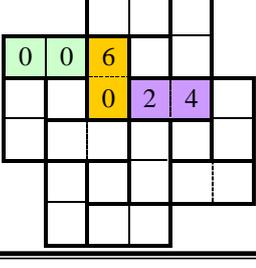
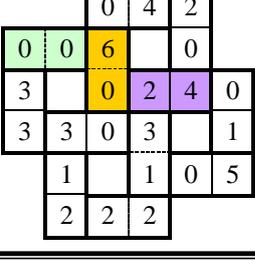
正面	<p>【方連組型闖關卡一 六階】 ★</p> <p>邊數和：8 使用骨牌和：2至8</p> 	<p style="text-align: center;">解 答</p> 	背面
正面	<p>【方連組型闖關卡一 六階】 ★★</p> <p>邊數和：8 使用骨牌和：2至8</p> 	<p style="text-align: center;">解 答</p> 	背面
正面	<p>【方連組型闖關卡一 六階】 ★★★</p> <p>邊數和：8 使用骨牌和：2至8</p> 	<p style="text-align: center;">解 答</p> 	背面

- 拼組策略：**
1. 先將可確定或僅有一張適合放置的骨牌先進行定位，其餘未知或有數張骨牌皆可放置的位置先暫時不排放。
 2. 九宮方陣中一組相對的骨牌已確定後，則另一組相對骨牌也可確定，且與交疊骨牌相接的骨牌也必定確定之。
 3. 方連組型的左下及右上的六片骨牌常可替換又形成一組新的組型（尤其是當有剩餘骨牌可以替換時）。



【設計五】風車組型闖關卡

說明：以風車組型的模組，依提示的多寡及提示的位置分別設計成初級版、中級版及高級版，供挑戰者選擇闖關。

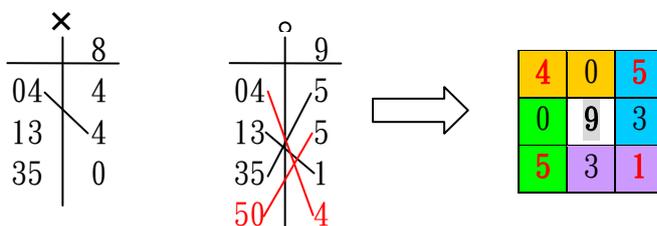
正面	<p>【風車組型闖關卡】 ★</p> <p>邊數和：5 使用骨牌和：0至5</p> 	<p>解答</p> 	背面
正面	<p>【風車組型闖關卡】 ★★</p> <p>邊數和：6 使用骨牌和：0至6</p> 	<p>解答</p> 	背面
正面	<p>【風車組型闖關卡】 ★★★</p> <p>邊數和：6 使用骨牌和：0至6</p> 	<p>解答</p> 	背面

- 拼組策略：1. 先將可確定或僅有一張（例如 01 或 00）適合放置的骨牌先進行定位，其餘未知或有數張骨牌皆可放置的位置先暫時不排放。
2. 九宮方陣中一組相對的骨牌已確定後，則另一組相對骨牌也可確定，且與交疊骨牌相接的骨牌也必定確定之。
3. 適時利用邊界骨牌(甲-A 骨牌、乙-B 骨牌、丙-C 骨牌、丁-D 骨牌)進行骨牌位置轉換，或利用同和骨牌的替換常又可以形成新的一種排法（請見過程 4-2 之說明）。



七、研究結論：

1. 骨牌點數為 0 到 n，則共有 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 片骨牌。
2. 數字骨牌排出的九宮方陣其邊數和最小為 2，最大 16，共有 1131 組，且形成對稱關係。
3. 最大骨牌和與最小骨牌和之差需 ≤ 6 ，才能形成有效牌組，但有效牌組還未必能成功組成九宮方陣。
4. 一組有效骨牌其所可能組成的邊數和介在【大骨牌和】+【其餘骨牌的最小數字】～【小骨牌和】+【其餘骨牌的最大數字】之間。
5. 一組有效骨牌其最大骨牌和與最小骨牌和差距為 6 時，則必相鄰。
6. 歸納出的九宮方陣組型分別為下列 5 種。
 - (1)對稱 A 型：以對角線為對稱軸形成對稱關係，且逆向時與原方陣相同。
 - (2)對稱 B 型：以中線為對稱軸形成對稱關係，且逆向時與原方陣相同。
 - (3)可逆 A 型：數字反向進行又可以形成新的九宮方陣（同 N 不同骨組）
 - (4)可逆 B 型：數字反向進行又可以形成新的九宮方陣（同 N 同骨組）
 - (5)單一型：數字反向進行無法形成新的九宮方陣。
7. 可逆 B 型的骨牌組（共 61 組）能排出相同點數和但不同排法的九宮方陣。
8. 同骨牌但不同邊數和的九宮方陣共有 33 組，其所排出的邊數和分別為最大及最小 N 值。
9. 當骨牌組能排出同 N 不同組法時，那麼就無法排出另一種 N 值的九宮方陣；當骨牌組能排出 2 種 N 值時，那麼就無法排出同 N 不同排法的九宮方陣。
10. 運用交錯搭配法能快速判讀此組骨牌組能否組成九宮方陣。



11. 任抽 2 片有效骨牌來拼組九宮方陣，需符合 大骨和 \leq 小骨大數 + 6 及大骨小數 \leq 小骨和 的條件下才能拼組成功。
12. 任抽 3 片或 4 片有效骨牌來拼組九宮方陣，不一定能拼組成功，但其中有 3 片以上的骨牌和相同時，必定無法拼組成功。
13. 延伸九宮方陣的應用，拼組方連組型與風車組型時，當可用的骨牌張數愈少愈不容易完成，因為能替換調整的骨牌較少。
14. 在進行方連組型與風車組型的拼組時，與交疊骨牌相接的數字皆相同。
15. 風車組型比方連組型更有難度，因為其九宮方陣內外皆環環相扣，當邊數和為 5 時，其可用片數剛好為 12 片，無任何可替換調整的骨牌，其僅有 1 解。

16. 運用九宮方陣的拼組性質，設計五套益智動腦遊戲組，並提供適當的拼組策略讓有興趣者進行挑戰，希望有機會將其研究更詳盡，研發成為市售的遊戲套組。

- (1)九宮方陣單套組卡：依卡片上的骨牌拼組出 1 個九宮方陣。
- (2)九宮方陣雙套組卡：依卡片上的骨牌拼組出 2 組不同邊數和的九宮方陣。
- (3)九宮方陣超級組卡：從 8 片骨牌中挑選 4 片拼出九宮方陣，愈多愈好。
- (4)方連組型闖關卡：依提示的骨牌位置拼組出方連組型，分三種等級。
- (5)風車組型闖關卡：依提示的骨牌位置拼組出風車組型，分三種等級。

八、參考資料

高雄市第 46 屆中小學科學展覽作品----多米諾(domino)數學遊戲



【風車組型遊戲套組】



【記錄方連組型的排法】



【討論六階方連組型排法】



【指導學生探究其規律】



【探討更換骨牌所產生的效應】



【討論六階方連組型排法】



【探討組型的規律】



【將九宮方陣輸入電腦】



【搜尋同骨牌不同N的組合】



【班上同學嘗試挑戰風車組型】



【我們也要試著排排看】



【我們研發的八種遊戲套組】

【評語】 080413 翻滾吧!骨牌~旋風魔方陣

研究主題有趣內容豐富探討過程細緻，頗符合數學探究。研究成果設計出五套益智動腦遊戲組，精神可嘉，值得欽佩。