

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

040116

壓力與水共舞

學校名稱： 國立內壢高級中學

作者： 高一 鄭文斌 高一 葉雲瀚 高一 王之洵 高一 龍星佑	指導老師： 方惠真
---	--------------

關鍵詞：壓力、波以耳定律、白努利方程式

壹、 摘要

利用喝完的汽水瓶及打氣筒等簡單儀器，取代用水銀做波以耳定律實驗的方式來測量氣壓的大小。液體因氣壓及液壓的推動使水噴出，由所學的水平拋射推得液體噴出速度，修正空氣阻力等因素後，以白努利方程式可以測量封閉式汽水瓶容器內部的氣體壓力。而我們依此種方式測得 1 大氣壓力約為 $9.2 \times 10^4 \sim 1.25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ，誤差約 3.7%~23.4%，同時也證明真實氣體並非遵守波以耳定律。

貳、 研究動機

在日常生活中，我們知道將一裝水的桶子，桶子側邊高低開幾個小孔，最接近桶底的小孔，因壓力較大，水可以噴得較遠。在物理課本上也可以學到液體壓力、氣體壓力(如波以耳定律)和流速(如連續方程式、白努利方程式)等相關物理公式，希望藉由這個實驗具體驗證我們所學的物理知識，同時也可以找到另一種測量氣體壓力的方法。

參、 研究目的

- 一、利用開放容器裝不同密度的液體，了解不同高度、不同密度的液壓與噴射距離(速度)的關係，以為封閉容器實驗做為參考依據。
- 二、在封閉容器中打入不同密度的液體，容器中的氣體被壓縮而壓力增大，氣壓再加上不同高度、不同密度的液壓造成不同的噴射距離(速度)，由噴射距離(速度)推得液體上方氣壓與體積的關係，證明波以耳定律。
- 三、改變容器的大小，了解容器截面積與實驗的影響。
- 四、由容器中不同高度的液體及氣體的壓力造成不同的噴射距離，藉水平拋射原理及白努利方程式，求得封閉容器內氣壓大小，並推得真實氣體氣壓與體積的關係。

肆、 研究設備

一、實驗儀器：

力學桌一台 (圖 4-1)、可升降平台一座 (圖 4-2)、
玩具打氣筒一個 (圖 4-3)、橡皮軟管數條 (圖 4-3)、
玩具汽水瓶蓋附噴水口一個(圖 4-4)、玩具積木底座二片(圖 4-4)
三泡水平儀一個 (圖 4-5)、2 公升及 1250ml 和 630ml 的黑松汽水瓶各二個、
C 型夾四個 (圖 4-6)、鉛錘一個、小刀一把

二、測量工具：

電子秤一台、30 公分的長尺一把、3 公尺的捲尺一個、游標尺一把
2 公升燒杯 5 個、100ml 量筒一個、50ml 的量筒一個
攪拌用玻璃棒 3 根、數位相機一台

三、耗材：

食鹽一包、寬版透明膠帶一捲、棉線一捲、方格紙數張、紅色廣告顏料一罐



圖 4-1

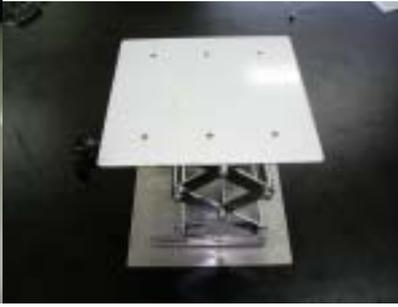


圖 4-2



圖 4-3



圖 4-4



圖 4-5



圖 4-6

伍、 研究過程及方法

一、 實驗原理：

(一)理想氣體定量定溫氣體壓力與體積的關係—波以耳定律：

1.理想氣體的假設：

- (1) 理想氣體是由極大數目的分子所組成，且分子的運動是無規的，因此在任一段時間內，向各方向運動的分子數目皆相同。
- (2) 分子與分子間距離比分子直徑大得多，因此在低密度下，氣體分子本身的總體積與氣體佔有空間的體積相比是極小的。
- (3) 分子可視為小鋼球，當其相撞時是作彈性碰撞，並且遵守牛頓運動定律。碰撞時間極短，除碰撞外，分子間沒有相互作用力，所以在兩次碰撞之間分子作等速直線運動。

由以上得密閉容器內定量低壓力、低密度的氣體，可視為理想氣體。

2.波以耳定律：

密閉容器內定量的低密度氣體，若氣體溫度 T 維持不變，其壓力 P 與其體積 V 成反比的關係，稱為波以耳定律，其關係式可寫為

$$PV = \text{定值} \quad (5-1)$$

本實驗中，在密閉的汽水瓶內以水壓縮空氣的體積，若將氣體視為理想氣體且沒有氣體外洩的情況下，壓力與體積會成反比的關係，即氣體體積與壓力的乘積 PV 為定值。

3.理想氣體方程式：

當氣體處於低密度狀態，由波以耳定律、查理定律、給呂薩克定律等經驗定律歸納而得的關係式，稱為理想氣體方程式，可寫為

$$PV = nRT \quad (5-2)$$

其中 n 為氣體莫耳數、 R 為理想氣體常數 ($R = 0.082 \text{ atm} \cdot \ell / \text{mol} \cdot \text{K} = 8.31 \text{ J} / \text{mol} \cdot \text{K}$)、 T 為氣體的絕對溫度。

4.真實氣體定量定溫氣體壓力與體積的關係—凡得瓦方程式：

1842 年，法國人勒尼奧從實驗中發現真實氣體的行為，與波以耳定律不全然相符。他發現氣體體積與壓力的乘積 PV 會隨壓力增加而減小。後來實驗證明大部分氣體的 PV 值先隨壓力大而減小，然後又增大。

1873 年，荷蘭人凡得瓦指出，真實氣體需要考慮到氣體分子本身的大小及其間的作用力。

他認為系統的總壓力是外在壓力和內在壓力之和。外在壓力 P 就是實驗時由外部施於系統的壓力，而內在壓力是由分子之間的吸引力產生的壓力。例如正從容器表面離開往容器中心運動的分子，除了感受到容器外面施於容器的壓力外，也感受到容器中間分子所產生的吸引力。凡得瓦認為這種吸引力的大小應該和分子密度的平方成正比，也就是和容器體積 V 的平方成反比。因此理想氣體狀態方程式的 P 必須改用 $P + \frac{a}{V^2}$ (a 是比例常數)。

凡得瓦也用極簡單的方式考慮排斥力的效應，他認為分子能夠運動的體積是容器的體積 V ，減去一個修正項 b ，而 b 和 Nd^3 成正比 (N 是分子數， b 是分子直徑)。

將吸引力和排斥力的效應都考慮後，凡得瓦得到下列的狀態方程式：

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (5-3)$$

本實驗中，在密閉的汽水瓶內以水壓縮空氣的體積，氣體隨著體積縮小壓力變大，當體積縮小壓力變大、密度增大時，就不能以理想氣體來討論，即氣體體積與壓力的乘積 PV 應不為定值。

(二)水平拋射：

1.原理：當物體在距地面高 h 處，以初速 v_0 水平拋出時，根據運動獨立性，著地所花時間 t 與高度 h 有關。而水平射程 R 等於速度 v_0 乘以飛行時間 t ，故我們可以由水平射程及高度 h 推知物體水平射出初速 v_0 的大小。

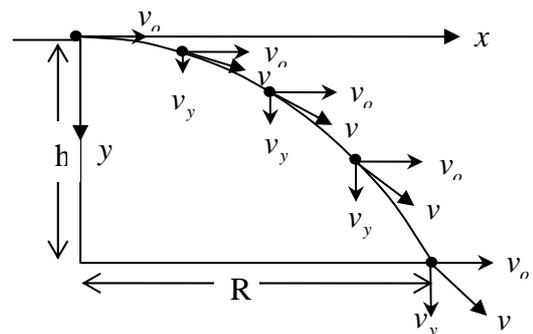


圖 5-1 水平拋射運動的軌跡

2.公式推導：

如圖 5-1 所示一物從距地高 h 處，以初速 v_0 水平射出，取物體射出點為 x - y 坐標軸的原點 O ，向右的水平方向為 $+x$ 方向，向下的鉛直方向為 $+y$ 方向。

利用拋體運動的獨立性，拋體運動可分成沿成水平和沿鉛直兩方向的運動，分開來處理：

水平方向：為等速度運動，故 $a_x = 0$

$$x = v_0 t \quad (5-4)$$

$$v_x = v_0 \quad (5-5)$$

鉛直方向：等加速度運動， $a_y = g = 9.8m/s^2$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (5-6)$$

$$v_y = g t \quad (5-7)$$

因物體距地高度 h 水平拋出，所以 $y = h$ 代入(5-6)

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad (5-8)$$

由(5-8)可以求得落地所需時間 t 為

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5-9)$$

又時間 t 及已測量的水平射程 $x = R$ 代入(5-4)可得

$$R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5-10)$$

推得物體水平拋出初速 v_0

$$v_0 = R \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (5-11)$$

在實驗中量取的水平射程 R 及高度 h ，利用上式可以求得物體射出的初速 v_0 。

(三)連續方程式與白努利方程式

1.連續方程式的推導：

流體在導管中流動的速度會因管子的截面積不同而異，如在截面積較小的通道處流速較快，而這種截面積與流速的關係稱為連續方程式。

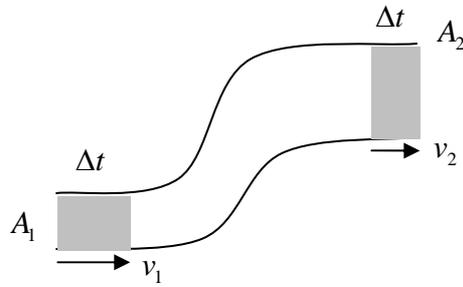


圖 5-2

如圖 5-2 所示，設在左端處選取截面積為 A_1 的流體，其速率為 v_1 ，在 Δt 的時間內所行經的距離為 Δl_1 ，則在該段時間內流經左端面的流體質量為

$$\Delta m_1 = \rho \Delta V_1 = \rho A_1 \Delta l_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t \quad (5-12)$$

上式中 ρ 為流體的密度。當流體從左端面流入時相等的質量將在同一時間內從右端面流出，即

$$\Delta m_2 = \rho \Delta V_2 = \rho A_2 \Delta l_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t \quad (5-13)$$

上式中 A_2 和 v_2 分別為流體右端面相應的截面積和速率。因為 $\Delta m_1 = \Delta m_2$ ，由(5-12)及(5-13)兩式可得

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (5-14)$$

上式稱為連續方程式，是質量守恒定律的另一種說法。

2. 白努利方程式的推導：

穩定的流體在空間運動時，其壓力、速率、和所在的高度之間，遵守一定的關係式，即為白努利方程式。此關係方程式是敘述在一管內運動的不可壓縮流體，在管子任一處力學能量之間的關係，為力學能守恒定律的特例。

考慮一非均勻截面的管子，管中有一無黏滯性且不可壓縮的流體穩定的流動，如圖(5-3)所示。流體流過 A_1 截面時，高度為 y_1 、速度為 v_1 、壓力為 P_1 ；流體流過 A_2 截面時，高度為 y_2 、速度為 v_2 、壓力為 P_2 。流體在 A_1 及 A_2 處密度設為 ρ_1 及 ρ_2 ，管中的流體(界於 A_1 及 A_2 截面之間)受到三個力作用：即截面 A_1 處向右的力 $P_1 A_1$ 、截面 A_2 處向左的力 $P_2 A_2$ 以及整個流體向下的重力。

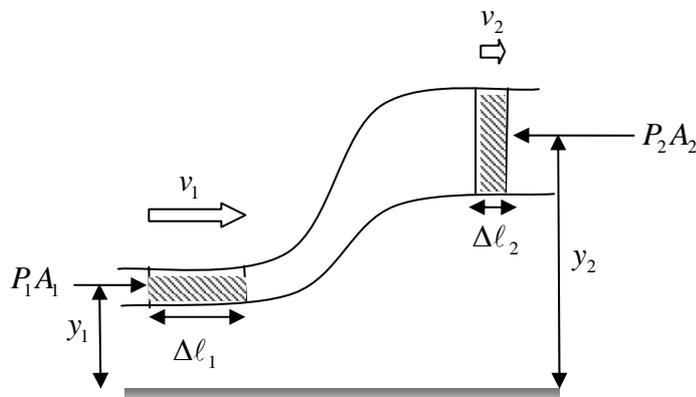


圖 5-3

設斜線部分又網線部分的管徑都各自均勻，且 $P_1 A_1 > P_2 A_2$ ，因此整部分流體受到一向右方的淨力，流體於是流到網線的部分。在流體流動的過程中，外力所做的功為

水平力 P_1A_1 做功為

$$P_1A_1\Delta\ell_1 = P_1\Delta V_1 = P_1 \frac{m}{\rho_1} \quad (5-15)$$

式中 ΔV_1 為斜線部分的體積， m 為斜線部分流體的質量。

水平力 P_2A_2 做功為

$$-P_2A_2\Delta\ell_2 = -P_2\Delta V_2 = -P_2 \frac{m}{\rho_2} \quad (5-16)$$

式中 ΔV_2 為斜線部分的體積。由於上述外力的作用，使用系統的能量發生變化，即

(1) 位能的改變，相當於把斜線部分的流體舉升到網線部分，故位能改變了

$$\Delta U = mg(y_2 - y_1) \quad (5-17)$$

(2) 動能的改變，即

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (5-18)$$

由於我們假設流體在管內流動時沒有受到摩擦力或黏滯力，因此外力所做的功即等於系統動能及位能的增加值，故得

$$P_1 \frac{m}{\rho_1} - P_2 \frac{m}{\rho_2} = mg(y_2 - y_1) + \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right) \quad (5-19)$$

由上式兩邊消去 m ，且因考慮不可壓縮的流體，故密度相同 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ，因此上式(5-19)可寫成

$$P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (5-20)$$

考慮本實驗開放式容器，在開放式容器上方的壓力和噴水口的壓力均為 1 大氣壓力，壓力相同故

$$P_1 = P_2 \quad (5-21)$$

因容器截面積 A_1 遠大於噴水口的截面積 A_2 ，即 $A_1 \gg A_2$ ，由連續方程式(5-14)可得到噴水口噴出的速度遠大於容器水面下降的速度

$$v_1 \ll v_2 \quad (5-22)$$

考慮(5-21)及(5-22)式，由白努利方程式(5-20)得到

$$\rho g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (5-23)$$

$$v_2 = \sqrt{2g(y_1 - y_2)} = \sqrt{2gh} \quad (5-24)$$

上式 h 代表水面與洞口高度。

二、架設器材與實驗步驟：

(一) 架設實驗儀器：

1. 使用四個 C 型夾將二片玩具積木底座分別固定在力學桌前後。
2. 將附噴水口的玩具汽水瓶蓋固定在力學桌前端的積木底座上，並將玩具打氣筒固定在力學桌後端的積木底座上。
3. 利用一條橡皮軟管連接汽水瓶蓋及打氣筒，另一條橡皮軟管連接打氣筒放入儲水燒杯

中。

4. 將可升降平台調整到適當高度，讓儲水燒杯置於其上並注入適量的水，以便打氣筒由燒杯將水抽出注入汽水瓶中。
5. 利用筆在軟木塞鑽個小孔當做汽水瓶蓋噴口的塞子，並暫時將噴口塞住。
6. 利用三泡水平儀將整個力學桌調整水平。
7. 完成整個實驗裝置如圖 5-4。



圖 5-4 封閉式容器實驗裝置圖

(二) 實驗步驟：

1. 利用打氣筒將水打滿所有橡皮管路內，並注意在管路內不要有氣泡的產生，並清除在汽水瓶蓋內多餘的水。
2. 將 2 公升的汽水瓶裝滿水倒至量筒中測量整各汽水瓶的容積 V ，此即為空汽水瓶時 1 大氣壓力下空氣的體積。
3. 使用游標尺測量噴水口的直徑及汽水瓶身的直徑。
4. 將量筒裝 100ml 的水使用天平秤得水的質量，計算水的密度 D 。
5. 利用方格紙標示數個刻度貼在乾淨空的 2 公升汽水瓶身中段平滑處，並倒裝入固定在力學桌前端的汽水瓶蓋上。
6. 先在汽水瓶蓋噴水口正下方貼好方格紙，使用鉛錘找出噴水口正下方的點 O ，在方格紙上標上記號，並以膠帶保護好，且測量噴水口距地的鉛直高度 h 。
7. 確定軟木塞有將噴水口塞好，利用打氣筒慢慢將水打入空的汽水瓶中，使水平面到瓶上的第一個刻度(如圖 5-5)，測量水面至噴水口的鉛直高度 y 。
8. 將軟木塞拔開注意水的最遠射程點 O' ，使用捲尺測量水的水平射程 $\overline{OO'}$ (如圖 5-6)，測量完後將噴出的水以拖把拭乾以免影響實驗
9. 重複步驟 7、8 測量 $\overline{OO'}$ 三次取平均值以增加準確性。
10. 重複步驟 7 利用打氣筒將水平面打到汽水瓶上的不同刻度，重複步驟 7、8、9 將不同

刻度的數據測量完，完成封閉式容器實驗的測量。實驗中避免手碰到力學桌，影響力學桌的平衡，而影響整個實驗結果。

11. 將汽水瓶內的水洩完後轉開，利用水及量筒測量水平面到達不同刻度時汽水瓶上方空氣的體積 V' 。
12. 將汽水瓶身以寬板膠帶纏繞數圈固定使之不易變形，從底部較不平整處以美工刀割開，使整個汽水瓶為開放式容器(如圖 5-7)，水面上方氣壓與外界氣壓同均為一大氣壓力，再重複步驟 6 至 10 完成開放式容器實驗的測量。
13. 調製不同濃度的食鹽水重複步驟 4 至步驟 12。
14. 改用 630ml 及 1250ml 的汽水瓶重複步驟 2 至驟 12。



圖 5-5 將水打入汽水瓶內至特定刻度



圖 5-6 使用捲尺測量水的水平射程



圖 5-7 開放式容器實驗裝置圖

(三)以數位相機輔助截取數據實驗

- 1.以廣告顏料將水染成紅色，方便數位相機截取數據，並測量紅墨水的密度。
- 2.將方格紙水平貼滿噴射軌跡，並在上面以粗筆標上刻度，以利數位相機讀取數據，並在紙上方貼上透明膠帶保護(如圖 5-8)。
- 3.重複(二)實驗步驟 1~7。在拔開橡皮塞的同時，以數位相機拍攝水柱著地點。
- 4.重複實驗將不同度的數據測量完，完成封閉式容器實驗。再將水洩完後轉開，以水及量筒測量液面到達不同度時，汽水瓶上方空氣的體積。
- 5.重複上述實驗步驟完成開放式容器實驗的測量(如圖 5-9)。
- 6.以 Photoimpact8.0 由拍攝的影像讀取液體的噴射距離。



圖 5-8 以數位相機輔助截取數據封閉式容器實驗裝置圖



圖 5-8 以數位相機輔助截取數據開放式容器實驗裝置圖

陸、 研究結果

一、2L 容器 -水

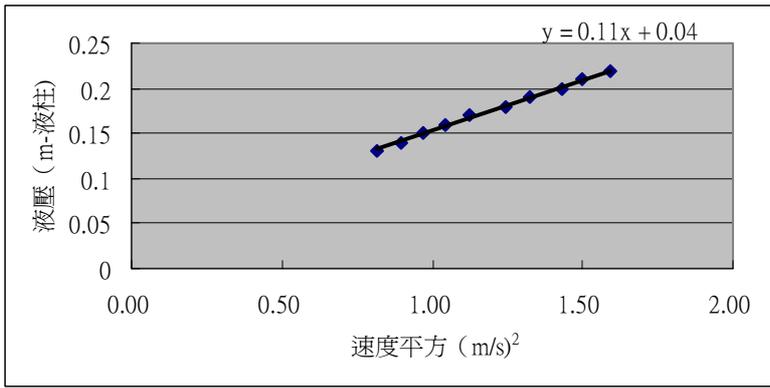
噴水口距地高度 $h=39(\text{cm})$ ；水密度 $\rho=0.99\text{g}/\text{cm}^3$ ；水噴出至落地時間 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.28\text{s}$ ；

噴水口截面直徑 0.2cm 截面積 $A_1 = 3.14 \times 10^{-6} \text{m}^2$ ；容器截面直徑 11cm 截面積 $A_2 = 9.5 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ；
(1)開放式容器

作為封閉式容器實驗的對照組，由此實驗可測得多少公分高的水柱造成的壓力可以使水噴多遠，在此實驗發現噴射速度平方與液柱高(液壓) y 成正比關係 $y=0.11x+0.04$ 。

水柱高 $y(\text{m})$	0.220	0.210	0.200	0.190	0.180	0.170	0.160	0.150	0.140	0.130
實驗噴射 距離(m)	0.353	0.340	0.335	0.319	0.311	0.293	0.283	0.278	0.262	0.261
	0.359	0.336	0.337	0.316	0.315	0.286	0.289	0.283	0.261	0.254
	0.348	0.333	0.324	0.329	0.311	0.300	0.284	0.281	0.263	0.245
平均距離 $x(\text{m})$	0.353	0.343	0.335	0.322	0.312	0.297	0.286	0.276	0.265	0.253
噴射速度 $v=x/t(\text{m}/\text{s})$	1.26	1.23	1.20	1.15	1.11	1.06	1.02	0.99	0.95	0.90
速度平方 $v^2(\text{m}/\text{s})^2$	1.59	1.50	1.43	1.32	1.24	1.13	1.04	0.97	0.90	0.82

表 6-1 2 升開放式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果



以 excel 數據擬合求得液壓 y (m-液柱)與噴射速度平方 $(m/s)^2$ 的關係， $y=0.11x+0.04$ (6-1)

圖 6-1 2L 開放式容器水噴射速度平方與液壓關係

(2)封閉式容器

整個封閉式容器體積 $V=2.107L$ ，即為在未將水打入容器時，容器內氣體壓力為 $1atm$ 時氣體體積。由封閉式容器所測得的噴射速度平方，可依方程式(6-1)推得容器內的氣壓+水壓相當於多少公分高的水柱造成的壓力。

水柱高 $y(m)$	0.220	0.210	0.200	0.190	0.180	0.170	0.160	0.150	0.140	0.130	0
實驗噴射距離 (m)	3.984	3.690	3.361	3.005	2.790	2.477	2.201	2.097	1.916	1.694	
	3.973	3.704	3.375	3.015	2.787	2.476	2.209	2.095	1.912	1.693	
	3.979	3.706	3.364	3.005	2.783	2.472	2.204	2.091	1.903	1.705	
平均距離 $x(m)$	3.979	3.699	3.368	3.010	2.789	2.478	2.205	2.090	1.912	1.695	
容器內氣體體積 $V(L)$	0.610	0.716	0.822	0.928	1.034	1.140	1.246	1.352	1.458	1.564	2.107
速度 $v=x/t(m/s)$	14.21	13.21	12.03	10.75	9.96	8.85	7.88	7.46	6.83	6.05	
速度平方 $v^2(m/s)^2$	201.94	174.52	144.69	115.56	99.22	78.32	62.02	55.72	46.63	36.65	
封閉容器總壓 $P=0.11v^2+0.04+10.33/0.99$ (m-液柱)	32.68	29.67	26.39	23.18	21.38	19.09	17.29	16.60	15.60	14.50	
封閉容器氣壓 $P_1=P-y(m-液柱)$	32.46	29.46	26.19	22.99	21.20	18.92	17.13	16.45	15.46	14.37	10.24
氣壓與體積乘積 P_1*V (m-液柱 · L)	19.80	21.09	21.52	21.34	21.92	21.56	21.35	22.24	22.54	22.48	21.58

表 6-2 2 升封閉式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果

我們取氣壓(相當多少液柱高造成的壓力，單位為 m-液柱)和空氣的體積(L)的乘積得到的數值如上(表 6-2)。發現氣體壓力與氣體體積的乘積(PV)並非遵守理想氣體波以耳方程式的定值，而是與氣壓的變大而 PV 值有變大再變小的情形，這與 1842 年法國人勒尼奧的發

現相似，更符合後來有人實驗證明大部分氣體的 PV 值先隨壓力大而減小，然後又增大。

若假設 PV 的乘積為定值，我們取得十個數據點的 PV 平均值為 21.58 (m-液柱 · L)，推得在未將水打入瓶中，整個氣體的體積 $V=2.107L$ 時，可得壓力為 10.24m-液柱，因液體密度為 $0.99g/cm^3$ ，1atm 時為 10.34m-水柱。與實際值 1atm=10.33m 水柱高造成的壓力，誤差為 0.001%。

二、2L 容器—密度 $1.06g/cm^3$ 的食鹽水

噴水口距地高度 $h=39(cm)$ ；水噴出至落地時間 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.28s$ ；

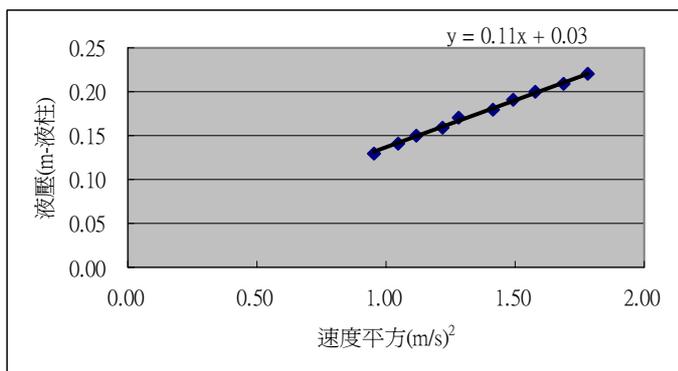
噴水口截面直徑 0.2cm 截面積 $A_1 = 3.14 \times 10^{-6} m^2$ ；容器截面直徑 11cm 截面積 $A_2 = 9.5 \times 10^{-3} m^2$ ；

(1)開放式容器

作為封閉式容器實驗的對照組，改以密度不同的鹽水作實驗，可測得多少公分高的鹽水柱造成的壓力可以使鹽水噴多遠，在此實驗發現鹽水噴射速度平方與鹽水柱高(液壓)y 成正比關係 $y=0.11x+0.03$ 。

鹽水高 y(m)	0.220	0.210	0.200	0.190	0.180	0.170	0.160	0.150	0.140	0.130
實驗噴射 距離(m)	0.370	0.363	0.361	0.341	0.326	0.315	0.310	0.296	0.296	0.276
	0.375	0.352	0.347	0.345	0.331	0.318	0.306	0.293	0.285	0.279
	0.381	0.362	0.351	0.341	0.340	0.323	0.313	0.293	0.293	0.265
平均距離 x(m)	0.374	0.364	0.352	0.342	0.333	0.317	0.309	0.296	0.287	0.273
速度 $v=x/t(m/s)$	1.34	1.30	1.26	1.22	1.19	1.13	1.10	1.06	1.03	0.98
速度平方 $v^2(m/s)^2$	1.78	1.69	1.58	1.49	1.41	1.28	1.22	1.12	1.05	0.95

表 6-3 2 升開放式容器氣壓與鹽水壓造成鹽水噴射距離測量結果



以 excel 數據擬合求得液壓 y(m-液柱)與噴射速度平方 $(m/s)^2$ 的關係，
 $y=0.11x+0.03$ (6-2)

圖 6-2 2L 開放式容器鹽水噴射速度平方與液壓關係

(2)封閉式容器

整個封閉式容器體積 $V=2.107L$ ，即為在未將鹽水打入容器時，容器內氣體壓力為 1atm 時氣體體積。由封閉式容器所測得的噴射速度平方，可依方程式(6-2)推得容器內的氣壓+水壓相當於多少公分高的鹽水柱造成的壓力。

鹽水柱高 y(m)	0.220	0.210	0.200	0.190	0.180	0.170	0.160	0.150	0.140	0.130	0
實驗噴射 距離(m)	3.968	3.569	3.239	2.917	2.674	2.439	2.219	2.017	1.799	1.606	
	3.968	3.565	3.236	2.909	2.671	2.443	2.230	2.007	1.812	1.613	
	3.970	3.571	3.240	2.914	2.683	2.444	2.220	2.010	1.815	1.599	
平均距離 x(m)	3.972	3.573	3.237	2.915	2.678	2.442	2.221	2.01	1.807	1.612	
容器內氣體體 積 V(L)	0.61	0.716	0.822	0.928	1.034	1.14	1.246	1.352	1.458	1.564	2.107
速度 v=x/t(m/s)	14.19	12.76	11.56	10.41	9.56	8.72	7.93	7.18	6.45	5.76	
速度平方 v ² (m/s) ²	201.23	162.84	133.65	108.38	91.48	76.06	62.92	51.53	41.65	33.14	
封閉容器總壓 P=0.11v ² +0.03 +10.33/1.06 (m-液柱)	31.91	27.69	24.48	21.70	19.84	18.14	16.70	15.44	14.36	13.42	
封閉容器氣壓 P ₁ =P-y (m-液柱)	31.69	27.48	24.28	21.51	19.66	17.97	16.54	15.29	14.22	13.29	10.04
氣壓與體積乘 積 P ₁ *V (m-液柱·L)	19.33	19.67	19.96	19.96	20.33	20.49	20.60	20.68	20.73	20.79	20.25

表 6-4 2 升封閉式容器氣壓與鹽水壓造成鹽水噴射距離測量結果

我們取氣壓(相當多少液柱高造成的壓力,單位為 m-液柱)和空氣的體積(L)的乘積得到的數值如上(表 6-4)。若假設 PV 的乘積為定值,我們取得十個數據點的 PV 平均值為 20.25 (m-液柱·L),推得在未將水打入瓶中,整個氣體的體積 V=2.107L 時,可得壓力為 10.04m-液柱,因液體密度為 1.06g/cm³,1atm 時為 9.47m-水柱。與實際值 1atm=10.33m-水柱高誤差為 8.3%。

三、1320mL 容器—水

噴水口距地高度 h=39(cm); 水密度 $\rho=0.99\text{g/cm}^3$; 水噴出至落地時間 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.28\text{s}$;

噴水口截面直徑 0.2cm 截面積 $A_1 = 3.14 \times 10^{-6} \text{m}^2$;

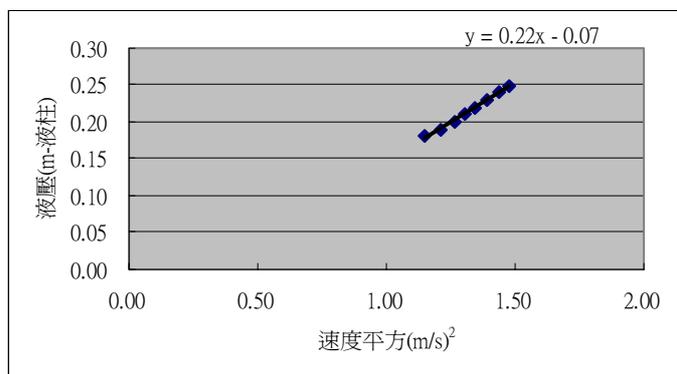
容器截面直徑 8.5cm 截面積 $A_2 = 5.67 \times 10^{-3} \text{m}^2$;

(1)開放式容器

作為封閉式容器實驗的對照組,將容器改為 1.320L 的汽水瓶來作實驗,可測得多少公分高的水柱造成的壓力可以使水噴多遠,在此實驗發現噴射速度平方與水柱高 y 成正比關係 $y=0.22x-0.07$ 。

水高 y(m)	0.250	0.240	0.230	0.220	0.210	0.200	0.190	0.180
實驗噴射 距離(m)	0.338	0.325	0.334	0.318	0.320	0.310	0.303	0.298
	0.341	0.341	0.332	0.323	0.319	0.320	0.314	0.294
	0.343	0.340	0.328	0.318	0.320	0.307	0.311	0.305
平均距離 x(m)	0.340	0.336	0.330	0.325	0.320	0.315	0.308	0.300
速度 v=x/t(m/s)	1.21	1.20	1.18	1.16	1.14	1.13	1.10	1.07
速度平方 v ² (m/s) ²	1.47	1.44	1.39	1.35	1.31	1.27	1.21	1.15

表 6-5 1.320L 封閉式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果



以 excel 數據擬合求得液壓 y(m-液柱)
與噴射速度平方(m/s)²的關係，
 $y=0.22x-0.07$ (6-3)

圖 6-3 1.320L 開放式容器水噴射速度平方與液壓關係

(2)封閉式容器

整個封閉式容器體積 V=1.320L，即為在未將水打入容器時，容器內氣體壓力為 1atm 時氣體體積。由封閉式容器所測得的噴射速度平方，可依方程式(6-3)推得容器內的氣壓+水壓相當於多少公分高的水柱造成的壓力。

水柱高 y(m)	0.238	0.223	0.208	0.193	0.178	0.163	0.148	0.133	0
實驗噴射 距離(m)	4.857	4.273	3.653	3.081	2.585	2.298	2.041	1.731	
	4.871	4.265	3.649	3.080	2.584	2.289	2.044	1.728	
	4.863	4.262	3.649	3.073	2.586	2.291	2.046	1.724	
平均距離 x(m)	4.857	4.270	3.648	3.072	2.582	2.291	2.040	1.730	
容器內氣體 體積 V(L)	0.263	0.353	0.443	0.533	0.623	0.713	0.803	0.893	1.320
速度 v=x/t(m/s)	17.40	15.23	13.03	11.00	9.23	8.18	7.30	6.17	
速度平方 v ² (m/s) ²	302.64	232.02	169.84	121.00	85.17	66.83	53.29	38.09	

封閉容器總壓 $P=0.22v^2-0.07+10.33/0.99$ (m-液柱)	76.94	61.41	47.73	36.98	29.10	25.07	22.09	18.74	
封閉容器氣壓 $P_1=P-y$ (m-液柱)	76.71	61.19	47.52	36.79	28.92	24.90	21.94	18.61	14.44
氣壓與體積乘積 P_1*V (m-液柱·L)	20.17	21.60	21.05	19.61	18.02	17.76	17.62	16.62	19.06

表 6-6 1.320L 封閉式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果

我們取氣壓(相當多少液柱高造成的壓力,單位為 m-液柱)和空氣的體積(L)的乘積得到的數值如上(表 6-6)。若假設 PV 的乘積為定值,我們取得十個數據點的 PV 平均值為 19.06 (m-液柱·L),推得在未將水打入瓶中,整個氣體的體積 $V=1.320L$ 時,可得壓力為 14.44m-液柱,因液體密度為 $0.99g/cm^3$,1atm 時為 14.59m-水柱。與實際值 1atm=10.33m 水柱誤差為 41.2%。

四、683mL 容器—水

噴水口距地高度 $h=39(cm)$; 水密度 $\rho=0.99g/cm^3$; 水噴出至落地時間 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.28s$;

噴水口截面直徑 0.2cm 截面積 $A_1 = 3.14 \times 10^{-6} m^2$;

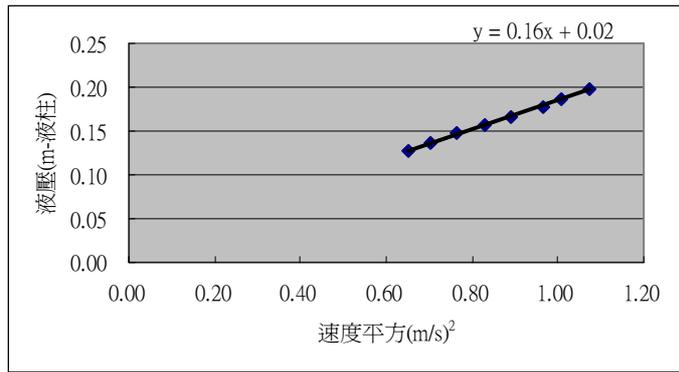
容器截面直徑 7cm 截面積 $A_2 = 3.85 \times 10^{-3} m^2$;

(1)開放式容器

作為封閉式容器實驗的對照組,將容器改為 0.683L 的汽水瓶來作實驗,可測得多少公分高的水柱造成的壓力可以使水噴多遠,在此實驗發現噴射速度平方與水柱高(液壓)y 成正比關係 $y=0.16x+0.02$ 。

水高 y(m)	0.197	0.187	0.177	0.167	0.157	0.147	0.137	0.127
實驗噴射 距離(m)	0.291	0.280	0.275	0.275	0.259	0.249	0.234	0.232
	0.289	0.280	0.274	0.268	0.259	0.251	0.238	0.224
	0.297	0.281	0.285	0.281	0.256	0.239	0.233	0.219
平均距離 x(m)	0.290	0.281	0.275	0.264	0.255	0.245	0.235	0.226
速度 $v=x/t(m/s)$	1.04	1.00	0.98	0.94	0.91	0.88	0.84	0.81
速度平方 $v^2(m/s)^2$	1.07	1.01	0.96	0.89	0.83	0.77	0.70	0.65

表 6-7 0.683L 封閉式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果



以 excel 數據擬合求得液壓 $y(\text{m-液柱})$ 與噴射速度平方 $(\text{m/s})^2$ 的關係，
 $y=0.16x+0.02$ (6-4)

圖 6-4 683mL 開放式容器水噴射速度平方與液壓關係

(2) 封閉式容器

整個封閉式容器體積 $V=0.683\text{L}$ ，即為在未將水打入容器時，容器內氣體壓力為 1atm 時氣體體積。由封閉式容器所測得的噴射距離速度平方，可依方程式(6-4)推得容器內的氣壓+水壓相當於多少公分高的水柱造成的壓力。

水柱高 $y(\text{m})$	0.197	0.187	0.177	0.167	0.157	0.147	0.137	0.127	0.117	0
實驗噴射 距離 (m)	3.869	3.526	3.158	2.906	2.520	2.198	2.001	1.712	1.524	
	3.865	3.525	3.151	2.909	2.524	2.202	1.995	1.718	1.526	
	3.875	3.515	3.149	2.897	2.527	2.196	2.000	1.719	1.534	
平均距離 $x(\text{m})$	3.867	3.520	3.155	2.900	2.520	2.197	2.000	1.720	1.522	
容器內氣體 體積 $V(\text{L})$	0.080	0.120	0.160	0.200	0.240	0.280	0.320	0.360	0.400	0.683
速度 $v=x/t(\text{m/s})$	13.81	12.57	11.27	10.36	9.00	7.85	7.14	6.14	5.44	
速度平方 $v^2(\text{m/s})^2$	190.74	158.04	126.96	107.27	81.00	61.57	51.02	37.73	29.55	
封閉容器總壓 $P=0.16v^2+0.02+10.33/0.99(\text{m-液柱})$	40.97	35.74	30.77	27.62	23.41	20.30	18.62	16.49	15.18	
封閉容器氣壓 $P_1=P-y(\text{m-液柱})$	40.78	35.55	30.59	27.45	23.26	20.16	18.48	16.36	15.06	7.64
氣壓與體積乘積 $P_1*V(\text{m-液柱} \cdot \text{L})$	3.26	4.27	4.89	5.49	5.58	5.64	5.91	5.89	6.03	5.22

表 6-8 0.683L 封閉式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果

我們取氣壓(相當多少液柱高造成的壓力，單位為 m-液柱)和空氣的體積(L)的乘積得到的數值如上(表 6-8)。若假設 PV 的乘積為定值，我們取得十個數據點的 PV 平均值為 $5.22 (\text{m-液柱} \cdot \text{L})$ ，推得在未將水打入瓶中，整個氣體的體積 $V=0.683\text{L}$ 時，可得壓力為 7.64m-液柱 ，因液體密度為 0.99g/cm^3 ， 1atm 時為 7.72m-水柱 。與實際值 $1\text{atm}=10.33\text{m}$ 水柱高誤差為 25.3% 。

五、以數位相機輔助截取數據—2L

噴水口距地高度 $h=39(\text{cm})$ ；水密度 $\rho=0.99\text{g}/\text{cm}^3$ ；水噴出至落地時間 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.28\text{s}$ ；

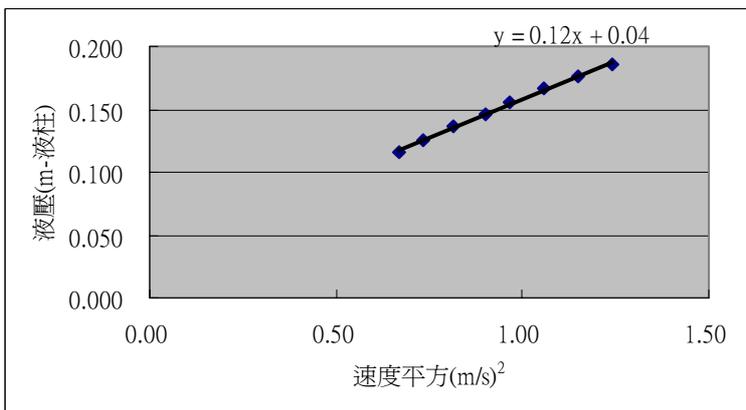
噴水口截面直徑 0.2cm 截面積 $A_1 = 3.14 \times 10^{-6} \text{m}^2$ ；容器截面直徑 11cm 截面積 $A_2 = 9.5 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ；

(1)開放式容器

作為封閉式容器實驗的對照組，由此實驗可測得多少公分高的水柱造成的壓力可以使水噴多遠，在此實驗發現噴射速度平方與液柱高(液壓) y 成正比關係 $y=0.11x+0.04$ 。

水柱高 $y(\text{m})$	0.186	0.176	0.166	0.156	0.146	0.136	0.126	0.116	0.186	0.176
實驗噴射 距離 $x(\text{m})$	0.312	0.300	0.288	0.275	0.266	0.253	0.240	0.229	0.312	0.300
速度 $v=x/t(\text{m}/\text{s})$	1.11	1.07	1.03	0.98	0.95	0.90	0.86	0.82	1.11	1.07
速度平方 $v^2(\text{m}/\text{s})^2$	1.24	1.15	1.06	0.96	0.90	0.82	0.73	0.67	1.24	1.15

表 6-9 2 升開放式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果



以 excel 數據擬合求得液壓 $y(\text{m}-\text{液柱})$ 與噴射速度平方 $(\text{m}/\text{s})^2$ 的關係，
 $y=0.12x+0.04$ (6-5)

圖 6-5 2L 開放式容器水噴射速度與液壓關係

(2)封閉式容器

整個封閉式容器體積 $V=2.107\text{L}$ ，即為在未將水打入容器時，容器內氣體壓力為 1atm 時氣體體積。由封閉式容器所測得的噴射速度平方，可依方程式(6-5)推得容器內的氣壓+水壓相當於多少公分高的水柱造成的壓力。

水柱高 $y(\text{m})$	0.186	0.176	0.166	0.156	0.146	0.136	0.126	0.116	0
實驗距離 $x(\text{m})$	3.052	2.857	2.557	2.300	2.108	1.948	1.762	1.565	
容器內氣體體積 $V(\text{L})$	0.870	0.960	1.050	1.140	1.230	1.320	1.410	1.500	2.107
速度 $v=x/t(\text{m}/\text{s})$	10.90	10.20	9.13	8.21	7.53	6.96	6.29	5.59	

速度平方 $v^2(m/s)^2$	118.81	104.11	83.40	67.47	56.68	48.40	39.60	31.24	
封閉容器總壓 $P=0.12v^2+0.04+10.33/0.99$ (m-液柱)	24.73	22.97	20.48	18.57	17.28	16.28	15.23	14.22	
封閉容器氣壓 $P_1=P-y$ (m-液柱)	24.55	22.79	20.32	18.42	17.13	16.15	15.10	14.11	10.11
氣壓與體積乘積 P_1*V (m-液柱·L)	21.35	21.88	21.33	20.99	21.07	21.31	21.29	21.16	21.30

表 6-10 2 升封閉式容器氣壓與水壓造成水噴射距離測量結果

我們取氣壓(相當多少液柱高造成的壓力,單位為 m-液柱)和空氣的體積(L)的乘積得到的數值如上(表 6-2)。若假設 PV 的乘積為定值,我們取得十個數據點的 PV 平均值為 21.58 (m-液柱·L),推得在未將水打入瓶中,整個氣體的體積 $V=2.107L$ 時,可得壓力為 10.11m-液柱,因液體密度為 $0.99g/cm^3$, 1atm 時為 10.21m-水柱。很顯然與實際值 1atm=10.33m 水柱誤差為 1.16%。

柒、 討論

一、開放式容器液柱造成的壓力

對同一種容器、同樣的液體所做的實驗中,我們發現液體的噴射速度平方與液壓(液柱高)y 成正比關係。

$$2.107L \text{ 水} \quad y=0.11x+0.04$$

$$2.107L \text{ 鹽水} \quad y=0.11x+0.03$$

$$1.320L \text{ 水} \quad y=0.22x-0.07$$

$$0.683L \text{ 水} \quad y=0.16x+0.02$$

$$2.107L \text{ 紅水} \quad y=0.12x+0.04$$

二、封閉式容器測得的氣壓

1. 在三種不同容器中 0.683L、1.320L 及 2.107L 所測得的氣壓中均發現氣體壓力與體積的乘積,並非定值。

2. 比較由實驗過程中測得氣壓的數據與理論值差異比我們想像中來的大很多(表 7-1),但其中以 2.107L 相對之下誤差較小,因為其容器截面積較大,在計算過程中我們取在容器內因液面下降較慢而忽略,故誤差較小。

測量氣壓方式	2.107L 水	2.107L 鹽水	1.320L 水	0.683L 水	2.107L 紅水
1atm 結果(m-水柱)	10.34	9.47	14.59	7.72	10.21
誤差	0.001%	8.3%	41.2%	25.3%	1.16%

表 7-1 使用不同容器測量氣體造成的誤差

誤差的原因是我們無法考慮空氣阻力、液體射出時需克服的表面張力及噴口阻力等因素，加上被打入的水壓縮至容器上方時有可能少數外洩，且此非理想氣體無法以波以耳方程式直接換算。

三、由開放式容器所測得的數值，找到液壓必而克服阻力等因素，試圖減小實驗誤差：

我們嘗試使用連續方程式(式 5-14)及白努利定律(式 5-20)，由開放式容器測到的數值找到修正誤差條件。在此容器中，因容器截面積(如 2.107L) $A_1 = 9.5 \times 10^{-3} m^2$ 遠大於噴水口截面積 $A_2 = 3.14 \times 10^{-6} m^2$ ，由連續方程式(式 5-14)可得 $v_1 \ll v_2$ ，故容器內水面下降速度 v_2 可忽略不計。在白努利方程式中(式 5-20)，因開放式容器 $P_1 = P_2 = 1 atm = 10.33 m - H_2O$ ，

故方程式可改寫成
$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (7-1)$$

開放式容器液體噴出速度的理論值
$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (7-2)$$

我們由實驗所得的液體噴出速度的實驗值 v 與理論值 v_2 求出關係式，因阻力等因素 v 小於 v_2 ，利用此關係式代入封閉容器測量的結果，希望可以將阻力等造成的實驗誤差減小。

在封閉容器內的氣壓
$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \rho gh_2 \quad (7-3)$$

由前面的實驗顯然的氣體的體積與壓力乘積並非為一定值，我們找出氣體壓力與體積的關係，並由這個關係式推得 1 大氣壓力時誤差為多少。

1. 2.107L 的水 水密度 $\rho = 0.99 g/cm^3$

開放容器			封閉容器				
水高 y(m)	實驗速度 v(m/s)	理論速度 v ₁ (m/s)	水高 y(m)	氣體體積 V(L)	速度 v(m/s)	理論速度 v ₁ =1.32*v + 0.41(m/s)	容器內氣壓 P ₁ (N/m ²)(式 7-3)
0.220	1.26	2.08	0.220	0.61	14.21	19.14	2.81×10 ⁵
0.210	1.23	2.03	0.210	0.716	13.21	17.82	2.56×10 ⁵
0.200	1.20	1.98	0.200	0.822	12.03	16.26	2.30×10 ⁵
0.190	1.15	1.93	0.190	0.928	10.75	14.58	2.05×10 ⁵
0.180	1.11	1.88	0.180	1.034	9.96	13.54	1.90×10 ⁵
0.170	1.06	1.83	0.170	1.14	8.85	12.08	1.72×10 ⁵
0.160	1.02	1.77	0.160	1.246	7.88	10.79	1.57×10 ⁵
0.150	0.99	1.71	0.150	1.352	7.46	10.25	1.52×10 ⁵
0.140	0.95	1.66	0.140	1.458	6.83	9.41	1.44×10 ⁵
0.130	0.90	1.60	0.130	1.564	6.05	8.39	1.35×10 ⁵

表 7-2 2107mL 的水噴出速度與理論值修正

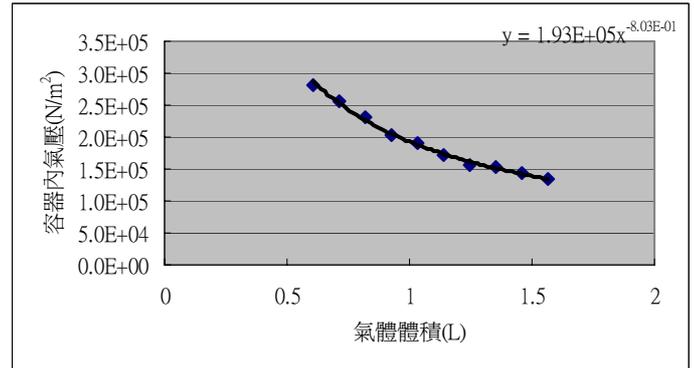
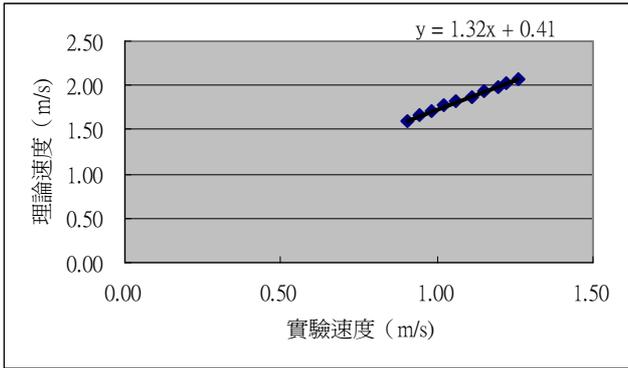


圖 7-1 2L 水實驗速度與理論速度關係

圖 7-2 2L 水氣體體積與容器氣壓關係

由噴射距離 x 考慮水平方向不受外力應該為等速度運動，算出水噴出的初速度 v ，但並無考慮到水噴出所需克服的阻力、表面張力，及在飛行過程中所受到的空氣阻力等因素。我們由開放式容器所測得的噴出速度與理論值比較，嘗試找出其關係式，

$$v_1 = 1.32v + 0.41 \quad (7-4)$$

發現實驗速度 v 與理論速度 v_1 有正比的相關性，利用這個特性來修正我們封密容器所測量的噴出速度。再利用白努利方程式(式 7-3)求得封閉式容器上方氣體壓力 P_1 ，使用 Excel 擬合找到氣體體積 V 與氣體壓力 P_1 的擬合方程式

$$P_1 = 1.93 \times 10^5 V^{-0.80} \quad (7-5)$$

利用上式(式 7-5)可以推得在未將水打入容器中時，整個氣體體積為 2107mL 時，內部氣壓應為 1atm，而我們將 $V=2.107$ 代入公式得到壓力為 $1.06 \times 10^5 \text{N/m}^2$ ，誤差約為 4.6%。

2. 2.107L 的鹽水 鹽水密度 $\rho = 1.06\text{g/cm}^3$

開放容器			封閉容器				
水高 $y(\text{m})$	實驗速度 $v(\text{m/s})$	理論速度 $v_1(\text{m/s})$	水高 $y(\text{m})$	氣體體積 $V(\text{L})$	速度 $v(\text{m/s})$	理論速度 $v_1 = 1.34 * v + 0.29(\text{m/s})$	容器內氣壓 $P_1(\text{N/m}^2)$ (式 7-3)
0.220	1.34	2.08	0.220	0.61	14.19	19.30	2.97×10^5
0.210	1.30	2.03	0.210	0.716	12.76	17.39	2.59×10^5
0.200	1.26	1.98	0.200	0.822	11.56	15.78	2.31×10^5
0.190	1.22	1.93	0.190	0.928	10.41	14.24	2.07×10^5
0.180	1.19	1.88	0.180	1.034	9.56	13.10	1.90×10^5
0.170	1.13	1.83	0.170	1.14	8.72	11.97	1.76×10^5
0.160	1.10	1.77	0.160	1.246	7.93	10.92	1.63×10^5
0.150	1.06	1.71	0.150	1.352	7.18	9.91	1.52×10^5
0.140	1.03	1.66	0.140	1.458	6.45	8.93	1.42×10^5
0.130	0.98	1.60	0.130	1.564	5.76	8.01	1.34×10^5

表 7-3 2107mL 的鹽水噴出速度與理論值修正

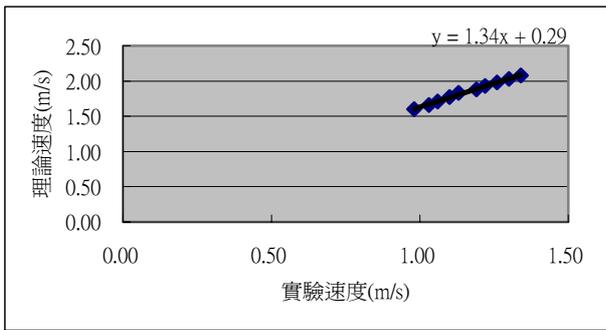


圖 7-3 2L 鹽水實驗速度與理論速度關係

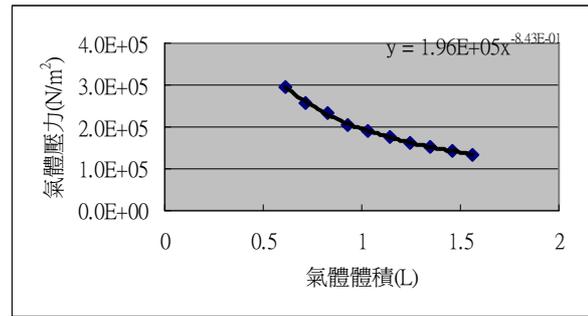


圖 7-4 2L 鹽水氣體體積與容器氣壓關係

我們由開放式容器所測得的鹽水噴出速度 v 與理論值 v_1 比較，嘗試找出其關係式，

$$v_1 = 1.34v + 0.29 \quad (7-6)$$

發現實驗速度 v 與理論速度 v_1 有正比的相關性，利用這個特性來修正我們封密容器所測量的噴出速度。再利用白努利方程式(式 7-3)求得封閉式容器上方氣體壓力 P_1 ，使用 Excel 擬合找到氣體體積 V 與氣體壓力 P_1 的擬合方程式

$$P_1 = 1.96 \times 10^5 V^{-0.84} \quad (7-7)$$

利用上式(式 7-7)可以推得在未將鹽水打入容器中時，整個氣體體積為 2.107L 時，內部氣壓應為 1atm，而我們將 $V=2.107L$ 代入公式得到壓力為 $1.05 \times 10^5 N/m^2$ ，誤差約為 3.7%。

3. 1.320L 的水 水密度 $\rho = 0.99g/cm^3$

開放容器			封閉容器				
水高 $y(m)$	實驗速度 $v(m/s)$	理論速度 $v_1(m/s)$	水高 $y(m)$	氣體體積 $V(L)$	速度 $v(m/s)$	理論速度 $v_1 = 2.40 * v - 0.71(m/s)$	容器內氣壓 $P_1(N/m^2)$ (式 7-3)
0.25	1.21	2.21	0.238	0.263	17.40	41.05	9.33×10^5
0.24	1.20	2.17	0.223	0.353	15.23	35.842	7.35×10^5
0.23	1.18	2.12	0.208	0.443	13.03	30.562	5.62×10^5
0.22	1.16	2.08	0.193	0.533	11.00	25.69	4.26×10^5
0.21	1.14	2.03	0.178	0.623	9.23	21.442	3.27×10^5
0.2	1.13	1.98	0.163	0.713	8.18	18.922	2.77×10^5
0.19	1.10	1.93	0.148	0.803	7.30	16.81	2.40×10^5
0.18	1.07	1.88	0.133	0.893	6.17	14.098	1.98×10^5

表 7-4 1.320L 的水噴出速度與理論值修正

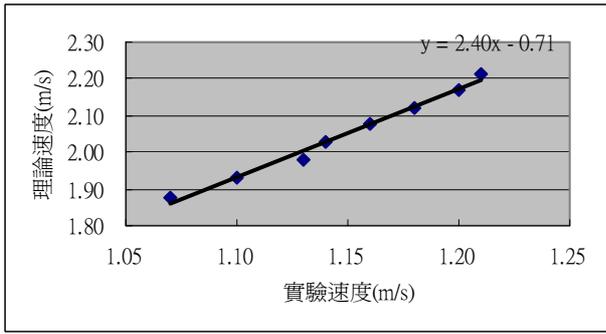


圖 7-5 1.320L 水實驗速度與理論速度關係

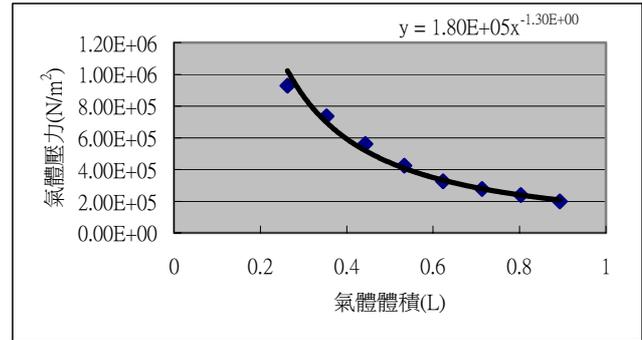


圖 7-6 1.320L 水氣體體積與容器氣壓關係

我們由開放式容器所測得的水噴出速度 v 與理論值 v_1 比較，嘗試找出其關係式，

$$v_1 = 2.40v - 0.71 \quad (7-8)$$

發現實驗速度 v 與理論速度 v_1 有正比的相關性，利用這個特性來修正我們封密容器所測量的噴出速度。再利用白努利方程式(式 7-3)求得封閉式容器上方氣體壓力 P_1 ，使用 Excel 擬合找到氣體體積 V 與氣體壓力 P_1 的擬合方程式

$$P_1 = 1.80 \times 10^5 V^{-1.30} \quad (7-9)$$

利用上式(式 7-9)可以推得在未將水打入容器中時，整個氣體體積為 1.32L 時，內部氣壓應為 1atm，而我們將 $V=1.32L$ 代入公式得到壓力為 $1.25 \times 10^5 N/m^2$ ，誤差約為 23.4%。

4. 0.683 L 的水 水密度 $\rho = 0.99g/cm^3$

開放容器			封閉容器				
水高 $y(m)$	實驗速度 $v(m/s)$	理論速度 $v_1(m/s)$	水高 $y(m)$	氣體體積 $V(L)$	速度 $v(m/s)$	理論速度 $v_1 = 1.69 * v - 0.21(m/s)$	容器內氣壓 $P_1(N/m^2)$ (式 7-3)
0.197	1.04	1.96	0.197	0.08	13.81	23.55	3.74×10^5
0.187	1.00	1.91	0.187	0.12	12.57	21.45	3.27×10^5
0.177	0.98	1.86	0.177	0.16	11.27	19.26	2.83×10^5
0.167	0.94	1.81	0.167	0.20	10.36	17.72	2.55×10^5
0.157	0.91	1.75	0.157	0.24	9.00	15.42	2.17×10^5
0.147	0.88	1.70	0.147	0.28	7.85	13.48	1.90×10^5
0.137	0.84	1.64	0.137	0.32	7.14	12.28	1.75×10^5
0.127	0.81	1.58	0.127	0.36	6.14	10.59	1.56×10^5

表 7-5 0.683L 的水噴出速度與理論值修正

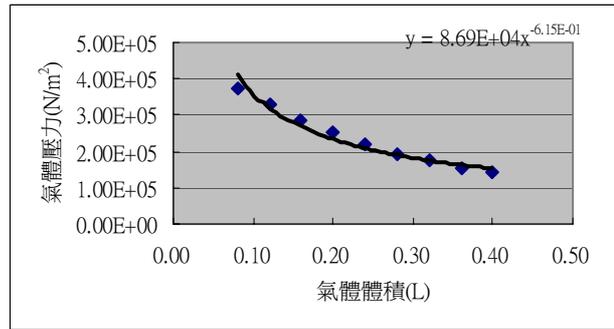
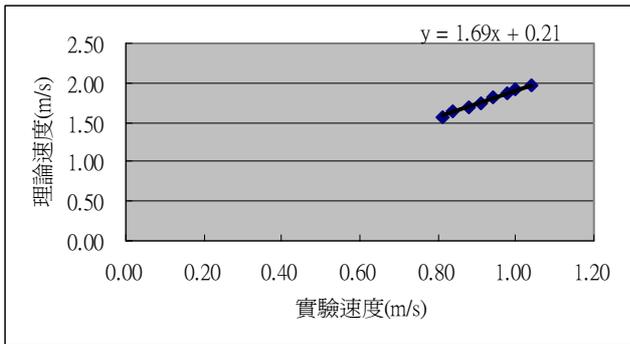


圖 7-7 0.683L 水--實驗速度與理論速度關係

圖 7-8 0.683L 水--氣體體積與容器氣壓關係

我們由開放式容器所測得的水噴出速度 v 與理論值 v_1 比較，嘗試找出其關係式，

$$v_1 = 1.69v + 0.21 \quad (7-10)$$

發現實驗速度 v 與理論速度 v_1 有正比的相關性，利用這個特性來修正我們封密容器所測量的噴出速度。再利用白努利方程式(式 7-3)求得封閉式容器上方氣體壓力 P_1 ，使用 Excel 擬合找到氣體體積 V 與氣體壓力 P_1 的擬合方程式

$$P_1 = 8.69 \times 10^4 V^{-0.62} \quad (7-11)$$

利用上式(式 7-9)可以推得在未將水打入容器中時，整個氣體體積為 0.683L 時，內部氣壓應為 1atm，而我們將 $V=0.683L$ 代入公式得到壓力為 $1.10 \times 10^5 N/m^2$ ，誤差約為 8.6%。

5. 2 L 的紅墨水 水密度 $\rho = 0.99g/cm^3$

開放容器			封閉容器				
水高 y(m)	實驗速度 v(m/s)	理論速度 v ₁ (m/s)	水高 y(m)	氣體體積 V(L)	速度 v(m/s)	理論速度 v ₁ = 1.69*v- 0.21(m/s)	容器內氣壓 P ₁ (N/m ²)(式 7-3)
0.186	0.66	1.91	0.186	0.87	10.90	16.59	2.36×10 ⁵
0.176	0.63	1.86	0.176	0.96	10.20	15.47571	2.18×10 ⁵
0.166	0.59	1.80	0.166	1.05	9.13	13.76143	1.93×10 ⁵
0.156	0.56	1.75	0.156	1.14	8.21	12.29286	1.75×10 ⁵
0.146	0.52	1.69	0.146	1.23	7.53	11.19571	1.62×10 ⁵
0.136	0.49	1.63	0.136	1.32	6.96	10.28143	1.52×10 ⁵
0.126	0.45	1.57	0.126	1.41	6.29	9.218571	1.42×10 ⁵
0.116	0.41	1.51	0.116	1.5	5.59	8.092857	1.33×10 ⁵

表 7-6 2L 的水噴出速度與理論值修正

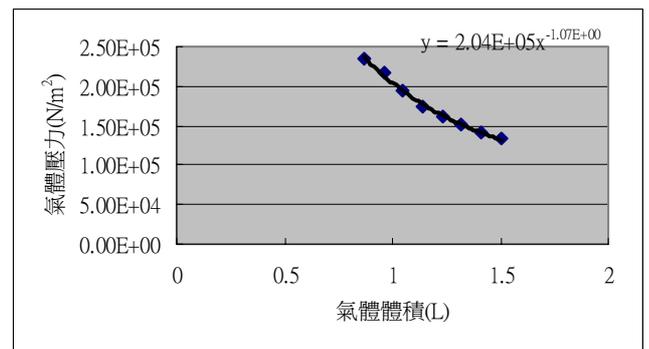
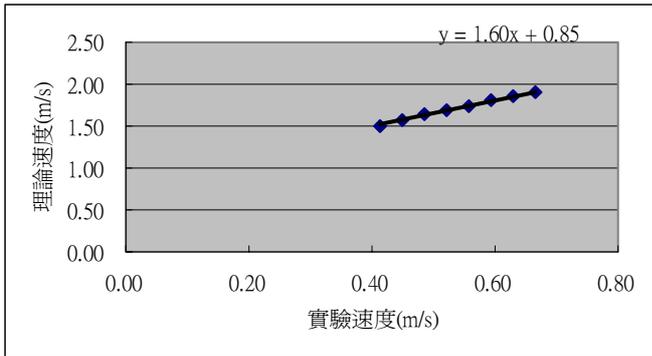


圖 7-9 2L 水--實驗速度與理論速度關係 圖 7-10 2L 水--氣體體積與容器氣壓關係

我們由開放式容器所測得的水噴出速度 v 與理論值 v_1 比較，嘗試找出其關係式，

$$v_1 = 1.60v + 0.85 \quad (7-10)$$

發現實驗速度 v 與理論速度 v_1 有正比的相關性，利用這個特性來修正我們封密容器所測量的噴出速度。再利用白努利方程式(式 7-3)求得封閉式容器上方氣體壓力 P_1 ，使用 Excel 擬合找到氣體體積 V 與氣體壓力 P_1 的擬合方程式

$$P_1 = 2.04 \times 10^4 V^{-1.07} \quad (7-11)$$

利用上式(式 7-9)可以推得在未將水打入容器中時，整個氣體體積為 2.107L 時，內部氣壓應為 1atm，而我們將 $V=2.107L$ 代入公式得到壓力為 $9.20 \times 10^4 N/m^2$ ，誤差約為 9.2%。

6. 封閉式容器定量氣體體積與氣壓關係：

2.107L 水	$P_1 = 1.93 \times 10^5 V^{-0.80}$
2.107L 鹽水	$P_1 = 1.96 \times 10^5 V^{-0.84}$
1.320L 水	$P_1 = 1.80 \times 10^5 V^{-1.30}$
0.683L 水	$P_1 = 8.69 \times 10^4 V^{-0.62}$
2.107L 紅水	$P_1 = 2.04 \times 10^4 V^{-1.07}$

由上列可得到真實氣體氣壓與體積非直接反比關係。

7. 封閉式容器修正噴出速度測得的氣壓誤差

測量氣壓方式	2.107L 水	2.107L 鹽水	1.320L 水	0.683L 水	2.107L 紅水
1atm 結果(N/m^2)	1.06×10^5	1.05×10^5	1.25×10^5	1.1×10^5	9.2×10^4
誤差	4.6%	3.7%	23.4%	8.6%	9.2%

由我們修正後的噴出速度去找尋氣壓和氣體體積的關係，而得到 1atm 的誤差很明顯的改善許多。而其中以較大容積的 2L 汽水瓶實驗誤差較小，是因其測量數據點時液柱高可以較高，液體噴出時速度較快，可以克服表面張力等因素，而且因液體噴射距離較遠，我們測量噴射距離也較準確。另一方面我們在推導液體理論噴出速度時，有利用容器截面積 A_1 遠大於噴水口的截面積 A_2 (式 5-24)而推得，而容器較大者因截面積較大，比較近似式 5-24 誤差較小。反之，683mL 開放式容器實驗因壓力太小，噴射距離太短使得我們測量誤差相對之下提高很多，且容器截面積與噴水口截面積相差較 2L 的容器小，故由式 5-24 推得誤差較大。

捌、 結論

在實驗中，我們證明液體因液壓所造成噴射速度與噴射距離與液體壓力成正比關係，即液柱越高、壓力越大、噴射速度越快。同時在封閉式容器實驗中，我們發現氣體體積 V 與氣體壓力 P 的乘積並非一個定值，而是隨著氣壓的增大， PV 的數值先增加後減小，這樣的結果顯然與必需是理想氣體下的波以耳定律不同，但也證明了真實氣體 PV 的數值非定值，與 1842 年，法國人勒尼奧從實驗中相同。

在未做任何修正下，利用液體噴出距離推得噴出距離與總壓(氣體壓力加上液柱造成的壓力)的關係，求得 1 大氣壓力時氣體壓力約等於 76~101cm 水柱造成的壓力，實驗誤差很大，出乎我們的預料，很明顯的壓力無法以這種噴射距離直接求得。

但我們改以開放式容器所測得的噴出速度與理論值做修正，做為封閉式容器實驗的修正依據，再利用白努利方程式求得 1 大氣壓力時氣壓約為 $9.2 \times 10^4 \sim 1.25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ，此時誤差降低到 3.7%~23.4%，已大大降低實驗誤差，顯然空氣阻力等因素的修正是必要的。

由這樣的一個實驗我們可以去測量不同氣體的在不同體積所造成的壓力，然而使用這種方式雖然較高中課程的以水銀做實驗的波以耳定律安全很多，而且實驗容器較易取得。但在一開始之前使用容器、壓力和射程基本資料的建立是要花很多時間及耐性的。

玖、 參考資料

- 一、林明瑞，物質科學物理篇(上)，南一書局企業股份有限公司，2004 年。
- 二、林明瑞，物質科學物理篇(下)教師手冊，南一書局企業股份有限公司，2004 年。
- 三、褚德三，物質科學物理篇(下)，龍騰文化事業公司，2004 年。
- 四、褚德三，物質科學物理篇(下)教師手冊，龍騰文化事業公司，2004 年。
- 五、吳友仁，物理基礎觀念，東華書局，1986 年。
- 六、費因曼，物理第一冊(中譯本)，徐氏基金會，1992 年。
- 七、師大物理教學實驗網站，<http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/indexTree.html>

評 語

040116 壓力與水共舞

本實驗能針對高中物理教材內容設計探討，並設計簡單器材，可協助理解高中課程。唯本實驗証明了“真實氣體”不遵守波以耳定律。究竟是氣體的表現或實驗誤差，似乎有待商確。