

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080403

談最少步驟矩形方格化

學校名稱：彰化縣秀水鄉明正國民小學

作者： 小六 黃思嘉 小六 陳詠如 小六 林郁珮 小六 陳紹臻	指導老師： 張文莉 陳德全
---	---------------------

關鍵詞：方格化 正方形 M×N

談最少步驟矩形方格化

壹、摘要

『複製正方形－談最少步驟矩形方格化』本文由一個限制條件出發：『有一種電腦軟體只能複製 1×1 的正方形，試問要構造一個 13×13 的正方形方格至少需要複製幾次？』利用相同的限制條件再推廣至 $N \times N$ 正方形，以及延伸至 $N \times M$ 的矩形。從 $N \times N$ 正方形須複製 1×1 正方形的最少次數的解題過程與 $N \times M$ 長方形複製 1×1 正方形的最少次數的解法統合，最後回歸到題目將一個矩形方格化須複製幾次的正方形。

貳、研究動機：

老師問一個趣味問題『有一種電腦軟體只能複製一個邊長為 1 的正方形的四個邊，然後貼上。請問要構造一個 13×13 的方格表，至少總共要貼上幾個正方形？』為了解決這一個問題，我和其它同學卯足勁花瞭時間把一般問題解出，以下為我們的研究！

參、研究目的：

- 一、研究 $N \times N$ 正方形須複製 1×1 正方形的最少次數。
- 二、研究 $N \times M$ 長方形須複製 1×1 正方形的最少次數。

肆、研究設備及器材


- 一、方格版
- 二、方塊形積木

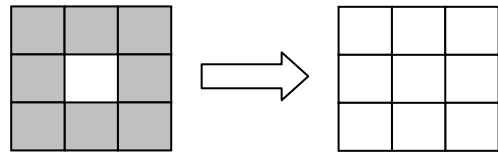
伍、研究過程：

- 一、研究 $N \times N$ 的最少貼法。


(一) 原始題目為『有一種電腦軟體只能複製一個邊長為 1 的正方形的四個邊，然後貼上。請問要構造一個 13×13 的方格表，至少總共要貼上幾個正方形？』

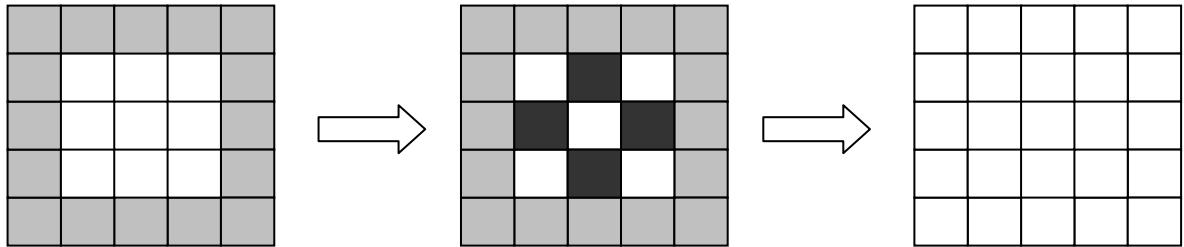
所以我們從較小的 N 值作討論

(二) 當 $N=3$ 時，可以圖示如下
 由  經過複製 8 次可以得到圖形如右

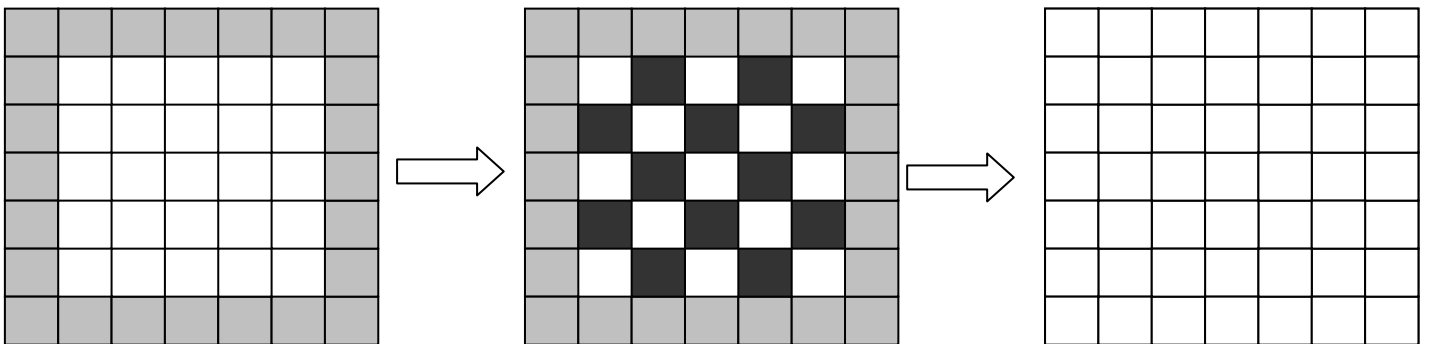


(三) 當 $N=5$ 時，目標可以圖示如右

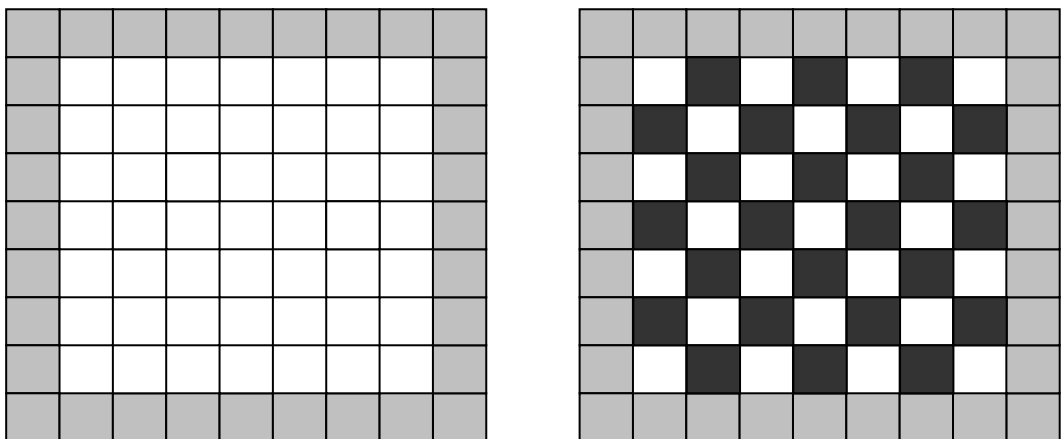
由  經過複製 16 次可以得到外圍再複製 4 次就可以得到結果
 總共須複製 20 次才可以得到 5×5 方格



(四) 以下為 $N=7$ 與 $N=9$ 的圖示

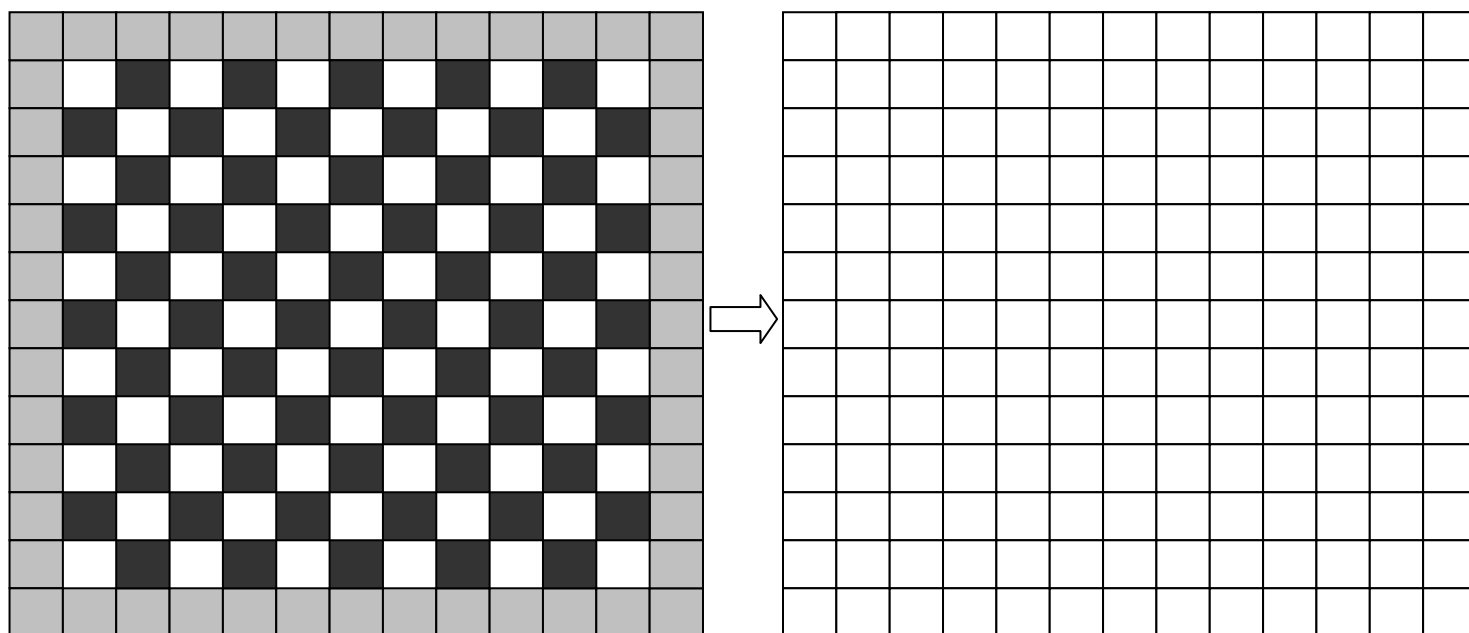


外圍須複製 24 次，內圍複製 12 次，總共須複製 36 次才可以得到 7×7 方格



外圍須複製 32 次，內圍複製 24 次，總共須複製 56 次才可以得到 9×9 方格

(五) 老師出的數學問題『有一種電腦軟體只能複製一個邊長為 1 的正方形的四個邊，然後貼上。請問要構造一個 13x13 的方格表，至少總共要貼上幾個正方形？』圖示如下



外圍須複製 $12 \times 4 = 48$ 次至方形，內圍須複製 60 次正方形，總共須複製 108 次正方形。

(六) 總結上方資料：

NxN 方格	外圍複製次數	內圍複製次數	總共複製次數
3x3	$4 \times 2 = 8$	0	8
5x5	$4 \times 4 = 16$	2×2	20
7x7	$4 \times 6 = 24$	$2 \times (2 + 4)$	36
9x9	$4 \times 8 = 32$	$2 \times (2 + 4 + 6)$	56
11x11	$4 \times 10 = 40$	$2 \times (2 + 4 + 6 + 8)$	80
13x13	$4 \times 12 = 48$	$2 \times (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$	108

因為上述資料都是奇數，所以先討論奇數部分

(七) 考慮 $(2n+1) \times (2n+1)$ 方格再將上方資料整理一次

N×N	$(2n+1) \times (2n+1)$	外圍複製次數	內圍複製次數	總共複製次數
3×3	n=1	$8=8 \times 1$	0	8
5×5	n=2	$16=8 \times 2$	2×2 $=4 \times 1$	20
7×7	n=3	$24=8 \times 3$	$2 \times (2+4)$ $=4 \times (1+2)$	36
9×9	n=4	$32=8 \times 4$	$2 \times (2+4+6)$ $=4 \times (1+2+3)$	56
11×11	n=5	$40=8 \times 5$	$2 \times (2+4+6+8)$ $=4 \times (1+2+3+4)$	80
13×13	n=6	$48=8 \times 6$	$2 \times (2+4+6+8+10)$ $=4 \times (1+2+3+4+5)$	108

由上方資料可以較輕易看出規則

欲得到『 $(2n+1) \times (2n+1)$ 正方形』須複製

外圍須複製 $8 \times n$ 個正方形；而內圍須複製 $4 \times [1+2+3+\dots+(n-1)]$ 個正方形，而 $4 \times$

$$[1+2+3+\dots+(n-1)] = 4 \times \frac{[1+(n-1)](n-1)}{2} = 2 \times n \times (n-1)$$

所以總共須複製 $8 \times n + 2 \times n \times (n-1)$

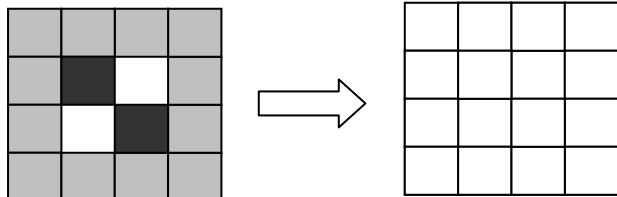
$$= 2n(4 + (n-1))$$

$$= 2n(n+3)$$

再考慮偶數問題

(八) 考慮 4×4 正方形方格問題

外圍須複製 $3 \times 4 = 12$ 次正方形，

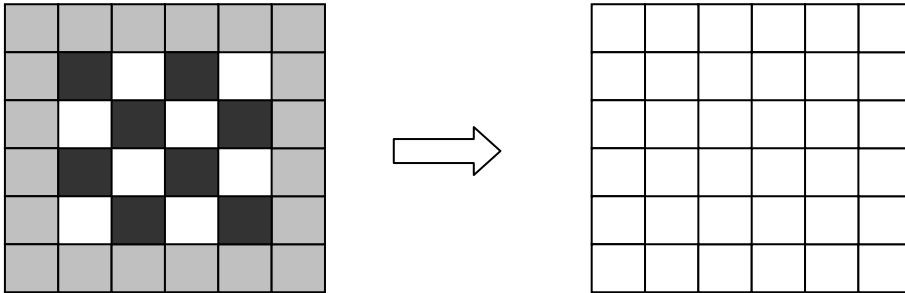


內圍須複製 2 次正方形，總共須複製 14 次正方形。

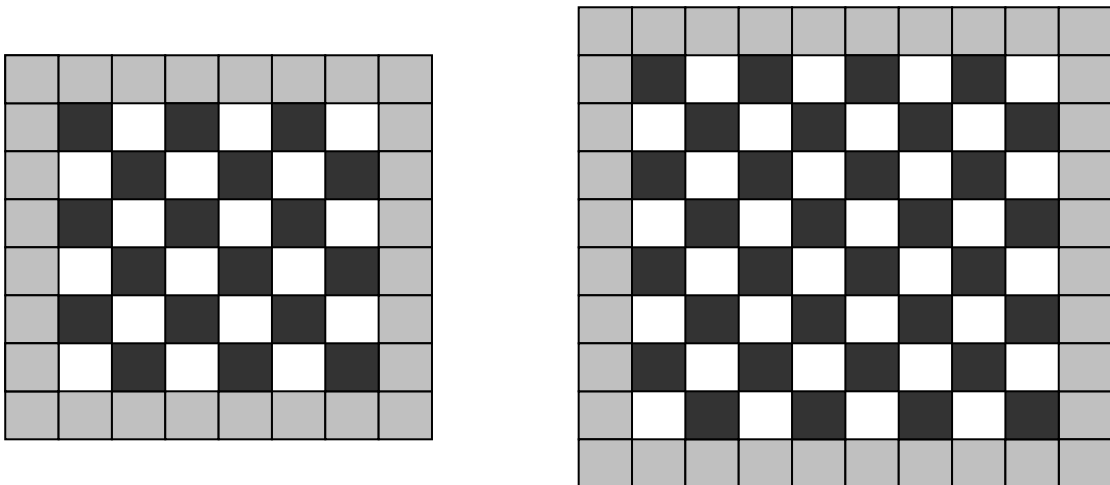
(九) 考慮 6x6 正方形方格問題

外圍須複製 $5 \times 4 = 20$ 次正方形，

內圍須複製 8 次正方形，總共須複製 28 次正方形。



(十) 考慮 8x8 與 10x10 正方形方格問題(圖示)



(十一) 綜合資料彙整成

NxN 方格	外圍複製次數	內圍複製次數	總共複製次數
2x2	$4 \times 1 = 4$	0	4
4x4	$4 \times 3 = 12$	$2 \times 1 = 2$	14
6x6	$4 \times 5 = 20$	$2 \times 2 \times 2 = 8$	28
8x8	$4 \times 7 = 28$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	46
10x10	$4 \times 9 = 36$	$2 \times 4 \times 4 = 32$	68

(十二) 將 $N \times N$ 改寫為 $(2n) \times (2n)$ 可以改為

$(2n) \times (2n)$ 方格	外圍複製次數	內圍複製次數	總共複製次數
$(2 \times 1) \times (2 \times 1)$	$4 \times 1 = 4$	0	4
$(2 \times 2) \times (2 \times 2)$	$4 \times (2 \times 2 - 1) = 12$	$2 \times 1 = 2$	14
$(2 \times 3) \times (2 \times 3)$	$4 \times (2 \times 3 - 1) = 20$	$2 \times 2 \times 2 = 8$	28
$(2 \times 4) \times (2 \times 4)$	$4 \times (2 \times 4 - 1) = 28$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	46
$(2 \times 5) \times (2 \times 5)$	$4 \times (2 \times 5 - 1) = 36$	$2 \times 4 \times 4 = 32$	68

由上方資料可以較輕易看出規則

欲得到『 $(2n) \times (2n)$ 正方形』須複製

外圍正方形 $4 \times (2n - 1)$ 個正方形

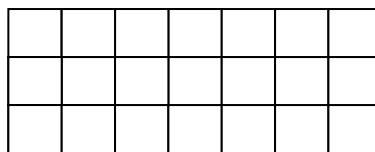
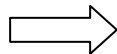
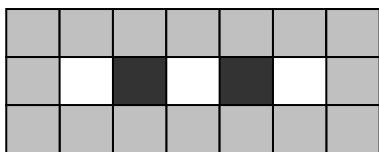
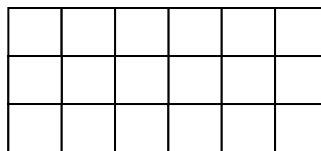
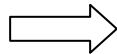
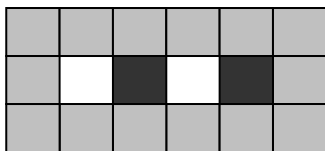
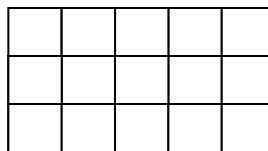
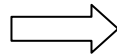
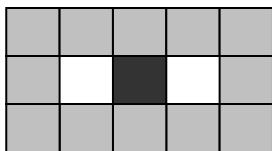
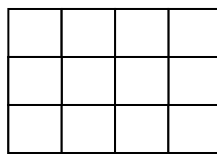
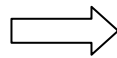
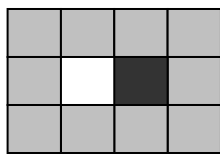
內圍正方形 $2 \times (n - 1)^2$ 個正方形

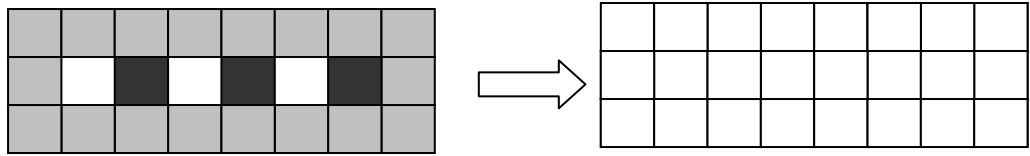
總共須至少複製 $4 \times (2n - 1) + 2 \times (n - 1)^2$

$$= 2 \times (n + 1)^2 - 4 \text{ 個正方形}$$

二、研究 $N \times M$ 的最少貼法。

(一) 考慮 3×4 與 3×5 與 3×6 長方形須複製的正方形個數



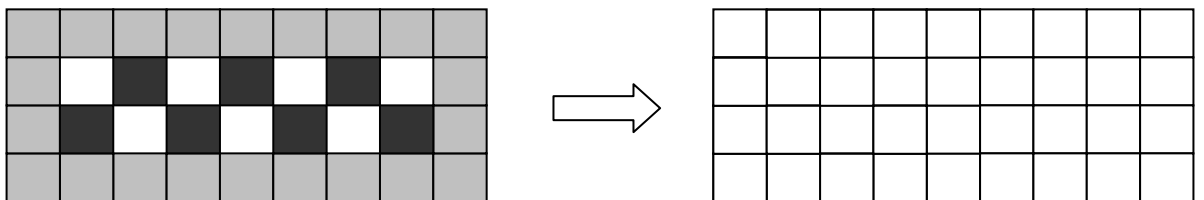
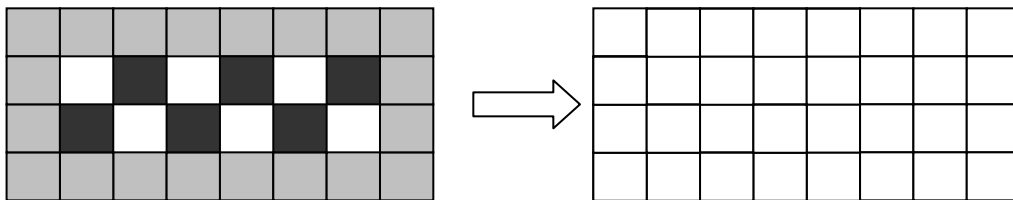
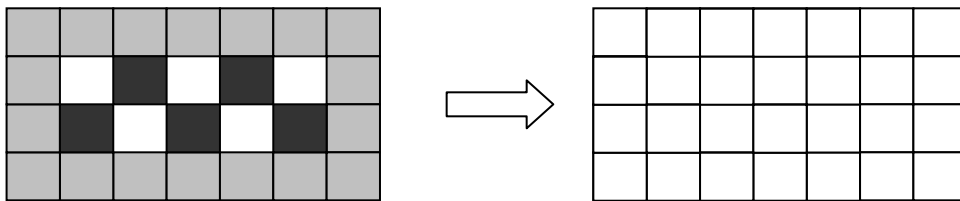
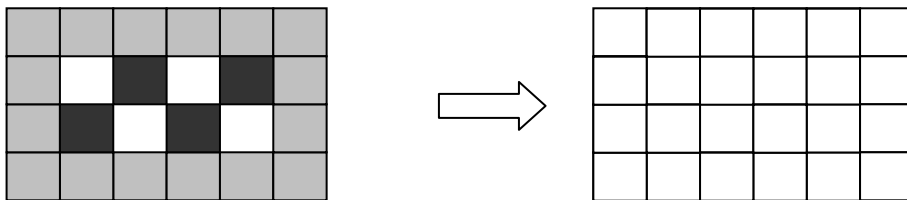
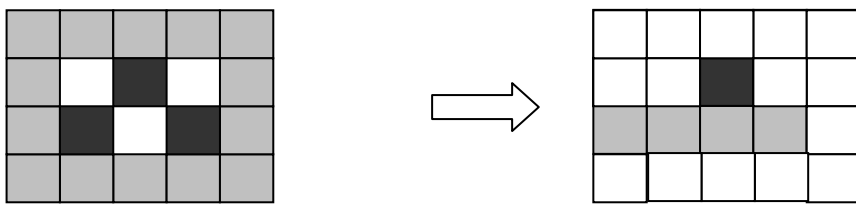


事實上，要複製 $3 \times n$ 的長方形方格須複製至少

$$2 \times (3+n) - 4 + \left[\frac{n-2}{2} \right], \text{ 其中 } [] \text{ 代表高斯符號}$$

$$= 2n + 2 + \left[\frac{n-2}{2} \right] \text{ 個正方形。}$$

(二) 考慮 4×5 與 4×6 與 4×7 長方形須複製的正方形個數

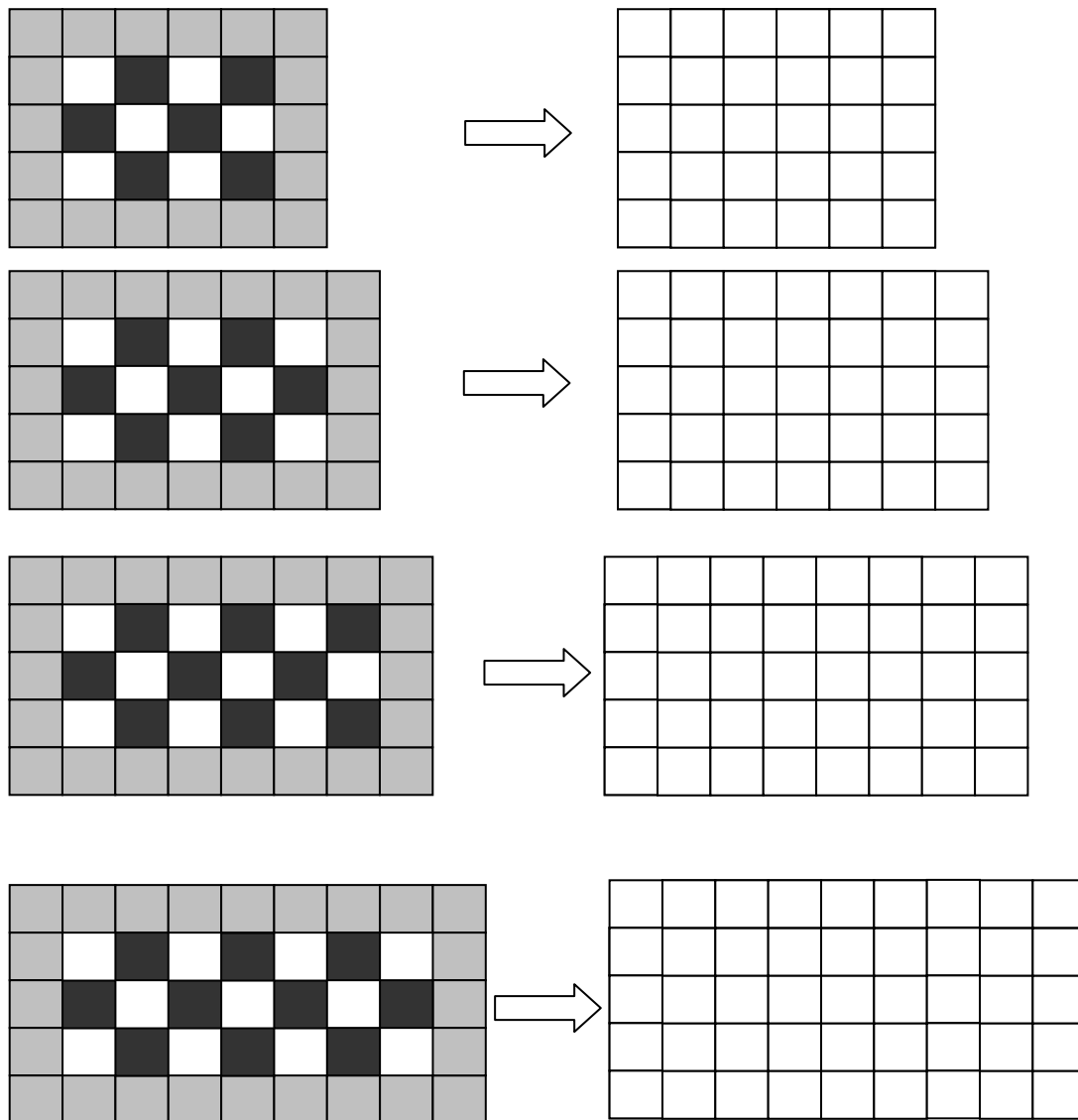


所以要複製 $4 \times n$ 的長方形方格須複製至少

$$2 \times (4 + n) - 4 + \left[\frac{2(n-2)}{2} \right], \text{ 其中 } [] \text{ 代表高斯符號}$$

$$= 3n + 2 \text{ 個正方形。}$$

(三) 考慮 5×6 與 5×7 與 5×8 長方形須複製的正方形個數

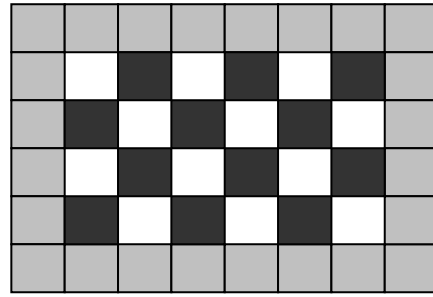
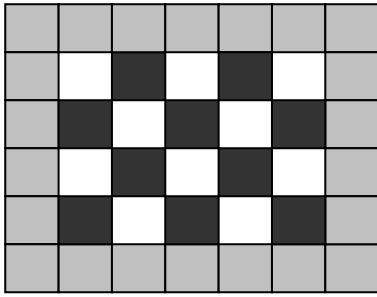


所以要複製 $5 \times n$ 的長方形方格須複製至少

$$2 \times (5 + n) - 4 + \left[\frac{3(n-2)}{2} \right], \text{ 其中 } [] \text{ 代表高斯符號}$$

$$= 2n + 6 + \left[\frac{3(n-2)}{2} \right] \text{ 個正方形。}$$

(四) 考慮 6x7 與 6x8 與 6xn 長方形須複製的正方形個數



顯然要複製 6xn 的長方形方格須複製至少

$$2 \times (6+n) - 4 + \left[\frac{4(n-2)}{2} \right], \text{ 其中 } [] \text{ 代表高斯符號}$$

$$= 2n + 8 + 2(n-2) \text{ 個正方形。}$$

$$= 4n + 4 \text{ 個正方形。}$$

(五) 綜合上述資料

MxN 長方形方格	複製正方形個數	結果
3xn	$2 \times (3+n) - 4 + \left[\frac{n-2}{2} \right]$	$2n + 2 + \left[\frac{n-2}{2} \right]$
4xn	$2 \times (4+n) - 4 + \left[\frac{2(n-2)}{2} \right]$	$3n + 2$
5xn	$2 \times (5+n) - 4 + \left[\frac{3(n-2)}{2} \right]$	$2n + 6 + \left[\frac{3(n-2)}{2} \right]$
6xn	$2 \times (6+n) - 4 + \left[\frac{4(n-2)}{2} \right]$	$4n + 4$

所以可以得到 MxN (N 不等於 M) 長方形方格複製至少數目為

$$= 2(M+N) - 4 + \left[\frac{(M-2)(N-2)}{2} \right]$$

陸、研究結論：

一、『 $(2n+1) \times (2n+1)$ 正方形』須複製

外圍須複製 $8n$ 個正方形；

而內圍須複製 $4 \times [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]$ 個正方形，

$$\text{而 } 4 \times [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = 4 \times \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} = 2n \times (n-1)$$

所以總共須複製 $8n + 2n \times (n-1) = 2n(4 + (n-1)) = 2n(n+3)$

二、『 $(2n) \times (2n)$ 正方形』須複製

外圍正方形 $4 \times (2n - 1)$ 個正方形；

內圍正方形 $2 \times (n - 1)^2$ 個正方形

總共須至少複製 $4 \times (2n - 1) + 2 \times (n - 1)^2$

$$= 2 \times (n + 1)^2 - 4 \text{ 個正方形}$$

三、 $M \times N$ (N 不等於 M) 長方形方格複製至少數目為

$$= 2(M + N) - 4 + \left[\frac{(M - 2)(N - 2)}{2} \right]$$

最後總結：當我們利用(三)的公式來檢驗公式(一)與公式(二)時，我們

發現它都可以成立，所以當我們不分正方形或長方形時

$M \times N$ 方格複製至少數目為

$$= 2(M + N) - 4 + \left[\frac{(M - 2)(N - 2)}{2} \right], \text{ 其中} [] \text{代表高斯符號。}$$

柒、參考書籍：

一、國小數學第六冊

二、九章數學網頁 <http://www.chiuchang.org.tw/modules/news/>

【評語】 080403 談最少步驟矩形方格化

研究某種電腦軟體複製方格的特徵，分析 $N \times N$ 之正方形， $N \times M$ 之長方形的複製最少次數，研究過程極用心觀察與分析，推出複製之至少次數的一般關係式，精神可嘉，唯此研究之實用性及創意較弱。