

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080404

填來填去都是田

學校名稱：宜蘭縣羅東鎮竹林國民小學

作者：	指導老師：
小六 林沂政	劉玟毅
小六 黃文辰	
小六 張智斌	
小六 李佳恩	

關鍵詞：田字 連續 最大值

作品名稱：

填來填去都是田

----- 田字和連續極大值研究

壹、摘要

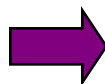
這是一個好玩又特別的拼湊卡遊戲，我們發現和拼湊卡有關的科展研究曾拿過 3 個全國第一名(第 31 屆初小、第 32 屆高小、第 41 屆初小)，但我們試著從另外的角度出發，在紙卡上畫出兩面均是 4 欄*4 列的格子，利用不同的切割方式，產生不同格式的拼湊卡，接著訂出每一型的遊戲規則，再經由不同的摺法所產生之田字型數字組合的數值，其數值必須是連續性，我們藉由嘗試研究與歸納整理，試圖摺出理想中田字和連續之最大數值。

貳、研究動機

一、我們曾在麥當勞發現一個好玩的遊戲----轉折拼湊卡，也在科學展覽中發現它有許多來歷，這引起我們的好奇，我們覺得應該還有許多可以延伸發展的遊戲，於是我們有了突破困難的想法，我們決定挑戰它，來滿足我們的好奇心。



【麥當勞遊戲——轉折拼湊卡】



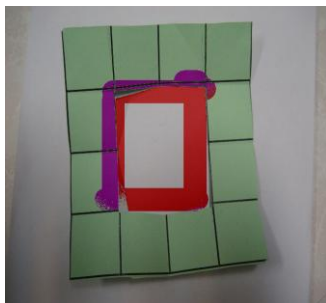
【拼湊卡完成圖之一】

二、剛開始我們從老師丟給我們的〈792 魔術卡〉作為我們的“暖身運動”（如下圖一）
玩著玩著突然靈機一動發展到“中空型”拼湊卡（如下圖二），並細分成【數字填法
有限制型】【數字填法無限制型】、最後試著挑戰另一種“王字型”拼湊卡（如下圖三）



圖一 792 魔術卡

--- 爲切割線



圖二 “中空型” 拼湊卡

□爲切割線



圖三 “王字型” 拼湊卡

王爲切割線

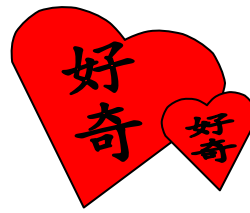
三、在歷屆有關拼湊卡的研究中，第 31 屆初小作品—〈拼拼湊湊都是畫〉是著重在圖形的拼湊、第 32 屆高小作品—〈麥當勞的難題—轉、折、拼、湊〉是著重在可否拼出圖形的分析和三角形的變形、第 41 屆初小作品—〈792 魔術卡〉是利用 1~8 各四個數字的組合分析，而我們決定改變方向著力於拼出數字和之極大值。

參、研究目的

- 一、 找出連續和之極大值--- 依規律性組合後再找出其最大數值。
- 二、 快 又 有 效 率 --- (一) 如何增加自己對拼湊卡的填法、摺法及熟悉度。
(二) 使我們利用最少時間，做出最好的成果。
- 三、 比 比 皆 試 --比較不同的拼湊卡之最大值，並試著了解原因。
- 四、 挑 戰 自 我 ---自我考驗、滿足好奇心。

肆、研究設備及器材

- 一、一顆好奇的心、糖果、餅乾、食物
- 二、計算紙、卡紙
- 三、彩色筆、鉛筆、奇異筆、原子筆、橡皮擦
- 四、電腦、計算機、計時器、白板、白板筆
- 五、釘書機、印表機、電風扇、影印紙、文件夾
- 六、剪刀、美工刀、尺

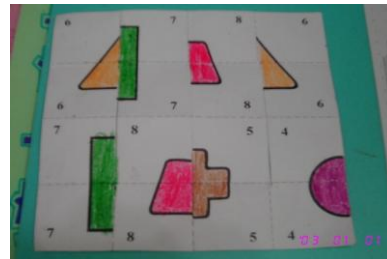


伍、研究過程及方法

遊戲規則說明：

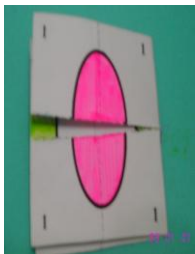
一、【暖身運動】— 792 魔術卡

(一) 一開始老師給我們 792 魔術卡，上面並填有 4 個 1、4 個 2、4 個 3、4 個 4、4 個 5、4 個 6、4 個 7、4 個 8，共 32 個數字。(如下圖)

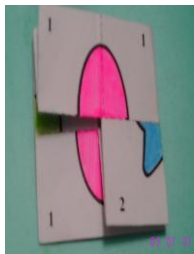


(二) 之後，老師要我們動手將紙卡摺成田字型，而田字型的和從 4、5、6、...、是否可以完成一直連續到田字型的和最大值是 32。

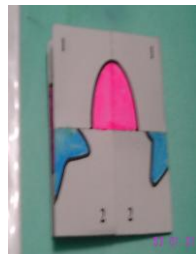
$$1+1+1+1=4$$



$$1+1+1+2=5$$



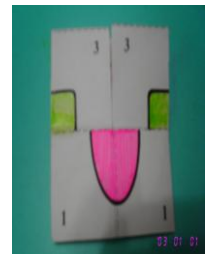
$$1+1+2+2=6$$



$$3+1+1+2=7$$



$$3+3+1+1=8$$



田字型數字組合等於 4 等於 5
等於 6 等於 7 等於 8、...、
一直連續到田字型的和等於 30
、31 到最大值是 32。



$$7+8+7+8=30$$



$$7+8+8+8=31$$



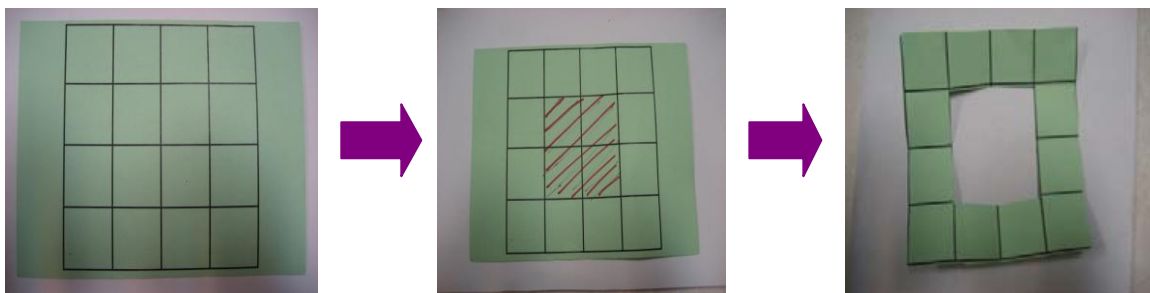
$$8+8+8+8=32$$

二、進入主題－“中空型拼湊卡”

(一) “中空型拼湊卡” 又分爲<數字填法有限制型>及<數字填法無限制型>

遊戲規則說明如下：

1. 在紙卡上先畫出 16 格的格子(即 4 欄 X 4 列)且正、反兩面都有一模一樣的格子，並將中間四格剪掉即爲“中空型拼湊卡”(如下圖)正、反兩面各有 12 個格子所以一共有 24 個格子。



2. <數字填法有限制型>之“中空型拼湊卡”

可填數字限爲 1、1、1、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20 及 21 共 24 個數字，且每個數字都必須使用(除了 1 可重覆 4 次以外，其餘 2~21 的數字都只限用一次)。

最小田字型數字組合爲 4 (1+1+1+1)，最大田字型數字組合爲 78 (18+19+20+21)

3. <數字填法無限制型>之“中空型拼湊卡”

可隨意填入任何數字，且數字可重覆。

但最小田字型數字組合爲 4，並求出田字型數字組合連續性之最大值。

4. 田字型數字和必須連續，田字型數字和等於 4,等於 5,等於 6，有連續性。如下圖：

1	1
1	1

$$1+1+1+1=4$$

1	1
1	2

$$1+1+1+2=5$$

1	1
1	3

$$1+1+1+3=6$$

5.下圖一田字型數字和為 25，圖二田字型數字和為 26，圖三田字型數字和為 28 時，其最大值就只能算是 26，因為它沒有符合連續性規則。

<圖 一>

1	16
7	1

$$1+16+7+1=25$$

<圖 二>

1	16
7	2

$$1+16+7+2=26$$

<圖 三>

1	1
5	21

$$1+1+5+21=28$$

6.一張拼湊卡只能有 12 道摺痕(如圖一)，摺出來的結果，不可以有其他摺線(如圖二)。
(只能有---摺線)

21	20	4	17
7			14
6			18
16	12	8	10

如圖一 共有12道摺痕

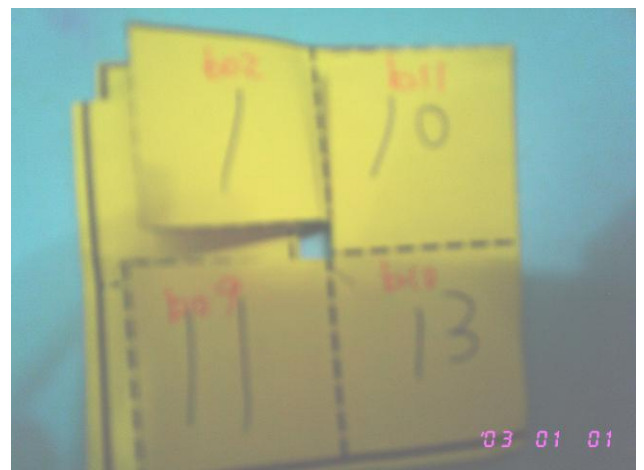
21	20	4	17
7			14
6			18
16	12	8	10

如圖二 不能有其他不規則的摺線

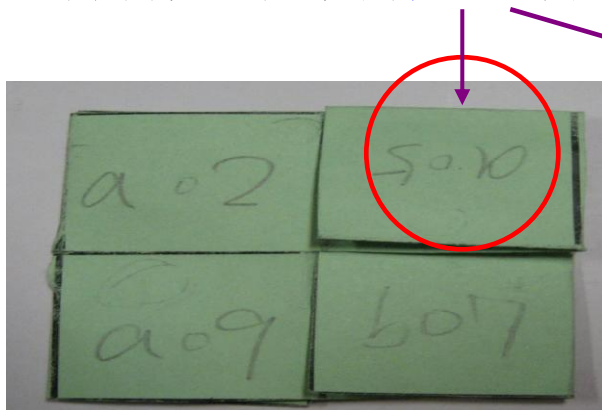
7.摺出來的田字雙面也必須平坦，只有 4 道摺痕。

(正面)

(反面)



8.若摺出來的田字和有數字是倒的，例如



6	
4	19

並不影響數值，該數值也等於 $6+7+4+19=36$ 的組合之一

三、挑戰“王字型拼湊卡”

(一) “王字型拼湊卡”(如圖)



(二) 遊戲規則可隨意填入任何數字，且數字可重覆。

但最小田字型數字組合為 0，並求出田字型數字組合連續性之最大值。

【研究過程】

(一).一開始我們告訴老師，關於麥當勞的轉折拼湊卡，好像蠻好玩、、，於是老師給了我們一張拼湊卡(如右圖)，我們一下子就做出來，讓我們好有成就感，也激起我們的興趣，原來這就是全國科展第 41 屆初小組作品——792 魔術卡。



(二).我們利用每個星期三的下午及空閒時間一起討論研究。

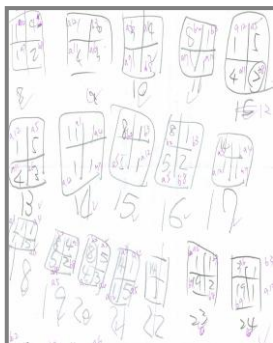
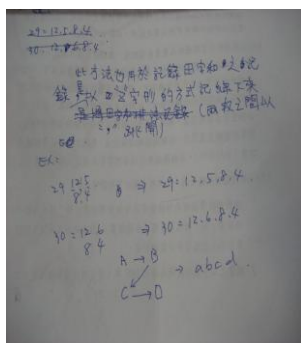
(三).之後，我們自製新的拼湊卡(如右圖二)正反兩面一共有 24 格，

我們決定田字和 4 個數字組合最小值為 4，數字可填入 1~任意數字，數字可重覆，但數字必須是整數，且田字型數字組合數值必須有連續性，我們要求出田字型數字組合數值之最大值。

(四)剛開始，我們盲目的填著數字，24 個格子也很省著用，我們想用最少的格子組出田字和連續之最大值，過程中挫折連連，也撕掉



不少拼湊卡，有時候真的很想放棄，想想又很不甘心，我們試著交換做，做著做著結果越玩越順手，最大值也慢慢的在突破當中。



【我們的記錄】

【無辜的拼湊卡】

【認真的模樣】

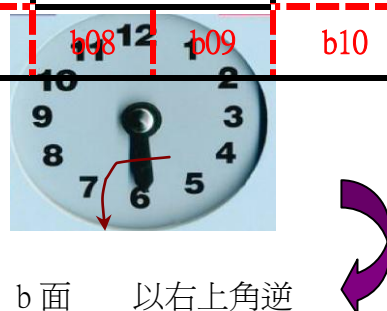
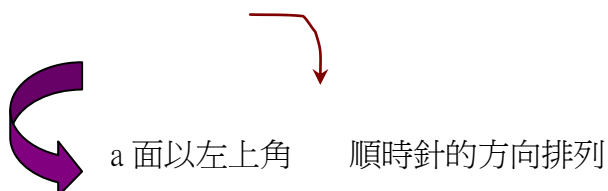
(五)後來我們發現，數字無限制的方式，範圍太廣，因此我們開會決定改成數字有限制方式來進行研究探討，我們統一規定數字只能填入為 1、1、1、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20 及 21 共 24 個數字，且每個數字都必須使用 (除了 1 可重覆 4 次以外，其餘 2~21 的數字都只限用一次)。最小田字型數字組合為 4 (1+1+1+1)，最大田字型數字組合為 78 (18+19+20+21)

(六)接著，關於記錄部份我們研討出要有〔一致性〕〔規則性〕我們認定如下：

1. 格子記錄是以正面為 a，反面為 b 的方式，依照 a 面以左上角順時針的方向排列(如左下圖)，而 a01 的背面則是 b01，a02 的背面為 b02，也可以說 b 面是以右上角逆時針的方向排列。如右下圖：

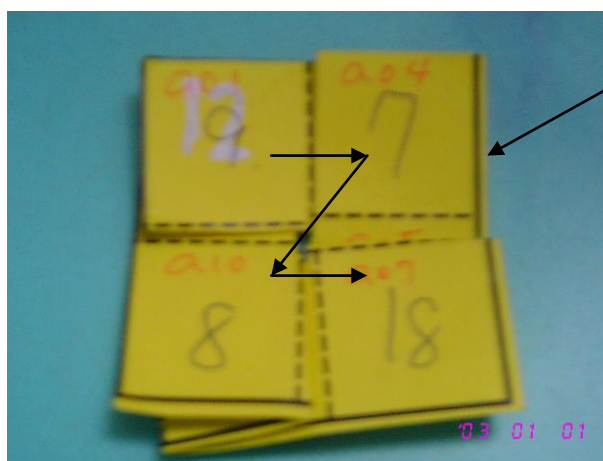
a 01	a 02	a 03	a 04
a12	a 面(正面)		a05
a11			a06
a10	a09	a08	a07

b04	b03	b02	b01
b05	b 面(反面)		b12
b06			b11
b07	b08	b09	b10



時針的方向排列

2. 數字記錄是以 Z 字形的方式記錄下來，兩數之間並以「，」隔開，(如左下圖)



採 Z 字形記錄法

9, 7, 8, 18

兩數之間以「，」隔開

3. [田字和數字分解表] ——有時雖已找出田字和，卻在做第二次時就拼不出來，這讓我們很懊惱，爲了方便我們更快的檢查出是否有該田字和數字組合，我們模仿字典跟電話簿的方式將 4~78 的田字和之數字分解部份排序下來
<詳如附件一>



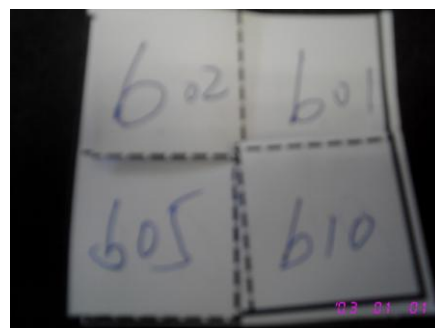
4. [田字和摺法分解表] ——同樣爲了方便我們更快速的作出新的一組，知道哪四個格子是否可以拼成田字型。例如 a01、a02、a05、a08 可摺成一個田字型，b01、b02、b05、b10 可摺成一個田字型。<如下圖>我們也做出了代號分解表<詳如附件二>



a 01	a 02	a03	a04
a12	a 面(正面)		a05
a11			a06
a10	a09	a08	a07



b04	b03	b02	b01
b05	b 面(反面)		b12
b06			b11
b07	b08	b09	b10

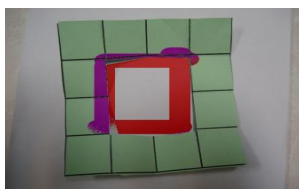


(七) 我們好奇這個遊戲的吸引力，於是跟班導商量利用下課時間，找校內六年級同學為對象，教大家一起來玩“中空型拼湊卡”，如下圖：



沒想到，盛況空前，看來這真是個很吸引人的遊戲。

(八)為了嚐試不同切割方式，我們從滿格 16 格開始研究→再將中間四格割掉進行研究探討→最後我們靈機一動將滿格 16 格拼湊卡切割成“王字型”試著延伸探討，找出個中差異。



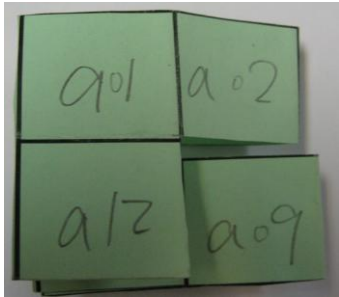
(九)由於我們都是使用剪刀、美工刀來切割拼湊卡，進行研究探討，我們深知自己有很多很多好奇細胞，為了專心研討這幾個題目，我們互相提醒將剪刀、美工刀等危險物品遠離我們視線，以免再切割不同方式，我們決定求精、求新、求變，但有個範圍，也要避免碰到挫折而不小心傷害無辜的拼湊卡。

(十)研討過程心情依收穫起伏，碰到瓶頸挫折時，我們選擇放著，走走、散散步，這當中也因為夥伴們參加不同比賽得獎，將獎金拿來請客而讓我們感情更融洽，我們分享同伴的榮譽，盡情享受美食，整個研討氣氛很 happy，我們約好要向最高目標努力，挑戰艱巨考驗，我們說好：如果運氣好，要將部份獎金回饋學校留給學弟妹們當基金，鼓勵更多人參與這個有意義的活動。

【我們的發現】

在【中空型數字有限制型】的方面來說

- 一 田字和最小值為 4 (即 $1+1+1+1=4$)
- 二 田字和理想最大值為 78 (即 $8+19+20+21=78$)
- 三 摺法大約可分成：

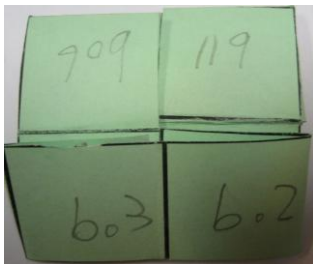


四正型 aaaa 摺法 — 四個格子都使用正面 a 的格子

EX (1) a01 a02 a05 a08

EX (2) a01 a02 a05 a10

EX (3) a01 a02 a07 a08

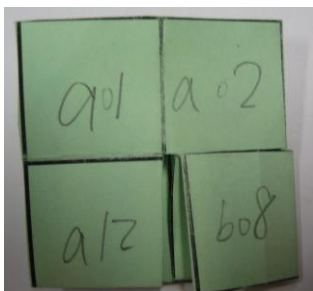


四反型 bbbb 摺法 — 四個格子都使用反面 b 的格子

EX (1) b02 b03 b06 b11

EX (2) b02 b03 b08 b11

EX (3) b03 b04 b05 b08



三正一反型 aaab 摺法 — 三個使用正面 a 的格子，一個使用反面 b 的格子

EX (1) a01 a02 a08 b06

EX (2) a01 a04 a08 b06

EX (3) a03 a04 a08 b06



二正二反型 aabb 摺法 — 二個使用正面 a 的格子，二個使用反面 b 的格子

EX (1) a01 a04 b06 b11

EX (2) a04 a11 b08 b09

EX (3) a04 a05 b02 b09



一正三反型 abbb 摺法 — 一個使用正面 a 的格子，三個使用反面 b 的格子

EX (1) a01 b03 b06 b09

EX (2) a03 b01 b07 b08

EX (3) a04 b10 b08 b12

四、**對稱性原則**---我們發現在這張代號拼湊卡當中，a01 的背面等於 b01，a02 的背面也等於 b02，所以只要摺出四正，就等於找出四反。如下圖

a 01	a 02	a03	a04
a12	a 面(正面)		a05
a11			a06
a10	a09	a08	a07

b04	b03	b02	b01
b05	b 面(反面)		b12
b06			b11
b07	b08	b09	b10

同理可證，只要摺出三正一反，也等於找出了一正三反。

五、要讓最少的格子可以組合成田字型更多的組數，1 的位置很就重要，如果能摺出 3 個 1 以及 1 個空白格子(如下圖)，組數則較多。



只要把這四張其中一張往下填入 2
就可以拼成 5，再往下一張填入 3 就

例如：若將四個 1 填入角落(a1,a4,a7,a10 或 b1,b4,b7,b10)分別以螺旋型摺下，並填入 2、3、5、9，則可做出：(照數字大小，由小到大填)



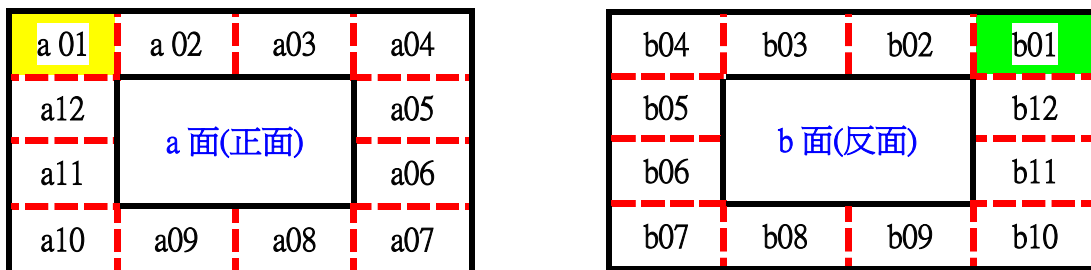
1	a 02	9	1
2	a 面(正面)		a05
a11			5
1	3	a08	1

$$\begin{array}{llll}
4=1+1+1+1 & 5=1+1+1+2 & 6=1+1+1+3 & 7=1+1+2+3 \\
8=1+1+1+5 & 9=1+1+2+5 & 10=1+1+3+5 & 11=1+2+3+5 \\
12=1+1+1+9 & 13=1+1+2+9 & 14=1+1+3+9 & 15=1+2+3+9 \\
16=1+1+5+9 & 17=1+2+5+9 & 18=1+3+5+9 & 19=2+3+5+9
\end{array}$$

六、不可能拼在一起的格子

因為對稱性原則，a01 與 b01 是在同一格格子，一正一反所以它們無法拼在一起，

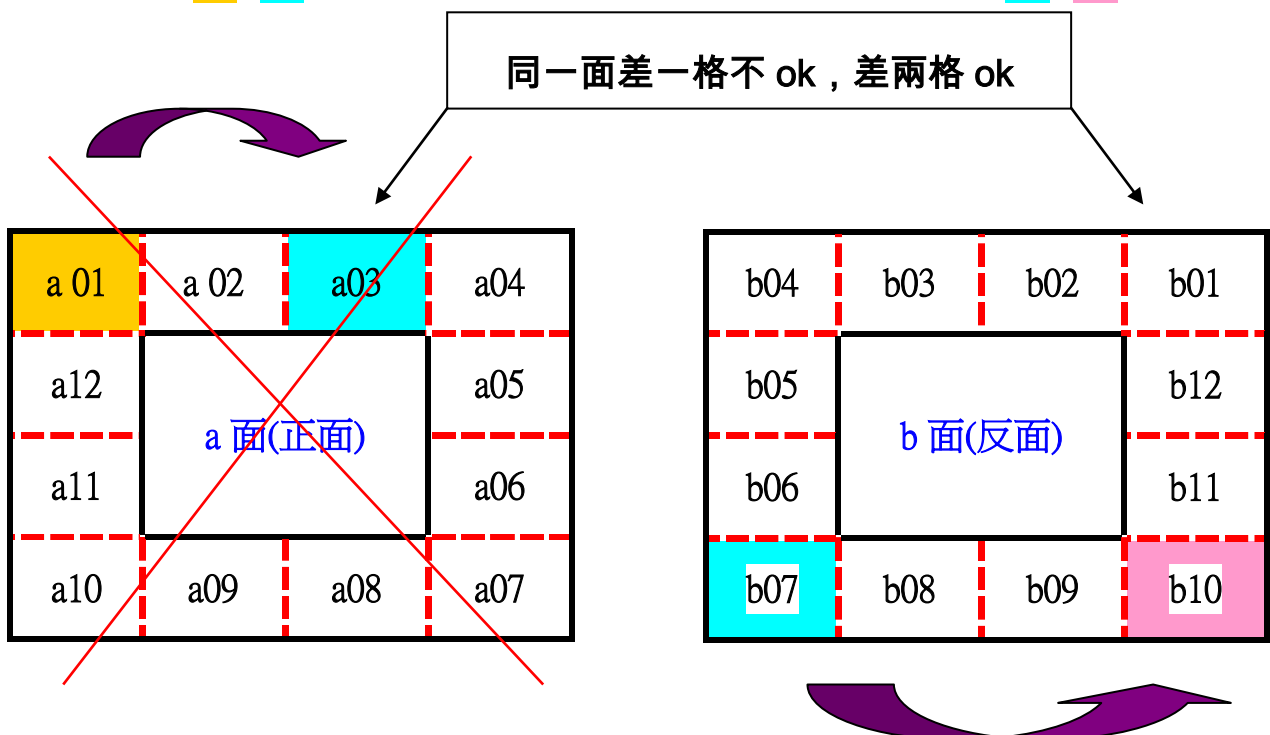
如圖



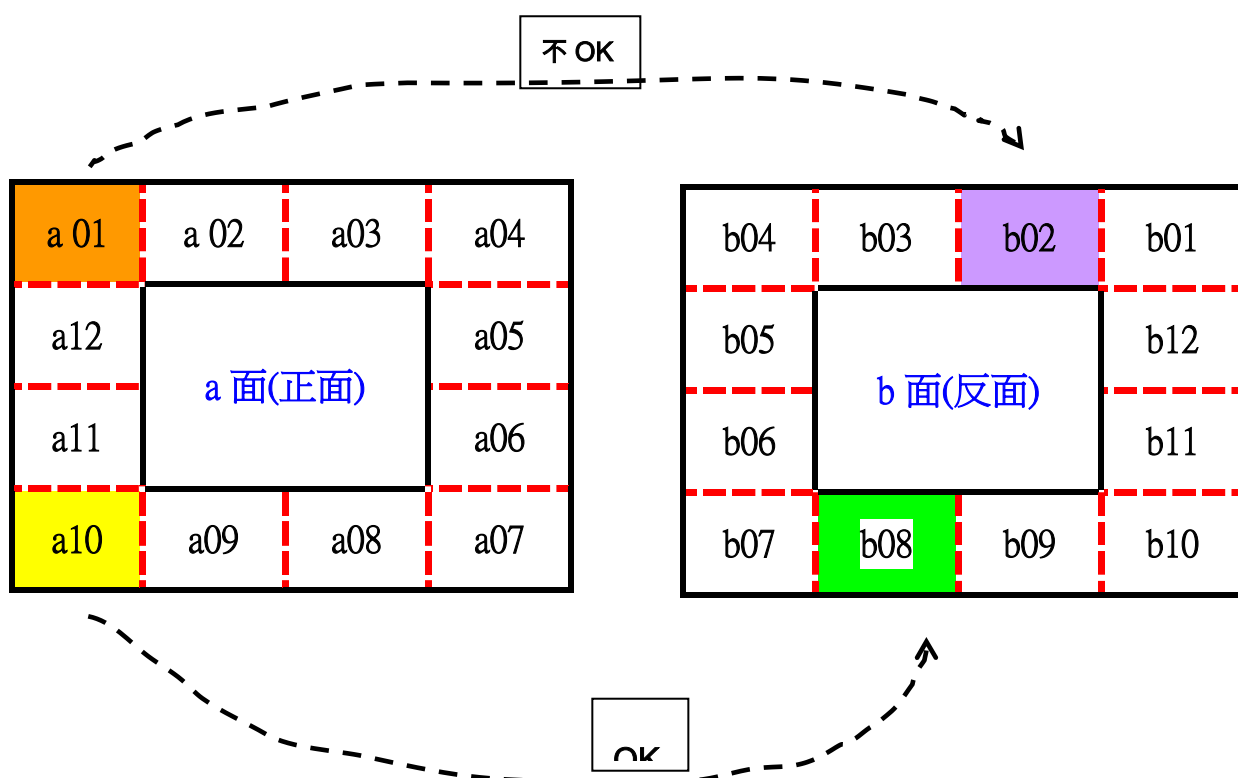
同理可證 a02&b02,a03&b03,a04&b04,...a12&b12 都無法拼在一起成為田字型

七、另外，如果在同一面兩個格子之間的空格數差單數，就會摺不出來

(例如 a01&a03)，如果在同一面空格數差雙數，就可排出。(例如 b07&b10) 如圖：



八、另外，如果在不同面兩個格子之間的空格數差雙數，就會摺不出來(例如 a01&b02)，如果在不同面空格數差單數，就可排出。(例如 a10&b08)



九、我們摺出來比較不一樣的圖：

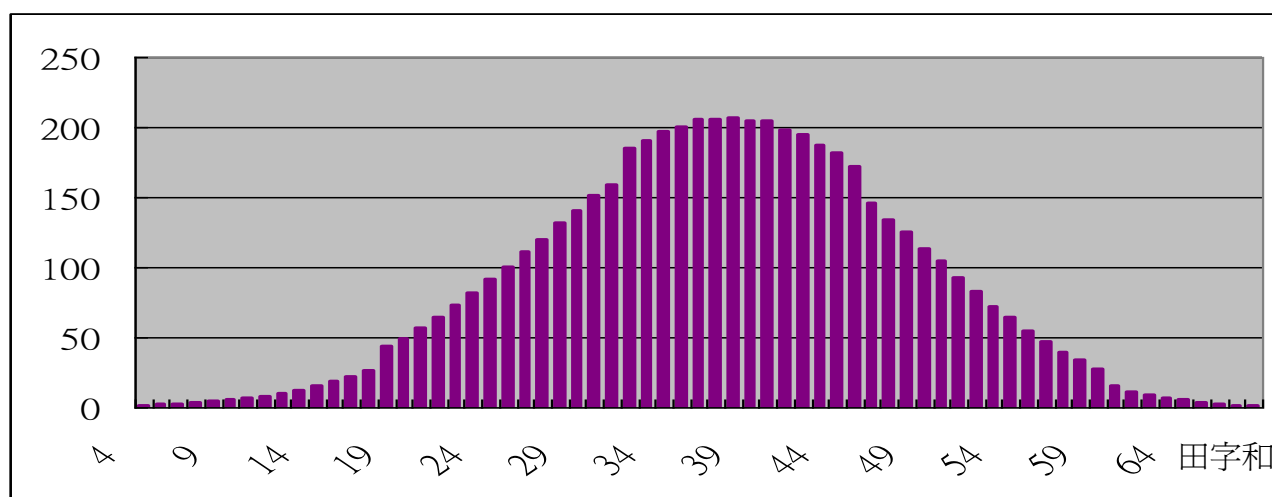


陸、研究結果及討論：

一、中空型拼湊卡數字有限制之 4~78 的數字組合組數，詳細如下：**目前找到共有 6196 組**

田字和	組數	田字和	組數	田字和	組數	田字和	組數	田字和	組數
4	1	20	31	36	169	52	165	68	23
5	1	21	36	37	176	53	154	69	18
6	1	22	43	38	185	54	146	70	15
7	2	23	49	39	190	55	134	71	11
8	2	24	57	40	197	56	125	72	9
9	3	25	64	41	200	57	113	73	6
10	4	26	73	42	205	58	104	74	5
11	5	27	81	43	205	59	92	75	3
12	6	28	91	44	207	60	83	76	2
13	8	29	100	45	204	61	72	77	1
14	10	30	111	46	204	62	64	78	1
15	12	31	120	47	198	63	54		
16	15	32	131	48	195	64	47		
17	18	33	140	49	187	65	39		
18	22	34	151	50	182	66	34		
19	26	35	159	51	172	67	27		

4~78數字組合分解圖表

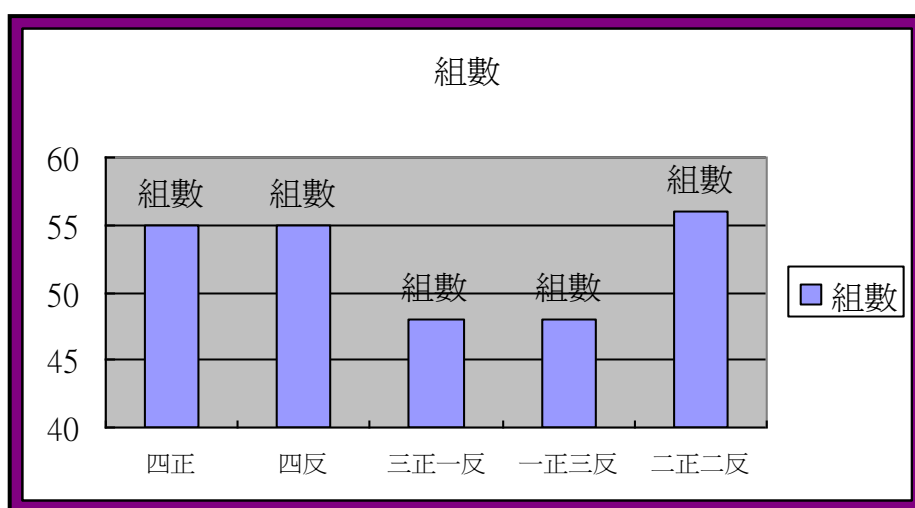


(一) 圖表發現說明：

1. 田字和 4、5、6、77 及 78 分解只有一組。
2. 數字組合並無對稱性。
3. 長條圖分佈呈階梯狀起伏，田字和 44 之組數最多，共有 207 組。

二、**中空型田字型摺法之組合**目前我們找到如下：**我們目前找到共有 262 組**

型式	四正	四反	三正一反	一正三反	二正二反	合計
組數	55	55	48	48	56	262



(一) 圖表發現說明：

1. 四正組數=四反組數，三正一反組數=一正三反組數。
2. 以二正二反組數為最多組共有 56 組。

三、因為**對稱性原則**，所以只要摺出四正，就等於找出四反，四正和四反的組數是一樣的。

四、三正一反和一正三反也因對稱性關係，因此組數是一樣的。

五、因二正二反完全等於二反二正，只要將二反二正「規則化」(將正移到前面)，就等於二正 二反。所以只能算同一種，因此**沒有對稱性**可言。

六、在中空型拼湊卡，將 **4 個 1 填入 4 個角採螺旋狀方式**壓下紙卡組合之**田字型組數最多**。

七、在中空型拼湊卡，因為對稱性原則，所以正反兩面同一格格子，無法拼在一起。

八、在中空型拼湊卡，如果 在同一面兩個格子之間只差單數，無法拼在一起成為田字型，
差雙數才可以。

九、我們目前找到中空型拼湊卡有限制性數字田字和連續最大數值為 76，詳細組合如下：

1	5	4	1
8	正面		3
9			2
1	7	6	1

20	21	10	12
14	反面		16
15			13
18	17	11	19

田字和	組 合	田字和	組 合	田字和	組 合
4	1+1+1+1	29	2+9+17+1	54	11+19+3+21
5	1+2+1+1	30	8+3+17+2	55	5+20+16+14
6	1+1+1+3	31	5+4+16+6	56	21+10+17+8
7	4+1+1+1	32	1+1+14+16	57	10+12+18+17
8	1+5+1+1	33	1+21+8+3	58	21+9+17+11
9	1+1+6+1	34	21+9+3+1	59	21+3+17+18
10	1+1+1+7	35	21+3+9+2	60	21+20+17+2
11	1+1+8+1	36	8+3+19+6	61	18+19+3+21
12	9+1+1+1	37	2+10+17+8	62	15+12+18+17
13	1+1+8+3	38	16+14+1+7	63	15+21+11+16
14	1+1+5+7	39	2+9+17+11	64	20+13+14+17
15	1+5+8+1	40	21+1+17+1	65	15+13+18+19
16	4+1+8+3	41	8+3+19+11	66	15+21+11+19
17	1+1+8+7	42	21+10+3+8	67	20+12+18+17
18	9+1+1+7	43	21+3+17+2	68	20+13+18+17
19	9+2+1+7	44	21+3+9+11	69	20+12+18+19
20	4+1+7+8	45	21+10+3+11	70	15+21+18+16
21	1+5+7+8	46	8+3+17+18	71	15+21+18+17
22	5+7+1+9	47	21+1+17+8	72	20+21+14+17
23	5+3+6+9	48	21+9+17+1	73	15+21+18+19
24	5+4+6+9	49	5+16+15+13	74	20+21+14+19
25	1+3+11+10	50	20+5+18+7	75	20+21+18+16

26	1+3+1+21	51	14+16+15+6	76	20+21+18+17
27	4+8+6+9	52	20+21+2+9	77	?
28	1+2+8+17	53	15+13+18+7	78	20+21+18+19

十、【中空型拼湊卡有限制性數字田字和】目前找到連續最大數值為 76。

十一、【中空型拼湊卡無限制性數字田字和】目前找到連續最大數值為 113。

十二、【王字型拼湊卡田字和】目前找到連續最大數值為 191。

柒、結論

一、自己 DIY 拼湊卡，不用花什麼錢，就可以輕鬆的享受數學的樂趣。

二、我們發現，要讓組數變多，1 的擺放位置十分重要。

三、在中空型拼湊卡中，若 1 的位置放在四個角(a01,a04,a07,a10)或以螺旋狀的方式在(a02,a05,a08,a11)填入 2,3,5,9 則可摺出 4~19 之組合，這種組數以目前來說算是最多的。

四、在【王字型拼湊卡】中，1 的位置放在四個角，則可摺出組數以目前來說算是最多的。

五、我們編列的「數字分解表」來檢查中空型有限制型拼湊卡是否有少，不但實用又省時。

六、我們自解「代號分解」來做出更多的組合，並配合數字分解，可更快速的完成新的一張中空型拼湊卡及檢查，也提升了最大值，快又有效率。

七、因為我們研究拼湊卡這個遊戲的關係，並推廣到全六年級同學，看到下課後，人手一卡，我們十分的高興，因為我們找到更多的同好，增加了我們跟同學之間的話題，那種感覺真好！

八、我們對於【中空型拼湊卡有限制性數字田字和】目前連續最大數值找到 76，【中空型拼湊卡無限制性數字田字和】目前連續最大數值找到 113，【王字型拼湊卡田字和】連續

目前最大數值找到 191，但我們深信這絕不是最後的結果，只要再努力，一定很快能夠找到理想中的最大值 78，還會有更大連續數值產生，我們更相信仍有繼續再探討的空間。

九、我們從六上開始著手討論，遊戲規則一改再改，衝突不斷，除了證明我們對數學的執著外，從意見不同到衝突、透過溝通協調到產生共識，分工合作，每次碰到困難挫折，我們就一起解決研究，找出答案時，我們幾乎都是高興的大叫：“啊！對喔！”

十、在研究的這段時間，我們遇到許多困難及重重關卡，但因為有師長們及同學們的支持，我們才能繼續努力的研究下去，我們計劃將這個遊戲推廣到全校，讓大家發現數學的可愛，感受到解數學的樂趣，我們也會繼續努力找出更多的新發現，與大家分享。

捌、參考資料及其他

一、書籍：

(一)翰林版。六下數學課本教材－統計圖表、代數。

(二)仁林版。第八冊社會學習手冊－參與公共事務、運用溝通協調、學習尊重包容。

二、網路參考資料：

(一)拼拼湊湊都是畫——第 31 屆科展初小組數學科第一名。

(二)麥當勞的難題 ——轉、折、拼、湊 第 32 屆科展高小組數學科第一名。

(三)792 魔術卡 ——第 41 屆科展初小組數學科第一名。

<http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-1.asp>

【評 語】 080404 填來填去都是田

從歷屆科展作品及生活偶遇之遊戲情境延伸發展新的遊戲型態，變化多樣並細心探討各種組合型態，研究分析極細密，研究結果亦富趣味性，值得給予佳作獎鼓勵。