

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040117

「流」得住嗎？—利用二次式係數探討流體阻力

學校名稱： 國立新竹女子高級中學

作者： 高二 劉素瑜 高二 蕭農瑤	指導老師： 楊樹基
-------------------------	--------------

關鍵詞：二次式係數

壹、摘要

利用 Data Studio 軟體紀錄物體在水中運動的速度、加速度，以驗證用二次式 $C_0 + C_1v + C_2v^2$ 來模擬水作用力的可行性。

貳、研究動機

不論是課程中老師的解題或是物理課中所援引的例子，總是忽略物體在流體中運動造成的影響，但在真實的生活中，很顯然地靜止在水中(例如泡水)與在水中移動(例如游泳)，是全然的不同感受！在運動學中，我們知道不論哪一種拋體運動，都能用時間的二次式來描述，我們不禁想到，是否流體施於物體的力，也有可能以簡單的二次式來表示呢？

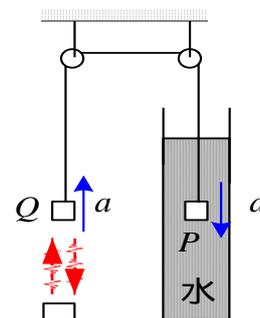
參、研究目的

一. 假定物體在水中時，水的作用力能以速度的二次式 $C_0 + C_1v + C_2v^2$ 表示，則對下圖的裝置而言，在水中下落的物體 P，其加速度由運動定律可得

$$a = \frac{(M - m)g - (C_0 + C_1v + C_2v^2)}{(M + m)} \quad (1)$$

二. 由實驗所得的速度與加速度數據，分析(1)式中的係數 C_0 、 C_1 、 C_2 。

三. 檢驗 C_0 、 C_1 、 C_2 的合理性，以驗證二次式的可行性。



移動感應器
f-1

肆、研究設備器材

310cm 尼龍線	一條
別針	一個
水桶 (長 21cm 寬 11cm 高 146cm)	一個
滑輪組裝置	一組
電腦	一台
Data Studio 軟體	一套
PASCO 750 Interface 訊息產生器	一台

Motion Sensor 移動感應器	一台
Microsoft Excel 2003	一套
<p>1.大砝碼 P (質量 200.65g、體積 25ml、橫截面積 $0.0002326 \pi \text{ m}^2$、側面積 $0.0008998 \pi \text{ m}^2$)</p> <p>2.中砝碼 P (質量 50.86g、體積 7.4ml、橫截面積 $0.0000640 \pi \text{ m}^2$、側面積 $0.0004776 \pi \text{ m}^2$)</p> <p>3.小錐 P (質量 53.58g、體積 6.2ml、橫截面積 $0.0000624 \pi \text{ m}^2$、側面積 $0.0001623 \pi \text{ m}^2$)</p> <p>4.細長圓柱型砝碼 P (質量 : 84.53g、體積 11ml、橫截面積 $0.0000181 \pi \text{ m}^2$、側面積 $0.001279 \pi \text{ m}^2$)</p> <p>5.圓球 P (質量 231.67g、體積 30ml、橫截面積 $0.0003629 \pi \text{ m}^2$、側面積 $0.0014516 \pi \text{ m}^2$)</p>	各一個
<p>1. 大砝碼 P 對應吊碼 Q (質量 108g)</p> <p>2.中砝碼 P 對應吊碼 Q (質量 31.068g)</p> <p>3.小錐 P 對應吊碼 Q (質量 31.068g)</p> <p>4.細長圓柱棒 P 對應吊碼 Q (質量 60g)</p> <p>5.圓球 P 對應吊碼 Q (質量 151g).</p>	各一個

伍、研究過程及方法

(一)理論：

令重物 P 物在水中時，水施於重物的作用力為 $C_0 + C_1 v + C_2 v^2$ ，參考圖 $f-1$ ，令重物 P 質量為 M ，重物 Q 質量為 m ，忽略滑輪阻力與尼龍線質量時，令細線張力為 T ，且重物 P(或 Q)的加速度為 a ，則由牛頓第二運動定律知

$$T - mg = ma \quad (2)$$

$$Mg - (C_0 + C_1 v + C_2 v^2 + T) = Ma \quad (3)$$

由(2)(3)式得

$$a = \frac{(M - m)g - (C_0 + C_1v + C_2v^2)}{(M + m)} \quad (4)$$

將實驗所得的速度與加速度數據，取適當範圍以 $a = Av^2 + Bv + C$ ，並利用二次回歸曲線得出對應的係 A 、 B 、 C 。

將 $a = Av^2 + Bv + C$ 與(4)式比較，得

$$A = -\frac{C_2}{M + m} \quad (5)$$

$$B = -\frac{C_1}{M + m} \quad (6)$$

$$C = \frac{(M - m)g - C_0}{M + m} \quad (7)$$

或

$$C_2 = -(M + m)A \quad (8)$$

$$C_1 = -(M + m)B \quad (9)$$

$$C_0 = -(M + m)C + (M - m)g \quad (10)$$

本實驗即利用(8)(9)(10)式找出 C_0 、 C_1 、 C_2 。

(二)實驗步驟：

1. 取重物 P 為大砝碼 P (質量 200.65g)，對應吊碼 Q 質量為 100.5g，按照圖 $f-2$ 安裝儀器並完成電路接線。

2. 開啟 Data Studio，建立位置-時間表單、速度時間表單與加速度-時間表單，並將採樣率訂為 10 赫。

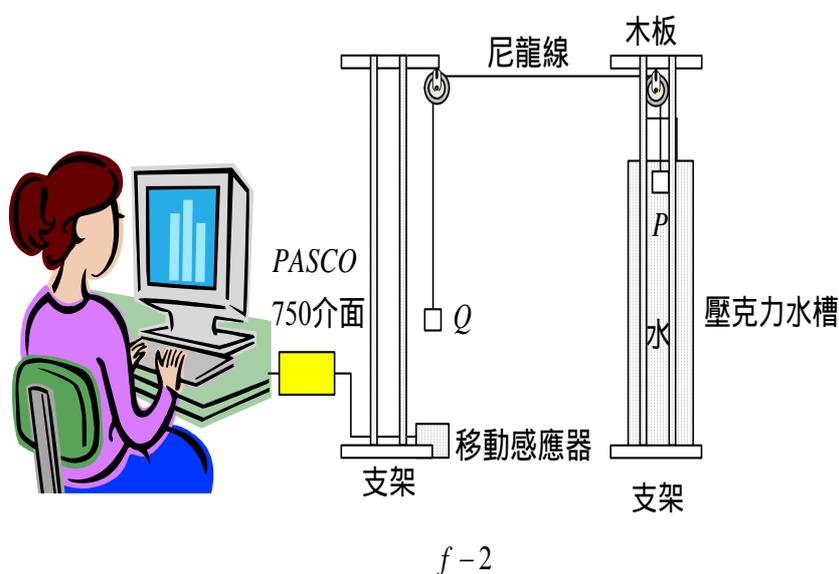
3. 連接移動感應器，調整超音波發射角度與位置。

4. 啟動軟體開始採樣 1 秒後，將重物由靜止中釋放，記錄吊碼 Q 升高時的 $v-t$ 圖、 $a-t$ 圖。

5. 重複以上步驟多次。

6. 將 $v-t$ 圖、 $a-t$ 圖的數據輸出，篩選適當範圍後，利用 *microsoft excel*，畫出 $a-v$ 圖，並用內

建之二次適配工具，求出二次曲線的三個係數 A 、 B 、 C 。



7.將步驟 6 所得的三個係數 A、B、C 加總平均，得平均 A、B、C，再代入(8)、(9)、(10)式，解出 C_0 、 C_1 與 C_2 。

8.將重物 P 改為中砝碼、小錐、細長型圓柱砝碼、圓球與各別對應吊碼，重複步驟 2~7。

陸、研究結果

(1)

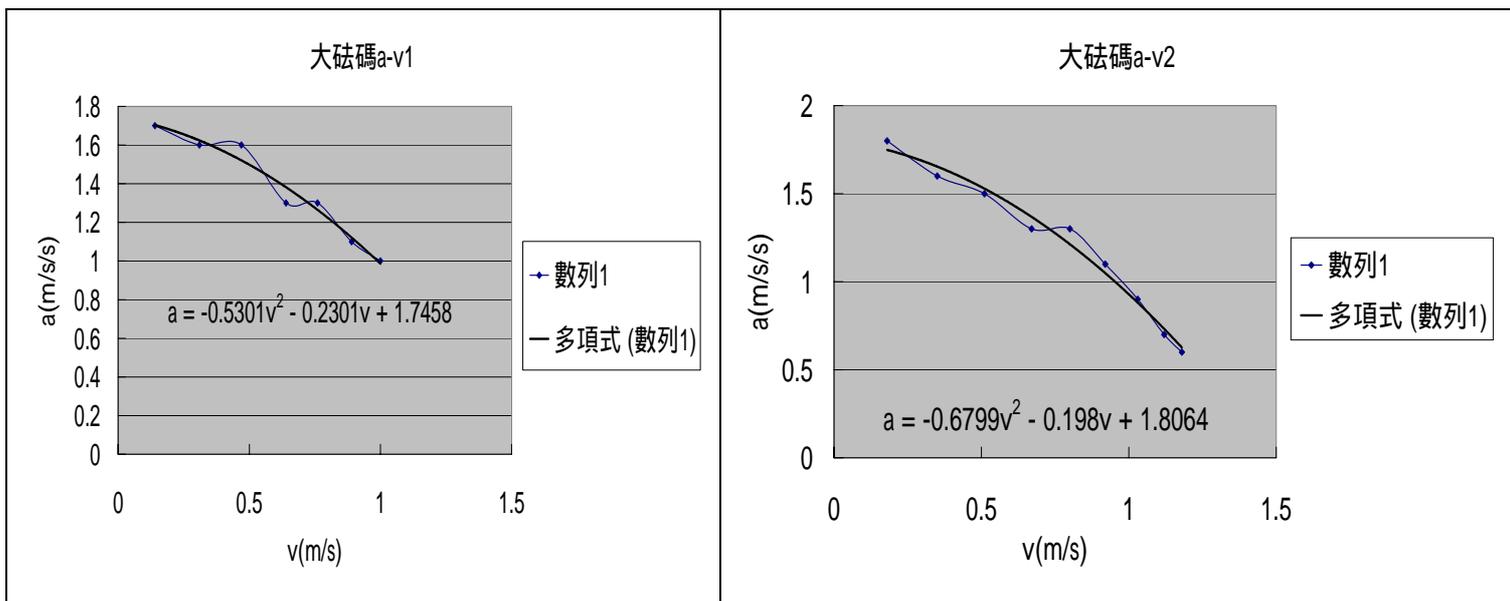
待測物 1--大砝碼

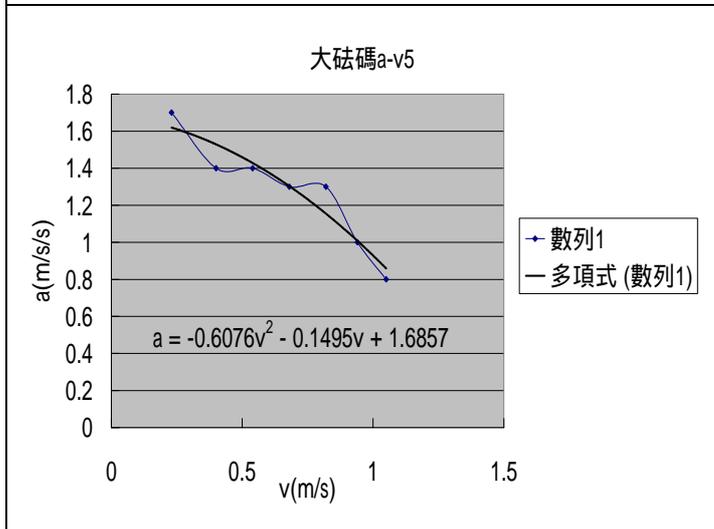
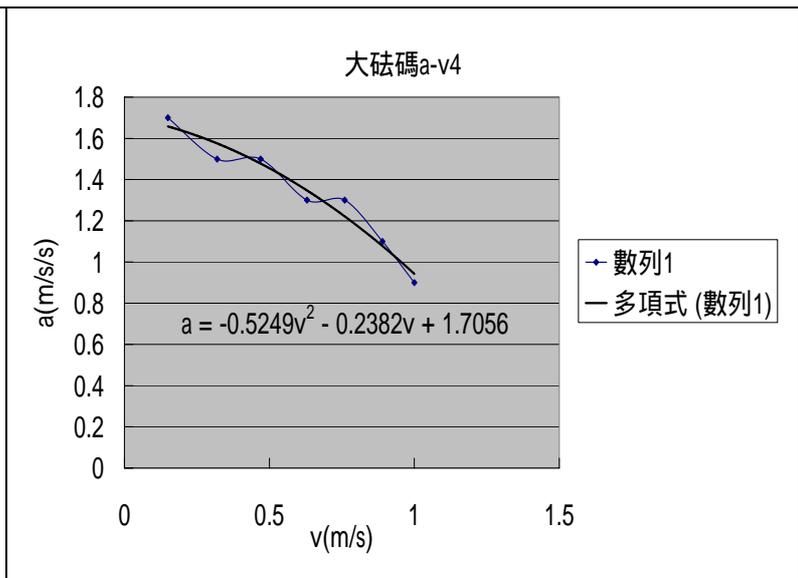
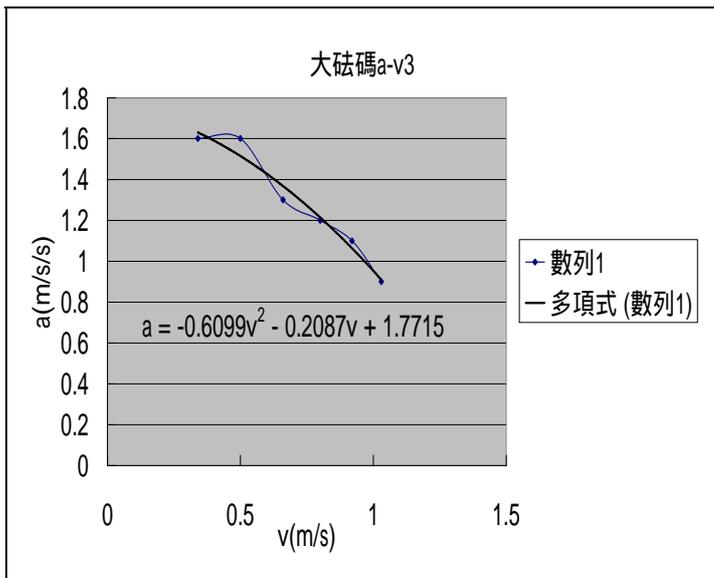
M (待測物質量) 200.65g

m (吊碼質量) 108g

V (待測物體積) 25ml

速度範圍 0.01-1.3 (m/s)





(2)

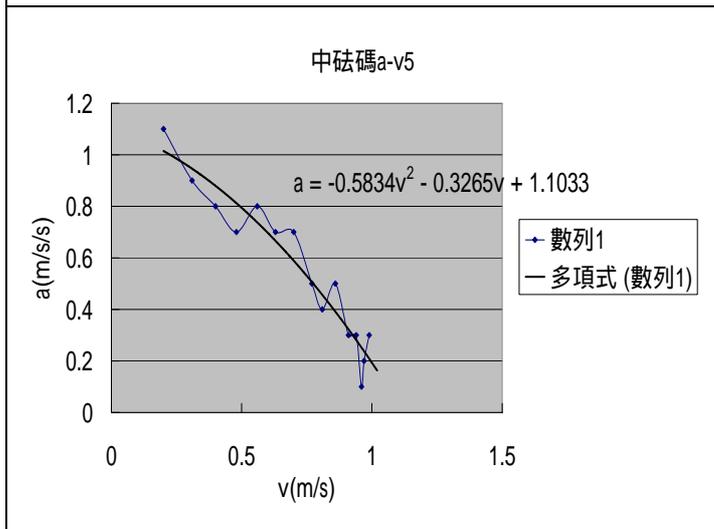
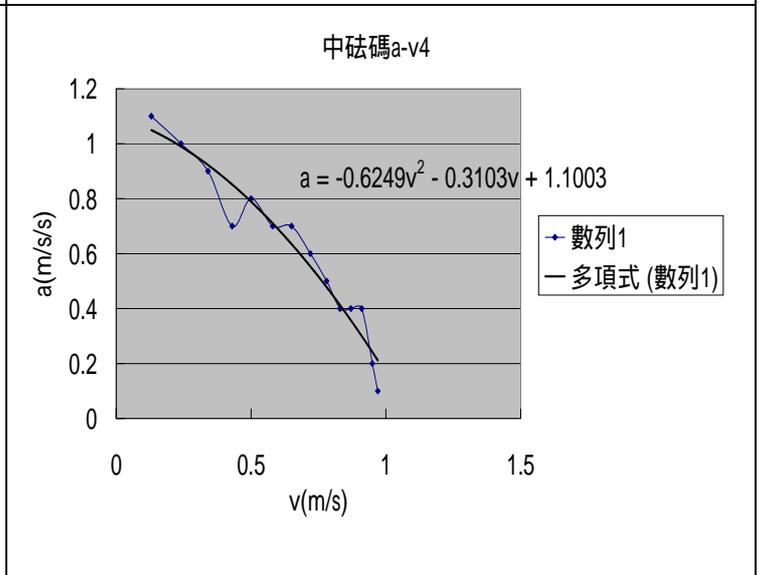
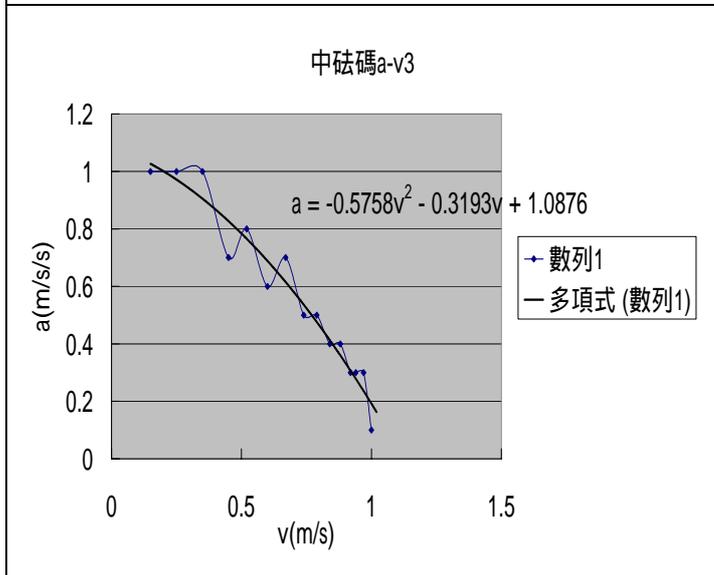
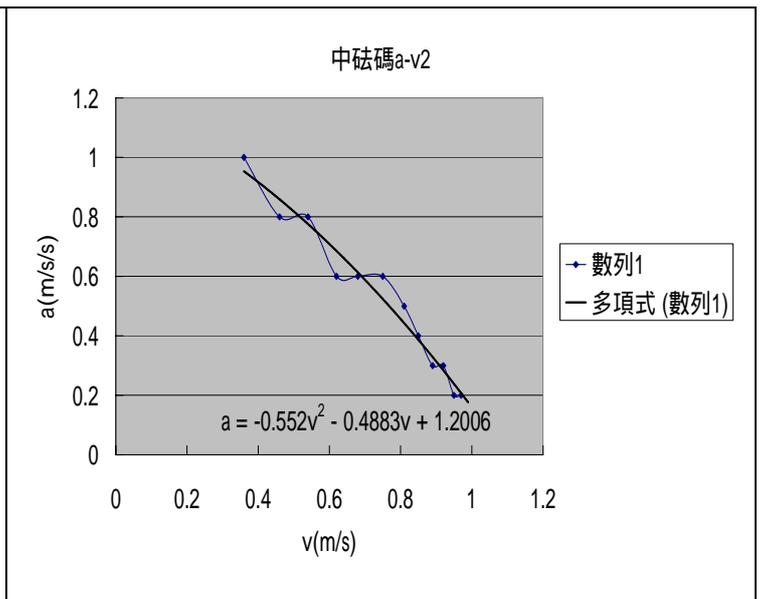
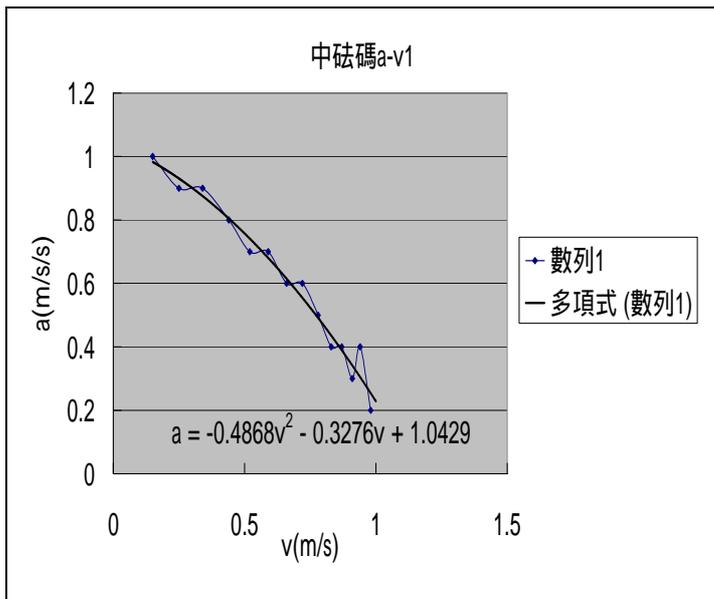
待測物 2--中砵碼

M (待測物質量) 50.86g

m (吊碼質量) 31.068g

V (待測物體積) 7ml

速度範圍 0.01-1.35 (m/s)



(3)

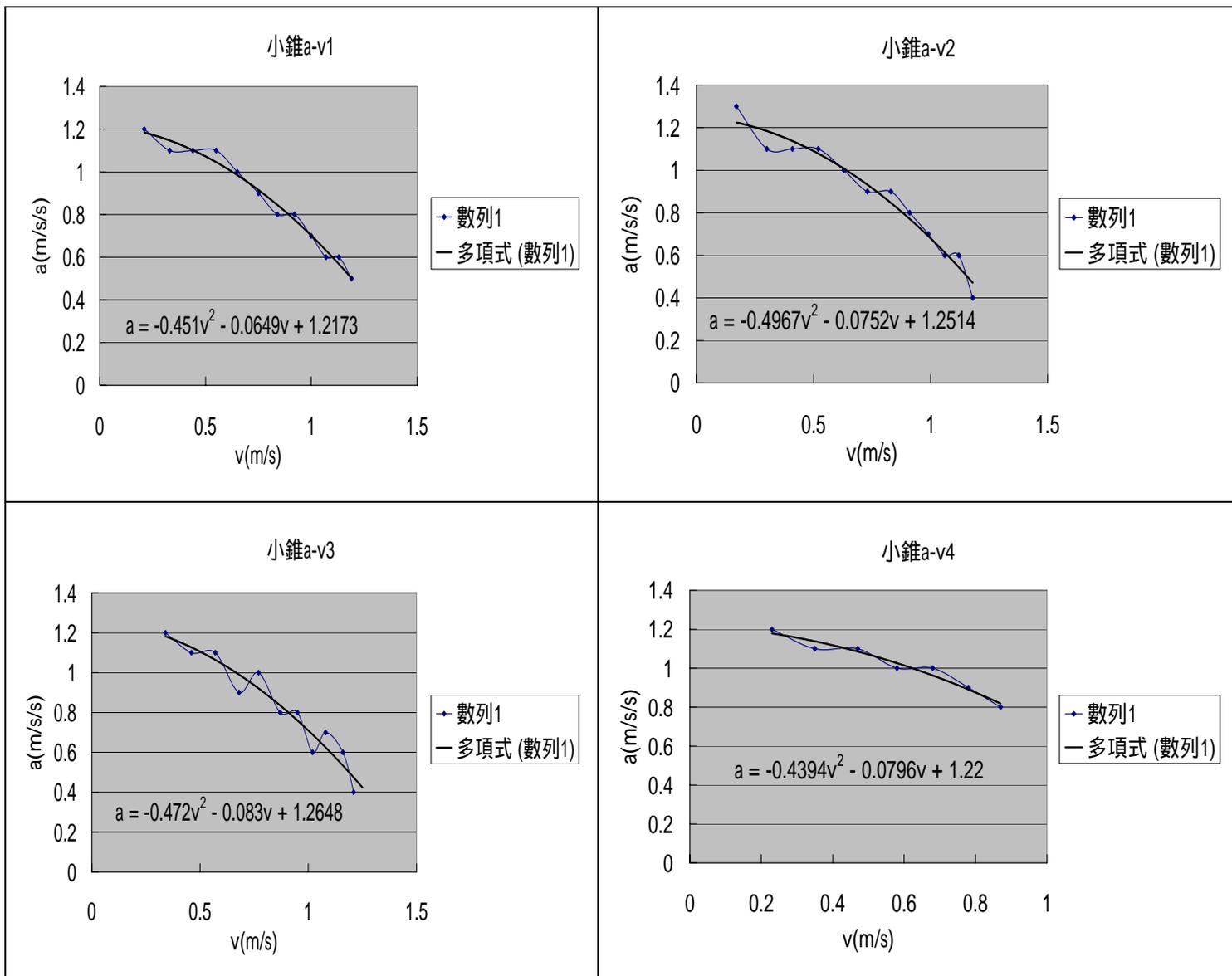
待測物 3--小錐

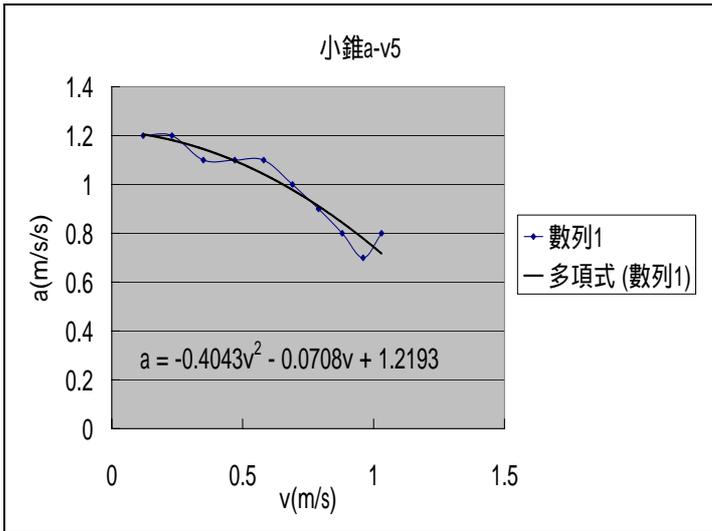
M (待測物質量) 53.58g

m (吊碼質量) 31.068g

V (待測物體積) 6.2ml

速度範圍 0.01-1.33 (m/s)





(4)

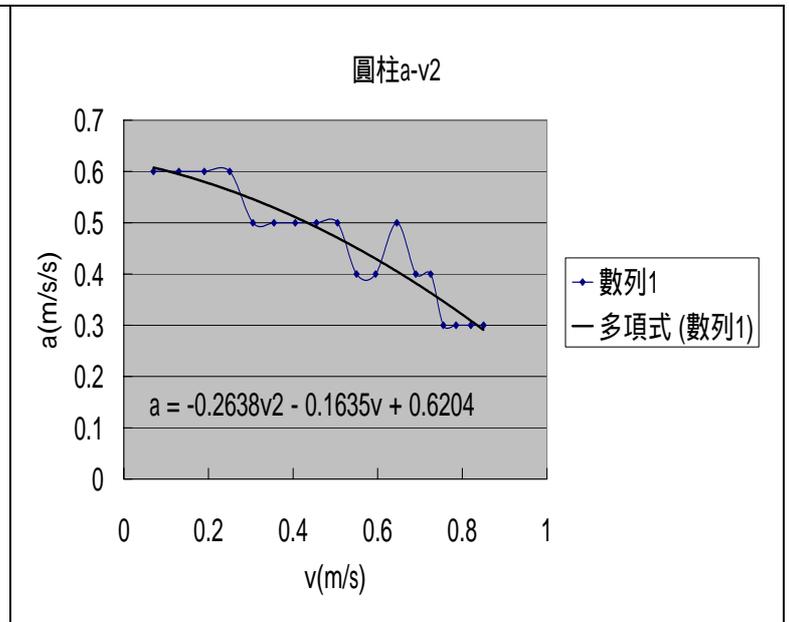
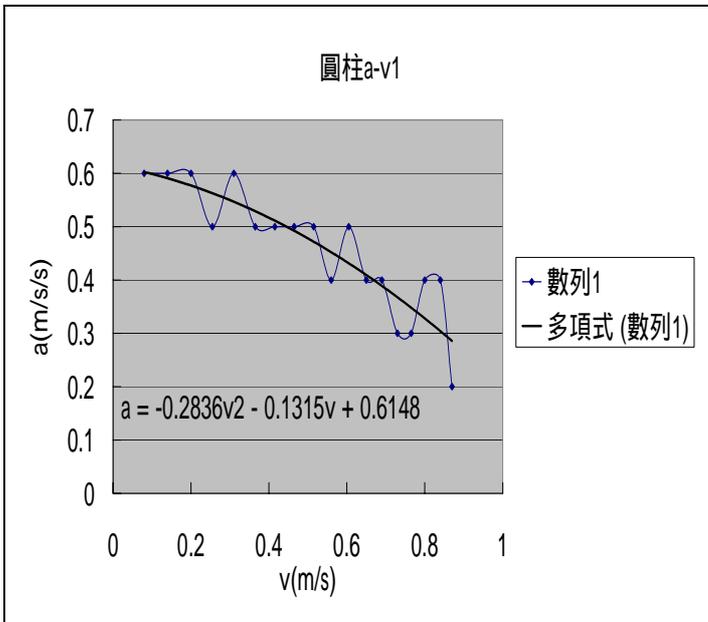
待測物 4--圓柱

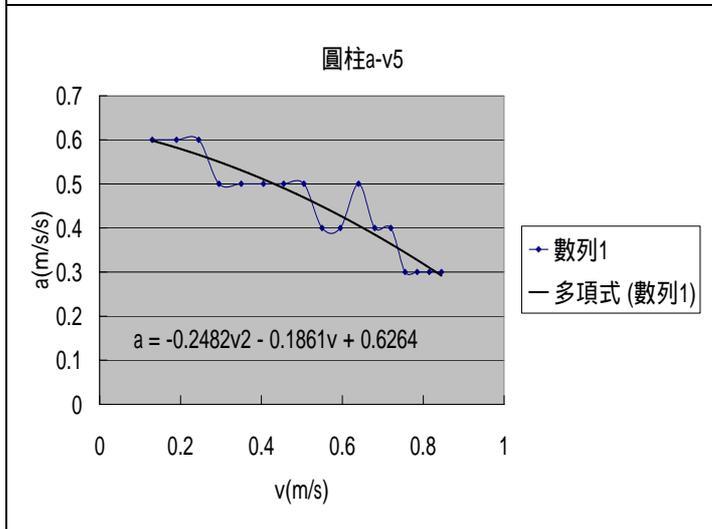
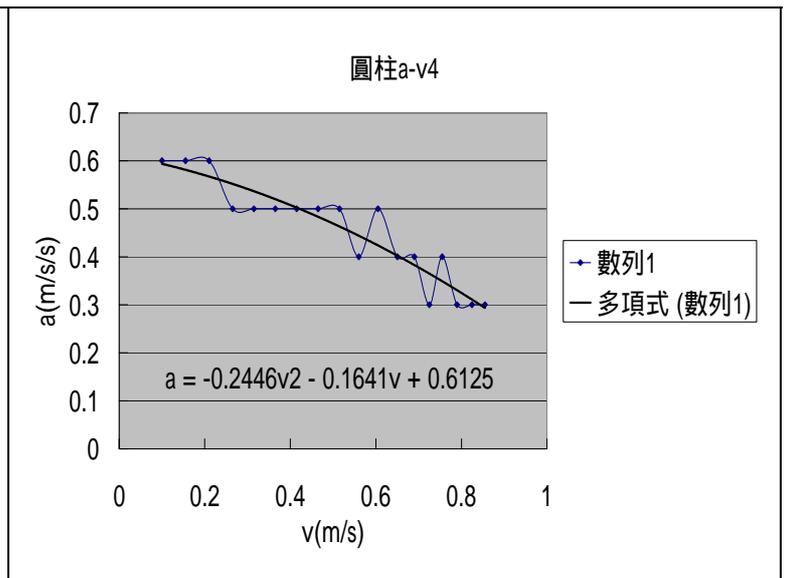
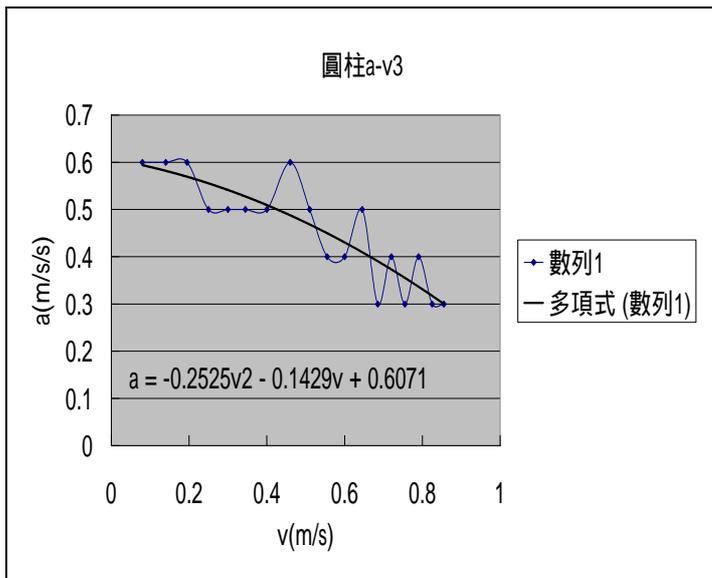
M (待測物質量) 84.53g

m (吊碼質量) 60g

V (待測物體積) 11ml

速度範圍 0.1-0.85 (m/s)





(5)

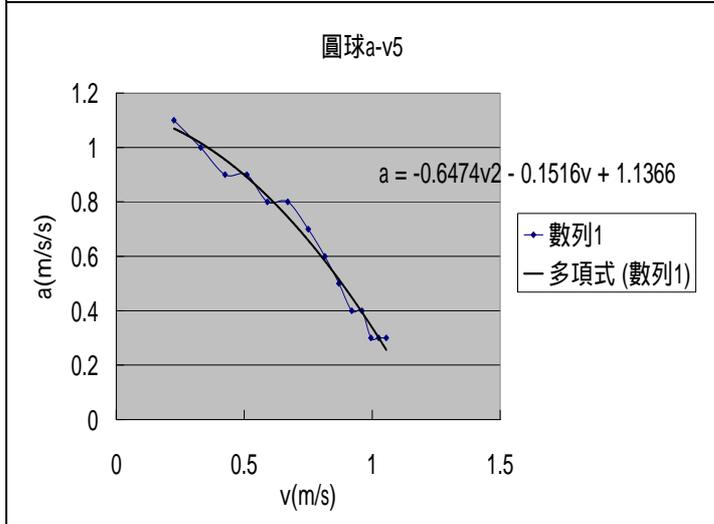
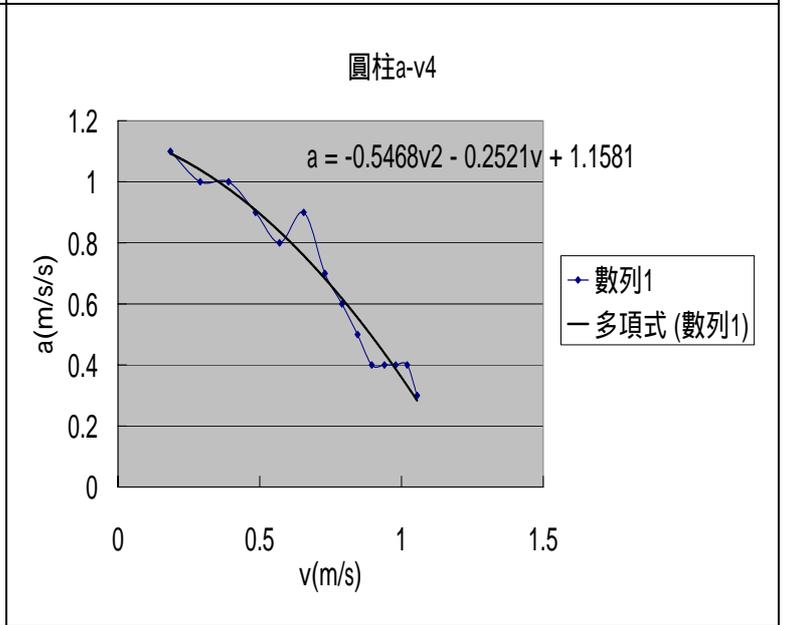
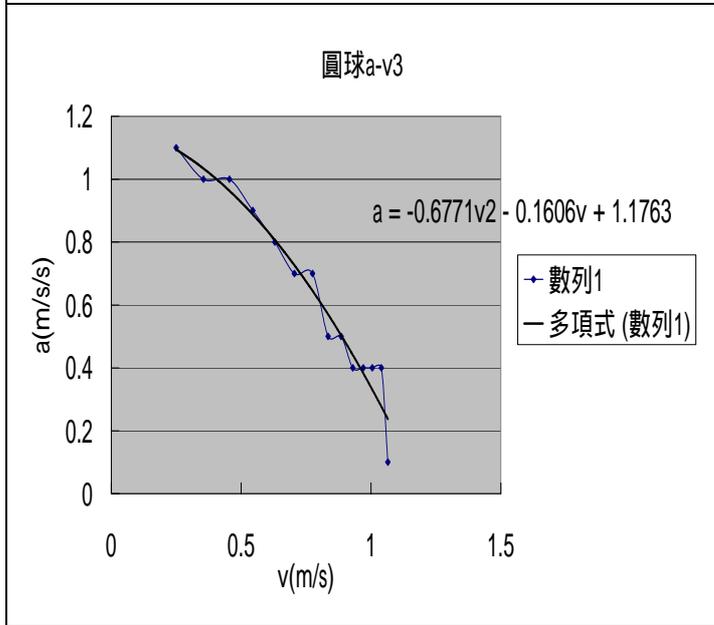
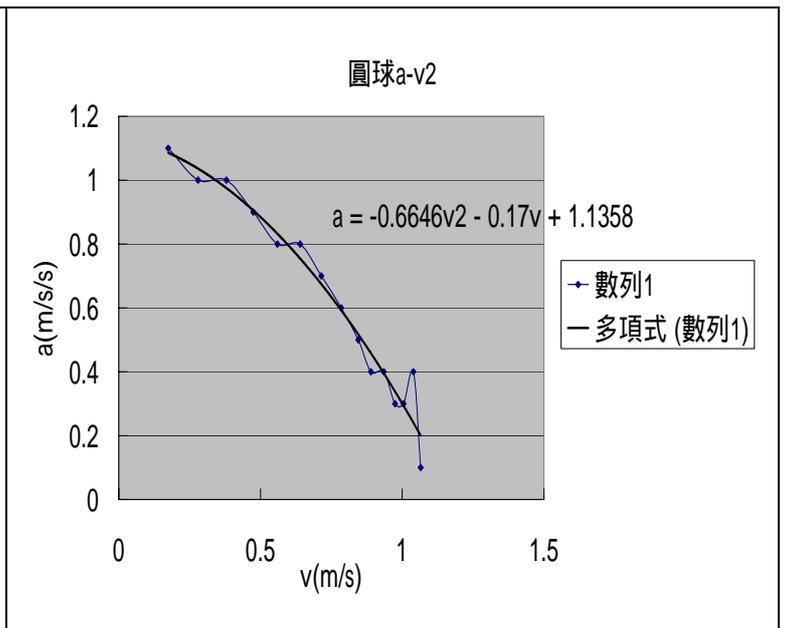
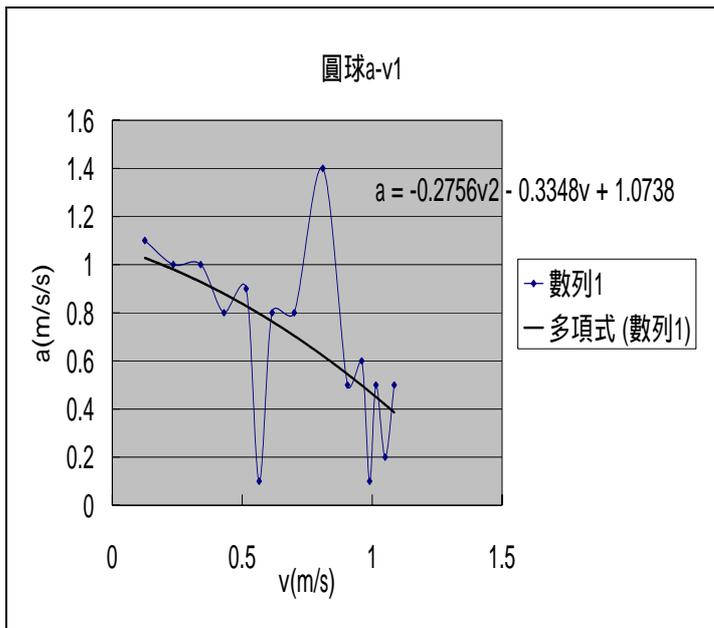
待測物 5--圓球

M (待測物質量) 231.67g

m (吊碼質量) 151g

V (待測物體積) 30ml

速度範圍 0.2-1.05 (m/s)



柒、討論

1. **聯動方式的利用**: 移動感應器發射的超音波, 無法直接測量水中的運動體, 因此我們改利用聯動方式, 測量空氣中吊碼的運動, 來瞭解水中物體的速度與加速度。

2. 我們知道水中靜止物體, 會受到浮力作用; 而水中運動的物體, 當速度愈快時, 其受力也愈大, 由上述兩性質可知: 若水對物體的作用力可表為 $F = C_0 + C_1v + C_2v^2$, 則式中 C_0 應該對應物體靜止時的浮力,

且 C_0, C_1, C_2 均應大於零, 且由關係式(8)(9)(10)可知, $A < 0$ 、 $B < 0$ 。

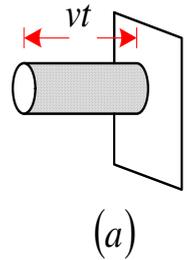
3. **檢驗方式**: 由於二次項係數 $A < 0$, 表示在 $a-v$ 圖中, 對應曲線開口應朝下, 利用這個性質可以判別實驗數據中, 那個段落較符合或不符合我們原本的假定, 並利用 $B < 0$ 的性質來檢視數據合理性。

4. C_2 、 C_1 與 C_0 的物理涵義:

(1) C_2 : 考慮密度為 ρ 的流體垂直碰撞接觸面積 A , 假定流體流速為 v , 且碰撞後為靜止, 由右圖(a)的關係可知, 流體施於面積 A 的平均力為

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p}{t} = \frac{\rho(vtA)v}{t} = \rho Av^2 \propto v^2$$

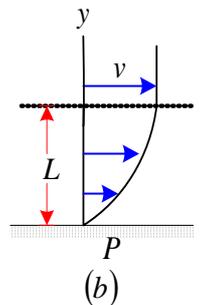
因此我們判斷 C_2 代表碰撞的作用。



(2) C_1 : 考慮流體流過物體表面時, 由於流體的黏滯性, 使接近物體表面的邊界層內, 存在不同的速度, 如右圖(b)所示, 此時黏滯力(或摩擦力)表為

$$\langle F \rangle \propto \frac{\Delta v}{\Delta y} \propto \frac{v}{L} \propto v$$

因此, C_1 代表摩擦力。



(3) C_0 : 該數與速度無關, 因此可與靜止流體中的浮力相對應, 所以這個數與重力有關。

5. 五項待測物的 A、B、C 平均值分別如下

(1) 大法碼

大法碼		
A	B	C
-0.620	-0.231	1.77

T1

(2) 中法碼

中法碼		
A	B	C
-0.513	-0.392	1.13

T2

(3) 小錐

小錐		
A	B	C
-0.440	-0.0691	1.23

T3

(4) 細長型圓柱棒

細長型圓柱棒		
A	B	C
-0.267	-0.156	0.621

T4

(5) 圓球

圓球		
A	B	C
-0.575	-0.217	1.16

T5

五項待測物的 C_0, C_1, C_2 分別如下

(1) 大法碼

大法碼		
C_2 (Ns ² /m ²)	C_1 (Ns/m)	C_0 (N)
0.191	0.0713	0.363

T1'

(2) 中法碼

中法碼		
C_2 (Ns ² /m ²)	C_1 (Ns/m)	C_0 (N)
0.0420	0.0321	0.101

T2'

(3) 小錐

小錐		
C_2 (Ns ² /m ²)	C_1 (Ns/m)	C_0 (N)
0.0372	0.00585	0.116

T3'

(4)細長型圓柱棒

細長型圓柱棒		
C_2 (Ns ² /m ²)	C_1 (Ns/m)	C_0 (N)
0.0386	0.0225	0.151

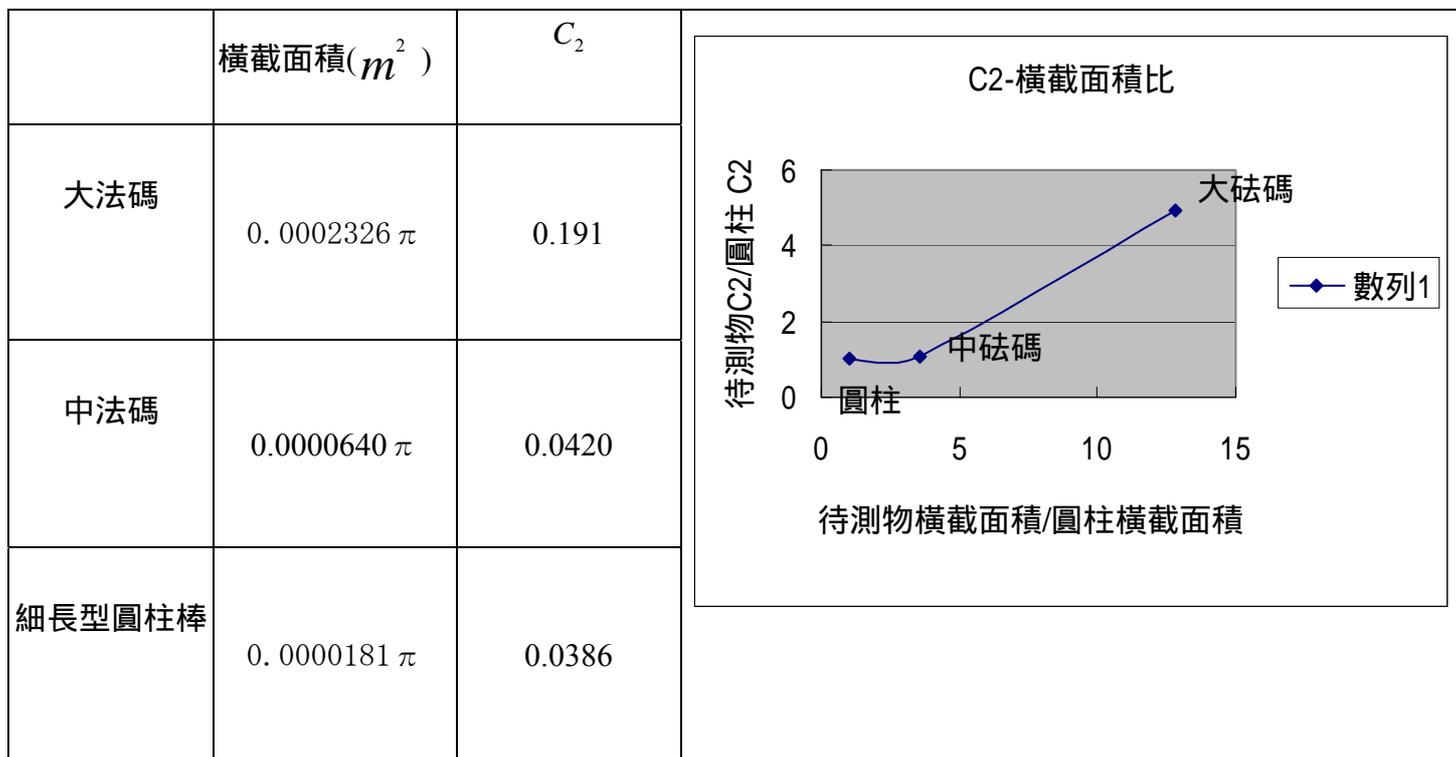
T4'

(5) 圓球

圓球		
C_2 (Ns ² /m ²)	C_1 (Ns/m)	C_0 (N)
0.220	0.0829	0.348

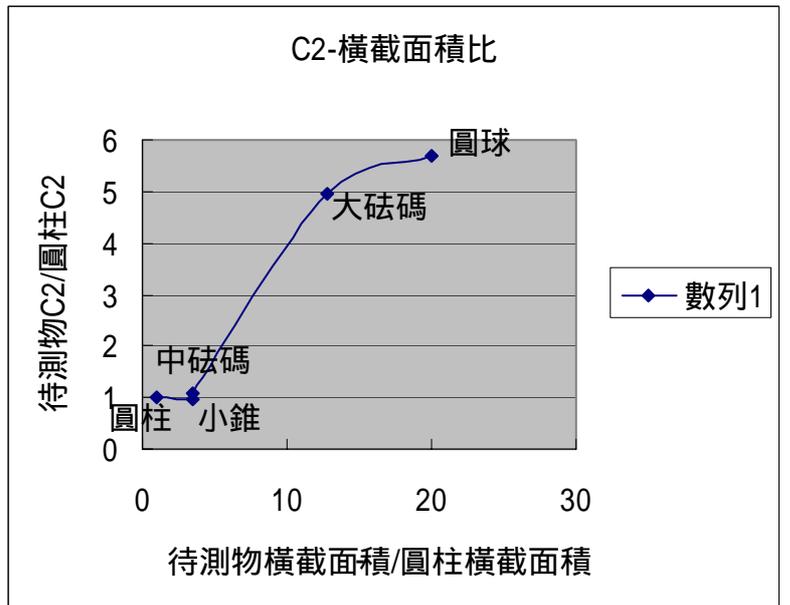
T5'

6.針對圓柱型的大砝碼、中砝碼、細長型圓柱棒做橫截面積和 C_2 的比較:



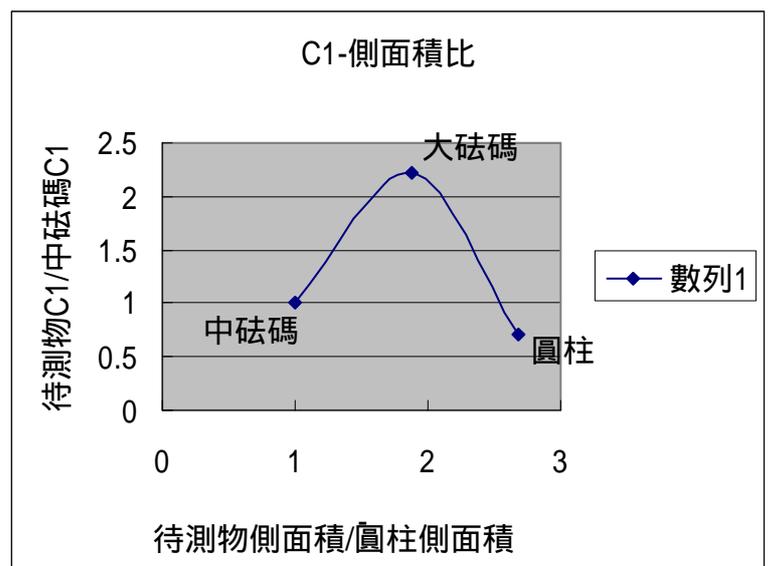
對五項待測物做橫截面積和 C_2 的比較:

	橫截面積	C_2
圓球	0.0003629π	0.220
大法碼	0.0002326π	0.191
中法碼	0.0000640π	0.0420
小錐	0.0000624π	0.0372
細長型圓柱棒	0.0000181π	0.0386



7. 針對圓柱型的大法碼、中法碼、細長型圓柱棒做側面積和 C_1 的比較:

	側面積(m^2)	C_1
細長型圓柱棒	0.001279π	0.022525
大法碼	0.0008998π	0.071341
中法碼	0.0004776π	0.032148



8. 對於 C_2 、 C_1 、 C_0 的討論：

(1) 對於 C_2 的討論：

比較五項待測物的橫截面積與 $C_2 v^2$ ，實驗所求得 v 的範圍大約都在 0.01~1.35m/s 之間，故直接比較 C_2 。原則上，當橫截面積越大時，所對應的 C_2 也越大。我們推測 C_2 所呈現的是水分子碰撞橫截面積時所造成的阻力效應；但實驗中的小錐卻是例外，我們做出了一個可能的推測：當水碰撞到小錐的圓錐體部分時，動量變化較小，水對小錐的衝擊力必須乘上 \cos 值，造成小錐的反作用力較小，阻止小錐運動的合力也相對較小，使得小錐的 $C_2 v^2$ 小於細長型圓柱棒的 $C_2 v^2$ 。

(2) 對於 C_1 的討論：

比較五項待測物的橫截面積與 $C_1 v$ ，實驗所求得 v 的範圍大約相同，故直接比較 C_1 。側面積越大時，對應的 C_1 應當越大。我們推測 C_1 與水分子黏滯待測物的側面積有關係；但實驗數據中的細長型圓柱棒卻是例外。我們做出了一個可能的推測：細長型圓柱棒的長度與橫截面積直徑比值 (L/w) 高達 15，表示細長型圓柱棒在水中的運動情形近似流線型物體，在分離區、層流、尾流三個影響黏滯力因素中，細長型圓柱棒的分離區和尾流相對於其他待測物較小，造成它的黏滯力較小。

(3) 對於 C_0 的討論：

在討論 2 中提到， C_0 應等於物體靜止時的浮力。而實驗所求的 C_0 與浮力並不是完全相同，我們做出了一個可能的推測：待測物在流體中運動時，待測物周圍的流體密度可能會相對較小，如同讓待測物體積變大，但質量大小卻沒有改變（水的密度相對於實驗中砝碼的密度太小）。除此之外， C_0 可能包含了一些初始條件，例如

- * 重物與吊碼的運動，由於尼龍線的彈性，兩者並非完全同步，造成數據呈現振盪分佈。
- * 重物在水中運動，對過於釋放時的振動震動過於靈敏
- * 滑輪與轉軸之間的摩擦力並未列入考慮。

改善初始條件方法：

- * 利用 Microsoft excel 內建的二次回歸功能避免數據呈現振盪分佈。
- * 擷取適當範圍的速度、加速度。
- * 在實驗前替滑輪轉軸上潤滑油。

9. 當 $C_2 v^2 / C_1 v = C_2 v / C_1 = 1$ ，將待測物的 C_2 、 C_1 代入，可得出一臨界速度 $v = C_1 / C_2$ ，用以判斷水分子碰撞橫截面積或水分子黏滯待測物的側面積的阻力效應較強。

	大砝碼	中砝碼	小錐	圓柱	圓球
$v = C_1/C_2$ (m/s)	0.373	0.764	0.157	0.583	0.377

(1)當待測物的速度小於臨界速度，水分子對側面積黏滯力的影響較大。

(2)當速度大於臨界速度，水分子對橫截面積衝擊力影響較顯著。

而上述的臨界速度都包含在實驗所求得的速度範圍中，表示實驗所得運動情形概括了(1)、(2)兩種情形。

10. 當 $C_2 v^2/C_0 = 1$ ，將待測物的 C_0 、 C_0 代入，可得出一臨界速度 $v = \sqrt{C_0/C_2}$ ，用以判斷水分子碰撞橫截面積阻力效應或待測物在水中運動所受的浮力較強。

	大砝碼	中砝碼	小錐	圓柱	圓球
$v = \sqrt{C_0/C_2}$ (m/s)	1.38	1.55	1.76	1.98	1.32

實驗中所得速度範圍皆小於上述臨界速度，表示待測物在水中運動所受到的浮力大於水分子對橫截面積阻力效應。

11. 雷諾數的應用：實驗所求得 v 的範圍大約在 0.01~1.35m/s 之間，換算成雷諾數為 100~13500。而從文獻中得知，當雷諾數大於 10，待測物前後流體壓差對待測物造成影響顯著，經由碰撞證明此影響可用速度平方項表示，由此推論 C_2 象徵待測物前後流體壓差對待測物造成的影響。當雷諾數大時，流體對待測物側面積的黏滯力相對較小，再推論 C_1 象徵水對側面積的黏滯力效應。

- 12.考慮上述條件之後判斷二次式可用來表示水對待測物的作用力。

捌、結論

利用速度與加速度間的互動的關係，來分析物體在液體中受力的形式，是一個可行的辦法，能顯現出物體在水中運動時，可能影響阻力的因素有哪些-例如速度快慢、橫截面積大小、流體種類、待測物形狀等等。經過多日的纏鬥，我們充分瞭解到流體瞬息萬變的個性，任何輕微的變化，都會像是蝴蝶效應一般的造成極大影響，因此更仔細的控制實驗條件、更精密的儀器與熟練的實驗技巧，是進一步解答流體特性所不可或缺的基本功。

玖、參考資料及其他

- 1.<http://www.hypertextbook.com/physics/matter/drag>
- 2.http://www.processassociates.com/process/dimen/dn_dra.htm
- 3.<http://www.ac.wvu.edu/~vwater/PhysicsNet/Topics/Dynamics/Forces/DragForce.html>
- 4.龍騰版高二物質科學物理篇(下)流體力學

評 語

040117 「流」得住嗎？-利用二次式係數探討流體阻力

本作品以重物托拉物體在液體中的運動，來量測流體的阻力行為。以簡單的設置，透過市售軟體與介面能設置成量測流體阻力的實驗工具。其量測的精準度，應有提昇的空間，且應可再利用所建構的儀器，探討特殊外型的物體所受的阻力。