中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

最佳創意獎

080405

魔幻金鑰

學校名稱：台南市北區文元國民小學

作者：	指導老師：
小五 吳篤承	許隨耀
	陳福慶

關鍵詞：密碼　加密　解密

摘要

資訊爆炸時代，資料的流通迅速方便，但安全性也跟著降低，從前以實體文書往來信件時，還能夠在信封上加上彌封，但是電腦網路世界要如何加上這道彌封呢？這也是目前各國重視的資訊安全的部份，強化電腦資料的保存方法，就是加上密碼，這到密碼就是我們所說的彌封，在網路中有了這道彌封，即使資料不慎被竊取，只要解密金鑰不被破解，那重要的資訊便不會洩漏，所以我們便以加密的方法應用爲主題來進行探討。

壹、研究動機

在五年級的時候，我玩的線上遊戲常常被有心人士盜取我帳號，我的老師就說：「要不要跟我一起研究密碼學。」這時我問他爲什麼，他給我的回答是用密碼將帳號加密之後就不會被盜走了，不過這時我仍然一頭霧水，用密碼將帳號加密之後就不會被盜走是爲什麼？後來經過老師由淺入深慢慢地解釋之後引起我對密碼學的興趣，原來數學可以這樣玩，而且密碼學運用到我數學課裡的單元－因數和倍數，對我課堂上的數學有複習、加深、應用的幫助，所以我就和我的老師開始密碼學之旅。

貳、研究目的

老師說數學就是要運用在生活上，我們的目的是利用因數、倍數來設計加密的金鑰，在日常生活中我們可以把文字加密，這樣我和我的朋友們在說什麼其他人也不會知道，這樣我們發現甚麼秘密就不會被知道，後來我們想到是否能夠把加密的方法應用到圖片上，從一個圖變另外一個圖，人家也不知道原本的圖是什麼，而那個圖只有我們知道怎樣解密變成原來的圖，這樣我們就成功的達成我們的目的了

參、研究設備及器材

我們用筆、紙、電腦來做研究；紙筆是用來做推演，而電腦方面，我們是利用軟體 EXCEL 來做計算與繪圖的工作。

肆、研究過程或方法

工欲善其事必先利其器，所以我們必須了解整數的除法、除法關係式，什麼是因數？什麼是倍數？什麼是公因數？什麼是公倍數？什麼是質數？什麼是質因數？什麼是餘數？什麼是同餘？除了公因數、公倍數、質數、質因數、同餘之外，其他概念在五年級課本中就有提到。

而上述所謂的公因數是指兩個以上的數字共有的因數。

例如：

１８的因數有：１、２、３、６、９、１８

１６的因數有：１、２、４、８、１６

這兩個數的因數都有１，所以１就是１８和１６的公因數，以此類推，可以找出所有的公因數爲１、２。

而公倍數就是指兩個以上的數字共有的倍數。

例如：

２的倍數有：２、４、６、８、１０、１２、１４、１６、１８…

３的倍數有：３、６、９、１２、１５、１８、２１…

他們兩個數的倍數都有６，所以６就是２和３的公倍數了。

接著說明質數，除了１之外，當某個數的因數只有１和本身的數，像２、３、５、７、１１、１３這些數的因數都只有１和他本身，這些數就是質數；老師說目前沒有固定的模式

可以找出所有質數，所有的模式大多只能夠找出有限個質數。當一個數的因數是質數時，這個因數就稱作質因數。

例如：１８的因數有：１、２、３、６、９、１８

然後２和３又是質數，那２和３就是１８的質因數。

最後老師還提到同餘，雖然這個概念比較深，但是老師使用簡單的例子讓我比較容易了解它，

例：隨意列出幾個數 2、3、4、5、7、10、13、14、15，來被 3 除。

表一、除數爲 3 的同餘數列

同餘 0	同餘 1	同餘 2
3÷3＝0…0	4÷3＝1…1	2÷3＝0…2
15÷3＝5…0	7÷3＝2…1	5÷3＝1…2
	10÷3＝3…1	14÷3＝4…2
	13÷3＝4…1	

總括來說，就是兩個以上的數被同一個數除，所剩下的餘數是一樣的，那這兩個以上的數就是同餘數；如表一所示，3 與 15 爲被 3 除同樣餘 0 的數，4、7、10、13 爲被 3 除同樣餘 1 的數，2、5、14 爲被 3 除同樣餘 2 的數；當我們了解後老師就帶我們進入研究主題。

一、Caser crypt system(凱撒密碼系統)

所謂的凱撒密碼系統的原理簡單來說，就是把所有的英文字母都往後移一位，因爲那時並沒有密碼系統的概念，所以與凱撒大帝作戰的國家無法理解所攔截到的文件。

不過在現代因爲教育的普及，大家的基本數學邏輯都有一定的程度，所以很容易發現只要把英文數字往前移一位就被破解了。於是密碼學家就將移位的範圍擴大，開始改良凱薩密碼系統，但是現代的電腦科技發達，計算神速，在人類能夠負荷的位移數範圍，電腦都能很快的嘗試出來，所以光只有位移已經不夠。

二、改良凱撒密碼系統

所以科學家又加入了之前提到的同餘數觀念，也就是模數(Module)，產生了以下的式子

$$c = p + s \ (mod \ [m]) \qquad \cdots(1)$$

c 是加密後的數， p 是加密前的數， s 是移位的數，m是模數。

如此，我們就能隨意產生比較難預測的位移，但這樣的移位最大範圍也只是停留在英文字母的 26。這樣他人同樣只要找到一小段文章就能找出規則性把整篇文章解出來，所以我們就把原碼乘以一個倍數後再做位移

就是

$$c = n \cdot p + s \ (mod[m]) \qquad \cdots(2)$$

c 加密後的數， n 倍數， p 加密前的數， s 位移的數，m模數

這樣加密的範圍就變大了，要解密就比較難了。

三、解密系統

解密系統方面，我們要利用反運算來找出解密的金鑰。而反運算中，p 的乘法部分牽涉到模數運算，並不能以一般除法來做，在我們先備知識不夠的情況下，老師提供一種方法給我們，過程如下所示：

加密演算式：ｃ＝７ｐ＋3（ｍｏｄ２６），Ke=<7，3>

首先

$$26 \div 7 = 3 \cdots 5$$

$$7 \div 5 = 1 \cdots 2$$

$$5 \div 2 = 2 \cdots 1$$

當餘數有出現 1 的時候，我們就不繼續算下去了

經過整理後就變成

26=7X3+5

7=5x1+2

5=2X2+1

反向套入演算之後就變成

26x1-(7X3)=5

7X1-(5X1)=2

5X1-(2X2)=1

我們把這些式子找到後，就可以開始找解密的 key；將這些式子繼續反向套入演算，可得底下過程：

(5x1)-{[(7x1)-(5x1)]x2}=1

<=>(5x1)-{2(7x1)+2(5x1)}=1

<=>(5x1)-2(7x1)+2(5x1)=1

<=>3(5x1)-2((7x1)=1

<=>3{[26x1)-(7x3)]x1}-2(7x1)=1

<=>3{1(26x1)-1(7x3)}-2(7x1)=1

<=>3(26x1)-3(7x3)-2(7x1)=1

<=>26x3-7x9-7x2=1

<=>26x3-7x11=1

最後的結果是 26x3+7x(-11)，而 **x** 和 **y** 就是 3 和-11，可是我們不能有負號出現，所以就取模數 26 變成+15，這樣負號就不見了。以上的方法老師告訴我們就是所謂的歐基里德演算法。透過這方法我們可以狠容易找出解密的金鑰，也就是 KD=<,>；不過這樣找出 **x** 和 **y** 太慢了，老師就告訴我們輾轉相除法的快速算法，也就是底下所呈列的表格：

1	0	26	--
0	1	7	--
+1	-3	5	3
-1	+4	2	1
+3	-11	1	2

換成文字的話就變成

表二、歐基里德演算格式

X1	Y1	R1	---
X2	Y2	R2	---
X3	Y3	R3	A1
X4	Y4	R4	A2
X5	Y5	R5	A3

規則是 X1=1，Y2=1，X2=0，Y2=0，$R1 \div R2 = A1 \cdots R3$ ，$R2 \div R3 = A2 \cdots R4$ …，以此類推下面的 R4,R5,A2,A3 就出來了；接著下去 X3=－(A1・X2)+X1，Y3=－(A1)(Y2)+(Y1)，以此類推最後的 X 行和 Y 行就出現了，這樣我們就快速的找到了 X 和 Y 了，至於這個快速方法的原理，老師說等我們上高中之後有興趣再去研究。

學會了以上的方法，我們就用一個例子來試驗看看，是否能夠達到我們求解密金鑰的目的。

我們的加密演算是ｃ＝２ｐ＋５（ｍｏｄ８１）

Ke=<2,5>

所以我們就要用 81 和 2 來反運算找出其中 2 的解密金鑰 Kd

1	0	81	---
0	1	2	---
+1	-40	1	40

這時 y=-40<0，可是我們不能有負的，所以用模數的觀念來轉換-40＝+41(mod81)

這樣就知道其中 2 對應的 Kd 是 41 了。

解完一個 Kd 後就可以找另外一個 Kd 了，這時就要用到翹翹板原理(等量公理)，

演算式ｃ＝２ｐ＋５　（ｍｏｄ８１）

等號兩邊各減 5，就變成

２ｐ＝（ｃ－５）（ｍｏｄ８１）

＝＞ｐ＝４１（ｃ－５）（ｍｏｄ８１）

＝４１ｃ－２０５（ｍｏｄ８１）

這時候-205 就會被 81 除同餘的數就是+38，算式可以改變如下

ｐ＝４１ｃ＋３８（ｍｏｄ８１）

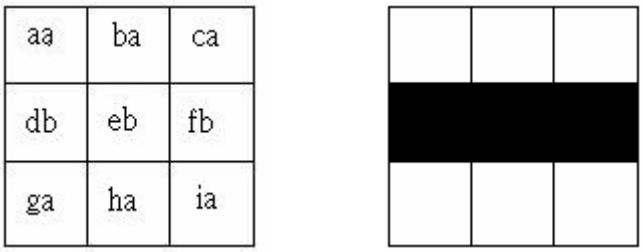
這樣第 2 個 Kd 就出現了，所以 Kd 就是<41,38>，而我們就是用歐基理德演算法把解密的金鑰找出來了。

四、系統圖形應用

最後我們就要把圖形加密，讓原本得圖變成另外一個圖。變圖的動作所使用的工具就是之前所說加密金鑰 ke=<2,5>，所得到演算式是

ｃ＝２ｐ＋５（ｍｏｄ８１），

範例圖形如下圖



圖一、九宮格與二合數編碼

要將圖形加密我們得先將圖形量化，而量化的方法我們運用密碼學中常見的二合數的編碼方法，也就是將文章中兩個字母一數，編成一個數；而圖形的二合數部份我們定義如下，圖形可以以像素的觀念來分割成好幾個方塊，每一個方塊代表一個像素，而每一個像素格子有兩樣屬性：(1)位置、(2)顏色。第一格像素 aa，前面的英文數字 a 是代表位置，後面的字母 a 是代表顏色，而顏色部分 a 是白色，b 是黑色，c 是紅色，d 是橙色，e 是黃色，f 是綠色，g 是藍色，h 是靛色，i 是紫色；量化之後 a=0，b=1，c=2，d=3，e=4，f=5，g=6，h=7，i=8，這時候我們就把所有的英文數字變成號碼了；而格子數是 9 整個像素編碼算式是(第 1 數)x9+(第 2 數)。

圖形加密步驟如下：

1.我們就把像素格子整個編碼了，

aa:0x9+0=0
ba:1x9+0=9
ca:2x9+0=18
db:3x9+1=28
eb:4x9+1=37
fb:5x9+1=46
ga:6x9+0=54
ha:7x9+0=63
ia:8x9+0=72

這樣每格格子都有編碼了

2.這時我們就可以開始加密了

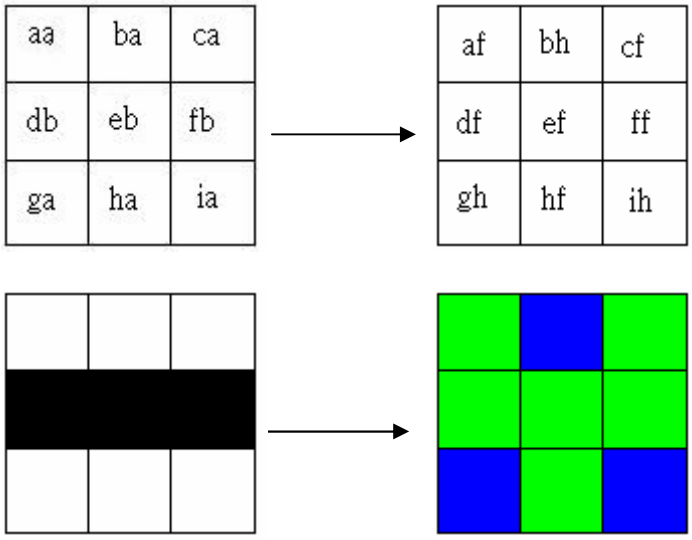
aa:2x0+5=5 mod 81
ba:2x9+5=23 mod 81
ca:2x18+5=41 mod 81
db:2x28+5=61 mod 81
eb:2x37+5=79 mod 81
fb:2x46+5=97＝16 mod 81
ga:2x54+5=113＝32 mod 81
ha:2x63+5=131＝50 mod 81
ia:2x72+5=149＝68 mod 81

3.最後我們就把加密完的數反向編碼，拆成二合數找出他的位子和顏色

表三、反向編碼結果

編碼	改變後的位置	改變後的顏色
5 =0x9+5	0	5(綠)
23=2x9+5	2	5(綠)
41=4x9+5	4	5(綠)
61=6x9+7	6	7(靛)
79=8x9+7	8	7(靛)
16=1x9+7	1	7(靛)
32=3x9+5	3	5(綠)
50=5x9+5	5	5(綠)
68=7x9+5	7	5(綠)

這樣加密完顏色與位置就都改變了，



圖二、加密之後的結果，位置和顏色都改變

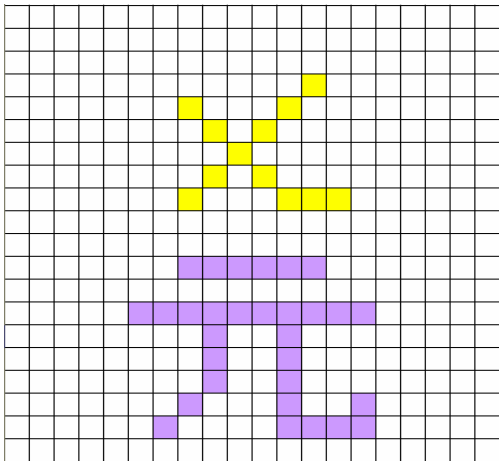
這樣我們就把圖形加密完了，成功的把圖形變成另一個圖型， 讓別人不知道原本的圖是什麼了。

伍、研究結果

我們將例子範圍放大，以更大的文字圖形來驗證我們的研究結果。我們分３個部份來討論，一、改變顏色。二、改變位置。三、改變顏色和位置。

一、改變顏色：

原圖如圖三，加密金鑰ｋｅ＝＜４，５＞



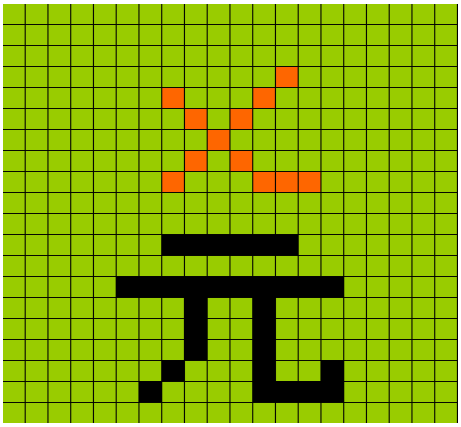
圖三、文字像素圖２０ｘ２０

我們定義的九種顏色經過加密後如圖四，

顏色	編碼	加密後的編碼	加密後的顏色
	0	5	
	1	0	
	2	4	
	3	8	
	4	3	
	5	7	
	6	2	
	7	6	
	8	1	
ke:	c＝4ｐ＋5 （ｍｏｄ　9）		

圖四、加密後的顏色編碼

對照圖四的編碼，我們就可以把圖三加密變成圖五，



圖五、加密後的文字圖

所以當收訊人收到這張圖片的時候可以使用解密金鑰ｋｄ＝＜７，1＞，ｐ＝７ｃ＋1（ｍｏｄ９），將圖五還原成圖三，得到正確的內容。

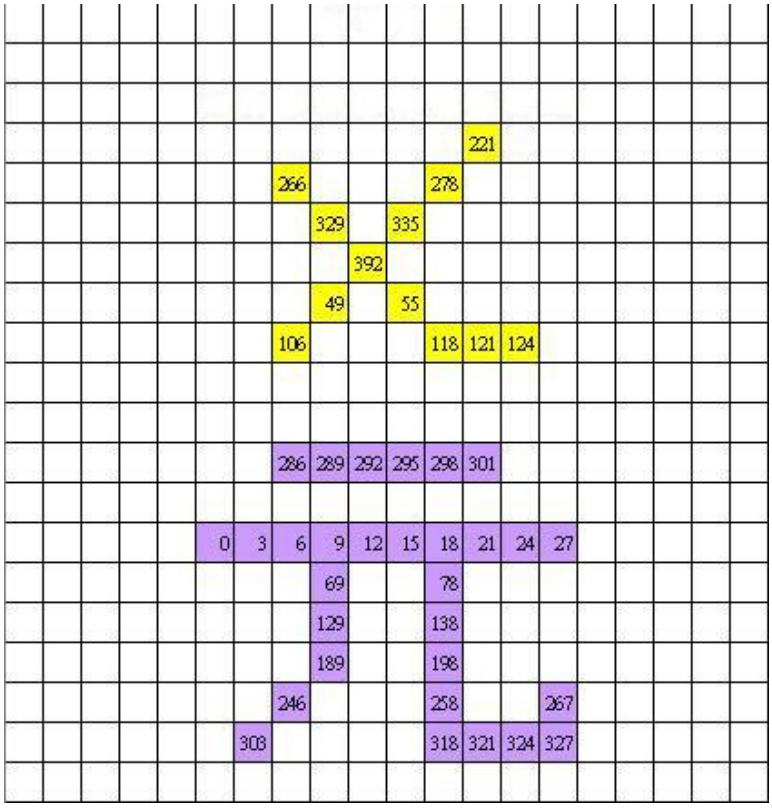
二、改變位置：

原圖如圖三，加密金鑰ｋｅ＝＜3，5＞模數 400，我們將位置編號，如下圖六，

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219
220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259
260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279
280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299
300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319
320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339
340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359
360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379
380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399

圖六、編號後的文字像素圖

加密之後有顏色的部份其位置的改變如下圖七，



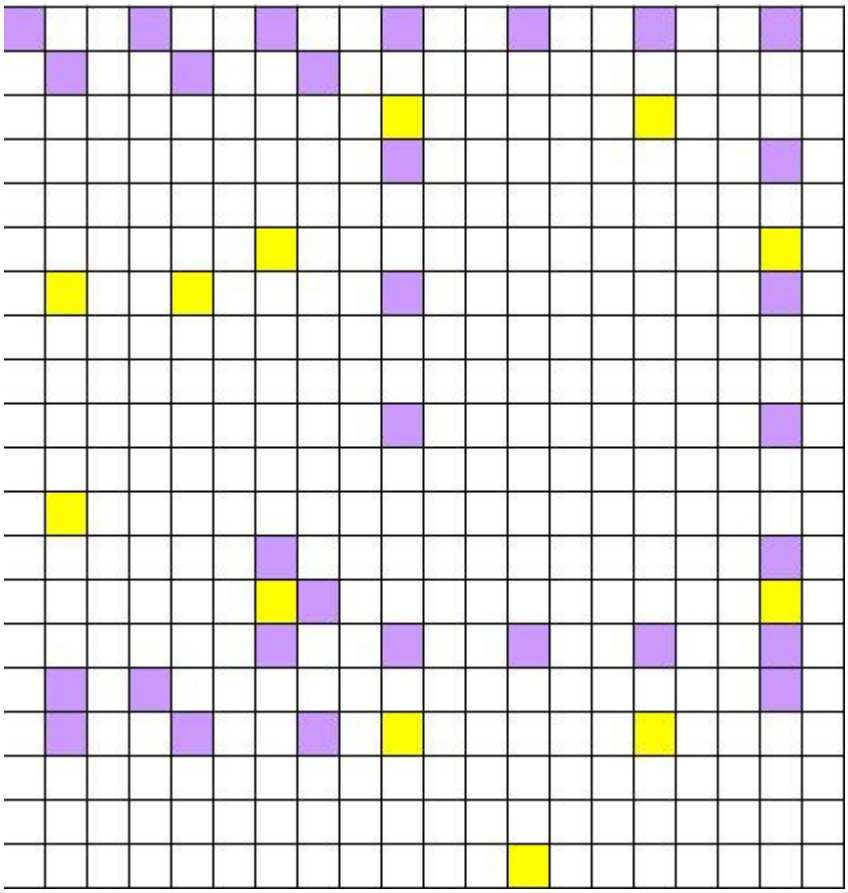
圖七、加密後有顏色的部分位置編號改變圖

我们依照圖七，將新編號位置的顏色塗上，得到下圖八，

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219
220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259
260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279
280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299
300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319
320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339
340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359
360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379
380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399

圖八、改變位置後的對應圖

我們將位置編號取消，得到圖九加密完成圖，



圖九、位置改變加密完成圖

所以當收訊人收到這張圖片的時候可以使用解密金鑰ｋｄ＝＜２６７，２６５＞，ｐ＝２６７ｃ＋２６５（ｍｏｄ４００），將加密後的二合數編碼代進 Kd 演算式中，即可將圖九還原成圖三，得到正確的內容。

三、改變顏色和位置：

原圖如圖十，此部分我們融合前面兩者進行編碼加密工作，二合數編碼=位置 x100+顏色，模數取 99 x 100+99+1=10000，因爲加密範圍從 0~9999 一共 10000 個元素，Ke=<21，5>，往後的圖除了完成圖之外，其他圖均會將原圖重疊在上面，用來對照。

顏色編碼									
0	0	0	4	4	4	4	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	4	4	4	4	4	4	4	4	0
0	0	0	0	0	0	0	4	0	0
0	0	4	0	0	0	4	0	0	0
0	0	0	4	0	4	0	0	0	0
0	0	0	0	4	0	0	0	0	0
0	0	0	4	0	4	0	0	0	0
0	0	4	0	0	0	4	0	0	0
0	4	0	0	0	0	0	4	4	0

圖十、原始圖樣與顏色編碼(10 x 10 像素圖)

位置編碼									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

圖十一、位置編碼(10 x 10 像素圖)

二合數編碼=位置*100+顏色(以個數最多的爲底數)									
0	100	200	304	404	504	604	700	800	900
1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
2000	2104	2204	2304	2404	2504	2604	2704	2804	2900
3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3704	3800	3900
4000	4100	4204	4300	4400	4500	4604	4700	4800	4900
5000	5100	5200	5304	5400	5504	5600	5700	5800	5900
6000	6100	6200	6300	6404	6500	6600	6700	6800	6900
7000	7100	7200	7304	7400	7504	7600	7700	7800	7900
8000	8100	8204	8300	8400	8500	8604	8700	8800	8900
9000	9104	9200	9300	9400	9500	9600	9704	9804	9900

圖十二、位置與顏色二合數編碼(10 x 10 像素圖)

加密完之後爲圖十三，

加密：模數取99*100+99+1=10000(0~9999) C=21*P+5 mod 10000									
5	2105	4205	6389	8489	589	2689	4705	6805	8905
1005	3105	5205	7305	9405	1505	3605	5705	7805	9905
2005	4189	6289	8389	489	2589	4689	6789	8889	905
3005	5105	7205	9305	1405	3505	5605	7789	9805	1905
4005	6105	8289	305	2405	4505	6689	8705	805	2905
5005	7105	9205	1389	3405	5589	7605	9705	1805	3905
6005	8105	205	2305	4489	6505	8605	705	2805	4905
7005	9105	1205	3389	5405	7589	9605	1705	3805	5905
8005	105	2289	4305	6405	8505	689	2705	4805	6905
9005	1189	3205	5305	7405	9505	1605	3789	5889	7905

圖十三、加密後的密碼(10 x 10 像素圖)

其中位置第 4 行第 3 列的密碼 6389，我們可以依照前面二合數編碼將他反向拆解，
變成 6389=100 x 63 + 89，此時 63 就是新的位置，89 就是新的顏色，我們使用編號 0~99 顏色，假設編號第 89 顏色爲紫色可得下圖十四。

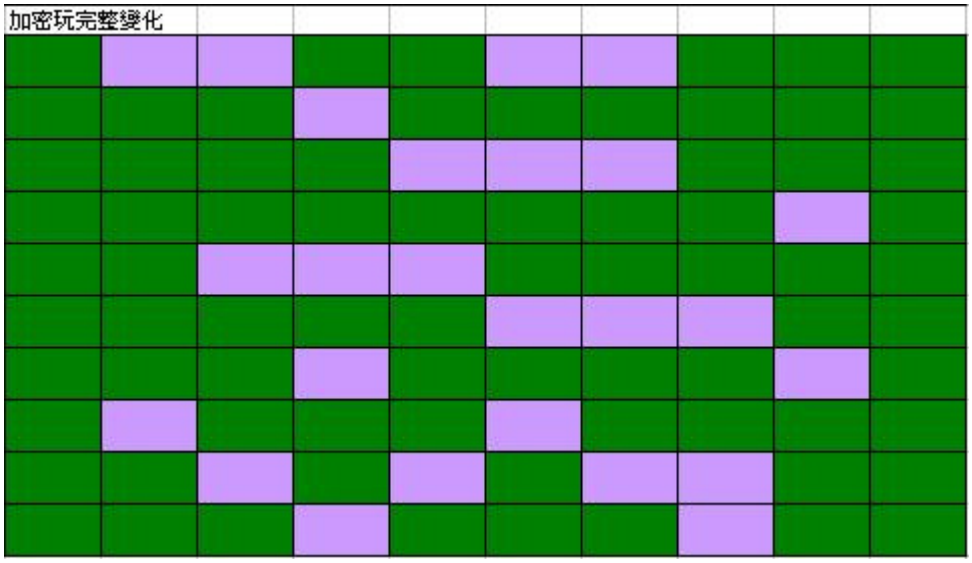
加密完顏色變化									
5	5	5	89	89	89	89	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	89	89	89	89	89	89	89	89	5
5	5	5	5	5	5	5	89	5	5
5	5	89	5	5	5	89	5	5	5
5	5	5	89	5	89	5	5	5	5
5	5	5	5	89	5	5	5	5	5
5	5	5	89	5	89	5	5	5	5
5	5	89	5	5	5	89	5	5	5
5	89	5	5	5	5	5	89	89	5

圖十四、加密後的顏色(10 x 10 像素圖)

加密完位置變化									
0	21	42	63	84	5	26	47	68	89
10	31	52	73	94	15	36	57	78	99
20	41	62	83	4	25	46	67	88	9
30	51	72	93	14	35	56	77	98	19
40	61	82	3	24	45	66	87	8	29
50	71	92	13	34	55	76	97	18	39
60	81	2	23	44	65	86	7	28	49
70	91	12	33	54	75	96	17	38	59
80	1	22	43	64	85	6	27	48	69
90	11	32	53	74	95	16	37	58	79

圖十五、加密後的新位置(10 x 10 像素圖)

我們將圖十四與十五合併對照，即可得出圖十六的完成圖。



圖十六、加密後的完成圖(10 x 10 像素圖)

完全看不出原來的字是個黃色的”文”。 所以當收訊人收到這張圖片的時候，可以使用解密金鑰ｋｄ，將加密後的二合數編碼代進 Kd＝＜２３８１，８０９５＞，ｐ＝２３８１ｃ＋８０９５（ｍｏｄ１００００）演算式中，即可將圖十六還原成圖十，得到正確的內容。

陸、討論

前一節三個部份的過程中，有遇到困難的地方是在位置與顏色加密的部份，要將位置與顏色量化成二合數時，底數的取法有遇到錯誤，在一開始研究時候，老師是以九宮格的範例講解，像素格子數也是 9 與顏色數一樣，以至於後來像素格子數量變多時，我們忘了改變，還是取 9 造成顏色的位置會重複，也就是同樣位置會有兩種顏色，老師點出這個錯誤之後，我們想了又想，發覺底數必須以位置和顏色中數量較多的一方爲主(圖十二)，也就是將兩者的

數量調成一樣，較少的一方加密之後可以取模數還原，否則會造成無法包含數量較多的一方的情況，導致較少一方重複覆蓋較多一方的情形。

柒、結論

老師說密碼學還不只這樣，這只是其中小小部份，還有什麼 RSA、陷門函數…等等，因爲目前以我們的程度，能夠了解的部分僅限於此，所以只做到這邊，也說明了能量化的資料都可以用加密的金鑰來保存，其實老師還希望我們做出金鑰庫，依照一開始的要求去選用金鑰，將圖形做更豐富的變化，還可能變化出另一個可辨識的圖，老師說這就留給我們以後有時間再繼續研究。

捌、參考資料及其他

1. 巨岩出版編輯部 · 阿隆(民 95)。數位影像與 PhotoImpact。什麼是像素？(p.3 頁)。台北市。巨岩出版股份有限公司。
2. Sarah Flannery with David Flannery，葉偉文譯(民 90)。數學小魔女(第一版)。台北市。天下遠見出版社。
3. 康軒國小數學教科書。(民 95)。第一單元 因數與倍數。市。康軒出版社。

【評　語】　080405　魔幻金鑰

能從生活中個人帳號被盜用之情況獲得啓發，思考加密之技巧。應用數的同餘概念，倍數關係與圖形位置，配上顏色之對應變化，研究出多重加密之技巧，頗富創意及實用性，值得給予最佳創意獎，以爲鼓勵。唯資料中某些部份陳述不甚清楚，口頭說明時，亦有些概念待釐清，有待加強改進。