

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國小組 數學科

第一名

080401

翻天轉地多角星

學校名稱：高雄市左營區新上國民小學

作者： 小六 林筱倩 小六 鮑泓逸 小六 張子芸	指導老師： 萬家睿 劉壹心
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：摺翻 多角星

## 摘

## 要

上藝術人文課時，老師要全班用紙摺出平面的星星來佈置教室。剛開始，不用量角器，利用向上摺和向下摺的方法，在長條紙上的摺線摺出不同的多角星。然後發現只要在長條紙上用 180 度來平分等分的角，就能摺出多角星。在操作中我們從多邊形的外角及轉角的關係，讓我們想到利用轉角，也可以摺出不同的多角星。後來發現在長條紙上從向上摺與向下摺的次數方法中，利用課本解題方法找到規律性。更可貴的是從摺法中，發現長條紙上的等分平分，讓我們發現竟然與數學的二進位是相同的，那是令我感到非常驚訝的事，也讓我們覺得「數學」是無處不在的隱藏在日常生活中。同學們！大家趕快一起來翻轉「多角星星」吧！您就可以發現它的趣味性與神祕性。

# 翻天轉地多角星

## 壹、研究動機：

你看過天上的星星，是幾角星？你畫過的星星，是五角星或六角星？有一天，上藝術與人文課，老師要我們用紙摺出平面的星星來佈置教室，因為要開同樂會的緣故。結果大家摺出來的，都是五邊形或五角星，也有像飛鏢的星星。七角星是很少人提到或注意到的，難道有七角星嗎？怎樣摺出來呢？我們查詢相關資料，在全國二十九屆科展初小組數學科「百摺不撓」中摺出正多邊形，並沒有說明摺星星的方法。

在南一版五上，第八單元多邊形和內角和，讓我們想到若用多邊形的外角，能不能做成一個多角星呢？或利用外角的轉角，是否可以摺出不同的多角星？因此，我們就用長條紙來操作，剛開始，大家都絞盡腦汁去思考摺出的方法，最後，我們發揮團結合作的精神，運用六下「怎樣解題」的方法，終於摺出正七角星，接著想一想，又摺出九角星、十一角星，卻發現令我們感到驚訝的結果，後來，就在老師的指導下，完成下面的研究。



設計的飛鏢與星星的外表形狀相似



大家絞盡腦汁的思考摺多角星的方法

## 貳、研究目的：

- (一) 不用量角器，在長條紙上徒手操作，使出摺翻的功夫摺出多角星。
- (二) 操作量角器，從長條紙摺出正多邊形的方法，摺出不同形狀的多角星。
- (三) 想到課本中的正多邊形外角和，利用轉角可以摺出不同角度的多角星。
- (四) 不用量角器，徒手操作長條紙，瞭解剛開始的摺線與兩端摺角的誤差。
- (五) 了解向上摺與向下摺的次數不同，知道可摺出哪些不同的多角星。

(六)利用解題方法，找尋規律性，並發現摺紙順序與數學二進位有密切的關係。

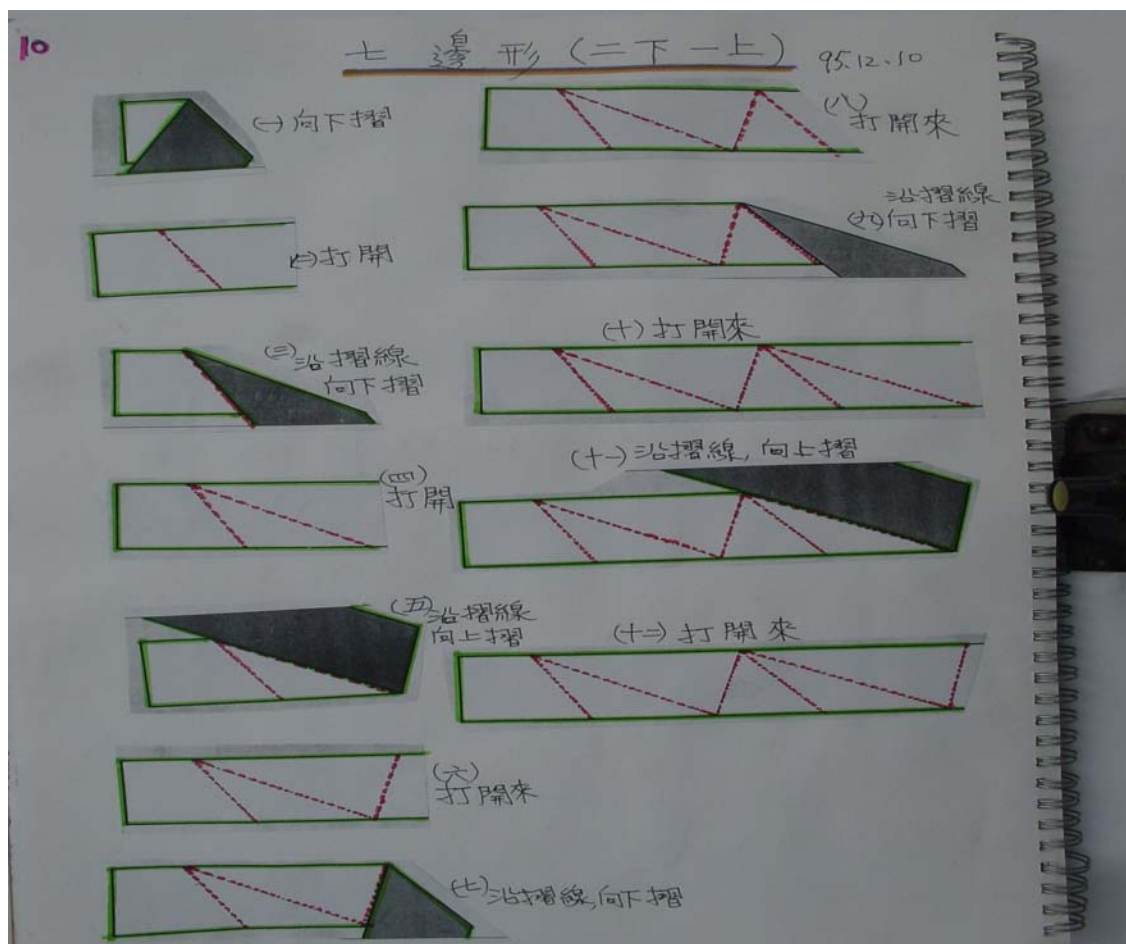
### 參、研究問題：

- (一)不用量角器，怎樣徒手使出摺翻的功夫摺出多角星呢？
- (二)操作量角器，怎樣摺出多角星呢？怎樣求出正多邊形的外角總和、內外角、轉角？
- (三)長條紙怎樣摺出多少種不同形狀的多角星？
- (四)不用量角器，在長條紙上剛開始的摺線與兩端的摺角，誤差是多少？
- (五)在長條紙向上摺與向下摺次數不同，怎樣找到規律性呢？

### 肆、研究過程和方法：

#### 【問題一】不用量角器，怎樣徒手操作摺出多角星呢？

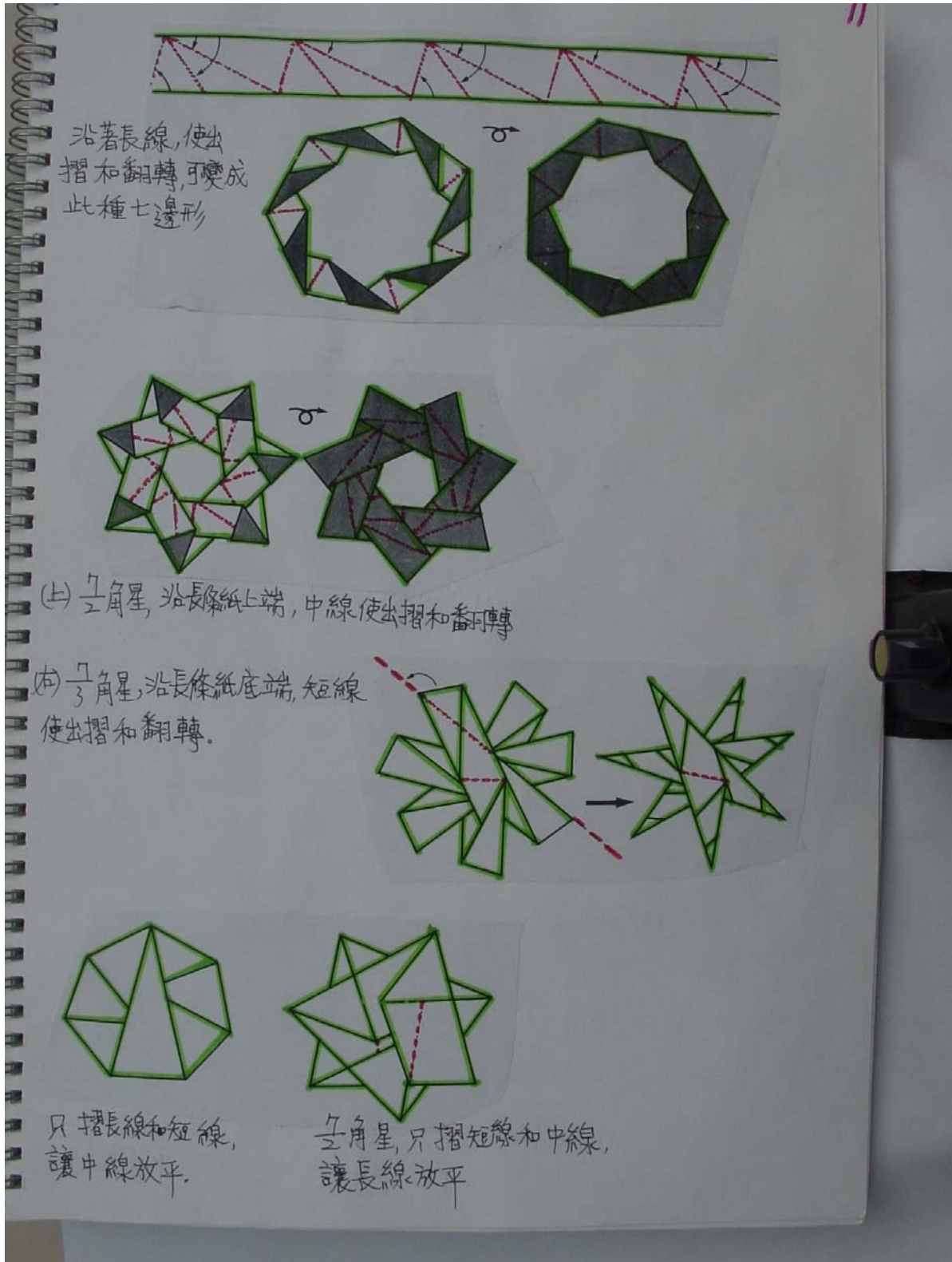
[方法]: 在長條紙上，從「一上一下」三角星，「二上二下」五角星，「三上三下」九角星，請參閱操作紀錄手冊或實驗日誌，那七角星又是幾上幾下呢？在此僅舉例「正七角星」，先在長條紙上摺出摺線，如下列：



[結果]: 1. 按照只摺短線、中線、長線，或只摺短、長線讓中線放平，有下面的七角星。

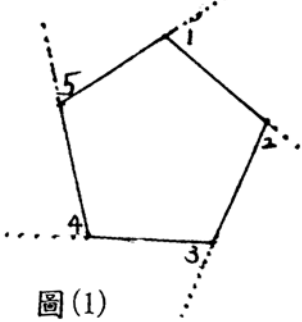
2. 當我們打開長條紙，發現若把長條紙用摺線平分成七個角（如下列），即用  $180 \text{度} \div 7 = \text{約 } 25.7 \text{度}$ ，就能摺出七角星，按照這個方法就能摺出所有的星星。

3. 假如上面的方法推測是正確的話，我們就能用量角器來完成所有的多角星。

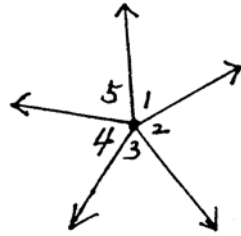


**【問題二】操作量角器，怎樣摺出多角星呢？為了探討摺紙的方法及了解各種多角星的理論，我們必須先了解正多邊形的外角總和、外角、內角和轉角？**

[方法]： 例：[正五邊形]



圖(1)



圖(2)

照片(1)



1.把外角剪下，可拼成  $360^\circ$ ，所以外角總和是  $360^\circ$  度，如圖(1)(2)。

2.外角都相同，所以每一外角  $= 360^\circ \div 5 = 72^\circ$ ，即  $\frac{360^\circ}{a}$ 。(a是角數)

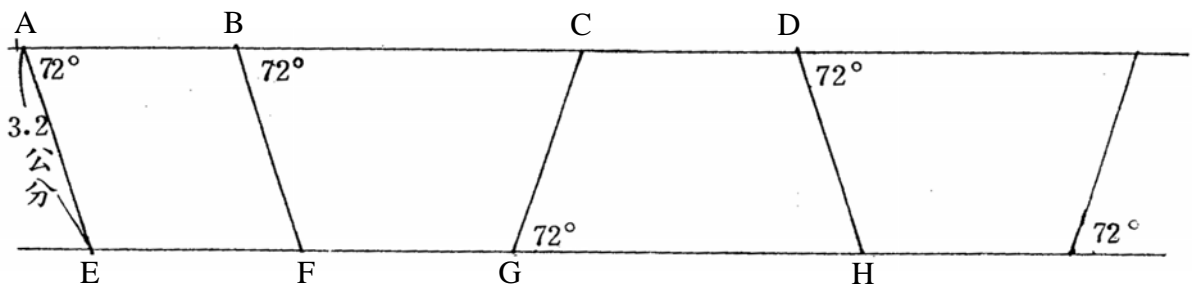
3.內角  $180^\circ \times (a - 2) = 180^\circ \times (5 - 2) = 540^\circ$

$$540^\circ \div 5 = 108^\circ$$

內角也可以用  $(180^\circ - \frac{360^\circ}{5})$  即  $(180^\circ - \frac{360^\circ}{a})$ ，所以內角也是  $108^\circ$ 。

4.操作量角器，沿著長條紙向下畫出  $72^\circ$ ，量出  $\overline{AE} = 3.2$  公分  $= \overline{AB}$ ，在  $\angle B$ ，沿長條紙量出  $72^\circ$ ，畫出  $\overline{BF}$ 。以 F 為中心，量出  $\overline{FG} = 3.2$  公分，沿長條紙量出  $72^\circ$ ，畫出  $\overline{GC}$ ， $\overline{GC} = \overline{CD}$ ，然後連續畫出等距離的摺線，使出摺翻，就可摺出正五邊形。

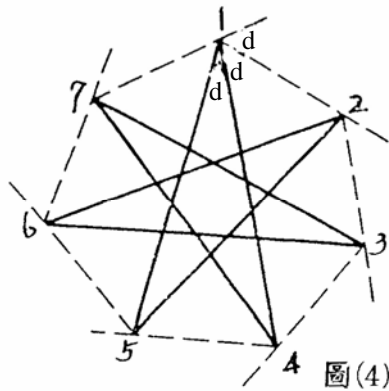
如下面圖形及照片(1)



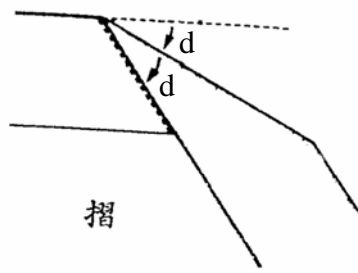
5.按照上面的方法，先求出外角， $360^\circ \div 7 =$  約  $51.4^\circ$  度，等距離畫出摺線，可摺出正

七邊形。假如要摺出其他的星星，如三摺七星，那麼長條紙就必須翻轉  $\frac{360^\circ}{7} \times 3$ ，

或  $\frac{3}{7} \times 360^\circ$ 。如下圖(4)所示。

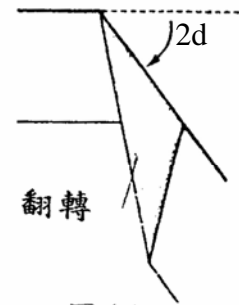


圖(4)



摺

圖(5)



翻轉

圖(6)

6.轉角是 $\frac{3}{7} \times 360^\circ$ ，卻能摺出三摺七角星。7是正七角星，3是代表轉角占全部的 $180^\circ$ 的 $\frac{3}{7}$ （或摺了三次）。

7.轉角 $\frac{3}{7} \times 360^\circ = \frac{3}{7} \times 180^\circ \times 2 = \frac{180^\circ}{7} \times 3 \times 2$ ，所以翻轉的角度是摺角的2倍，如圖(5)、(6)所示。

[結果]：仿照上面的方法，在長條紙等距離，畫出摺線，先算出 $(\frac{a}{b} \times 180^\circ)$ ，由長條

紙上端往下摺，使出摺翻，就可摺出一個正 $a$ 摺 $b$ 角星 $(\frac{b}{a}$ 角星)。



摺了三次的 $\frac{7}{3}$ 角星

**【問題三】長條紙怎樣摺出多少種不同的多角星？**

[方法]：用量角器，仿照上面的方法，或先畫出摺線，就可摺出各種不同角的實心星（如照片）。若徒手操作長條紙幾上幾下的共有兩種圖形，即正多邊形及多角星兩種。

〈一〉以圖形的外觀有**正多邊形**的圖形如下列：



1.等距離長線使出摺翻

2.只摺中線〈正九邊形〉

3.只摺中線〈正十三邊形〉

〈正五邊形〉

〈二〉以圖形的外觀有**奇數角星**的圖形如下列：再分中間**有洞與無洞（實心）**的星星。



4.在長條紙上，先畫出  $72^\circ$  再使出摺翻

5.間隔只摺中線可完成二摺七角星

6.在長條紙上，先畫出  $77.1^\circ$  再使出摺翻



7.等距離長條紙每次摺  $40^\circ$  摺三次翻轉

8.在長條紙上，先畫出  $80^\circ$  摺線

可摺出三摺九角星

再使出摺翻





9.只摺中線使出摺翻〈九角星〉



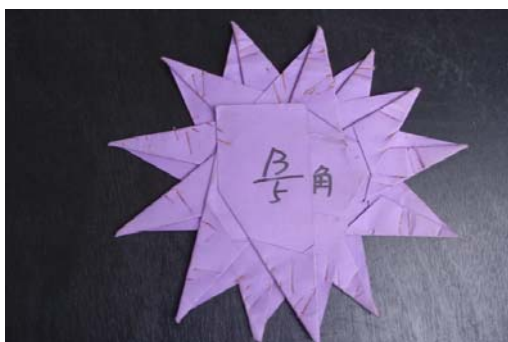
10.只摺中線使出摺翻〈十一角星〉



11.在長條紙上，先畫出  $81.8^\circ$  再使出摺翻



12.只摺短線使出摺翻〈十一角星〉



13.等距離長條紙每次摺  $28^\circ$  摺五次

可摺出五摺十三角星



運用摺紙技巧可摺出多樣的星星

〈三〉**偶數角星**：將正三角星的長條紙摺出第二條摺線，可完成正六角星，將正方形（四角星）摺出第二條摺線，可完成正八角星，同樣的，將五邊形（五角星）摺出第二條摺線，可完成正十角星。如實驗日誌及實物。

[結果]: 1.算出轉角, 統計操作結果。如下表

角(星)	轉角	是否完成	角(星)	轉角	是否完成
三摺七角星	$\frac{3}{7} \times 180^\circ \times 2 = \text{約 } 156^\circ$	○	四摺九角星	$\frac{4}{9} \times 180^\circ \times 2 = 160^\circ$	○
二摺七角星	$\frac{2}{7} \times 180^\circ \times 2 = \text{約 } 104^\circ$	○	五摺九角星	$\frac{5}{9} \times 180^\circ \times 2 > 180^\circ$	×
四摺七角星	$\frac{4}{7} \times 180^\circ \times 2 > \text{約 } 180^\circ$	×	正五角星	$\frac{1}{5} \times 180^\circ \times 2 = 72^\circ$	○
正七角星	$\frac{1}{7} \times 180^\circ \times 2 = \text{約 } 52^\circ$	○	二摺五角星	$\frac{2}{5} \times 180^\circ \times 2 = 144^\circ$	○
正九角星	$\frac{1}{9} \times 180^\circ \times 2 = 40^\circ$	○	三摺五角星	$\frac{3}{5} \times 180^\circ \times 2 > 180^\circ$	×
二摺九角星	$\frac{2}{9} \times 180^\circ \times 2 = 80^\circ$	○	三摺九角星	$\frac{3}{9} \times 180^\circ \times 2 = 160^\circ$	○

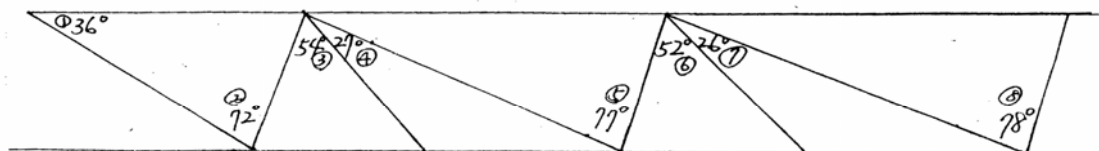
2.發現 $\frac{b}{a}$ 角( $a$ 摺 $b$ 角星),  $b$ 是奇數,  $a$ 是奇數或偶數, 而且 $a < \frac{b}{2}$ , 或 $2a < b$ 。

3.發現規律性, 轉角 $= \frac{a}{b} \times 180^\circ \times 2 = \text{外角} \times a$ 。

4.摺偶角星, 只要在長條紙摺二上二下(正五角星), 再加第二條摺線, 可摺出十角星。同樣的一上一下(正三角形), 再加第二條摺線, 可摺出六角星。

**【問題四】不用量角器, 徒手操作, 剛開始摺線的摺角, 與用量角器測量的正確值, 誤差是多少?**

[方法]: 1.操作量角器, 記錄正七角星的結果, 如下圖(11)及下列紀錄表格。



圖(11)

2	正七角星	正 確 值	徒手操作時	誤 差
	第一角	$\frac{180^\circ}{7}$	36°	+ 10.3°
	第二角	$\frac{3}{7} \times 180^\circ$	72°	- 5.1°
	第三角	$\frac{2}{7} \times 180^\circ$	54°	+ 2.6°
	第四角	$\frac{180^\circ}{7}$	27°	+ 1.3°
	正九角星	正 確 值	徒手操作時	誤差
	第一角	$\frac{180^\circ}{9}$	41°	+ 2.1°
	第二角	$\frac{4}{9} \times 180^\circ$	70°	- 1.0°
	第三角	$\frac{2}{9} \times 180^\circ$	35°	- 5°
	第四角	$\frac{180^\circ}{9}$	18°	- 2°
3.	正十一角星	正 確 值	徒手操作時	誤 差
	第一角	$\frac{180^\circ}{11}$	38°	+ 21.7°
	第二角	$\frac{5}{11} \times 180^\circ$	71°	- 10.5°
	第三角	$\frac{3}{11} \times 180^\circ$	54°	+ 5.1°
	第四角	$\frac{4}{11} \times 180^\circ$	63°	- 2.2°
	第五角	$\frac{2}{11} \times 180^\circ$	31.5°	- 1.1°
	第六角	$\frac{180^\circ}{11}$	16°	- 0.3°

[結果]:

1. 從統計表，發現第一角誤差最大，第二角大約是第一角的  $\frac{1}{2^1}$ ，第三角大約是第一角的  $\frac{1}{4}$  ( $\frac{1}{2^2}$ )，第四角大約是第一角的  $\frac{1}{8}$  ( $\frac{1}{2^3}$ )，愈往下摺，誤差愈小，愈接近正確值。
2. 事實上，當我們在測量時，也會有一些誤差。大部份第一個角誤差約  $\pm 10^\circ$ ，最大的誤差是  $\pm 20^\circ$ 。
3. 徒手操作長條紙，第一條摺線是很重要的。因此，若要很準確的摺出來，往往要剪掉前面的幾塊三角形。其中以九角星最快接近正確值，在前面第四個摺角就能恢復原來的正確值，七角星與十一角星要摺到第五、六個摺角。

**【問題五】不用量角器（第一個角用量角器），徒手操作，怎樣找出向上摺與向下摺的次數和順序，並且摺出星星呢？**

[方法]: 1. 要摺出正七角星，先摺出  $\frac{180^\circ}{7} = 25.7^\circ$  (有誤差)，如圖 (7)

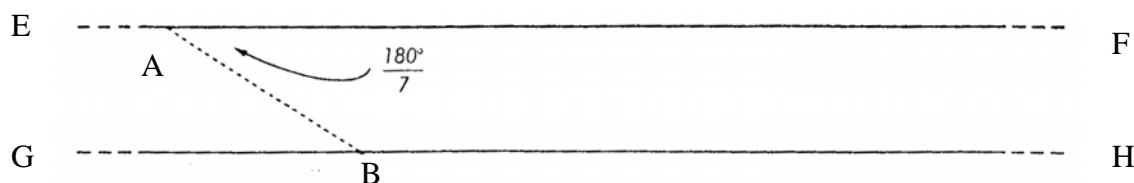


圖 (7)

2. 因為  $\overline{EF}$  和  $\overline{GH}$  平行，所以  $\angle FAB = \angle ABG$ ，(剪下可重疊)。  $\angle ABH$  是  $\frac{6}{7} \times 180^\circ$ ，再對齊原摺線  $\overline{AB}$ ，摺出  $\overline{BC}$ ，將  $\angle ABH$  分成兩半，即  $\frac{3}{7} \times 180^\circ$ 。如下圖 (8)

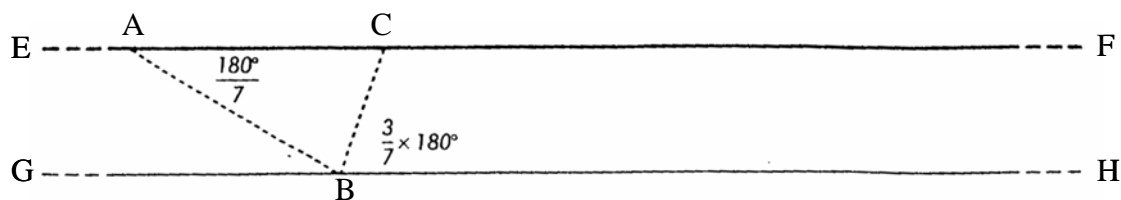
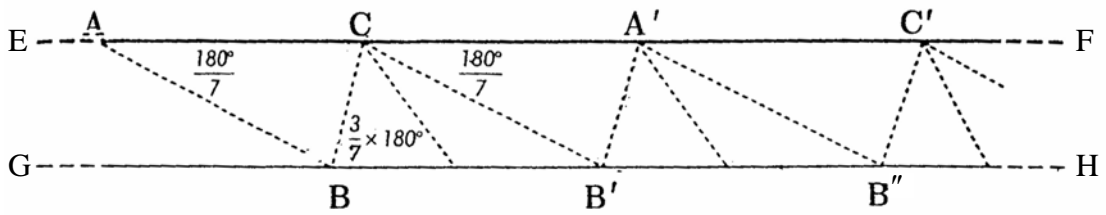


圖 (8)

3.  $\angle ACB = \angle CBH$ ，所以  $\angle FCB = \frac{4}{7} \times 180^\circ$ ，再沿著摺線往下摺，  $\angle FCB$  被平分分成兩半，再往下摺一次，  $\angle FCB$  被分成四等分，即  $\angle FCB' = \frac{1}{7} \times 180^\circ$ ，如下圖 (9)。

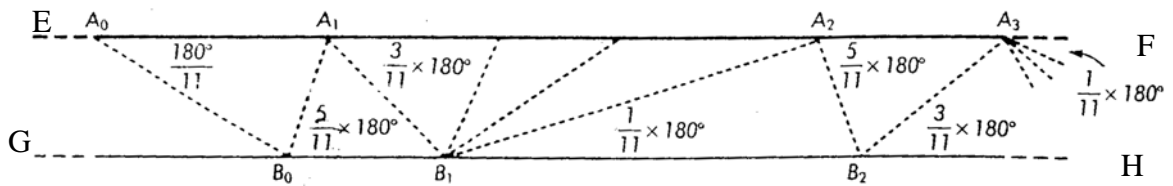


圖(9)

4. A, C, A', C'……沿著長條紙上端，等距離摺出來，B, B', B''沿著長條紙下端摺出來。

5. 從摺線可看出兩下一上的順序，假如我們以長條紙下端摺翻，可摺出三摺七角星，若以中線摺翻，可摺出二摺七角星。

[結果]: 1. 仿照摺正七角星的方法，摺正十一角星，利用對角相等，等分平分角的方法，使得長條紙上端出現與原來（第一條摺線）的摺角相同，觀察摺線變化，就可找出摺紙向上向下的順序了。如下圖（10）。



圖(10)

(1) 先向下摺  $\frac{180^\circ}{11}$ ， $\angle A_0 B_0 H = (\frac{10}{11} \times 180^\circ)$ ，沿摺線可平分原角  $\angle A_1 B_0 H =$

$(\frac{5}{11} \times 180^\circ)$ ， $\angle F A_1 B_0 = (\frac{6}{11} \times 180^\circ)$ ，再平分原角  $F A_1 B_1 = (\frac{3}{11} \times 180^\circ)$ 。

(2)  $\angle A_1 B_1 H = (\frac{8}{11} \times 180^\circ)$ ，平分三次（摺出三條摺線）， $\angle A_2 B_1 H =$

$(\frac{1}{11} \times 180^\circ)$ ，（出現在下端）繼續往下摺， $\angle F A_2 B_2 = (\frac{5}{11} \times 180^\circ)$ ， $\angle A_3 B_2 H$

$= (\frac{3}{11} \times 180^\circ)$ ， $\angle F A_3 B_3 = (\frac{1}{11} \times 180^\circ)$ （回到原來摺角）。

(3)  $A_0, A_3, A_6, A_9$  都是沿著長條紙上端摺  $\frac{180^\circ}{11}$ ，距離相等。長條紙的上下端，

出現都是奇數角，如  $\frac{1}{11}$ ， $\frac{3}{11}$ ， $\frac{5}{11}$ 。

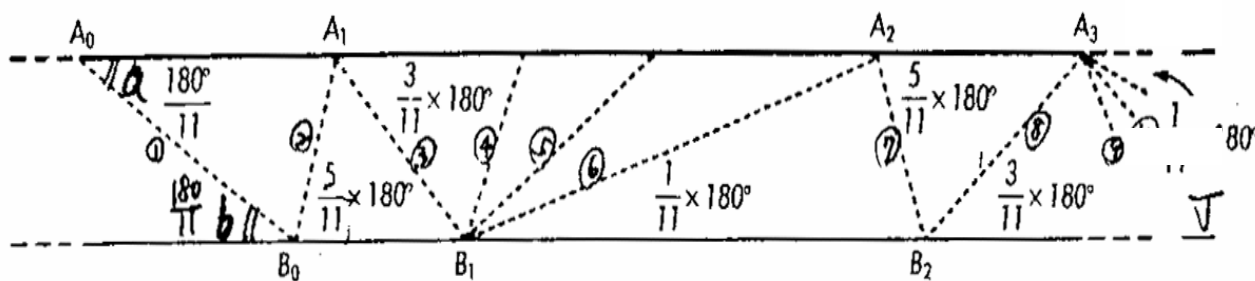
(4)從摺紙線可看出來是三下一上一下三上一下一上。摺紙向上向下順序複雜，卻有規律性。

2.找出正十三角星的摺紙順序，並且完成正十三角星。正十三角星的順序是上<sup>2</sup>下<sup>1</sup>上<sup>3</sup>下<sup>2</sup>上<sup>1</sup>下<sup>3</sup>。(如照片)



**【問題六】 向上摺與向下摺次數或順序不同時，怎樣找到規律性呢？**

[方法]: 1.從「問題五」的研究中，觀察摺角與摺線的變化，都有規律性。如下圖(12)。



(1)剪掉 $A_0B_0$ ， $\angle a = \angle b$ ，內錯角相等。當摺第二條摺線時，

$$\angle B_0 = \frac{180^\circ}{11} + 2 \times \frac{5}{11} \times 180^\circ \text{ (等分平分角)}。$$

(2)當摺第三條摺線時， $\angle A_1 = \frac{5}{11} \times 180^\circ + 2 \times \frac{3}{11} \times 180^\circ$  (等分平分)。

(3)當摺第四、五、六條摺線時， $\angle B_1 = \frac{3}{11} \times 180^\circ + 8 \times \frac{1}{11} \times 180^\circ = \frac{3}{11} \times 180^\circ +$

$$2^3 \times \frac{1}{11} \times 180^\circ。$$

(4)當摺第七條摺線時， $\angle A_2 = \frac{1}{11} \times 180^\circ + 2^1 \times \frac{5}{11} \times 180^\circ。$

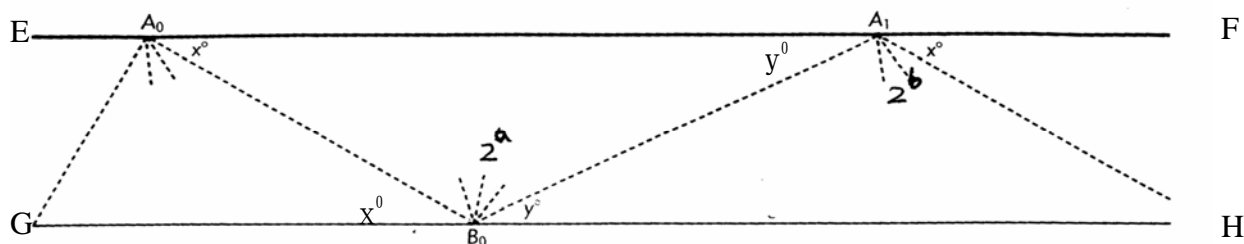
(5)當摺第八條摺線時， $\angle B_2 = \frac{5}{11} \times 180^\circ + 2^1 \times \frac{3}{11} \times 180^\circ。$

(6)摺到第九、十條摺線時，才完成一段，如此重複出現。A<sub>0</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>6</sub>, A<sub>9</sub>……等距離。

(7)長條紙上端的角都是往下摺，而下端的角，都是往上摺。

2.操作 7.9.11.13.角的摺線和摺角，都有規律性。運用課本解題方法，找出規律性。

如圖 (13)



圖(13)

(1)在長條紙上端用 $x$ ，在下端用 $y$ 來表示。我們從 $B_0$ 來看，有條摺線（往上摺次數），就會產生  $2^a y + x = 180^\circ$

$$x + 2^a y = 180 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2)同樣的方式，我們從 $A_1$ 來看，有 $b$ 條摺線（往下摺次數），就會產生

$$2^b x + y = 180$$

$$y + 2^b x = 180 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

利用課本解題方法，把② $y = 180 - 2^b x \cdots \cdots \textcircled{3}$

把①③合併  $x + 2^a(180 - 2^b x) = 180$

利用分配律  $x + 2^a 180 - 2^a 2^b x = 180$

利用交換律  $2^a 180 - 180 = 2^a 2^b x - x$

$$180 \times (2^a - 1) = x(2^a 2^b - 1)$$

$$x = \frac{180 \times (2^a - 1)}{2^a \times 2^b - 1} = \frac{2^a - 1}{2^{a+b} - 1} \times 180 \quad \text{同樣的}$$

$$y = \frac{2^b - 1}{2^{a+b} - 1} \times 180$$

3.把上面的公式運用到〔問題二〕，要先算出  $(\frac{a}{b} \times 180^\circ)$ ，才能摺出  $\frac{b}{a}$  角星（倒轉）。

[結果]:

- 1.我們得到要摺出星星，就要運用在長條紙上端可摺出  $\frac{2^{a+b}-1}{2^a-1}$  角星，在長條紙下端可摺出  $\frac{2^{a+b}-1}{2^b-1}$  角星。
- 2.把上面的公式運用到以前操作的星星，就可摺出  $\frac{2^2-1}{2-1}$  角星（一上一下）， $\frac{2^4-1}{2^2-1}$  角星（二上二下）， $\frac{2^6-1}{2^3-1}$  角星（三上三下）， $\frac{2^3-1}{2-1}$  角星（二下一上）長條紙上端， $\frac{2^3-1}{2^2-1}$  角星（二下一上）長條紙下端。
- 3.知道向上摺向下摺的次數或順序，就可摺出不同的星星嗎？事實上，運用上面的公式，求（二下三上），四下三上的星星，就摺不出來了。

摺紙順序	星星（角）	摺紙順序	星星（角）
下 <sup>1</sup> 上 <sup>1</sup>	3	下 <sup>3</sup> 上 <sup>2</sup>	$\frac{31}{3}, \frac{31}{7}$ 無法完成
下 <sup>2</sup> 上 <sup>2</sup>	5	下 <sup>3</sup> 上 <sup>4</sup>	$\frac{127}{15}, \frac{127}{7}$ （無法完成）
下 <sup>3</sup> 上 <sup>3</sup>	9	下 <sup>4</sup> 上 <sup>2</sup>	21, $\frac{21}{5}$ （可完成）
下 <sup>2</sup> 上 <sup>1</sup>	7, $\frac{7}{3}$ （三摺七角星）	下 <sup>4</sup> 上 <sup>3</sup>	$\frac{127}{7}, \frac{127}{15}$ （無法完成）
下 <sup>2</sup> 上 <sup>3</sup>	$\frac{31}{7}, \frac{31}{3}$ 無法完成	下 <sup>4</sup> 上 <sup>4</sup>	17

- 4.我們發現要摺出  $\left\{ \frac{2^{a+b}-1}{2^a-1} \right\}$  角星，一定要整數或分數，而且 a（向上摺次數）和 b（往下摺次數）是互為因數關係，才可完成星星。

## 伍、討論：

（一）歸納圖形的種類共有正多邊形與星星圖形，而摺紙的方法有兩種：

- 1.用量角器先算出  $\frac{a}{b} \times 180^\circ$  的角度再畫出來，使出摺翻 a 次，角度精準誤差小。  
摺出來的星星圖形是沒有中空的〈實心〉。如上面圖形 4、6、7、8、11、13 等圖形。



2.徒手操作，先在長條紙上摺出摺線，如二上二下，在只摺短線、中線、長線或長短線、短中線，使出摺翻或未使出摺翻，圖形都不一樣。摺出來的圖形是正多邊形或奇角星，星星圖形是有洞的。如上面圖形 1、2、3、5、9、10、12。

(二)因受到測量工具的限制，有的摺角無法整除，如  $\frac{180^\circ}{7} = \text{約 } 25.7 \text{ 度}$ ，取小數第一位，因此，仍然有一點點的誤差。

(三)從操作長條紙中，發現摺七角星有  $2^2 \left( \frac{4}{7} \times 180^\circ \right)$ ，九角星與十一角星有  $2^3 \left( \frac{8}{11} \times 180^\circ \right)$ ，因此，我們推測它與電腦中的二進位有關，所以我們從長條紙摺紙的順序中，可發現到摺出的星星都是奇角星，卻沒有發現偶數角星。

(四)不用量角器，利用對角相等，等分平分角的方法，從摺線的變化，可找出摺紙向下向上的順序，並且摺出星星。奇角星的摺紙順序都是複雜而有規律性。如正 19 星的摺紙順序是上<sup>1</sup>下<sup>1</sup>上<sup>1</sup>下<sup>2</sup>上<sup>4</sup>下<sup>1</sup>上<sup>1</sup>下<sup>1</sup>上<sup>2</sup>下<sup>4</sup>。而 11、13 角星等也有規律性。

(五)徒手操作摺多角星，第一條摺線所產生的誤差最大，而每個角的誤差值，大約都是前面的一半，其中以九角星在第四個角就恢復原來的正確值，七角星及十一角星在第五或第六個角才恢復原來的正確值。待未來上國中或高中時，再繼續研究高深的數學理論，來證明它的規律性。

## 陸、結論：

(一)摺星星並不難，只要在長條紙上，等距離畫出摺線，先算出  $\frac{a}{b} \times 180^\circ$ ，由長條紙上

端，先用量角器畫出第一條摺線，再使出摺翻，就可摺出 a 摺 b 角星  $\left( \frac{b}{a} \right)$ 。

(二)長條紙可摺出很多不同的多角星， $\frac{b}{a}$  角星，b 是奇數，a 是奇數或偶數，而且

$a < \frac{b}{2}$ ，或  $2a < b$ 。若要摺偶數角星，只要再加上第二條摺線，也可以摺出偶數角星。

(三)我們要徒手摺不同的星星，就要先找到向上摺向下摺的摺紙順序，在長條紙上端摺  $\frac{2^{a+b}-1}{2^a-1}$  角星，或在長條紙下端摺  $\frac{2^{a+b}-1}{2^b-1}$  角星。a 是向上摺次數，b 是往下摺次數。

(四)要摺出  $\frac{2^{a+b}-1}{2^a-1}$  角星時，這個角一定是整數或分數，而且 a 和 b 是互為因數關係。

(五)不用量角器，徒手操作多角星，在長條紙上剛開始的摺線與上下兩端的摺角，第一條摺線的摺角誤差很大，愈往下摺，摺角誤差愈小。

### 柒、推廣與應用：

當長條紙一上一下摺翻，摺角被等分平分，從操作中讓我們想到若用二進位，能否看出向上摺或向下摺的次數或順序呢？

(一)把多角星都用二進位表示，如下表(一)。

多角星(角)	二進位表示	長 條 紙 摺 紙 順 序
3 角星	11	上 <sup>1</sup> 下 <sup>1</sup>
5	101	上 <sup>2</sup> 下 <sup>2</sup>
7	111	上 <sup>1</sup> 下 <sup>2</sup>
9	1001	上 <sup>3</sup> 下 <sup>3</sup>
11	1011	上 <sup>1</sup> 下 <sup>2</sup> 上 <sup>3</sup> 下 <sup>1</sup> 上 <sup>2</sup> 下 <sup>3</sup> (有規律)
13	1101	上 <sup>2</sup> 下 <sup>1</sup> 上 <sup>3</sup> 下 <sup>2</sup> 上 <sup>1</sup> 下 <sup>3</sup> (有規律)
15	1111	上 <sup>1</sup> 下 <sup>3</sup>
17	10001	上 <sup>4</sup> 下 <sup>4</sup>
19	10011	上 <sup>1</sup> 下 <sup>1</sup> 上 <sup>1</sup> 下 <sup>2</sup> 上 <sup>4</sup> 下 <sup>1</sup> 上 <sup>1</sup> 下 <sup>1</sup> 上 <sup>2</sup> 下 <sup>4</sup> (有規律)
21	10101	上 <sup>2</sup> 下 <sup>4</sup>

(二)從上表中，運用質因數分解法，發現有規律性或對稱的二進位，就可找出摺紙順序。例如：正 21 角星是 10101 (規律)，1001 是正九角星 (對稱)。

(三)正 11, 13, 19 角星無法馬上看出，就必須用摺紙的方法，摺紙順序複雜而有規律性。

(四)從二進位列表中，發現末位都是 1，而且『n-1 等於一組「0」的個數』例如

21=10101，重複的10有二組相同，而且四下二上，所以

$\frac{m \text{ (向下摺次數)}}{n \text{ (向上摺次數)}} = 2$ 。例如 7=111，重複的11有二個，所以  $\frac{m}{n} = 2$ ，發現向上摺

次數(a)與每組的個數都是一樣的，所以  $\frac{m \text{ (向下摺次數)}}{n \text{ (每組個數) 或 (向上摺次數)}} = k$

(相同的組數)。例如 15=11111， $\frac{m}{1} = 3$ ，所以下<sup>3</sup>上<sup>1</sup>。

(五)從上表(一)中，當 N=11,以二進位來說，11=1101 並沒有重複的符號，所以我們無法找到摺紙的順序，但是我們卻找到複雜的摺紙順序。

(六)摺星星可藉著簡單的摺紙順序，如  $\left\{ \frac{N}{a} \right\}$  角星，N 是摺紙的多角星，a 是 N 的最

初的部份，我們發現;當  $N=1001001001=585$

$$a = 1001001=73 \text{ 是一小部分，} a < \frac{N}{2}, \text{ } a \text{ 和 } N \text{ 互質。}$$

(七)當  $N$  和  $a$  互質，從二進位中的「1」的個數，可找到彼此的關係。如

$N=101010101010101=21845$  ( $p=8$ ，有八個「1」)  $N$  的部份有下列：

q=1	1=	1
2	101=	<b>5</b>
3	10101=	21
4	1010101=	<b>85</b>
5	101010101=	341
6	10101010101=	<b>1365</b>
7	1010101010101=	5461

當  $q=2,4,6$  都有 5 的因數，也是 21845 的因數。若  $q=1,3,5,7$ ,  $a$  與 21845 沒有共同的

因數， $a$  是 21845 的最初部份。因此，我們也能推算出 21845 角星和下列各角星  
 $\left\{ \frac{21845}{21} \right\} \left\{ \frac{21845}{341} \right\} \left\{ \frac{21845}{5461} \right\}$  角星。

(八)假如  $N$  角星的摺紙順序是  $D^{m_1} U^{n_1}$  ( $D$  向下摺  $U$  向上摺), 另一個  $a$  角星是  $D^{m_2} U^{n_2}$ ,  
 然而  $n_1=n_2$ , 所以  $\left\{ \frac{N}{a} \right\}$  角星可以找到摺紙的順序是  $D^m U^n$ , 此時

$$\text{「} m=m_1-m_2, n=n_1+m_2 \text{」。}$$

舉例如下: 7 角星的摺紙順序是  $D^2 U^1$ , 在二進位是  $7=111$ ,  $3=11$ ,  $3$  是  $7$  的一部分,  
 然而  $3$  角星的摺紙順序是  $D^1 U^1$  ( $一下一上$ ), 但因為  $n_1=n_2(=1)$ ,  $m_1=2$ ,  $m_2=1$ ,  
 所以按照上面公式  $\left\{ \frac{7}{3} \right\}$  角星的摺紙順序是  $D^1 U^2$  ( $一下二上$ ), 如前面操作的  $\left\{ \frac{7}{3} \right\}$   
 角星  $D^2 U^1$  (從長條紙底層操作)。

(九)從二進位表示的方法中，可看出  $3=11$ ,  $7=111$ , 就可完成三摺七角星。 $5=101$ ,  
 $21=10101$ , 就可完成五摺二十一角星。

(十)想不到為了開同樂會來佈置教室，為了製作平面星星而發現「數學」隨時都存在  
 我們的生活當中。半年來，我們不斷地研究討論，剛開始，遇到很多困難，但到  
 了最後我們發揮合作的精神，堅持到底，集多人的智慧，絞盡腦汁，終於把作品  
 完成。尤其是發現摺紙順序能用「二進位」來表示時，讓我們覺得「翻天覆地摺  
 多角星」真是太神奇了。



哇！我們終於完成了各種多角星。



各式各樣的多角星，您也來摺摺看吧！

### 捌、參考資料：

- (一)莊淇銘 王富祥 (民 96)。數學好好玩。台北市：新自然主義。
- (二)國立台灣科學教育館 全國二十九屆 (民 78) 科展專輯「百摺不撓」。台北市：萬國興。
- (三)陳昭蓉譯 (民 95)。圖解數學辭典。台北市：天下遠見。
- (四)李千野編著 (民 72)。怎樣教學生摺紙。台北市：武陵。
- (五)Ron White (民 94)。電腦圖解大百科。台北市：電腦人文化。

玖、附件：**操作紀錄請詳閱附件資料(實驗日誌)。**

**【評語】** 080401 翻天覆地多角星

從佈置教室的動機出發，先以嘗試錯誤方式操作，發現摺多角形之技巧，再利用課程所學之概念，分析推展，尋找規律，並能與二進位結合，找出簡易解題之技巧，研究過程相當細密，作品頗富趣味，具創意及實用性，值得給予第一名獎勵。