

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040407

第六個心

學校名稱：臺北市立成功高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃書庭	游經祥
高二 廖顯文	劉國莉

關鍵詞：三線共點、西瓦定理、雙曲線

壹、摘要

針對三角形 $\triangle ABC$ ，以其三邊為底，同時向外或向內作三個相似等腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle ABC'$ ，我們發現 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線交於一點——「第六個心」。其實，第六個心並非由 $\triangle ABC$ 所決定唯一的一點，乃是隨等腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle ABC'$ 的變動而有所不同。

隨等腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle ABC'$ 的變動，第六個心在平面上形成的軌跡為等軸雙曲線〔漸近線互相垂直〕，並且通過 $\triangle ABC$ 的三頂點、重心以及垂心。我們研究的範圍包括：雙曲線的無窮遠點、 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 交於無窮遠點的判別條件、尤拉線的推廣等。

為了研究以上主題，我們引進了一些額外的數學工具，如投影平面、barycentric coordinate。藉由這些工具的使用，我們得以發掘定理背後的數學結構，並且簡化計算過程，增加文章的可讀性。

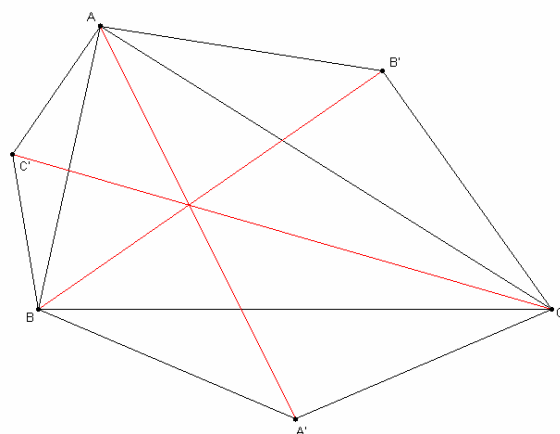
貳、研究動機

幾何學有許多命題簡單、直觀足以理解的問題，而三角形的諸多性質經常做為中學幾何的入門教材，特別是關於外心、內心、重心、垂心、旁心的各種定理經常出現在課程中。因此我們決定以三角形「五心」以外的「心」做為研究題材，並將「五心」的一些幾何性質推廣至較一般的情況。

近來由於電腦繪圖工具的發展，許多古典幾何的命題可以用具體的圖像來呈現，增進了我們對這些命題的了解。從大量繪製的電腦圖像我們也可能看見一些數學現象，如何適當地闡述並嚴格地證明這些現象，是我們主要的研究方向。

參、研究目的

- 一、以給定三角形 $\triangle ABC$ 的三邊為底邊向外〔或向內〕作相似等腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle ABC'$ 證明 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 共點的猜想，如下圖。



二、研究相似等腰三角形 $\Delta A'BC$ 、 $\Delta AB'C$ 、 $\Delta ABC'$ 底角變動時 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線交點在平面上形成的軌跡。

肆、 研究方法

- 一、經由觀察特例（如：等腰直角三角形、角度 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的直角三角形、邊長 3:4:5 的直角三角形）提出猜想。
- 二、利用 GSP 大量作圖，檢驗猜想是否合理。
- 三、運用幾何的常用定理（如：孟氏定理、西瓦定理）以及解析幾何、向量、矩陣等工具證明提出的猜想。

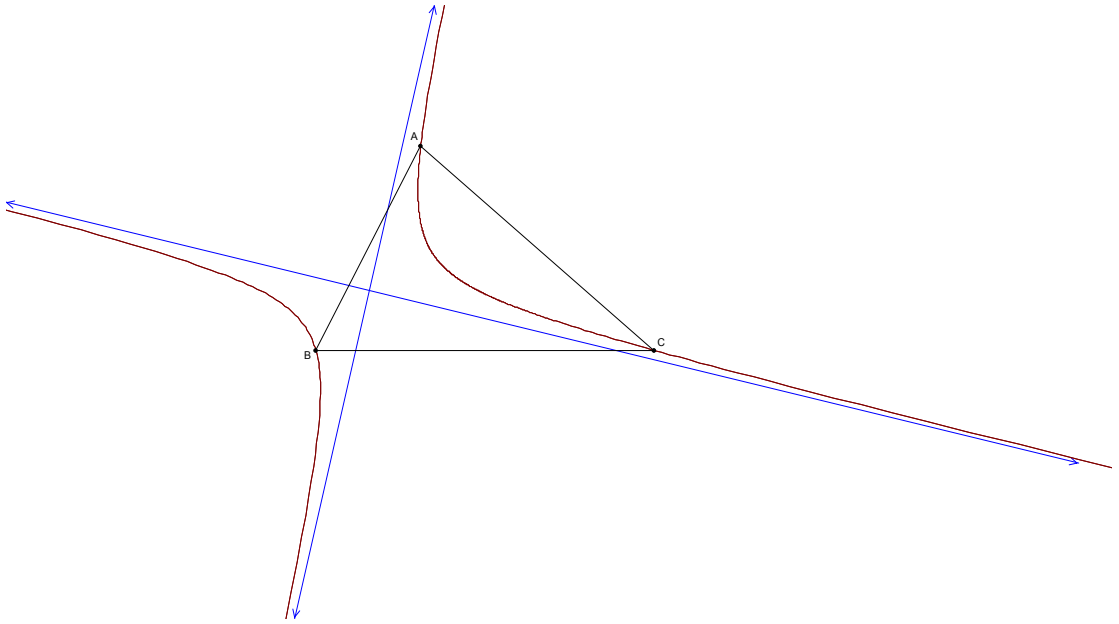
伍、 研究結果

- 一、以給定三角形 ΔABC 的三邊為底邊、並以 θ $\left[-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right]$ 為底角作相似等腰三角形 $\Delta A'BC$ 、 $\Delta AB'C$ 、 $\Delta ABC'$ ，則 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線共點或平行〔交於無窮遠點〕。其中 $\theta > 0$ 代表等腰三角形向外， $\theta < 0$ 代表等腰三角形向內， $\theta = 0$ 時等腰三角形的頂點在 ΔABC 上， $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 時等腰三角形的頂點在無窮遠。 ΔABC 的重心和垂心是我們結果的特例。
- 二、 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線平行的充要條件為

$$\tan \theta = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_{\Delta}^2}}{4S_{\Delta}}$$

其中 a 、 b 、 c 分別為 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 線段長， S_{Δ} 為 ΔABC 面積。

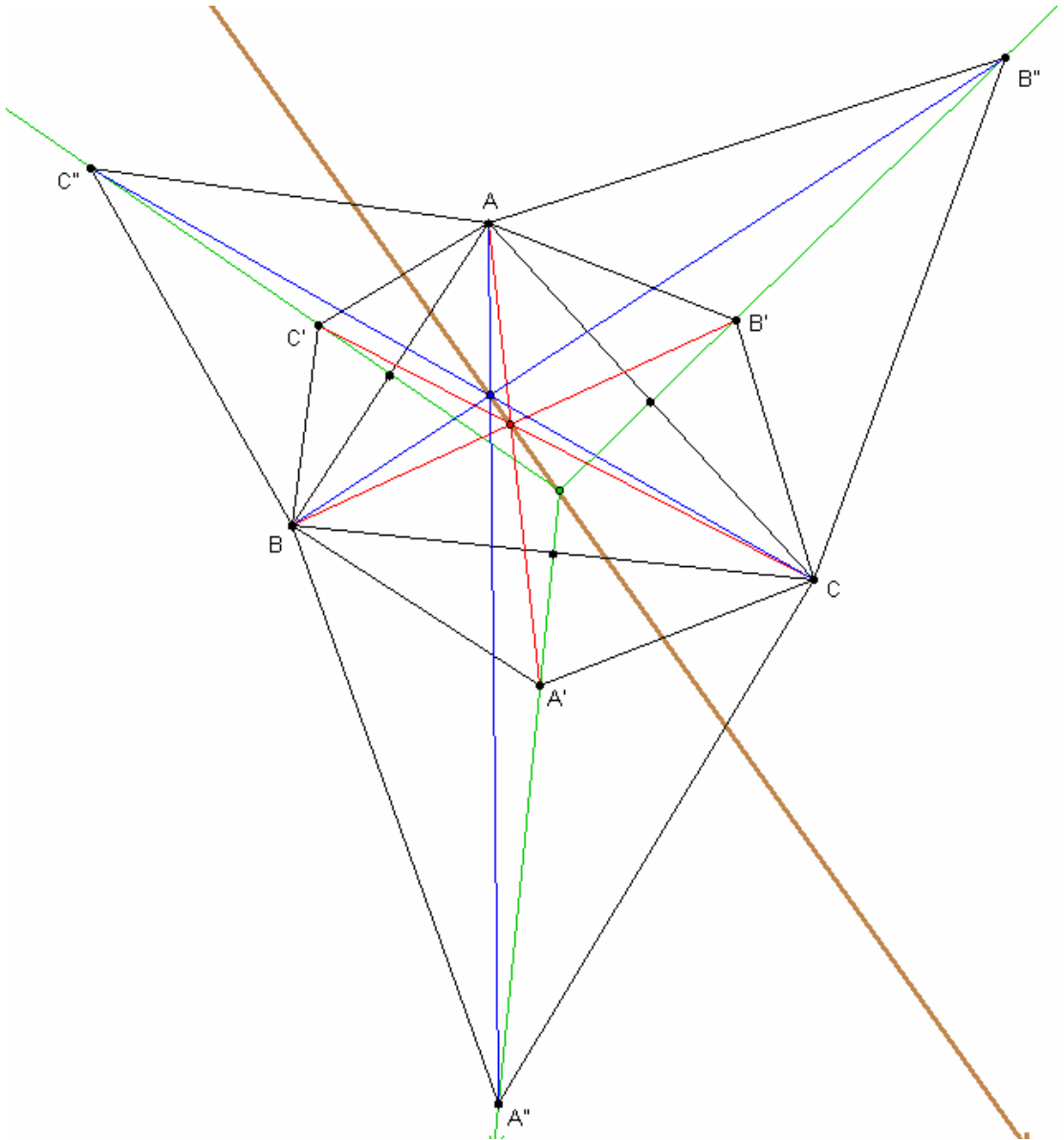
- 三、假設 ΔABC 不是等腰三角形，隨 θ 變動， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線交點在平面上的軌跡為一等軸雙曲線〔如下頁圖〕。



四、令等腰三角形 $\Delta A'BC$ 、 $\Delta AB'C$ 、 $\Delta ABC'$ 底角為 θ 時， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$

的交點為 P_θ ，則 ΔABC 外心與相異兩點 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 共線的充要條件為

$\theta_1 + \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ 〔如下頁圖〕。當 $\theta_1 = 0$ 且 $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ 時， P_{θ_1} 〔重心〕、 P_{θ_2} 〔垂心〕與外心共線，此特例即為尤拉線。



陸、討論

文章中 \mathfrak{R} 代表實數形成的集合。我們將用命題一和引理一證明 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線共點或平行。

命題一

D 、 E 、 F 分別為 $\triangle ABC$ 三邊延長線 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 上的點，若 $0 \neq r_1, r_2, r_3 \in \mathfrak{R}$

且 $\overline{BD} = r_1 \overline{DC}$ 、 $\overline{CE} = r_2 \overline{EA}$ 、 $\overline{AF} = r_3 \overline{FB}$ ，則以下敘述成立。

1. 廣義西瓦定理

\overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 共點或平行之充要條件為 $r_1 r_2 r_3 = 1$

2. 廣義孟氏定理

D 、 E 、 F 共線之充要條件為 $r_1 r_2 r_3 = -1$

3. \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 互相平行之充要條件為 $r_1 r_2 r_3 = 1$ 且 $r_2 r_3 + r_2 + 1 = 0$

原西瓦及孟氏定理的敘述中， D 、 E 、 F 必須在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 線段上，

但此二定理可推廣為允許 D 、 E 、 F 落在 \overrightarrow{BC} 、 \overrightarrow{AC} 、 \overrightarrow{AB} 直線上，其證明方法與原定理略同，在此省略。此命題第三個敘述 $r_2 r_3 + r_2 + 1 = 0$ 的條件表面看來 r_1 、 r_2 、 r_3 地位好像不等，但在 $r_1 r_2 r_3 = 1$ 成立的條件下，

$$r_1 r_2 + r_1 + 1 = 0$$

$$r_3 r_1 + r_3 + 1 = 0$$

$$r_2 r_3 + r_2 + 1 = 0$$

三式實為等價。譬如可將第一式乘以 r_3

$$\text{得 } r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3 + r_3 = 0$$

$$\because r_1 r_2 r_3 = 1$$

$$\therefore r_3 r_1 + r_3 + 1 = 0$$

同理，若第二式成立則第三式成立，第三式成立則第一式成立。

命題一證明

首先，假設 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 三線平行〔如下頁兩圖， F 分別在 \overline{AB} 線段上或線段外〕，我們將證明兩個等式成立。證明中用到的 $\overrightarrow{FB} \neq 0$ 可從 $\overrightarrow{AF} = r_3 \overrightarrow{FB}$ 得到。

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE} \\
&= \overrightarrow{AE} - r_2 \overrightarrow{EA} \\
&= (r_2 + 1) \overrightarrow{AE} \quad (3)
\end{aligned}$$

根據(3)式且 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 平行

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= (r_2 + 1) \overrightarrow{AB} \\
&= (r_2 + 1) (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}) \\
&= (r_2 + 1) (r_3 \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB}) \\
&= (r_2 + 1) (r_3 + 1) \overrightarrow{FB}
\end{aligned}$$

又根據 $\overrightarrow{AF} = r_3 \overrightarrow{FB}$

$$\begin{aligned}
r_3 \overrightarrow{FB} &= \overrightarrow{AF} \\
&= (r_2 + 1) (r_3 + 1) \overrightarrow{FB} \\
\therefore r_3 &= (r_2 + 1) (r_3 + 1) = r_2 r_3 + r_2 + r_3 + 1 \\
\text{因此第二個等式 } r_2 r_3 + r_2 + 1 &= 0 \text{ 成立。}
\end{aligned}$$

現在假設兩個等式 $r_1 r_2 r_3 = 1$ 、 $r_2 r_3 + r_2 + 1 = 0$ 成立，我們將證明三線平行。

$$\text{由 } r_2 r_3 + r_2 + 1 = 0$$

得知

$$r_2 + 1 = -r_2 r_3$$

代入(3)式，得

$$\overrightarrow{AC} = -r_2 r_3 \overrightarrow{AE} \quad (4)$$

$$\text{由 } r_3 r_1 + r_3 + 1 = 0$$

得知

$$1 + \frac{1}{r_3} = -r_1$$

因此

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} = \left(1 + \frac{1}{r_3}\right) \overrightarrow{AF} = -r_1 \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{r_1} \overrightarrow{AB} = -r_2 r_3 \overrightarrow{AB} \quad (5)$$

(4)、(5)兩式相減，得

$$\overrightarrow{CF} = -r_2 r_3 \overrightarrow{EB}$$

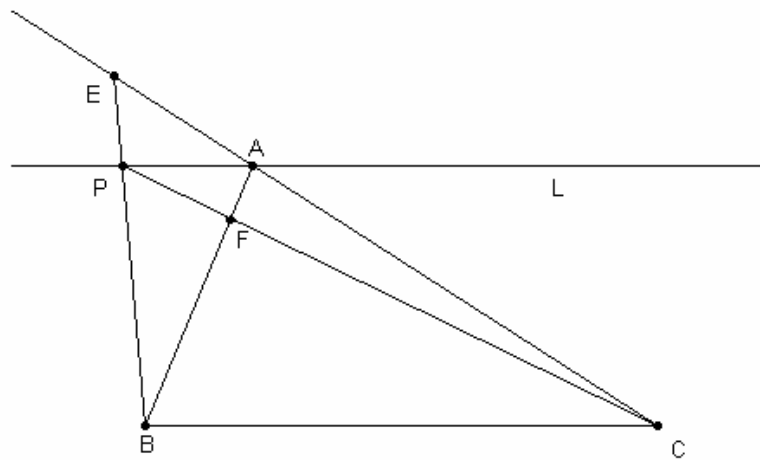
$$\therefore \overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{CF}$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BE}$$

因此 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 互相平行。

引理一

給定三角形 $\triangle ABC$ 以及過 A 平行 \overline{BC} 的直線 L ， E 、 F 分別為 \overline{AC} 、 \overline{AB} 上的點，滿足 $\overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA}$ 、 $\overrightarrow{AF} = r_3 \overrightarrow{FB}$ ，其中 $0 \neq r_2, r_3 \in \mathfrak{R}$ 。若 $r_2 r_3 = -1$ ，則 \overline{BE} 、 \overline{CF} 、 L 三線共點。



證明

設 P 為 \overline{BE} 與 L 的交點〔若 $\overline{BE} \parallel L$ ，則 $\overline{BE} \parallel \overline{BC}$ 、 C, E 重合、

$\vec{0} = \overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA} = r_2 \overrightarrow{CA}$ ， $r_2 = 0$ ，與假設 $r_2 \neq 0$ 矛盾，故 \overline{BE} 與 L 不平行〕

根據 $\overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA}$ 及 $\overline{BC} \parallel L$

$$\overline{BE} = r_2 \overline{EP}$$

根據上式

$$\overline{BP} = \overline{BE} + \overline{EP} = (r_2 + 1) \overline{EP} = -(r_2 + 1) \overline{PE} \quad (1)$$

根據 $\overline{CE} = r_2 \overline{EA}$

$$\overline{EC} = r_2 \overline{AE} = r_2 (\overline{AC} + \overline{CE})$$

因此 $(r_2 + 1) \overline{EC} = r_2 \overline{AC}$

$$\overline{EC} = -\frac{r_2}{r_2 + 1} \overline{CA} \quad (2)$$

$\triangle ABE$ 三邊延長線上的點 P 、 F 、 C 滿足(1)(2)式以及 $\overline{AF} = r_3 \overline{FB}$ ，

$$\text{因為} \left[-(r_2 + 1) \right] \left[-\left(\frac{r_2}{r_2 + 1} \right) \right] r_3 = r_2 r_3 = -1，$$

根據命題一的廣義孟氏定理， P 、 F 、 C 共線，換句話說 \overline{CF} 也過 P 點。

定理一

以給定三角形 $\triangle ABC$ 的三邊為底邊、並以 θ $\left[-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right]$ 為底角作相似等

腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle ABC'$ ，則 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線共點或平行。

證明

若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，根據其對稱性，不難證明 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線共點，所以我們可以假設 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形。

如下頁圖， $\overline{AA'}$ 、 \overline{BC} 交點為 D

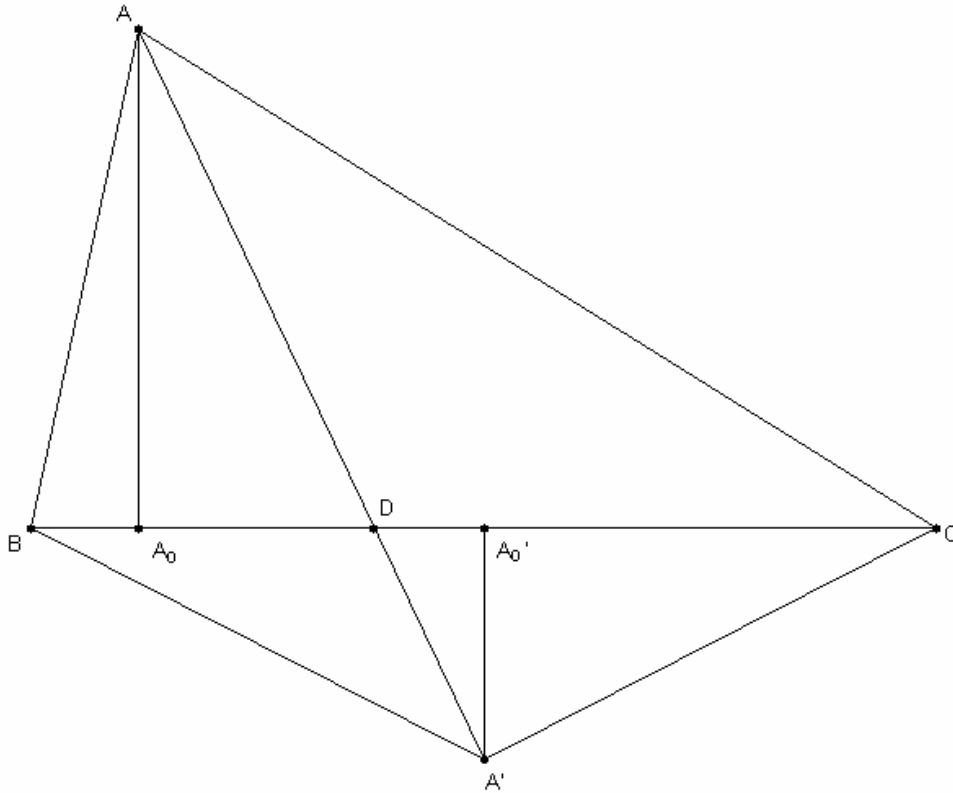
$$\angle A'CA_0' = \angle A'BA_0' = \theta$$

A 、 A' 在 \overline{BC} 的投影點分別為 A_0 、 A_0'

$$\overline{BC} = a、\overline{AC} = b、\overline{AB} = c$$

$$\overrightarrow{A_0D} = x \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\overrightarrow{DA_0'} = y \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$$



我們先處理一些特殊的情況：若 $\theta = -\angle B$ ，則 A' 落在直線 \overline{AB} 上且 C' 落在直線 \overline{BC} 上，此時 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線交於 B 點。 $\theta = -\angle A$ 或 $\theta = -\angle C$ 時，同樣 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線交於一點。所以我們可以進一步假設 $\theta \neq -\angle A$ 、 $\theta \neq -\angle B$ 、 $\theta \neq -\angle C$ ，在這些假設下

$$2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta \neq 0$$

$$2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta \neq 0$$

$$2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta \neq 0$$

其中 S_{Δ} 為 ΔABC 面積。

我們先處理 $a \tan \theta + 2c \sin B \neq 0$ ， $b \tan \theta + 2a \sin C \neq 0$ ， $c \tan \theta + 2b \sin A \neq 0$ 的情況。

解方程式

$$x + y = \frac{a}{2} - c \cos B$$

$$\frac{a}{2} x \tan \theta = yc \sin B$$

$$\text{得 } y = \frac{a \tan \theta (a - 2c \cos B)}{2a \tan \theta + 4c \sin B}$$

$$\overline{DC} = \overline{DA_0'} + \overline{A_0'C} = y \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} + \frac{a}{2} \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(y + \frac{a}{2} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left[\frac{a(2c \sin B + a \tan \theta)}{4c \sin B + 2a \tan \theta} + \frac{a \tan \theta (a - 2c \cos B)}{4c \sin B + 2a \tan \theta} \right] \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(\frac{2ac \sin B + \tan \theta (2a^2 - 2ac \cos B)}{4c \sin B + 2a \tan \theta} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(\frac{2ac \sin B + \tan \theta (2a^2 - a^2 + b^2 - c^2)}{4c \sin B + 2a \tan \theta} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(\frac{2ac \sin B + \tan \theta (a^2 + b^2 - c^2)}{4c \sin B + 2a \tan \theta} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(\frac{2ac \sin B + 2ab \cos C \tan \theta}{2a \tan \theta + 4c \sin B} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(\frac{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta}{a \tan \theta + 2c \sin B} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \quad (1)$$

$$\overline{BD} = \overline{BA_0'} + \overline{A_0'D} = \overline{BA_0'} - \overline{DA_0'} = \frac{a}{2} \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} - y \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$= \left(\frac{a}{2} - y \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \left[\frac{a(a \tan \theta + 2c \sin B)}{2a \tan \theta + 4c \sin B} - \frac{a \tan \theta (a - 2c \cos B)}{2a \tan \theta + 4c \sin B} \right] \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2ac \sin B + 2ac \cos B \tan \theta}{2a \tan \theta + 4c \sin B} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \\
&= \left(\frac{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta}{a \tan \theta + 2c \sin B} \right) \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \quad (2)
\end{aligned}$$

設 $\overline{BD} = r_1 \overline{DC}$ 、 $\overline{CE} = r_2 \overline{EA}$ 、 $\overline{AF} = r_3 \overline{FB}$ ，根據(1)、(2)式

$$r_1 = \frac{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta}{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta} \quad (3)$$

$$\text{同理 } r_2 = \frac{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta}{2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta}$$

$$r_3 = \frac{2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta}{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta}$$

$$\therefore r_1 r_2 r_3 = 1$$

所以，根據廣義西瓦定理， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 共點或平行。

我們接著處理 $a \tan \theta + 2c \sin B = 0$ 的情況。此時 $b \tan \theta + 2a \sin C \neq 0$ ，若 $b \tan \theta + 2a \sin C = 0$ ，將 $a \tan \theta + 2c \sin B = 0$ 、 $b \tan \theta + 2a \sin C = 0$ 二式分別乘以 a 、 b ，得

$$a^2 \tan \theta + 4S_{\Delta} = 0$$

$$b^2 \tan \theta + 4S_{\Delta} = 0$$

由以上二式可知 $a = b$ ，然而 ΔABC 不為等腰，因此 $b \tan \theta + 2a \sin C \neq 0$ ，同理 $c \tan \theta + 2b \sin A \neq 0$ 。

在 $b \tan \theta + 2a \sin C \neq 0$ 以及 $c \tan \theta + 2b \sin A \neq 0$ 的條件下，可仿照先前計算 r_1

$$\text{的方法，算出 } r_2 = \frac{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta}{2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta}、r_3 = \frac{2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta}{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta}。$$

$$r_2 r_3 = \frac{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta}{2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta} \cdot \frac{2S_{\Delta} + bc \cos A \tan \theta}{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta} = \frac{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta}{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta}$$

將 $a \tan \theta = -2c \sin B$ 代入上式，得

$$r_2 r_3 = \frac{2S_{\Delta} - 2bc \cos C \sin B}{2S_{\Delta} - 2c^2 \cos B \sin B} = \frac{ac \sin B - 2bc \cos C \sin B}{ac \sin B - 2c^2 \cos B \sin B}$$

$$= \frac{a - 2b \cos C}{a - 2c \cos B} = \frac{b \cos C + c \cos B - 2b \cos C}{b \cos C + c \cos B - 2c \cos B} = -1$$

由於 $r_2 r_3 = -1$ ，且 $\frac{a}{2} \tan \theta = -c \sin B$ 的幾何意義為 $\overline{AA'}$ 、 \overline{BC} 平行，根據引理

一， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線共點。同理， $b \tan \theta + 2a \sin C = 0$ 或

$c \tan \theta + 2b \sin A = 0$ 的情況， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線也共點。

定理二

$\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線平行的充要條件為

$$\tan \theta = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_{\Delta}^2}}{4S_{\Delta}}$$

證明

$$\text{令 } \alpha = bc \cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \text{、 } \beta = ac \cos B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \text{、}$$

$$\gamma = ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \text{、 } t = \tan \theta \text{、 } r_1, r_2, r_3 \text{ 為滿足 } \overline{BD} = r_1 \overline{DC} \text{、 } \overline{CE} = r_2 \overline{EA} \text{、}$$

$$\overline{AF} = r_3 \overline{FB} \text{ 的非零實數}$$

根據命題一及定理一， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線平行的充要條件為

$$r_1 r_2 + r_1 + 1 = 0$$

$$\text{以 } r_1 = \frac{2S_{\Delta} + \beta t}{2S_{\Delta} + \gamma t} \text{、 } r_2 = \frac{2S_{\Delta} + \gamma t}{2S_{\Delta} + \alpha t} \text{、 } r_3 = \frac{2S_{\Delta} + \alpha t}{2S_{\Delta} + \beta t} \text{ 代入上式}$$

$$\text{得 } \frac{2S_{\Delta} + \beta t}{2S_{\Delta} + \gamma t} \cdot \frac{2S_{\Delta} + \gamma t}{2S_{\Delta} + \alpha t} + \frac{2S_{\Delta} + \beta t}{2S_{\Delta} + \gamma t} + 1 = 0$$

$$\frac{2S_{\Delta} + \beta t}{2S_{\Delta} + \alpha t} + \frac{2S_{\Delta} + \beta t}{2S_{\Delta} + \gamma t} + 1 = 0$$

將上式通分，得

$$\frac{(2S_{\Delta} + \beta t)(2S_{\Delta} + \gamma t) + (2S_{\Delta} + \beta t)(2S_{\Delta} + \alpha t) + (2S_{\Delta} + \alpha t)(2S_{\Delta} + \gamma t)}{(2S_{\Delta} + \alpha t)(2S_{\Delta} + \gamma t)} = 0$$

再將其分子展開，得一以 t 為變數的二次方程式

$$(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)t^2 + 4S_{\Delta}(\alpha + \beta + \gamma)t + 12S_{\Delta}^2 = 0 \quad (1)$$

其中三角形面積以海龍公式展開

$$\begin{aligned}
S_{\Delta} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \quad s = \frac{a+b+c}{2} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc - a^2)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2)}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{(2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{4b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{4} \\
S_{\Delta} &= \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{4} \quad (2)
\end{aligned}$$

再將 t^2 項係數中 $\alpha\beta$ 展開

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}\right) \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}\right) \\
&= \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{4} \\
&= \frac{-a^4 - b^4 + c^4 + 2a^2b^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{同理 } \beta\gamma = \frac{a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2}{4} \quad , \quad \alpha\gamma = \frac{-a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2c^2}{4}$$

$$\text{因此 } t^2 \text{ 項係數 } \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2}{4}$$

根據(2)式，可將 $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ 以三角形面積表示

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 4S_{\Delta}^2 \quad (3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (4)$$

根據(3)(4)式，將(1)式改寫為

$$4S_{\Delta}^2 t^2 + 2S_{\Delta}(a^2 + b^2 + c^2)t + 12S_{\Delta}^2 = 0$$

由於三角形面積不為零，可將上式除以 $2S_{\Delta}$

$$\text{得 } 2S_{\Delta}t^2 + (a^2 + b^2 + c^2)t + 6S_{\Delta} = 0 \quad (5)$$

$$\text{解方程式 } t = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_{\Delta}^2}}{4S_{\Delta}}$$

將 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_{\Delta}^2$ 展開

$$\text{得 } (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_{\Delta}^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2$$

$$+ 3(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2)$$

$$= 2(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2)$$

$$= 2\left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2\right]$$

因此 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_{\Delta}^2 = 0$ 時， $\triangle ABC$ 為正三角形。此時(5)式的唯一解為

$$t = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2)}{4S_{\Delta}} = \frac{-3a^2}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)} = -\sqrt{3} \text{ , 然而 } \tan \theta = -\sqrt{3} \text{ 代表 } \triangle A'BC \text{ ,}$$

$\triangle AB'C$ 、 $\triangle ABC'$ 皆在 $\triangle ABC$ 內且底角為 60° ，故 A' 、 B' 、 C' 分別與正三角形 $\triangle ABC$ 的三頂點 A 、 B 、 C 重合， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 無法形成。

由此得到 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線平行的充要條件。

我們將用命題二研究三線交點的軌跡。

命題二

$$\text{設 } x(t) = \frac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{t^2 + c_1 t + c_0} \text{ , } y(t) = \frac{b_2 t^2 + b_1 t + b_0}{t^2 + c_1 t + c_0} \text{ , 其中}$$

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ，則集合 $\{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}, t^2 + c_1 t + c_0 \neq 0\}$ 落在一圓錐曲線〔可能退化〕上。〔當 t 趨近於無限大或負無限大時， $(x(t), y(t))$ 亦

落在此圓錐曲線上。]

證明

將 (x, y) 適當地平移，消去分子的平方項

$$\text{得 } x' = \frac{d_1 t + d_0}{t^2 + c_1 t + c_0} \quad (1)$$

$$y' = \frac{e_1 t + e_0}{t^2 + c_1 t + c_0} \quad (2)$$

再將(1)、(2)兩式相除

$$\frac{x'}{y'} = \frac{d_1 t + d_0}{e_1 t + e_0}$$

經由交叉相乘並移項可得

$$\begin{aligned} e_1 x' t + e_0 x' &= d_1 y' t + d_0 y' \\ t &= \frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \quad (3) \end{aligned}$$

將(3)代回(1)

得

$$x' = \frac{d_1 \left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right) + d_0}{\left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right)^2 + c_1 \left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right) + c_0} = \frac{\left(\frac{-d_1 e_0 x' + d_0 d_1 y' + d_0 e_1 x' - d_0 d_1 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right)}{\left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right)^2 + c_1 \left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right) + c_0}$$

$$1 = \frac{\left(\frac{-d_1 e_0 + d_0 e_1}{e_1 x' - d_1 y'} \right)}{\left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right)^2 + c_1 \left(\frac{-e_0 x' + d_0 y'}{e_1 x' - d_1 y'} \right) + c_0}$$

分子及分母同乘以 $(e_1 x' - d_1 y')^2$ ，得

$$1 = \frac{(-d_1 e_0 + d_0 e_1)(e_1 x' - d_1 y')}{(-e_0 x' + d_0 y')^2 + c_1 (-e_0 x' + d_0 y')(e_1 x' - d_1 y') + c_0 (e_1 x' - d_1 y')^2}$$

最後，我們發現 (x', y') 落在以下的圓錐曲線上

$$(-d_1 e_0 + d_0 e_1)(e_1 x' - d_1 y') = (-e_0 x' + d_0 y')^2 + c_1 (-e_0 x' + d_0 y')(e_1 x' - d_1 y') + c_0 (e_1 x' - d_1 y')^2$$

由於 (x', y') 為 (x, y) 的平移，故 (x, y) 落在一圓錐曲線上。

引理二

A 、 B 、 C 、 D 為圓錐曲線上的點，且 D 落在 $\triangle ABC$ 內，則此圓錐曲線為雙曲線或退化為兩相交直線。

證明

橢圓、拋物線以及其它退化的圓錐曲線無此性質。

定理三

若 $\triangle ABC$ 不為等腰，隨 θ 變動， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 三線交點 P_θ 在平面上的軌跡為一等軸雙曲線。

證明

設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，則 $\overline{BA} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$ ，

我們可以假設 A 、 B 、 C 依逆時針方向置於平面上。

將 \overline{BA} 旋轉 θ 再伸縮 $\frac{\sec \theta}{2}$

$$\begin{aligned} \text{得 } \overline{BC'} &= \frac{\sec \theta}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\tan \theta}{2} \\ \frac{\tan \theta}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{\tan \theta}{2}(y_1 - y_2) \\ \frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \frac{\tan \theta}{2}(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令 $t = \tan \theta$

$$\begin{aligned} \overline{BC'} &= \left(\frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{t}{2}(y_1 - y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \frac{t}{2}(x_1 - x_2) \right) \\ C' &\left(x_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{t}{2}(y_1 - y_2), y_2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \frac{t}{2}(x_1 - x_2) \right) \\ C' &\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{t}{2}(y_1 - y_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \frac{t}{2}(x_1 - x_2) \right) \quad (1) \end{aligned}$$

根據(1)及 $C(x_3, y_3)$ 可得知 $\overline{CC'}$ 斜率為

$$\frac{\frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 2y_3) + \frac{t}{2}(x_1 - x_2)}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_3) - \frac{t}{2}(y_1 - y_2)} = \frac{(y_1 + y_2 - 2y_3) + t(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2 - 2x_3) - t(y_1 - y_2)}$$

因此 $\overline{CC'}$ 的方程式為

$$\frac{(y_1 + y_2 - 2y_3) + t(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2 - 2x_3) - t(y_1 - y_2)} = \frac{y - y_3}{x - x_3}$$

將上式等號左右交叉相乘，改寫為

$$f_{11}x + f_{12}y = g_1 \quad (2)$$

同理 $\overline{BB'}$ 的方程式可寫成

$$f_{21}x + f_{22}y = g_2 \quad (3)$$

其中， f_{11} 、 f_{12} 、 f_{21} 、 f_{22} 、 g_1 、 g_2 為 t 的一次〔可能退化為常數或零多項式〕多項式

因此 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 的交點 P_θ 座標為(2)、(3)方程組的解

$$P_\theta \left(\frac{\begin{vmatrix} g_1 & f_{12} \\ g_2 & f_{22} \end{vmatrix}}{\det(f_{ij})}, \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & g_1 \\ f_{12} & g_2 \end{vmatrix}}{\det(f_{ij})} \right), \text{ 其中 } \begin{vmatrix} g_1 & f_{12} \\ g_2 & f_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_{11} & g_1 \\ f_{12} & g_2 \end{vmatrix}, \det(f_{ij}) \text{ 為 } t \text{ 的二次多項}$$

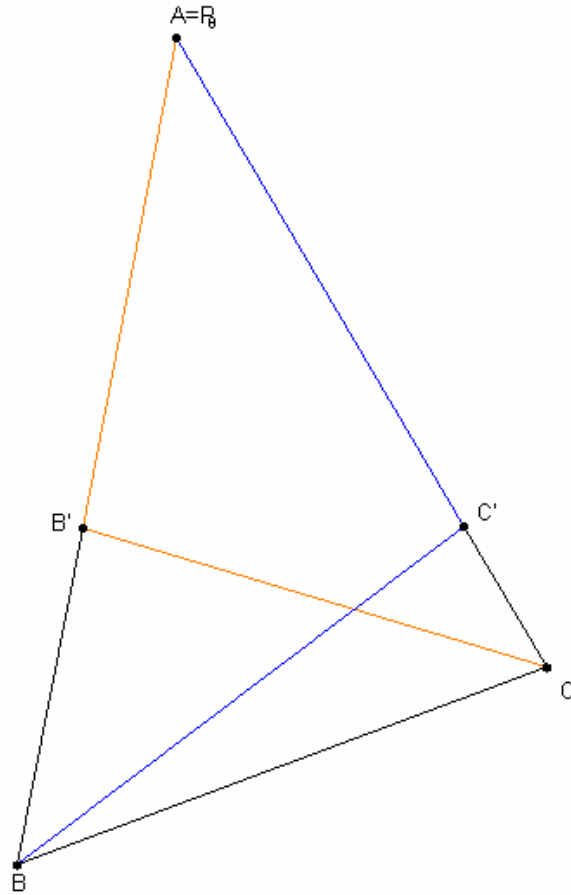
式，而且 $\det(f_{ij})$ 在 t^2 的係數 $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} \neq 0$ ，所以 P_θ 可寫成參數式

$$x = \frac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{t^2 + c_1 t + c_0}, \quad y = \frac{b_2 t^2 + b_1 t + b_0}{t^2 + c_1 t + c_0}$$

根據命題二，隨 θ 變動， P_θ 在平面上形成一圓錐曲線。

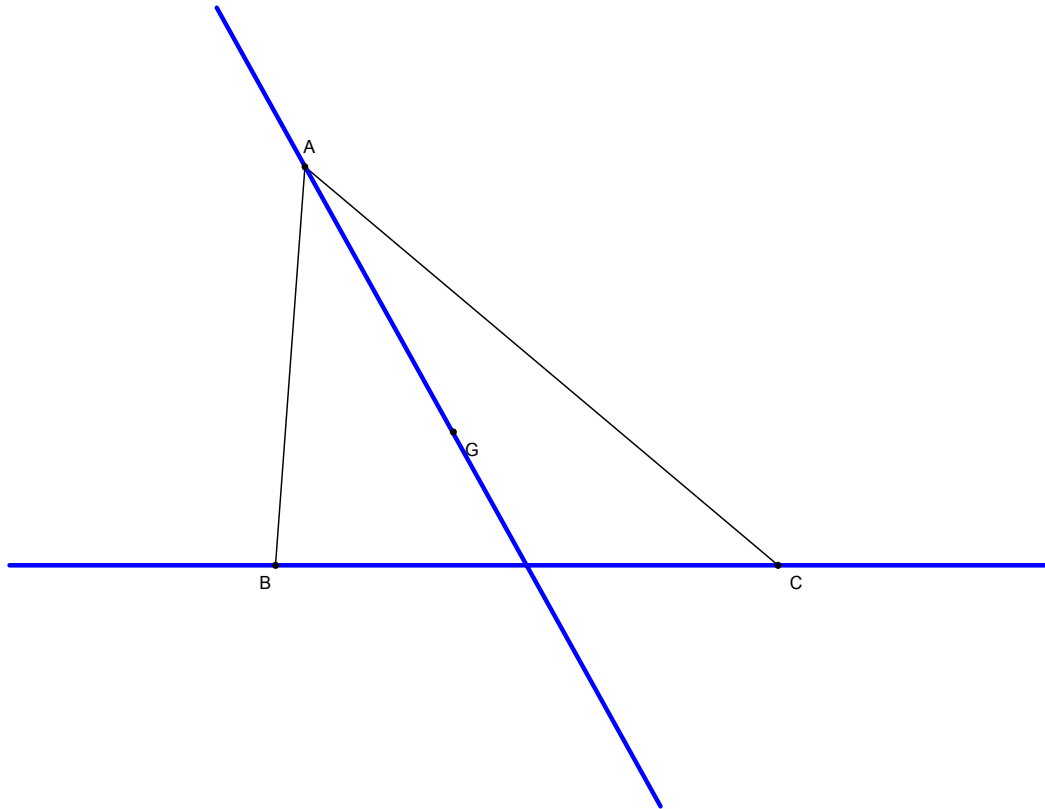
要判別圓錐曲線的種類，我們先證明 A 、 B 、 C 都落在此圓錐曲線上。當

$\theta = -\angle A$ 時 B' 、 C' 分別落在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，如下頁圖。

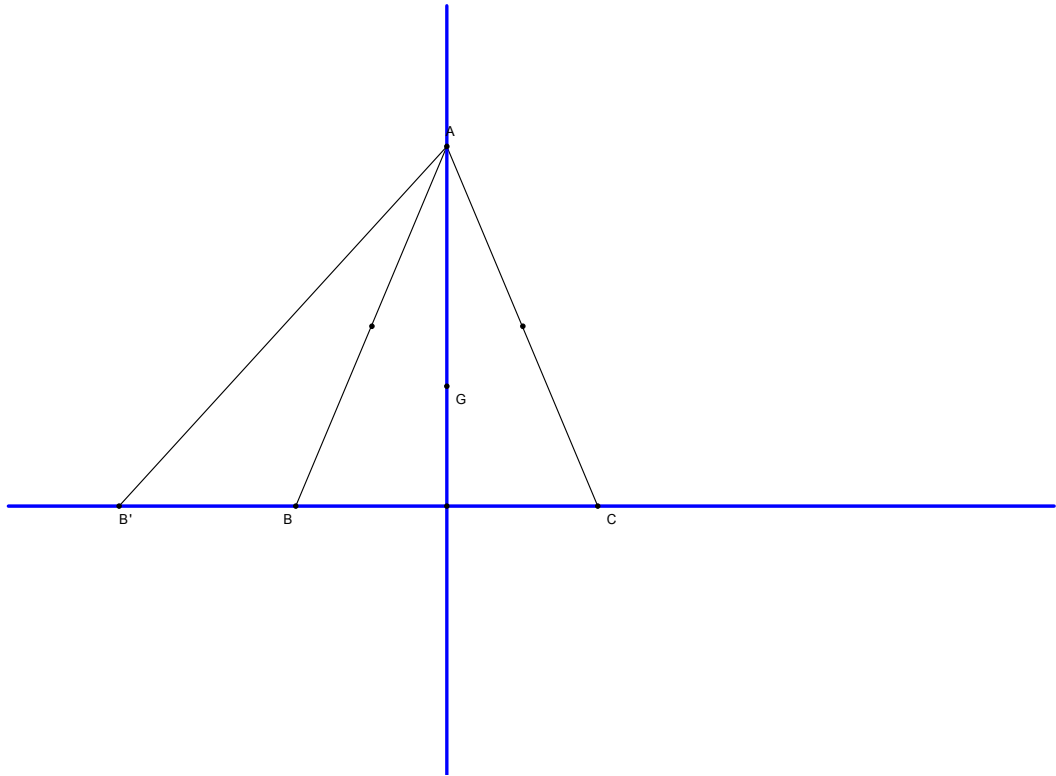


此時 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 的交點 P_θ 與 A 重合，因此 P_θ 的軌跡通過 A 。同理此軌跡亦通過 B 、 C 。當 $\theta = 0$ 時， P_θ 為三角形的重心。由於 P_θ 的軌跡通過三角形的三頂點及其重心，且重心必落在三角形內，所以根據引理二， P_θ 的軌跡可能為雙曲線或兩相交直線，但事實上，我們可以藉由反證法排除此軌跡為兩相交直線的可能性。

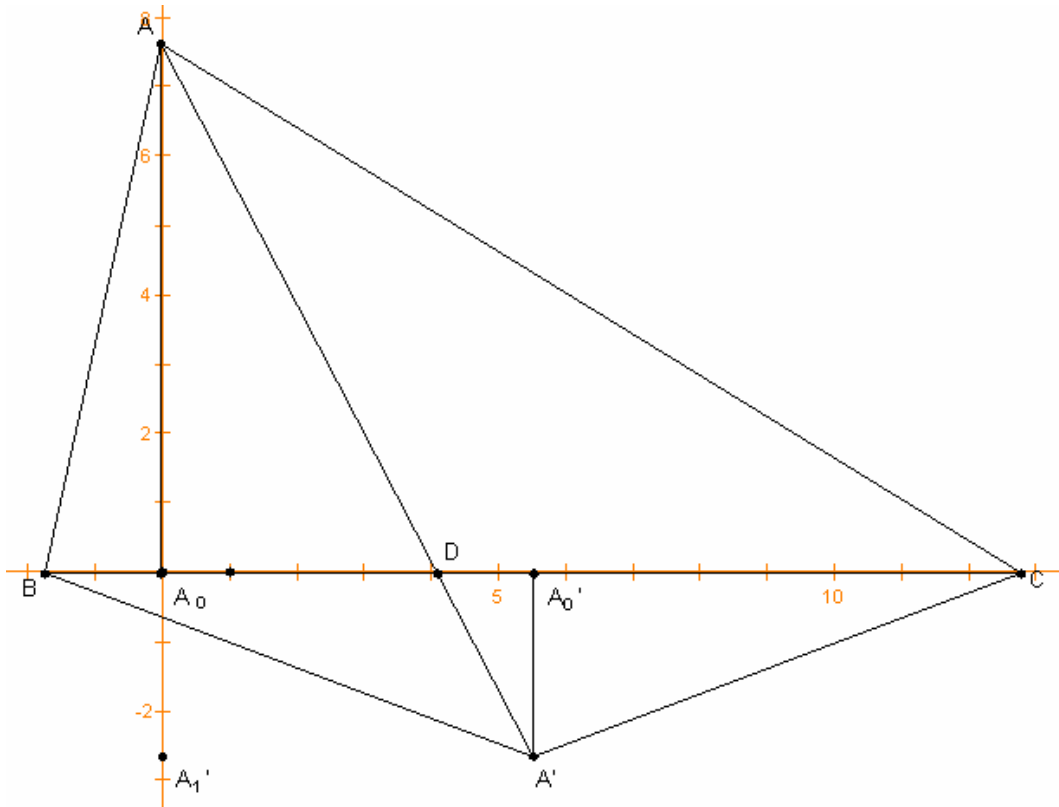
假設 P_θ 的軌跡為兩相交直線，因為 A 、 B 、 C 以及重心 G 任三點皆不共線，我們不妨假設 P_θ 的軌跡由 \overline{AG} 、 \overline{BC} 所構成〔如下頁圖〕。



令 P_ϕ 為落在 \overline{BC} 上的點〔 P_ϕ 、 B 、 C 共線(4)〕，由於 P_ϕ 為 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 的交點，我們可得知 P_ϕ 落在 $\overline{BB'}$ 上〔 P_ϕ 、 B 、 B' 共線(5)〕。由(4)、(5)可得知 B' 落在 \overline{BC} 上〔如下頁圖〕，故 $\phi = -\angle C$ ，同理 $\phi = -\angle B$ 。然而， $\angle B = \angle C$ 與 $\triangle ABC$ 不為等腰的假設矛盾，所以 P_ϕ 的軌跡不會退化。



接著證明，隨 θ 變動 P_θ 形成雙曲線為等軸雙曲線。



A 、 A' 在 \overline{BC} 的投影點記為 A_0 、 A_0' ，將 $\triangle ABC$ 以 A_0 為原點、 $\overline{A_0C}$ 為 x 軸正

向、 $\overline{A_0A}$ 爲 y 軸正向置於座標平面上，並令 A_1' 爲 A' 在 y 軸上的投影點、

$$\overline{A_0A_0'} = \Delta x \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \quad , \quad \overline{A_1'A} = \Delta y \frac{\overline{A_0A}}{|\overline{A_0A}|} \quad ,$$

$$\text{其中 } \Delta x = \frac{a}{2} - c \cos B \quad , \quad \Delta y = \frac{a}{2} \tan \theta + c \sin B$$

$$\text{因此 } \overline{AA'} \text{ 的斜率爲 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \tan \theta + 2c \sin B}{a - 2c \cos B} \quad (6)$$

設當 $\tan \theta = t_1$ 或 t_2 時， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 平行，而 $\tan \theta = t_1$ 時 $\overline{AA'}$ 的斜率爲 m_1 、

$\tan \theta = t_2$ 時 $\overline{AA'}$ 的斜率爲 m_2 。

根據(6)式

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= \left(\frac{at_1 + 2c \sin B}{a - 2c \cos B} \right) \left(\frac{at_2 + 2c \sin B}{a - 2c \cos B} \right) \\ &= \frac{a^2 t_1 t_2 + 2ac \sin B (t_1 + t_2) + 4c^2 \sin^2 B}{(a - 2c \cos B)^2} \end{aligned}$$

由於 t_1 、 t_2 爲 $2S_{\Delta} t^2 + (a^2 + b^2 + c^2)t + 6S_{\Delta} = 0$ 〔見第 15 頁(5)式〕的兩解

$$\text{所以 } t_1 t_2 = 3 \quad , \quad t_1 + t_2 = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2)}{2S_{\Delta}}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a^2 t_1 t_2 + 2ac \sin B (t_1 + t_2) + 4c^2 \sin^2 B}{(a - 2c \cos B)^2}$$

$$= \frac{3a^2 - 2ac \sin B \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S_{\Delta}} \right) + 4c^2 \sin^2 B}{(a - 2c \cos B)^2}$$

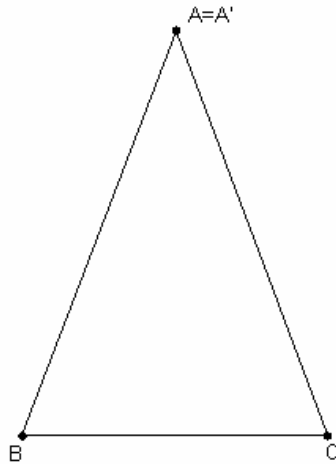
$$= \frac{3a^2 - 4S_{\Delta} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S_{\Delta}} \right) + 4c^2 (1 - \cos^2 B)}{a^2 - 4ac \cos B + 4c^2 \cos^2 B}$$

$$= \frac{3a^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4c^2 (1 - \cos^2 B)}{a^2 - 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 + 4c^2 \cos^2 B}$$

$$= \frac{a^2 - 2b^2 + 2c^2 - 4c^2 \cos^2 B}{-a^2 + 2b^2 - 2c^2 + 4c^2 \cos^2 B} = -1$$

當 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 平行，這三條平行線和無窮遠線的交點是雙曲線的一個無窮遠點，因為雙曲線的無窮遠點也是雙曲線的漸近線和無窮遠線的交點，所以有一條漸近線和這三線平行。而當 $\tan \theta = t_1$ 或 t_2 時我們得到兩組平行線，此兩組平行線的方向互相垂直，因此雙曲線的兩條漸近線互相垂直，即雙曲線為等軸。

當 ΔABC 為等腰〔不妨假設 $\angle B = \angle C$ 〕，且 $\theta = -\angle B = -\angle C$ 時， A' 同時落在 \overline{AB} 及 \overline{AC} 上，換句話說 A' 與 A 重合〔如下圖〕，因此 A' 與 A 無法形成直線。此時 P_θ 的軌跡為等腰 ΔABC 的對稱軸〔 ΔABC 為正三角形時， P_θ 恆為正三角形中心點〕。



最後我們利用 barycentric coordinate 探討 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 與 ΔABC 的外心何時共線。

相較於笛卡兒座標係使用一組垂直線— x 軸及 y 軸描述平面上的點，barycentric coordinate 則使用三角形的三頂點 A 、 B 、 C 描述平面上的點。在 bary-

centric coordinate 中 $P(t_1, t_2, t_3)$ 代表滿足 $\overline{OP} = \frac{t_1 \overline{OA} + t_2 \overline{OB} + t_3 \overline{OC}}{t_1 + t_2 + t_3}$ 的點

〔 $t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$ 〕。當 $k \neq 0$ 時， (t_1, t_2, t_3) 與 (kt_1, kt_2, kt_3) 在 barycentric coordinate

中代表同一點，以下我們稱 barycentric coordinate 為齊次座標。

此外， $P(t_1, t_2, t_3)$ 亦可解釋為滿足 $S_{\Delta BCP} : S_{\Delta ACP} : S_{\Delta ABP} = t_1 : t_2 : t_3$ 的點〔參見 §13.7[1]〕，其中 $S_{\Delta BCP}$ 、 $S_{\Delta ACP}$ 、 $S_{\Delta ABP}$ 皆為有向三角形的面積。

在探討 P_{θ} 、 P_{θ} 與 ΔABC 外心共線的條件之前，我們得先出求 P_{θ} 以及外心的齊次座標。

引理三 P_{θ} 的齊次座標為

$$\left(\frac{1}{4S_{\Delta} + (-a^2 + b^2 + c^2) \tan \theta}, \frac{1}{4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta}, \frac{1}{4S_{\Delta} + (a^2 + b^2 - c^2) \tan \theta} \right)$$

證明

$$\text{由於 } S_{\Delta ABP_{\theta}} : S_{\Delta ACP_{\theta}} = \overline{BD} : \overline{DC} = r_1 : 1 = \frac{2S_{\Delta} + ac \cos B \tan \theta}{2S_{\Delta} + ab \cos C \tan \theta} : 1 \quad \text{〔參見第 12 頁(3)式〕,}$$

$$\text{因此 } [4S_{\Delta} + (a^2 + b^2 - c^2) \tan \theta] S_{\Delta ABP_{\theta}} = [4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta] S_{\Delta ACP_{\theta}},$$

$$\text{同理 } [4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta] S_{\Delta ACP_{\theta}} = [4S_{\Delta} + (-a^2 + b^2 + c^2) \tan \theta] S_{\Delta BCP_{\theta}},$$

$$\text{由此可知 } S_{\Delta BCP_{\theta}} : S_{\Delta ACP_{\theta}} : S_{\Delta ABP_{\theta}}$$

$$= \frac{1}{4S_{\Delta} + (-a^2 + b^2 + c^2) \tan \theta} : \frac{1}{4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta} : \frac{1}{4S_{\Delta} + (a^2 + b^2 - c^2) \tan \theta}$$

故 P_{θ} 的座標為

$$\left(\frac{1}{4S_{\Delta} + (-a^2 + b^2 + c^2) \tan \theta}, \frac{1}{4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta}, \frac{1}{4S_{\Delta} + (a^2 + b^2 - c^2) \tan \theta} \right)$$

引理四 ΔABC 外心的齊次座標為

$$O(a^2(-a^2 + b^2 + c^2), b^2(a^2 - b^2 + c^2), c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

證明

設 ΔABC 的外接圓半徑為 R ，則

$$\begin{aligned}
S_{\Delta BCO} &= \frac{1}{2}a \left(R \cos \frac{1}{2} \angle BOC \right) = \frac{1}{2}a (R \cos A) = \frac{1}{2}aR \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \left(\frac{R}{4abc} \right) a^2 (-a^2 + b^2 + c^2), \text{ 同理 } S_{\Delta ACO} = \left(\frac{R}{4abc} \right) b^2 (a^2 - b^2 + c^2), \\
S_{\Delta ABO} &= \left(\frac{R}{4abc} \right) c^2 (a^2 + b^2 - c^2). \text{ 由於 barycentric coordinate 爲齊次, 將 } S_{\Delta BCO}, \\
S_{\Delta ACO}, S_{\Delta ABO} \text{ 同除以 } \frac{R}{4abc}, \text{ 得 } \Delta ABC \text{ 的外心座標爲} \\
O(a^2(-a^2 + b^2 + c^2), b^2(a^2 - b^2 + c^2), c^2(a^2 + b^2 - c^2)).
\end{aligned}$$

三點共線的條件很容易用齊次座標來表達，以下引理爲利用行列式判別三點共線的方法〔證明參見§13.7[1]〕。

$$\boxed{\text{引理五}} (s_1, s_2, s_3), (t_1, t_2, t_3), (u_1, u_2, u_3) \text{ 共線的充要條件爲 } \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\text{定理四}} \Delta ABC \text{ 外心與相異的 } P_{\theta_1}, P_{\theta_2} \text{ 共線的充要條件爲 } \theta_1 + \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$$

證明

由於 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = 1$ 與 $\theta_1 + \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ 爲等價，我們先假設 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = 1$ 並

證明此時 $P_{\theta_1}, P_{\theta_2}$ 與外心 O 共線。若 $P_{\theta_1}, P_{\theta_2}, O$ 三點座標分別爲 $(s_1, s_2, s_3),$

$(t_1, t_2, t_3), (u_1, u_2, u_3)$ ，根據引理四，我們已知 $P_{\theta_1}, P_{\theta_2}, O$ 共線的充要條

$$\text{件爲 } \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ 所以, 只要能找到一組 } \alpha, \beta \text{ 使得}$$

$\alpha s_i + \beta t_i = u_i \quad \forall 1 \leq i \leq 3$ ，就可以證明此三點共線。由於 barycentric coordinate 爲齊次，因此我們可將 P_{θ_1} 座標的各項同乘以

$$\left[4S_{\Delta} + (-a^2 + b^2 + c^2) \tan \theta_1 \right] \left[4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta_1 \right] \left[4S_{\Delta} + (a^2 + b^2 - c^2) \tan \theta_1 \right]$$

得其第一項爲

$$\begin{aligned}
s_1 &= \left[4S_{\Delta} + (a^2 - b^2 + c^2) \tan \theta_1 \right] \left[4S_{\Delta} + (a^2 + b^2 - c^2) \tan \theta_1 \right] \\
&= (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) \tan^2 \theta_1 + 8a^2 S_{\Delta} \tan \theta_1 + 16S_{\Delta}^2 \\
&= (a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2) \tan^2 \theta_1 + 8a^2 S_{\Delta} \tan \theta_1 + (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2)
\end{aligned}$$

以同樣方法可得 P_{θ_2} 座標的第一項為

$$t_1 = (a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2) \tan^2 \theta_2 + 8a^2 S_{\Delta} \tan \theta_2 + (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2)$$

再將 s_1 與 t_1 適當地線性合成

$$\begin{aligned}
\tan \theta_2 \cdot s_1 - \tan \theta_1 \cdot t_1 &= \left[(a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2) \tan \theta_1 + 8S_{\Delta} a^2 \right. \\
&\quad \left. + (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2) \tan \theta_2 \right] - \left[(a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2) \tan \theta_2 + 8S_{\Delta} a^2 \right. \\
&\quad \left. + (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 c^2) \tan \theta_1 \right] = 2(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)(a^4 - a^2 b^2 - a^2 c^2) \\
&= 2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) a^2 (-a^2 + b^2 + c^2) = 2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) u_1
\end{aligned}$$

我們發現 $\frac{\tan \theta_2}{2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)} \cdot s_1 - \frac{\tan \theta_1}{2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)} \cdot t_1 = u_1$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{\tan \theta_2}{2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)} \cdot s_2 - \frac{\tan \theta_1}{2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)} \cdot t_2 &= u_2 \\
\frac{\tan \theta_2}{2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)} \cdot s_3 - \frac{\tan \theta_1}{2(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)} \cdot t_3 &= u_3
\end{aligned}$$

因此 $\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$, P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 、 O 共線。

接著，我們假設 O 與相異的 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 共線並證明 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = 1$ 。令 θ_2' 滿

足 $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2' = 1$ 且 $\theta_2' \neq \theta_1$ ，由先前證明的結果可知， P_{θ_1} 、 $P_{\theta_2'}$ 、 O 共線；

又根據假設 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 、 O 共線，故 $\overline{OP_{\theta_1}}$ 通過 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 、 $P_{\theta_2'}$ 。因為 $\theta_2' \neq \theta_1$ 、

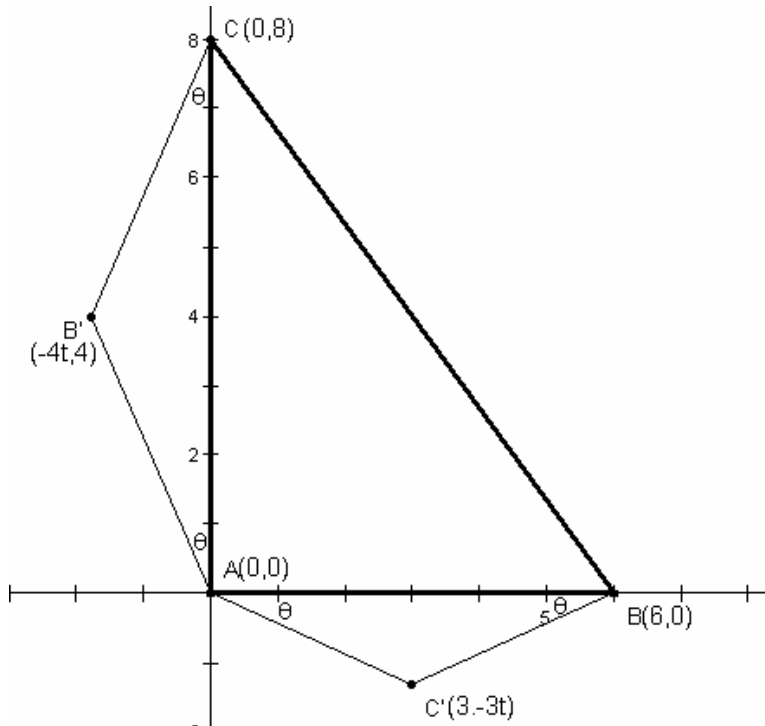
P_{θ_1} 與 P_{θ_2} 為相異兩點、且 $\overline{OP_{\theta_1}}$ 最多能交 P_{θ} 的軌跡〔雙曲線〕於兩點，故 P_{θ_2}

與 P_{θ_2} 重合， $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2' = 1$ ，因此 $\theta_1 + \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ 。

最後，我們藉由以下特例來檢視研究結果：

在此特例，設 $\triangle ABC$ 的頂點為 $A(0,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(0,8)$ ，我們可得 B' 、 C'

的座標分別為 $B'(-4t, 4)$ 、 $C'(3, -3t)$ 〔如下圖〕，其中 $t = \tan \theta$ 。



首先，我們計算出 $\overline{BB'}$ 與 $\overline{CC'}$ 的方程式。

$$\overline{BB'} : \frac{0-4}{6-(-4t)} = \frac{y-0}{x-6} \Rightarrow 2x + (2t+3)y = 12$$

$$\overline{CC'} : \frac{8-(-3t)}{0-3} = \frac{y-8}{x-0} \Rightarrow (3t+8)x + 3y = 24$$

解聯立方程式，得 P_{θ} 的軌跡參數式為

$$x = \frac{12(4t+3)}{6t^2 + 25t + 18} \quad (1)$$

$$y = \frac{12(3t+4)}{6t^2 + 25t + 18} \quad (2)$$

將 x 、 y 相除並將得到的等式交叉相乘，我們得以用 x 、 y 來表示 t 。

$$\frac{x}{y} = \frac{4t+3}{3t+4}$$

$$\Rightarrow 4yt + 3y = 3xt + 4x$$

$$\Rightarrow t = \frac{-4x+3y}{3x-4y} \quad (3)$$

將(3)代回(1)〔亦可代回(2)〕

$$\begin{aligned} x &= \frac{12 \left[4 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right) + 3 \right]}{6 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right)^2 + 25 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right) + 18} = \frac{12 \left(\frac{-16x+12y+9x-12y}{3x-4y} \right)}{6 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right)^2 + 25 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right) + 18} \\ &= \frac{12 \left(\frac{-7x}{3x-4y} \right)}{6 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right)^2 + 25 \left(\frac{-4x+3y}{3x-4y} \right) + 18} \end{aligned}$$

將等式除以 x 並將等號右側之分子與分母同乘以 $(3x-4y)^2$

$$1 = \frac{12[-7(3x-4y)]}{6(-4x+3y)^2 + 25(-4x+3y)(3x-4y) + 18(3x-4y)^2}$$

經化簡可得

$$6x^2 - 7xy - 6y^2 - 36x + 48y = 0 \quad (4)$$

此圓錐曲線即為 P_θ 的軌跡。由於判別式 $B^2 - 4AC$

$= (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-6) = 193 > 0$ ，且 $A + C = 6 + (-6) = 0$ ，故此圓錐曲線為等軸雙曲線，符合定理三的結果。

接著，我們分別將 $\triangle ABC$ 的頂點 $A(0,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(0,8)$ 、重心 $G\left(2, \frac{8}{3}\right)$ 及

垂心〔與 $A(0,0)$ 重合〕的座標代入(4)式，以檢驗是否落在 P_θ 的軌跡上。

$$6 \times 0^2 - 7 \times 0 \times 0 - 6 \times 0^2 - 36 \times 0 + 48 \times 0 = 0$$

$$6 \times 6^2 - 7 \times 6 \times 0 - 6 \times 0^2 - 36 \times 6 + 48 \times 0 = 0$$

$$6 \times 0^2 - 7 \times 0 \times 8 - 6 \times 8^2 - 36 \times 0 + 48 \times 8 = 0$$

$$6 \times 2^2 - 7 \times 2 \times \frac{8}{3} - 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 36 \times 2 + 48 \times \frac{8}{3} = 0$$

我們發現 $\triangle ABC$ 的頂點、重心及垂心皆落在 P_θ 的軌跡上。

最後，我們從 P_θ 軌跡的參數式，求 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 平行的條件。 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、

$\overline{CC'}$ 平行即 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 交於無窮遠點，此時(1)、(2)兩式的共同分母

$6t^2 + 25t + 18$ 為零，故 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 平行的條件為 $t = \frac{-25 \pm \sqrt{193}}{12}$ 。若根

據定理二， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 平行的條件為

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 48S_\Delta^2}}{4S_\Delta} \\ &= \frac{-(10^2 + 8^2 + 6^2) \pm \sqrt{(10^2 + 8^2 + 6^2)^2 - 48(24)^2}}{96} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 48(24)^2}}{96} \\ &= \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 48(3)^2}}{12} = \frac{-25 \pm \sqrt{193}}{12}, \text{ 兩者數值吻合。} \end{aligned}$$

柒、 結論

三角形的三頂點、重心和垂心五個點決定一條圓錐曲線，我們證明除了退化情形，這條圓錐曲線為等軸雙曲線，並且闡述這條雙曲線相關於給定三角形的幾何意義。這條雙曲線可表示成一些等腰三角形的參數式，上面的點推廣了三角形的重心和垂心。我們還具體計算出這條雙曲線上無窮遠點對應的參數。研究過程中，有時需要處理無窮遠點的特殊情況，而投影幾何是適於描述這些結果的架構。

從一些特例，我們觀察到 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 與外心共線的條件為 $\theta_1 + \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ 。

在地區比賽之後，老師建議用 barycentric coordinate，我們才證明出這三點共線的判別條件，並且知道 barycentric coordinate 是處理三角形幾何問題的其中一個適當工具。

由老師提供的文獻，我們進一步了解三角形幾何雖然歷史悠久，卻仍有新的發現，也可以用其它數學工具〔如 cross ratio〕處理。

我們參展的作品，由電腦作圖看到的現象出發，在證明中我們引進了預期之外的數學觀念〔如投影平面〕，最後在文獻中找到古典處理的方法。雖然對高中生而言，找到未曾被發現過的新結果是相當地困難，但我們覺得尋找問題以及解決問題的過程是最大的收穫。

捌、 參考資料

1. H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*, 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, 1969.

評語

040407 第六個心

1. 本作品所研究的幾何物件具有視覺意義。然而，應用參數方程式、代數運算等，只能夠鞏固命題之真偽，並不能夠帶來視覺理解。整件作品應該朝向幾何作圖的方向下功夫。
2. 參考資料只包含 Coxeter 一書。在搜查資料如此快速的今天，可以不必閉門造車，應該多多上網查詢別人是否進行過類似的研究。
3. 本問題可作進一步的探究。