中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080409

<u>覆生歸一</u>

學校名稱：桃園縣大園鄉竹圍國民小學

作者：	指導老師：
小六 戴佑儒	林徹輝
小六 詹乃卉	林芯蘭
小六 詹皇斌	
小六 洪鼎翔	
小六 林典毅	
小六 陳竹禎	

關鍵詞：<u>迭代</u>　<u>「P×N+1」</u>　<u>「tN+t」</u>

覆生歸一

摘要：

因爲數學社團的一個遊戲，開始讓我們對研究:「讓所有數字變成一」的方法有興趣。在經過許多人的幫助以及很多的實驗挫折之後，我們總結了有「PxN+1」與「tN+t」/t 這兩種方法可以讓所有的數字變成一。而且在研究與實驗的過程，我們還利用「PxN+1」的倒推方法:「樹狀圖」，發現了一種編碼方法。

壹、 研究動機：

在數學社團裡玩過「抓豬公」這個遊戲之後，不禁讓我們聯想是否能通過一定的方法、規則，讓所有的正整數在經過迭代之後變爲「一」。有同學認爲這就像是一台機器，把所有的數字丟進這台機器裡，只要機器設計得好，那出來的成品就會是「一」。所以我們要想辦法把那台機器「做」出來。爲了能夠設計出一台多元化、完美的機器，我們找了幾個同學開始了製作、研究的過程。

貳、 研究目的：

一、找出可以讓所有正整數變成 1 的辦法
二、發現「N+1」的樹狀圖與規律
三、找出「N+X」的規律和共通點
四、從「N+X」出發找出可以讓所有正整數變成 1 的辦法
五、研究「tN+t」的共通性和特點
六、找出「PxN+1」的方法和特性
七、找出「PxN+1」的實用處和可利用的方法
八、利用電腦驗證「PxN+1」的可能性和正確性

參、研究設備及器材：

電腦、長尺、量角器、筆、壁報紙、圖畫紙、雙面膠、膠水

肆、 研究過程：

一、最簡單的機器：

(一) 設計：玩過「抓豬公」的同學都知道，所有的數字都可以看成某一整數 N 的倍數加 X。例如：$50=3\times16+2$，N=3，X=2，在這裡 X 可以等於 0，1，2 三個數字。所以我們可以知道所有的正整數只要除以 3 皆可以得到 0 或 1 或 2 這 3 個數字。但是我們的目的是要只能得到數字 1。有同學就提出如果我們遇到奇數就加一，遇到偶數就除以 2，如此迭代下去最後必能得到 1。

(二) 驗證：

方法 1、

(1) 如果 N>1，且 N 是奇數，那麼 N+1 必定是偶數

(2) 當 N 是奇數時，$(N+1)\div2<N$；當 N 是偶數時，$N\div2<N$

(3) 根據(2)的做法迭代運算，所得數字會越來越小，所以我們最後必定可以得到 1

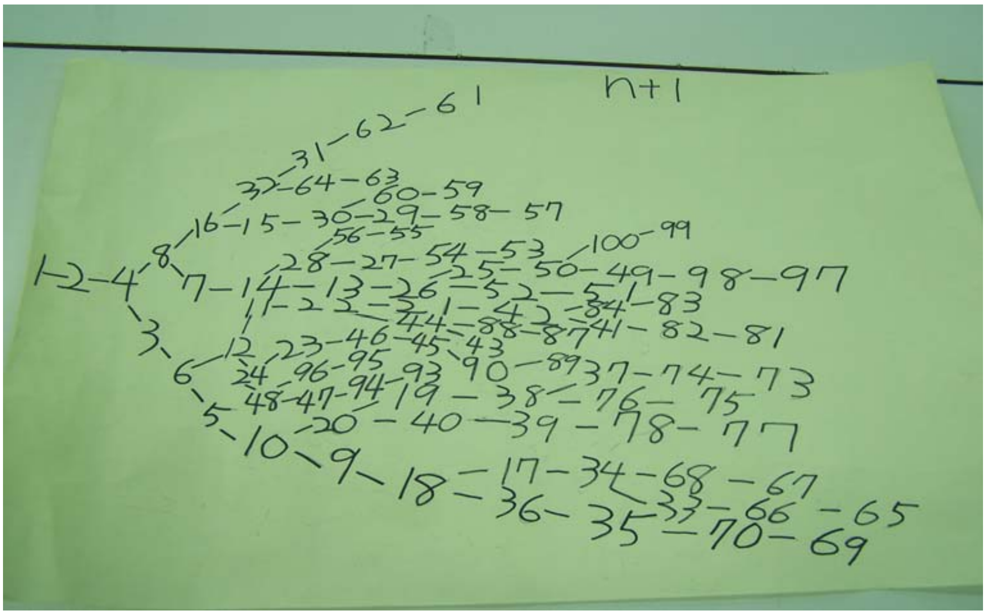
方法 2、

我們把 100 以內的數字代入我們所設計的機器中，得到是 1 的結果在百數表上面呈現是黑色的數字。結果如下圖

1	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

所以我們可以知道 100 以內的數是有規律的最後變為 1。

方法 3、樹狀圖：透過樹狀圖(下圖)，我們可以看到 100 以內的每一個數都會出現在樹狀圖之中。而且每一個數都只有出現一次，而每一個數都有一個固定路徑會指向最後的結果一。我們可以從樹狀圖看出，每一個奇數只有一條延伸，而偶數則能有 2 個延伸，因為在「N+1」裡面奇數是偶數除以 2 形成的，而偶數則可以是偶數除以 2 和奇數「N+1」所形成。這個方法可以看出「N+1」的樹狀圖是以規律的發展出 100 以內的數字，按照其規律的發展，勢必能發展出所有的數字。



(三) 結果：所以我們的第一個機器就完成啦!用數學的表示方法就是：「N=所有的大於 1 的正整數，N 若是奇數則 N+1；N 若是偶數則 N÷2，如此迭代最

後必得一」

二、N+3：

(一) 大膽的假設：「N=所有的大於 1 的正整數，N 若是奇數則 N+3；N 若是偶數則 N÷2，如此迭代最後必得一」是我們最先設計出來的機器。但是有同學提出：「如果奇數 N 後面+1 的方式最後可以得到 1，那 N 後面如果+3 是否也可以得到我們需要的結果呢？

(二) 驗證：

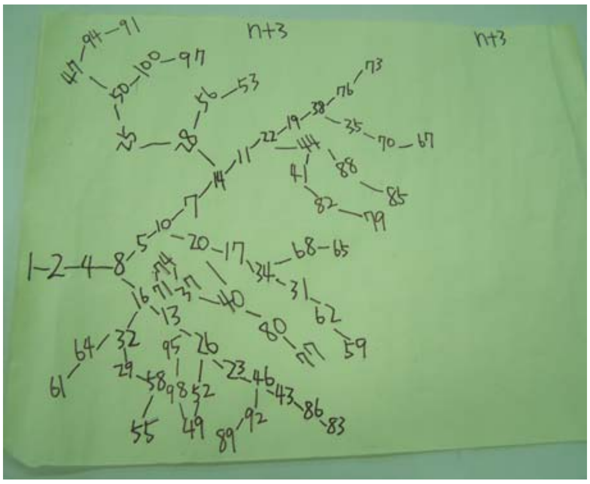
1、百數表：我們將 100 以內的數代入 「N=所有的大於 1 的正整數，N 若是奇數則 N+3；N 若是偶數則 N÷2，如此迭代最後必得一」進行迭代運算，最後我們發現居然有 2 個結果，分別是 1 和 3。我們將結果是 1 的數字用黑色的字來表示，結果是 3 的用紅色的字來表示，如下圖：

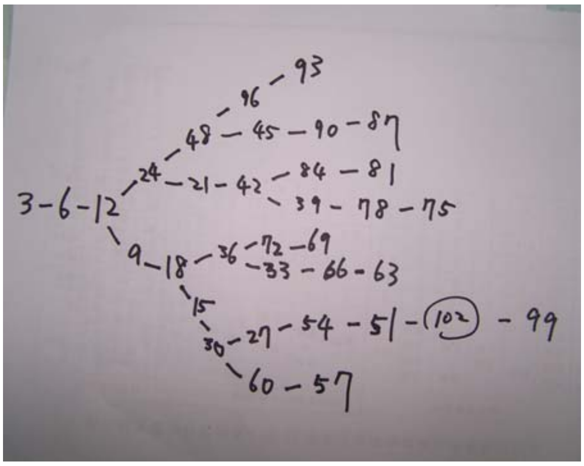
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2、我們發現在這個機器下只要是 3 的倍數最後都會變爲 3，而只要不是 3 的倍數，最後將會變爲 1。爲什麼會如此呢？我們認爲 3 的倍數只要再加 3 不管除以 2 幾次都還是 3 的倍數。再經過幾次的運算後 3 的倍數都會變爲：3x2 的 x 次方的形式，最後除以幾次 2 之後就變爲 3 了。

3、猜想：從上面的實驗我們發現只要出現 2 的 x 次方的模式就會收斂於前面的質數，所以我們想只要出現單純的 2 的 x 次方，就可以得到我們所想要的 1。

4、樹狀圖：我們可以從樹狀圖看出不是所有數在「N+3」裡面都會變成 1





(上左圖為「N+3」最後變為 1 的樹狀圖,右圖為變成 3 的樹狀圖)

(三) 結果：我們發現只要是 3 的倍數最後一定會變為 3，而只要是非 3 的倍數，最後一定會變為 1。我們在想：是不是其他的質數也是一樣的情形，那非質數的奇數又是怎樣的狀況呢？

三、N+5，N+7，N+9，N+11，N+13，N+17，N+19：

(一) 百數表：

N+5

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(紅色的數字表示都會變成 5,
黑色的數字表示都會變成 1)

N+7

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(紅色的數字都會變成 3,
藍色的數字都會變成 7,
黑色的數字都會變成 1)

N+9

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(紅色的數字都會變成 3,
藍色的數字都會變成 9
黑色的數字都會變成 1)

N+11

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(紅色的數字都會變成 11,
黑色的數字都會變成 1)

N+17

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(紅色的數字都會變成 3,
藍色的數字都會變成 17
黑色的數字都會變成 1)

N+19

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(紅色的數字都會變成 19,
黑色的數字都會變成 1)

(二) 發現和推論

1、發現：我們發現以下幾個共通點

(1) 大部分的數字在「N+X，N÷2」之後會變成一。但是有些例外。如果 X 為質數 P，那麼 P 的倍數皆不會變成 1，最後會變成 P。因為 P 的倍數再加 P 依然是 P 的倍數，不管除以幾次 2 都還是 P 的倍數，所以最後會變為 P。

(2) 如果 X=p1xp2x.….，p1、p2、p3….是不相同的質數，則 p1 的倍數最後會變爲 p1，p2 的倍數後會變爲 p2，p1xp2 的倍數最後會變爲 p1xp2，依此類推。

(3) A+B=X 的倍數，若是最後 A、B 都歸爲同一數字(1 或 X)，那麼如果 A 最後會變爲 1 則 X-A 也會變爲 1。相反的，若是最後 A、B 不會歸爲同一數字(1 或 X)，那麼如果 A 最後會變爲 1 則 X-A 會變爲 3。

(4) N+7 和 N+17 是我們(1)、(2)發現的特例，我們發現不歸爲 P 和 1 的數字最後會歸爲 3。而且每一段都有一定的規律，如果 C 是歸爲 1 則 P+C 也會變爲 1。如此我們可以推出 2P+C、3P+C 都會變成 1

2、推論：根據(4)的發現，我們推論所有的數字都可以分成是 tX+0，tX+1，tX+2….tX+(X-1)這幾類，t 是從 0 到任何無限大的正整數，如果 X+1 最後會變成 1,那麼 tX+1 都會變成 1，所以我們推論依照我們的做法所有的數字丟進「N+19」後，除了 19 的倍數外，其他的數字都會變成 1。

(三) 結果：「N+1」可以讓所有的正整數變爲 1，其他所有的「N+X」都會讓 X 的倍數最後變成 X，還有些特例，如：N+7，N+17…等有特別的規則，更是有許多的結果。因此我們可以知道「N+1」會讓所有的數字都變成 1，是因爲 N+X 的 X=1，因爲 1 是所有正整數的因數，所以所有的數最後都會變成 1。

(四) 猜想：如果「N+1」可以讓所有的正整數變成 1，那麼「3N+1」是不是也可以讓所有的數變成 1？或者「3N+3」呢？又或者「3N+X」呢？情形和規律是否跟「N+X」一樣呢？

四、3N+1：再討論過「N+X」之後，我們聯想到「tN+X」的可能性。如果「N+1」因爲 X=1 的關係，使得每一個正整數都可變成 1，那麼「tN+1」是否也都依照那個規律使得所有的正整數變成 1 呢？

(一) 百數表：

1	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

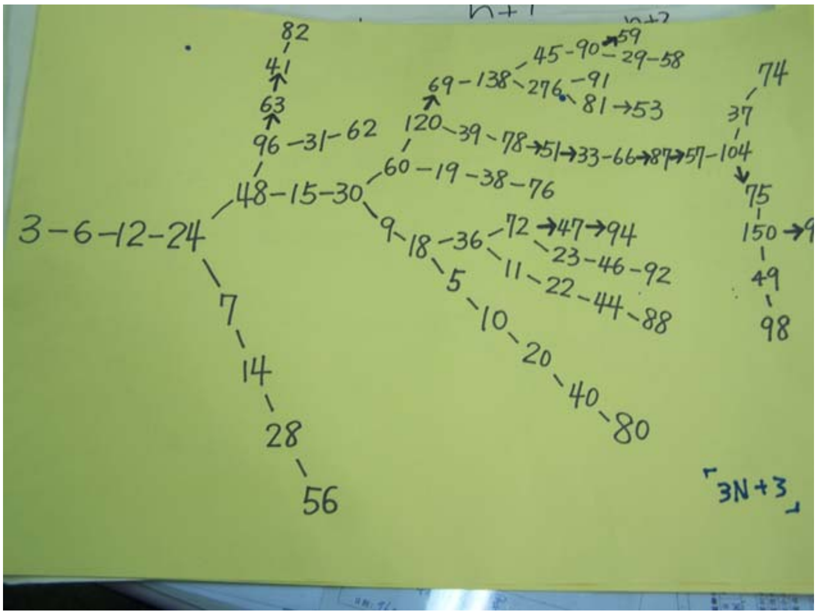
黑色的數字表示最後會變成 1，所以我們可以看到「3N+1」會讓所有的正整數都會變成 1

(二) 發現：我們發現「3N+1」居然和「N+1」一樣可以讓 100 以內的數變成 1，只是耗費了我們很多的時間。但是「3N+1」不如「N+1」一般有規律，雖然「3N+1」可以讓 100 以內的數字變成 1，但有很多數字是經過許多步驟，甚至已經變大到 10000 以上，才又慢慢的變小下來。真是讓人有「山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村」的感覺。

(三) 猜想：我們根據「3N+1」的「X=1」以及「100 以內的數都可以變成 1」這 2 個特色，還有對照「3N+1」與「N+X」的關係，我們猜測「3N+1」應該是我們要的結果。但是有同學提出「3N+3」的係數比是 1：1，和「N+1」也一樣是 1：1，那「3N+3」是不是也可以讓所有的數字變成 1。

五、3N+3：

(一) 樹狀圖：經過比較樹狀圖之後，我們發現「3N+3」與「N+1」的發展很像



(二) 百數表：

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

黑色的數字會變成 1,紅色的數字會變成 3,我們可以發現只有 2 的次方數會變成 1,其他都會變成 3,但是我們後來又發現,所以有的數字都可以變成 3。

(三) 發現：我們發現「3N+3」的大部分數字是部會變成一的，只有 2 的 t 次方數才會變成一。但在這同時我們還發現了所有的數字丟進「3N+3」最後都會變成 3。

(四) 猜想：根據上面的發現，我們做了 2 種猜想：

1、關於「PxN+1」：我們根據所做的實驗的規律，猜測只要是 X=1 的的形式都可以將所有的正整數變成 1。

2、關於「tN+t」：因為「N+1」可以讓所有的數字變成 1，「3N+3」可以讓所有的數字變成 3，所以我們猜測只要是數字比是 1：1 的形式，即可讓所有的數字變某一特定數字。我們猜想：「tX+t」可以讓所有的數字變成 t。

六、5N+1：

(一) 百數表：

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

左圖中
紅色的數字會變成 1
綠色的數字會變成 5
黃色的數字會變成 13
藍色的數字會變成 7
黑色的數字會變成 21

(二) 發現：我們發現「5N+1」和我們的預期差別很大，但是依然有一些發現

1、我們把最後變成一樣的數字顯示成一樣的顏色，我們發現雖然排列很亂沒似乎沒有規則，但是當我們把質數記做 P，P 的 2 倍，或是 P 的 2 的 n 次方倍最後都會變成 P。

2、在這些混亂的數字裡，還是也有一些規律，我們可能只是少了些方法，只要再加入某些方法，一定可以讓所有的數字變成一。

(三) 改進做法：我們想把方法改進一點讓「5N+1」變成真正可以讓所以數字變成一的機器。所以我們開始了討論和研究。

1、歸納「N+1」和「3N+1」的相同處：我們還是相信這些「機器」一定有相同處，只要把前面所發現的機器相同處歸納起來，最後一定可以發現完成「機器」最主要的因素

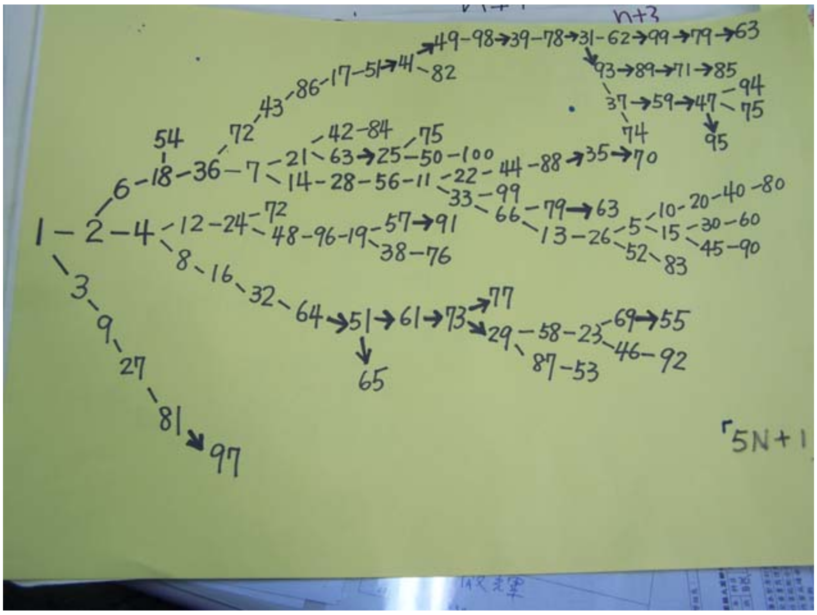
項目	「N+1」和「3N+1」的相同處
N 的係數	都是奇數，而且是質數
除以多少	2
最後的數字	都是 1

2、發現：我們發現「N+1」和「3N+1」的係數都是質數，那理論上「5N+1」應該也可以!如果 N 的係數不是主要的因素，那除以多少是不是主要的因素呢?可是「5N+1」也是除以 2 啊!在經過多次的討論後，我們認爲除以多少比較可能是決定「5N+1」成不成功的因素。因爲「3N+1」除以 2 其實可以看成是除以小於 3 的質數，所以是除以 2。那麼「5N+1」就不只要除以 2 了，還要除以 3。

3、定義：所以我們將「5N+1」定義爲：遇到偶數除以 2，遇到奇數如果是 3 的倍數除以 3，如果不是偶數也不是 3 的倍數就乘以五加一。

(四) 再試一次：我們利用倒推的方法希望能夠從樹狀圖中看到 100 以內的數都可以變成一：

1、樹狀圖：我們用樹狀圖可以看到由一倒推的發展狀況，和「3N+1」有些類似



2、百數表：我們可以從百數表上看出 100 以內的數都會變成 1

1	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

黑色數字表示最後會變成 1，所以我們可以發現改進過後的「5N+1」可以讓所有數字變成 1。

3、發現：我們發現「5N+1」可以讓 100 以內的數都變成 1。所以我們的方法是應該對的。所有的數字如遇偶數及除以 2，如果是奇數且是 3 的倍數,就除以 3，如果 2 者皆不是，就乘以 5 再加一。如此迭代下去最終必定可以得到一。

(五) 猜想：根據上面的發現，我們做了一個猜測：「假設所有的質數由小排到大為 P1，P2，P3，…..，Px，x 表示任意正整數，那麼「PxN+1」=「N 代表所有的正整數，遇到所有的正整數先除以 P1，如不能整除則除以 P2，如還是不能被 P2 整除則除以 P3，依此類推到 P(x-1)，如果 P1,P2,…,P(x-1)皆不能整除 N，則讓 N 乘以 Px 再加 1，如此迭代下去最後可得到 1」

七、利用電腦驗證：有了上面的實驗和想法之後，我們想每次實驗都要用樹狀圖還有紙筆一個個的慢慢算，如果我們可以利用現在最有力的工具—電腦，那我們做實驗就方便多了。

(一) 請教電腦老師：我們對電腦的能力雖然尚可，但是說到要編寫程式卻還缺點專業知識，所以我們向電腦老師說了我們的想法。電腦老師說：「我可以教導你們基本的指令還有結構，但是程式還是要你們自己寫喔。」在經過電腦老師的惡補之後，我們對編寫我們自己所需要的程式已經有能力應付了。再經過幾次的失敗之後，好不容易才將程式寫出來。

(二) 利用電腦驗證：我們將 10000 以內的數字分別輸入「3N+1」,「5N+1」,「7N+1」等的程式內，希望能測試是否能夠都能變成一。這真是一個浩大的工程，為了節省時間我們還跟電腦老師借了電腦課，請全班同學一起幫我們做實驗。

(三) 實驗結果：在經過漫長而且重複的驗算後，我們發現我們所發明的機器「PxN+1」使 10000 以內的正整數都可以變成一。這更加深我們堅信我們的猜測和假設是正確的。

八、「tN+t」的實驗：我們想利用電腦對我們之前發現的另一個問題「tN+t」做檢測看看是否在「tN+t」裡面所有的正整數最後會變成 t：

(一)「tN+t」的定義：我們參考「PxN+1」的定義將「tN+t」定義爲：「t 爲一質數，所有正整數 N 進入 tN+t 則先除以小於 t 的質數，如小於 t 的質數皆不能整除 N，則將讓 N 乘以 t 加 t，如此迭代計算最後必可得 t」。我們將「tN+t」定義之後，就馬上用電腦試試看是否在 10000 以內的數皆可獲得一定的值 t。

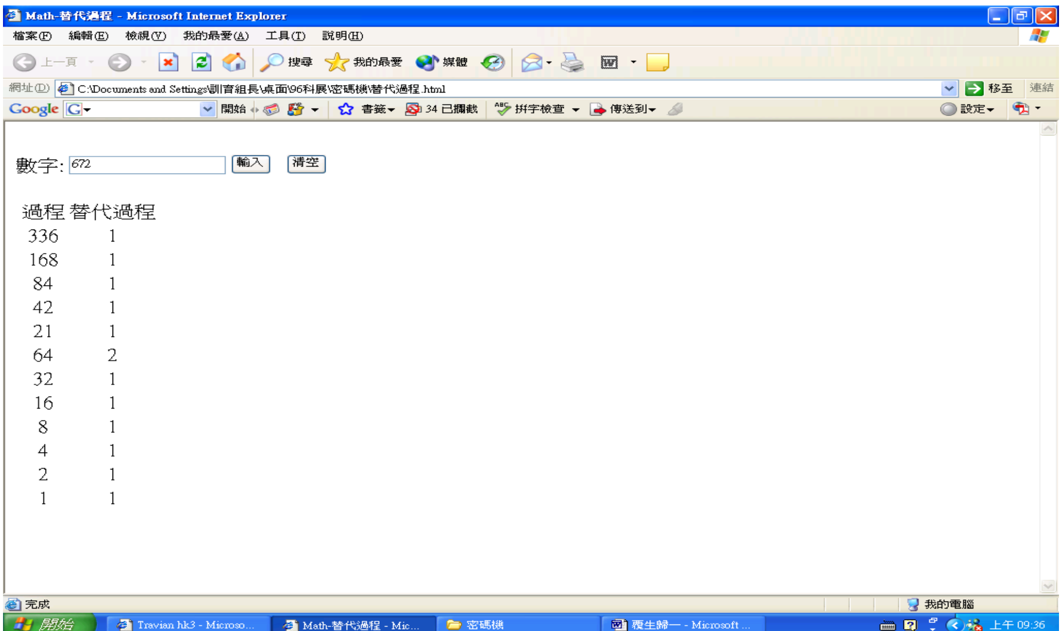
(二) 利用電腦：有了之前編寫程式的經驗和範例，我們很容易就把「tN+t」的程式編寫出來，並且將 10000 以內的數對「3N+3」,「5N+5」,「7N+7」做驗算。

(三) 規則的結果：我們發現不只有「3N+3」可以讓所有的數字變成 3，而「5N+5」、「7N+7」、「11N+11」也可以讓所有的數字分別變成 5、7、11。和我們當初預測的一模一樣

(四)「tN+t」/t：我們發現一個驚喜，如果 t 是質數，那麼「tN+t」/t=1，也就是說將所有的 N 都可以被「tN+t」/t 變成一。

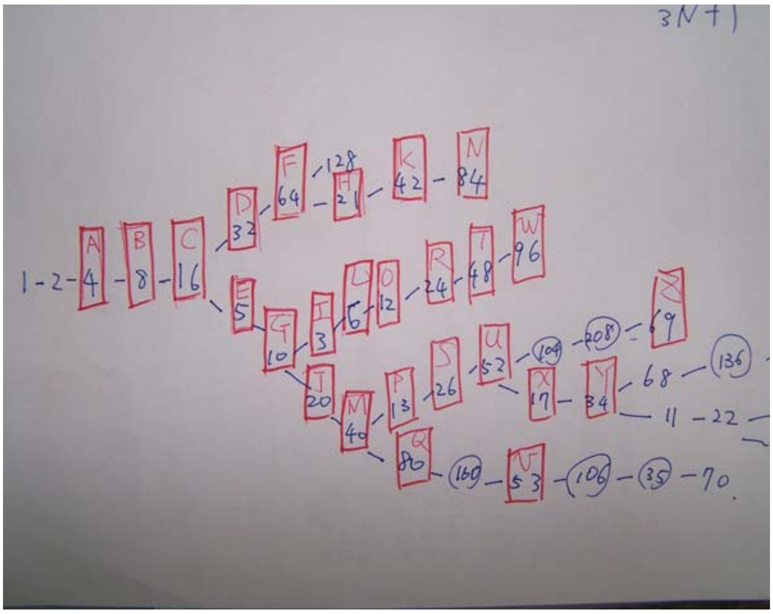
九、「PxN+1」的應用：我們想，我們發現的東西一定有它的價值，所以我們極力想辦法應用「PxN+1」的規律，創造出「PxN+1」的實用價值。

(一) 紀錄密碼：利用「PxN+1」的特性，我們可以把我們重要的數字記下來，但是被其他人看到了卻又不知道真正的數字。例如在「3N+1」底下的 128 是在第一條路徑上的第四個數字，所以我們只要記做 1111111，如果我們哪天忘記我們要的數字，只要回來用「3N+1」的樹狀圖倒推一下就可以知道了。又例如 672，我們可以記做 111111211111，如果忘記了我們要記的數字是「672」那只要記住我們是用「3N+1」來編碼，同時倒推「3N+1」的樹狀圖，在第一條路徑的第 6 個數字改成減一乘以三，之後再繼續乘以 2 五次就可以得到我們要的數字

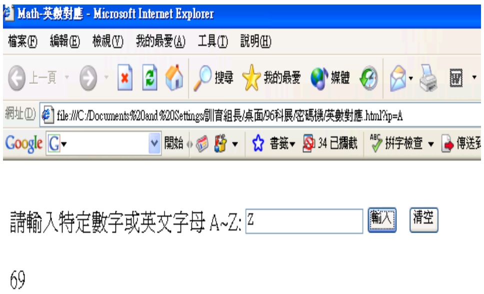


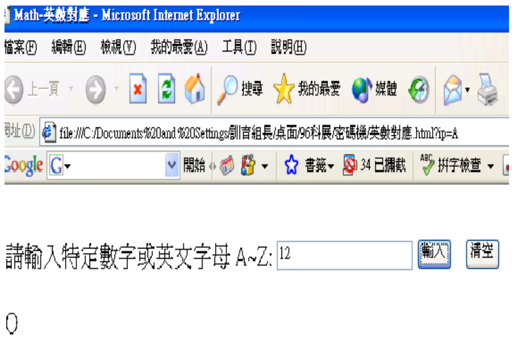
上面我們可以看到「3N+1」讓 672 變成 1 的過程(左邊)，右邊由下而上就是 672 的密碼 111111211111

(二) 雙重密碼：我們利用「3N+1」的樹狀圖發展順序，把樹狀圖上的前 26 個數字定為 A~B 的英文字母，這樣我們就可以用數字密碼來表示我們的意思。例如「10,12,10,12,10,12」=「GO,GO,GO」。



左圖可以看出我們把數字對應到英文字母,我們盡量選取路徑數目短的數字,到時字串就不會過長。





上面是我們將數字對應到英文字，還有英文字對應到數字的狀況，編寫成程式。輸入數字會產生英文字母，輸入英文字母會產生數字。

在制定了這個密碼之後我們又想:「如果可以把這密碼方法和前面的密碼方法結合不是更好嗎?」在這兩種方法結合之後,我們就發展出我們自己獨一無二的編碼方式，例如 :「111121,111121211」=「GO」，之後,我們討論試著想要將這個編碼方式時現在電腦上,做成密碼機，因爲有了之前的經驗,再加上老師的幫忙,我們很快就成功了。

密碼機形成過程

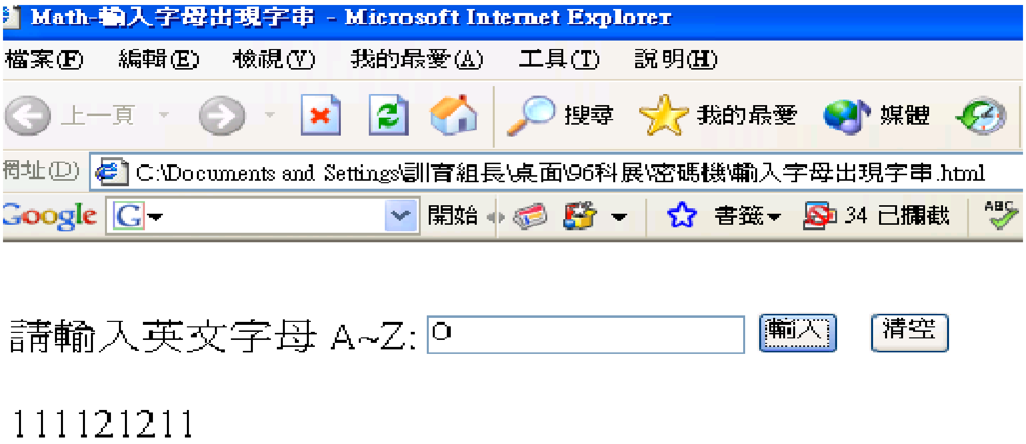
利用「3N+1」紀錄數字

+

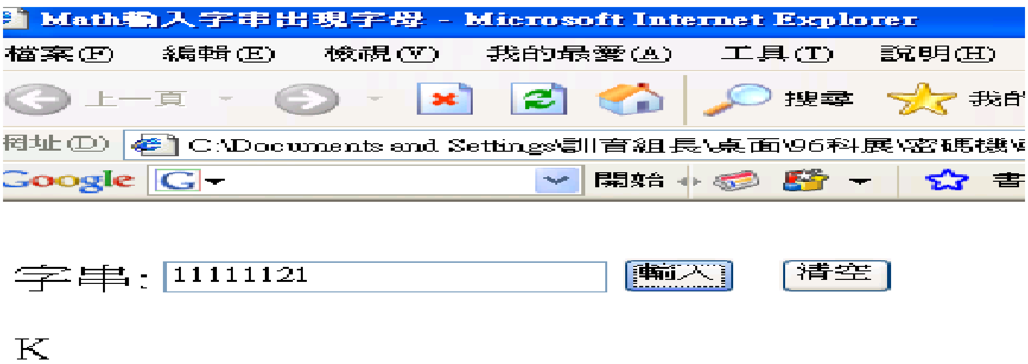
英數對應

1、輸入由 1 和 2 構成的密碼(字串)產生英文字母。

2、輸入英文字母產生密碼



上圖爲輸入英文字母產生字串的情形



上圖爲輸入密碼(字串)產生英文字母的情形

(三)我們知道電腦裡面的每一個數字都是用一串數列來表示,只用 1 和 2 就可以表示全部的意思了。我們發明的密碼紀錄方法也一樣，所以我們如果用數字來表示色彩的號碼，我們也可以用 1 和 2 的組合來表示出很多的色彩。依照這個想法，我們也可以用 1 和 2 的組合來表示聲音的大小和高低。所以我們所發明密碼紀錄方法真的可以應用在很多的地方。

(四)終極密碼戰：我們想到我們可以利用上面討論的結果來玩遊戲，說到就做到，所以我們自己先定了遊戲規則：

1、以「3N+1」的樹狀圖為依據。

2、主持人給密碼，最先找出正確的數字的人獲勝

例如：密碼是 11112121111，那我們可以根據樹狀圖，找出正確的答案是「48」，最先找出答案的人獲勝。

伍、　研究結果：

一、「3N+1」樹狀圖的規律：我們從製作過的許多樹狀圖可以看到以下的規律

(一) 「1」透過適當的方法可以變化成所有的正整數。每一個正整數感覺就像是樹上的果子一般。如果方法正確每一個數字都只會出現一次。當一個數字出現二次，那個數字的同一條路徑就會被連結起來，會形成循環，最後不能變成一。

(二) 在樹狀圖上，奇數向外延伸的路徑只有一條，就是將該奇數乘以 2。偶數的路徑有兩條，分別是乘以二以及減一再除以 3。因為在我們的做法裡「3N+1」=「N 代表所有的正整數，遇到所有的偶數先除以 2，如不能整除則讓 N 乘以 3 再加 1，如此迭代下去最後可得到 1」,所以在「3N+1」裡面的偶數可以有 2 種方法形成，奇數只有一種方法形成。倒過來說，在樹狀圖裡遇到奇數一定只能乘以 2。所以我們可以看到奇數只有一條向外延伸的路徑。

(三) 每一個數字都有自己唯一的一條路徑，在別的路徑上不會再出現這一個數字。所以我們認為這種現象與規律可以能來利用在編輯密碼或標誌某些特別大的數字。

二、「PxN+1」的規則：我們定義「PxN+1」=「N 代表所有的正整數，遇到所有的正整數先除以 P1，如不能整除則除以 P2，如還是不能被 P2 整除則除以 P3，依此類推到 P(x-1)，如果 P1,P2,…,P(x-1)皆不能整除 N，則讓 N 乘以 Px 再加 1，如此迭代下去最後可得到 1」我們認為「PxN+1」可以讓所有的數字都變成 1。以下是「PxN+1」的發現：

(一)「P1N+1」不可成立，因為 P1=2，而 2N+1 依然會是奇數，無法除以 2。所以「P1N+1」不成立。

(二) 「PxN+1」的每個數字上最多有 X 條延伸，如果我們按照由小而大的順序一個個做排列，那麼 1 以及大於 Px 的質數可以有 X 條延伸。

(三) x 越大，越快速完成某限定範圍的數字，比如說「47N+1」裡面的數字會比「3N+1」用更少或相同的步驟變成 1。因為樹狀圖來看，「47N+1」數字的延

伸路徑比「3N+1」還要寬廣，相對的，在相同長度裡面的數字「47N+1」會比「3N+1」還要多，完成 47 以內數字步驟也會比較少。

三、「N+X」裡面只有「N+1」可以讓所有的正整數變成一，「N+3」,「N+5」,「N+11」會讓大部分的正整數變成一而讓 X 的倍數變回 X。「N+7」,「N+17」則呈現不規則狀，不過大部分的數字最後都會變成一個較小的數字。

四、「tN+t」/t 亦可以將所有的數字都變成一，t 屬於質數。

陸、 討論：

一、「PxN+1」的證明：雖然我們將 10000 以內的數對「3N+1」、「5N+1」、「7N+1」、「11N+1」做運算都得到一。但是不能證明「PxN+1」能將所有的正整數變成一，可是我們還是相信我們的猜測是真實的。在經過討論之後我們歸納以下幾點「PxN+1」的特色與證明方向，希望對以後有興趣及有能力證明的人能有所幫助：

(一) 質數的規律：所有的 N 都是 Px 所合成的，所以如果 Px 夠大，則 Px 以內的所有數字皆可確定被「PxN+1」變成 1。如我們現在找到一對大的質數為 Pz，則在 Pz 以內的所有 N 皆可變成一。

(二) 2 的次方數：在「3N+1」裡面當所有的奇數在經過 3N+1 這道手續後都會變成 2 的次方數的倍數，當把這數字裡面的 2 的因數消掉後，再經過 3N+1 之後又會變成上述的情形。所以我們是否可假設:「奇數在經過適當次數的 3N+1 之後會變成 2 的次方數？」

(三) 唯一性：每一個數字在「PxN+1」都有其單一且唯一的路徑，在樹狀圖上可以看到由一伸展開來的數,每一個數字都只有一個進來的路徑，但是有可能有超過 1 個的出去的路徑。

二、「PxN+1」的實用性：

(一) 我們知道電腦裡面的運算是利用 2 進位，而時鐘的運算是利用 60 進位，不管幾進位都是可以表達所有正整數的方法。而我們找到的「PxN+1」的樹狀圖的路徑也可以作為所有正整數的表示方法，所以將來應該可以拿來做某些機器的運算方法。

(二) 編寫密碼：從「PxN+1」發展出來的編寫密碼的方法可以說是我們這次研究的最大成果。利用「PxN+1」樹狀圖上數字的唯一路徑特性我們可以將我們想要隱藏的數字編寫成一特定的密碼，而只有知道確定的 Px 的人才可以還原出正確的數字。如此可以應用在紀錄音量、色彩…等方面，亦可以應用在國防的密碼紀錄方面。

柒、 結論：

在經過許多的實驗和討論之後，我們對這次的研究下了以下的結論

一、「PxN+1」與「tN+t」/t 可以讓所以數字變成一的可能性很大，是我們目前所找到最完美的方法。

二、如果想要證明「PxN+1」的正確性，可以從它的樹狀圖以及數字出現的規律上著手。

三、「PxN+1」可以很確實的應用在編寫密碼上面，而且簡單易懂，人人上手。

四、「PxN+1」還可以運用在色彩分配，或者音量大小的計錄上，因為每個音量、色彩可以用特定的數字表示，而每一個數字又可以被「PxN+1」化成獨特的一段數字。

五、我們發現數學的實驗不只是可以用紙筆來做計算，如果有編寫電腦程式的基礎，用電腦來做實驗運算也是很好的方法。

六、我們還發現數學之美，在做「3N+1」的實驗時，往往我們都要放棄了，卻突然出現一絲希望，讓數字慢慢的變小，最後達成我們的需求。

捌、 參考資料

一、康軒數學第 11 冊「因數與倍數」

二、小叮噹的數學互動網 2-1 因數與倍數

三、數學思考http://euler.tn.edu.tw/think32.htm

四、JavaScript是什麼?-PCDOG程式編輯教學(www.pcdog.com)

五、JavaScripthttp://elearning.meiho.edu.tw/1000110076/javascript/index.html

【評　語】　080409　覆生歸一

透過數值的解碼以及雙重密碼的設定，展開迷人的終極密碼戰。藉由數值的衍生以及覆生歸一歷程，暗藏玄機增添趣味，配合電腦程式設計，將來可發展爲有趣的線上密碼遊戲。