

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 物理科

第三名

040112

被困住的水波？

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者： 高二 皇甫鈺妘 高二 陳思詠	指導老師： 邱莉華
--------------------------	--------------

關鍵詞：表面波、全反射

# 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書內容

## 作品名稱：被困住的水波？

### 壹、 摘要：

高中物理教材中以水波作波動之折射現象的演示，使我們不禁好奇，水波是否與光波一樣有全反射的現象呢？因此決定對此做一番研究，並希望能做出水波的全反射現象。

為確保研究結果的準確性，我們從理論著手，先了解水波表面波波速公式的推導過程，得知其中的假設條件，並依據這些條件及多次的預備實驗改進高中水波實驗的器材，以確保實驗結果在公式可解釋的範圍內。接著進行驗證水波公式的實驗，確認實驗設計正確與否。在全反射實驗之前，先進行折射實驗，再次確認實驗條件控制無誤。最後確實做出了全反射的現象，但波紋並非如預期中在介面完全反射，而是有部分非折射波穿透至深水區。

再次查詢更深入的資料後，得知光的全反射其實並非在介面完全反射，而是穿透一定距離後才逐漸反射。由此推及水波的全反射，我們看到的穿透波應為全反射的正常現象。因水波波長遠大於光的波長，而可以觀察到此現象。

整個過程中，我們也有兩點意外的發現。第一是在公式探討中發現普遍參考資料上公式的錯誤使用；第二則是使用光感應器可測量水波實驗中難掌握的頻率及波速數據。

我們從這個過程中學到很多，也深感本身知識的不足，希望能繼續學習，並對水波做更深入的研究。

## 貳、 研究動機

南一版高中物質科學物理篇下冊在第十三章波動的章節中，以光波與水波來說明波動現象，且以水波實驗演示波的折射現象。我們不禁好奇：光有全反射，那水波呢？水波有全反射嗎？

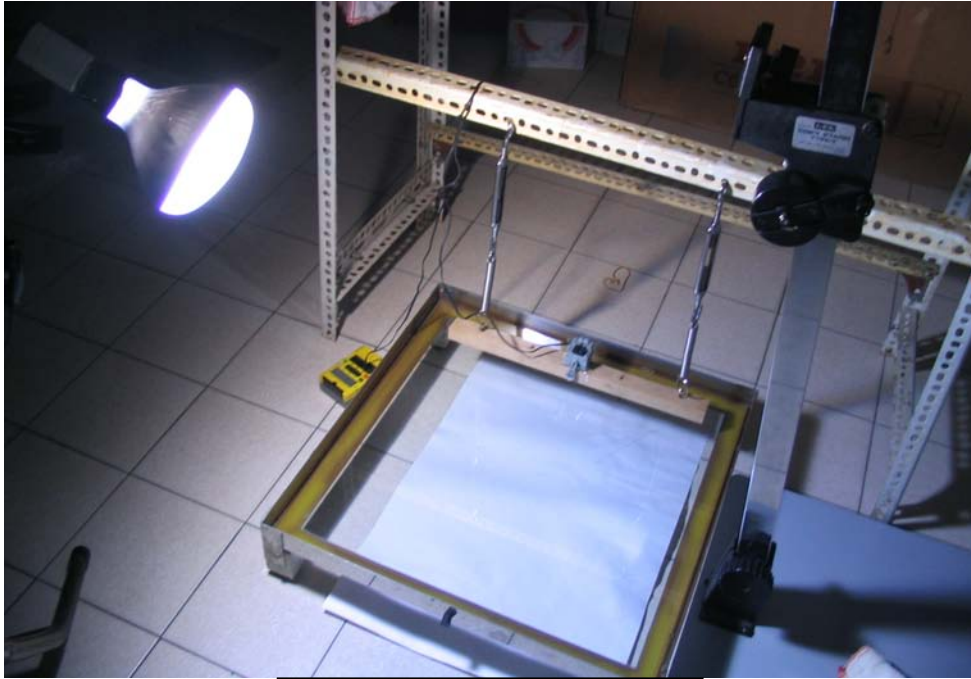
眾所皆知，光的全反射是光從光密介質傳到光疏介質時，能量被封鎖在光密介質中的現象。那麼，水波如果出現全反射現象時，是不是也會出現能量被封鎖住的狀況？高中課程對水波的介紹無法為我們解答這個問題，查過許多文獻也沒有明確的答案。於是我們想對水波做一番研究探討，期望能在高中實驗室的水波槽中做出水波的全反射現象。

## 參、 研究目的

- 一、 驗證水波公式
- 二、 探討水波折射性質
- 三、 觀察水波的全反射
- 四、 改進實驗方法與技術

## 肆、 研究設備及器材

- 一、 水波槽：水波槽、水平儀、海綿、透明壓克力板（15×50×0.5cm 和 35×50×0.5cm 各 4 個）、捲尺、水。
- 二、 起波設備：萬能角鋼架、Robotics Command System（簡稱 RCX）、樂高馬達（型號 Electric Technic Motor 9V）、起波木條、彈簧 2 個、調節螺絲 2 個。
- 三、 拍攝設備：翻拍架（相機固定座）、無影燈、數位相機、白紙、畫有 1 cm 格線的紙。其中數位相機可拍攝電影，經過事先的校正，確認其拍攝頻率為每秒 15 片。
- 四、 光感應器設備：光感應器 2 個、PASCO 介面主機、DataStudio 軟體、電腦、雷射筆 2 支，固定器（用來固定雷射筆及光感應器）。



照片一、水波槽與拍攝設備



照片二、起波設備



照片三、RCX



照片四、樂高馬達



照片五、調節螺絲與彈簧



照片六、數位相機固定座



圖七、無影燈



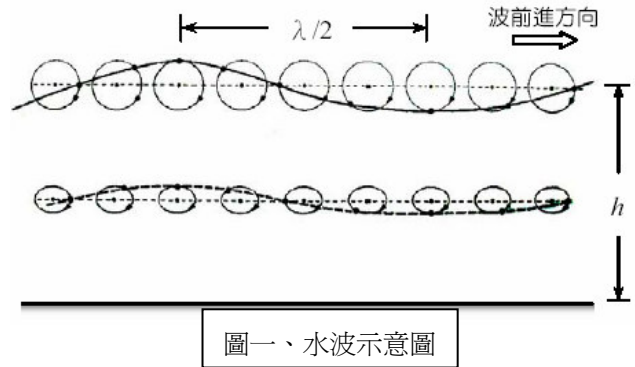
照片八、光感應器與 PASCO 介面主機

## 伍、 研究過程或方法

### 一、 文獻探討

#### (一) 水波

當水面產生波動時，並不是只有表面的水在振動，而是全部的水都以相同的頻率在振動，其原因為重力及張力所共同造成，因此水粒子是同時進行橫向與縱向的週期性運動，可概略以正弦函數表示，且因重力關係，越往下層的水波其週期運動的軌跡越扁，振幅越小。但整體的波仍看來類似橫波。【圖一】



#### (二) 表面波方程式的推導

##### 1. 控制方程式的推導

在滿足「不旋轉流」與「質量守恆」兩條件下，設定其控制方程式( govern equation ) 為： $\nabla^2 \phi = 0$  (Laplace equation)， $\phi$  為流速勢 (velocity potential)。

##### (1) 不旋轉流

以  $\vec{V}$  表流場速度，則流場不旋轉時  $\text{curl } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0$ 。

若  $\alpha$  是一個位置函數，且  $\nabla \times \nabla \alpha = 0$ ，則  $\vec{V} = \nabla \alpha$ 。 $\phi$  與  $\alpha$  都是位置函數，所以流場速度與流速勢有下列關係：

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad (1)$$

##### (2) 質量守恆

若流場中某一小塊體積所包含的質量不改變(質量守恆)，但其形狀隨位置不同，可能會改變。若以  $\rho$  表密度，質量  $m = \int_V \rho dV$ ，且因為質量守恆，全微分為 0

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (2)$$

根據雷諾的傳輸理論 (Raynold's Transport Theorem)

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (3)$$

因為此一小塊體積可在流場中任選，所以積分結果為 0 與積分範圍無關，積分號內

的式子為 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \vec{V}) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

由全微分的定義可知

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (5)$$

則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (6)$$

$$\because \frac{D\rho}{Dt} = 0 \text{ 且 } \rho \neq 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (7)$$

(3)由 (1) 與 (7) 式可得到 Laplace equation，也就是流場的控制方程式：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi &= 0 \\ \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

## 2. 波的表面流場

規定波高以  $\eta$  表示。則

$$\eta(x, z, t) = y \quad (9)$$

且  $y - \eta = 0$ ，則

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(y - \eta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(y - \eta) + \vec{V} \cdot \nabla(y - \eta) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

若  $\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ ， $u$ 、 $v$ 、 $w$  為三個分量，(10) 式展開後得表面波邊界條件：

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

## 3. 微小振幅波下的白努力公式



$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{G}{\rho} = \frac{F(t)}{\rho} \quad (12)$$

(1) 設水面靜止不動時  $\frac{p}{\rho} + \frac{G}{\rho} = 0$ ，且  $p = -\rho g y$ ，得：

$$\frac{p}{\rho} + \frac{G}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{G}{\rho} = g y$$

(2) 在波面時  $y = \eta$

可得波面的動力邊界條件為：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + g \eta = \frac{F(t)}{\rho} \quad (13)$$

4. 假設水底  $y = -h$  處水流不可穿透，則流場沒有速度的垂直分量：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

5. 假設波的流場為二維的，則  $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ ，若為微小振幅波，則  $\eta$  很小，且

$$\text{平滑} \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} \cong 0$$

6. 將二維流場與微小振幅波假設引入 (11) 式，可得：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{y=\eta} \quad (15)$$

7. 因為  $\eta$  很小，所以  $\vec{V}$  也小  $\Rightarrow \left| \vec{V} \right|^2 \cong 0$ ，若將 (13) 式的  $\frac{F(t)}{\rho}$  併入  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ，則 (13) 式變

成：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g \eta = 0 \Big|_{y=0} \quad (16)$$

8. (16) 式對時間微分再將 (15) 式代入，可得：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0} \quad (17)$$

9. 因為在  $y \cong 0$  處壓力為定值(為大氣壓)  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ ，則：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

10. 根據所知表面波的特性，我們很自然的認為應以三角函數來表示  $\eta$ ，如下：

$$\eta(x, t) = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \quad (19)$$

11. 從 (19) 式尋找符合以上邊界條件之  $\varphi$  如下，其中 A、B 為未知常數，需由邊界條件算出，而 c 為「相速度」，也就是俗稱的波速。

$$\varphi = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right)\left(A \cdot \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} + B \cdot \cosh \frac{2\pi y}{\lambda}\right) = 0 \quad (20)$$

(1) 由邊界條件 (14) 式：

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \left( A \frac{2\pi}{\lambda} \cosh \frac{2\pi h}{\lambda} + B \frac{2\pi}{\lambda} \sinh \frac{2\pi h}{\lambda} \right) &= 0 \\ A \cosh \frac{2\pi h}{\lambda} + B \sinh \frac{2\pi h}{\lambda} &= 0 \\ A &= -B \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \end{aligned} \quad (21)$$

(2) 由邊界條件 (19) 式：

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 \cdot B \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) + g \cdot B \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \frac{2\pi}{\lambda} (\tanh \frac{2\pi h}{\lambda}) &= 0 \\ B \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \left[ -\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 + g \frac{2\pi}{\lambda} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right] &= 0 \\ \because \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \text{ 不為 } 0, \text{ 所以：} & \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 + g \frac{2\pi}{\lambda} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \\ c &= \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \end{aligned} \quad (23)$$

12. (23) 式的討論：

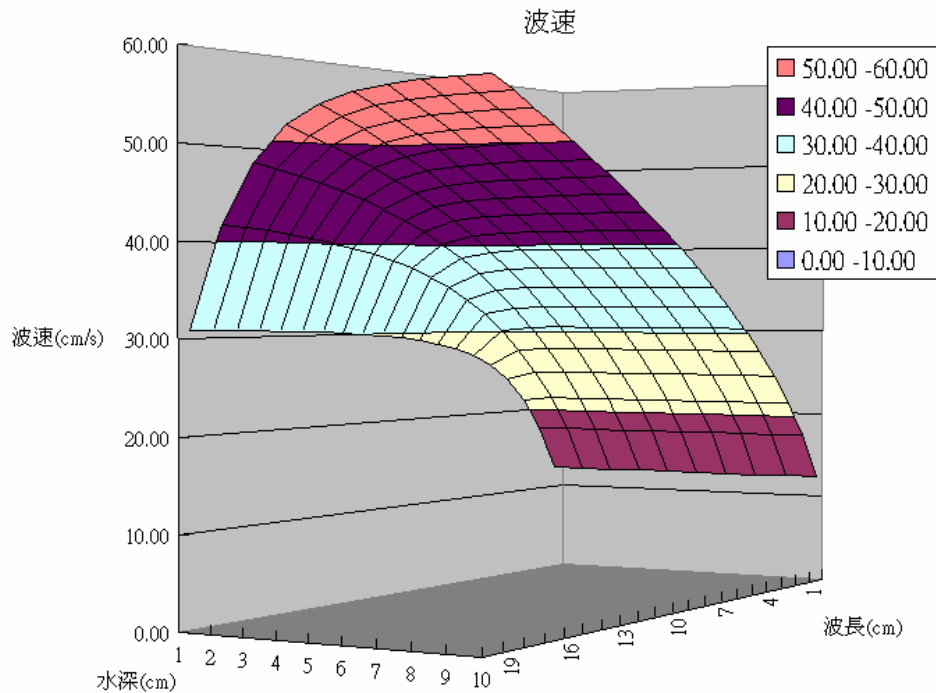
$$\begin{aligned} (1) \text{ 淺水時, } \lambda \gg h &\Rightarrow \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \rightarrow \frac{2\pi h}{\lambda} \\ c &= \sqrt{gh} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 深水時, } \lambda \ll h &\Rightarrow \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \rightarrow 1 \\ c &= \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} \end{aligned} \quad (25)$$

(三) 公式探討：

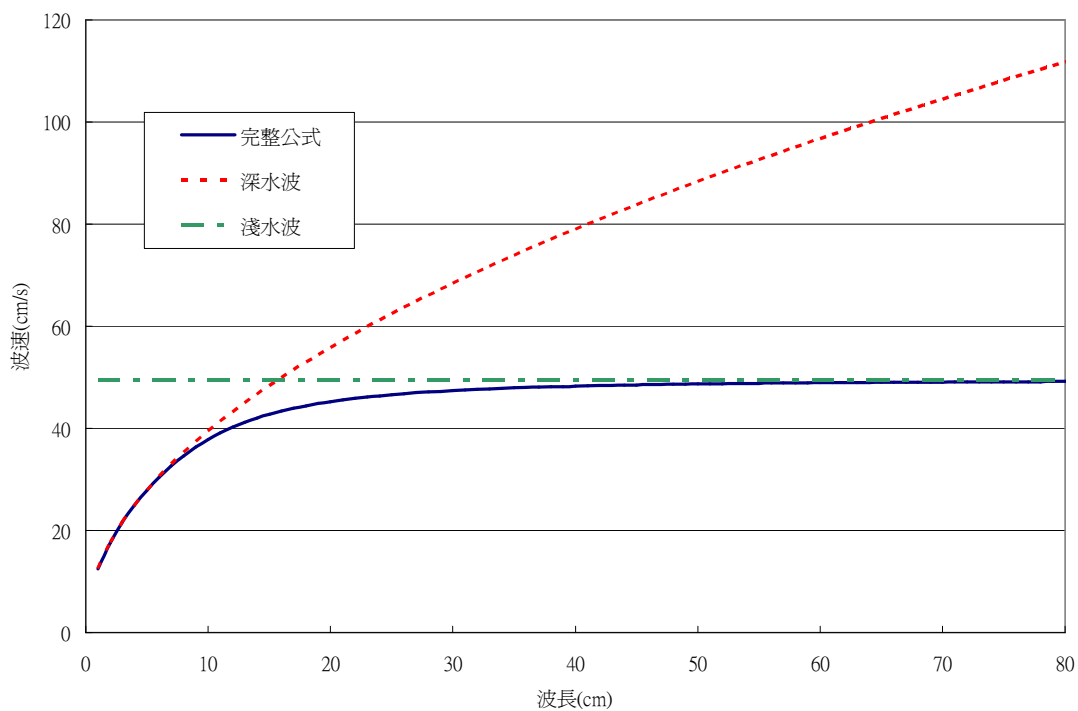
根據預備實驗，可大略得知實驗器材的條件以及可能的結果。我們發現實驗條件既不屬於淺水波，也不吻合深水波。於是我們將一些預設值代入公式作探討，以預測公式與實驗的關係，決定適用的公式。

- 完整的公式  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$ ，其水深、波長與波速的關係如圖二。



圖二、完整公式水深波長與波速關係圖

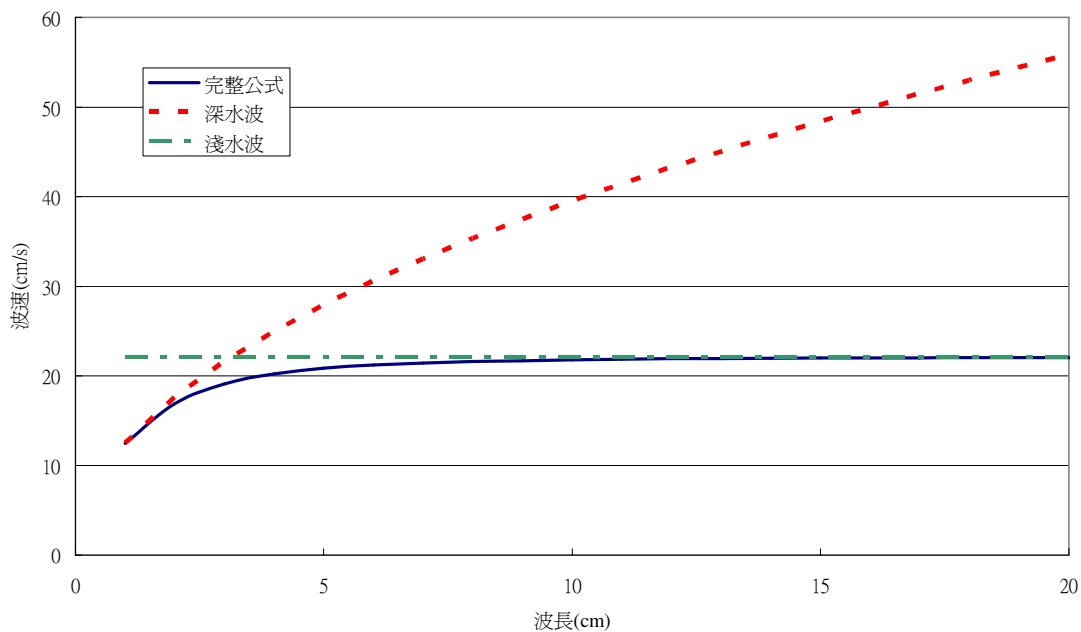
- 淺水波公式  $c = \sqrt{gh}$ 、深水波公式  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$  與完整公式  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  在水深 2.5 公分時，波長與波速的關係如圖三：



圖三、淺水波深水波與完整公式式在水深 2.5 公分波長與波速的關係圖

3.  $c = \sqrt{gh}$ 、 $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$  與  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  在水深 0.5 公分時，波長與波速的關係如圖

四：



圖四、淺水波深水波與完整公式式在水深 0.5 公分波長與波速的關係圖

4. 在高中課程的參考資料中，往往以淺水波公式來做水波實驗波速近似值的推算。但

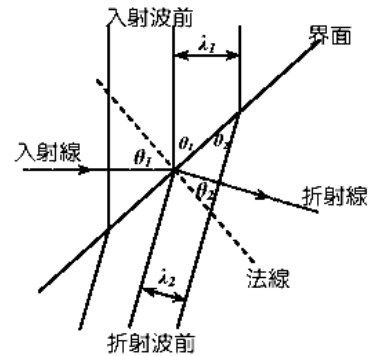
是根據圖三、四，若要使用  $c = \sqrt{gh}$ ，0.5 cm 水深時的波長必須大於 6 cm；2.5 cm 水深時的波長必須大於 40 cm。但是學校實驗用水波槽器材，以其造波頻率與水深條件，由實驗觀測，0.5 cm 水深時的波長約 3 cm；而 2.5 cm 水深時的波長約 10 cm，因此並不適合使用淺水波公式推算近似值。

5. 為求精準，決定使用  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  作計算。

(四) 折射定律：

1. 由【圖五】知折射率公式如下：

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



直線波由深水至淺水的折射分析圖

圖五、折射示意

(五) 光之全反射定義：

1. 臨界角：當光由光密介質射入光疏介質，其折射角為  $90^\circ$  時的入射角。
2. 全反射即為入射角大於臨界角時，入射光全部由介面反射。

二、 預備實驗：

正式實驗之前，我們進行許多預備實驗改進器材的缺點，以利控制實驗的條件，避免實驗結果超出公式可解釋的範圍，且增加實驗的準確度。

(一) 器材問題：

1. 學校水波折射實驗中，製造淺水區效果的方式為四腳墊高的壓克力板，其中間懸空部分仍算是流場的一部份，不符合當  $y < -h$  時便沒有流場的假設，且會影響淺水區的流場，不易製造出明顯的折射效果。應將淺水區下方的流場完全隔絕。
2. 由於我們的實驗並非以頻率為操作變因，所以可用定頻的樂高馬達作為起波器馬達。為符合「微小振幅波」、「波形平滑」的條件，起波器以彈簧和調節螺絲掛在萬用鋼架上。使起波器與水波槽分為兩個獨立的系統。除了可以調節起波器位置，使其振動時僅輕觸水面，也盡可能避免將振動傳到水槽，更方便在折射實驗的部分調整入射角度。

(二) 拍攝問題：

1. 相機架設在附有轉輪的翻拍架上，可穩定上下移動，並固定為由正上方拍攝，以去

除相角差。

2. 光源若不夠強，拍攝出的波大多模糊不清難辨識波峰位置。改用無影燈，聚光效果佳，影像清晰度大增【照片九】。波長的數據誤差可由 9.60%減低為 5.78%；波速誤差由 3.7%降為 2.4%。
3. 無影燈應視為點光源，必須依格線紙的位置，校正量測的波長數據。
4. 水波槽離地的高度據實驗經驗，離地面較近的投影效果較好。



照片九、0.5 cm水深時拍攝波長數據影格

### 三、 驗證水波公式：

(一) 實驗目的：確認水波槽條件符合公式

(二) 實驗方法：

1. 架設水波槽設備：

(1).架水波槽，海綿貼在其四周以消波，調整水波槽水平，白紙放水波槽正下方。

(2).將裝有樂高馬達的起波器兩端分別以彈簧、調節螺絲掛在腳架上。

2. 將水倒入水波槽，水深 0.5 cm。

3. 調整起波器使之恰好輕觸水面。

4. 架設光感應設備：

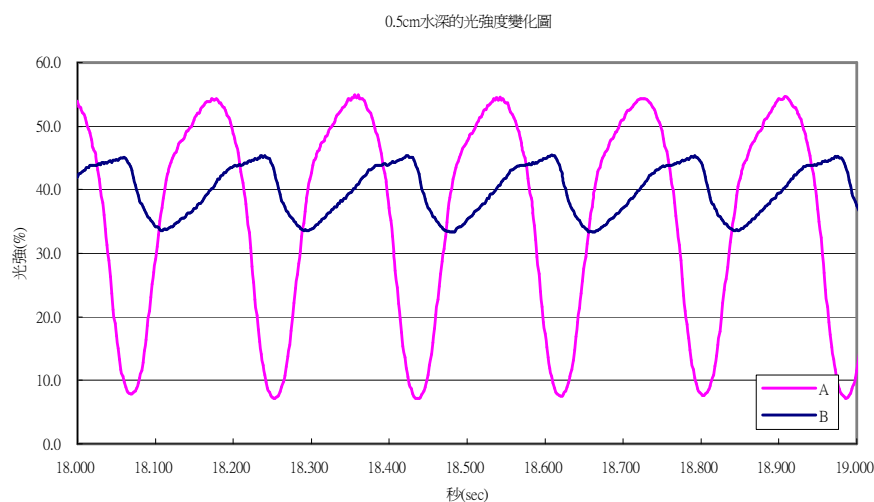
(1).將 PASCO 介面主機連接電腦及光感應器。

(2).將 2 支雷射筆固定於水波槽上方，調整間距為 4.5cm，穿過水面射入水波槽下方的光感應器 A、B 接收孔。兩道雷射所在之平面與波前進方向平行。

(3).開啓 DataStudio 軟體，試驗接收效果。

5. 開始起波，幾秒後啓動感應器接收數據 30 秒。

6. 將水深調整為 1cm、1.5cm、2cm、2.5cm，並重複步驟 3.到 5.。
7. 拆除光感應器和雷射筆。
8. 無影燈架在適當的位置使波紋清楚。
9. 數位相機設於水波槽正上方；鏡頭下方白紙上放 1 cm 格線的紙，以便量測波長。
10. 量測浮於水面的尺及其投影長度，求投影波長之放大倍率。
11. 開始起波，以相機攝影 10 秒。
12. 將水深調整至 2cm、1.5cm、1cm、0.5cm，並重複步驟 9.到 11.。
13. 數據處理：



圖六、0.5 cm水深的強度變化圖

(1).光感數據---波速：

取兩台光感應器 A、B 測得之光強最小值的時間差，除以兩者間的距離 4.5 cm，求得波速。光感應器的取樣率為每秒 500 次，各水深取 40 個數據做平均，並求平均標準差。【見圖六。註：在此以圖呈現，但實際上是直接由原始數據找最小值，因為從圖上不易判斷最小值的精準時刻。】

(2).光感數據---頻率：

取一台光感數據兩點最小值間的時間差倒數可得頻率。共 400 個數據做平均，並求平均標準差作為誤差值。

(3).拍攝數據---波長：

將將影片傳入電腦分割成影格（15 格/秒），進行波長量測，取 20 個數據並校正倍率。

14. 用 Excel 計算討論。

四、 折射實驗：波由深水區進入淺水區的折射現象。

(一) 實驗目的：探討水波的折射現象。

(二) 實驗方法：

1. 架設水波槽設備。
2. 將四塊壓克力板（規格 15×50×0.5cm，共厚 2.0 cm）【照片十】放入水波槽，形成 0.5 cm與 2.5 cm的水深組合。起波器置於深水區，輕觸水面。
3. 調整入射角為 30°。
4. 將數位相機架在翻拍架上，調整位置使介面線位於畫面中央。
5. 啓動馬達開始起波，拍攝影片 5 秒。
6. 調整角度至 45°和 60°，並重複步驟 4.、5.。
7. 抽出一塊壓克力板並加水至適當深度，分別製造出下列水深組合（深-淺）。重複步驟 3.至 6.。  
(2.5cm-0.5cm)、2.0cm-0.5cm、1.5cm-0.5cm、1.0cm-0.5cm  
2.5cm-1.0cm、 2.0cm-1.0cm、1.5cm-1.0cm  
2.5cm-1.5cm、 2.0cm-1.5cm  
2.5cm-2.0cm
8. 數據處理：將影片傳入電腦分割成影格，選取最佳畫面利用繪圖軟體量出入射角及折射角。每種水深的每組角度各取 5 個數據，選最佳的 3 個求誤差百分率；總計每種水深組的誤差百分率為 9 個數據作平均。
9. 所得數據用 Excel 做計算。



照片十、四塊壓克力板（規格 35×50×0.5cm，共厚 2.0 cm）

五、 全反射實驗：由波的折射現象而進入全反射的實驗。

(一) 實驗目的：觀察全反射現象。



(二) 實驗方法：

1. 架設水波槽設備。
2. 將四塊壓克力板（規格 15×50×0.5cm，共厚 2.0 cm）【照片十一】放入水波槽，倒入水，使淺水 0.5 cm、深水 2.5 cm 的水深組合。起波器置於淺水區，輕觸水面。
3. 調整入射角為 30°。
4. 將數位相機架在翻拍架上，調整位置使介面線位於視野中央。
5. 啓動馬達開始起波，拍攝影片 5 秒。
6. 調整角度至 45°和 60°，並重複步驟 4、5。
7. 抽出一塊壓克力板並加水至適當深度，分別製造出下列水深組合（淺-深）。重複步驟 3 至 6。

2.0cm-2.5cm

1.5cm-2.0cm、1.5cm-2.5cm

1.0cm-1.5cm、1.0cm-2.0cm、1.0cm-2.5cm

0.5cm-1.0cm、0.5cm-1.5cm、0.5cm-2.0cm、(0.5cm-2.5cm)

8. 數據處理：將影片傳入電腦，分割為影格，選取最佳畫面利用繪圖軟體量出入射角及折射角。每種水深的每組角度各取 5 個數據，選最佳的 3 個求誤差百分率；總計每種水深組的誤差百分率為 9 個數據作平均。若發生全反射則直接註記。
9. 所得數據用 Excel 做計算。



照片十一、四塊壓克力板（規格 35×50×0.5cm，共厚 2.0 cm）

## 陸、 研究結果

### 一、 驗證水波公式：

#### (一) 名詞定義：

(1).光感波速與光感頻率：光感應器測得的波速與頻率。

(2).光感波長：光感波速與光感頻率代入  $\lambda = \frac{c}{f}$  求得。

(3).拍照波長：影片中量得並校正的波長。

(4).拍照波速：拍照波長代入 (23) 式， $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  求得。

(5).理論波長與理論波速：因為光感應器測頻率時受外界影響最小，標準差誤差值小，

可供計算理論值之用，於是將頻率以  $\lambda = \frac{c}{f}$  及已知水深  $h$  代入  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  求

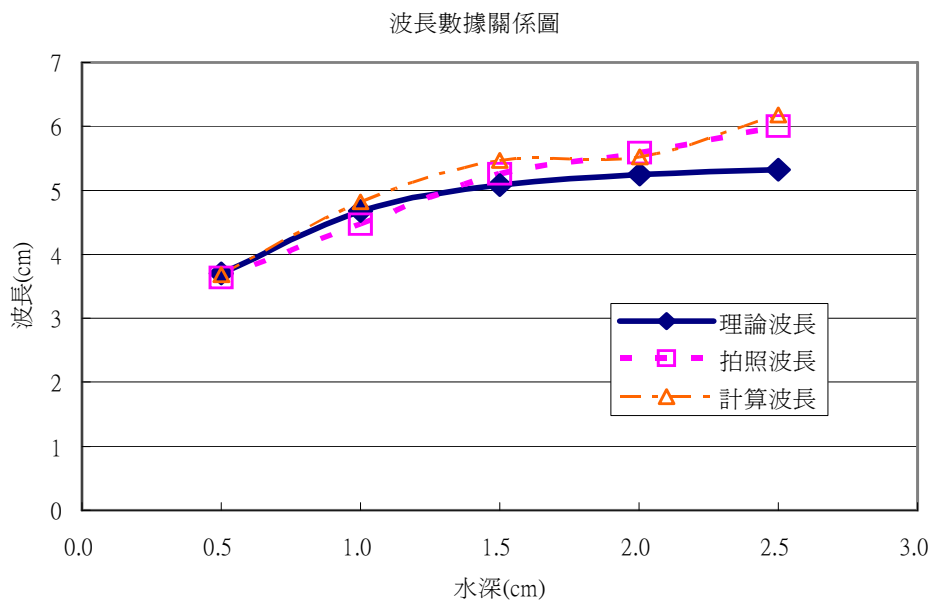
出理論波長及理論波速。

(二) 原始數據：頻率平均值為 5.403Hz。

水深(cm)	光感頻率(Hz)	光感波速(cm/s)	拍照波長(cm)
0.5	5.453	19.995	3.64
1.0	5.374	25.876	4.47
1.5	5.350	29.307	5.26
2.0	5.436	30.019	5.58
2.5	5.404	33.411	6.00

(三) 波長：(說明：「A vs B 誤差百分率」意為 「(A-B) / B」)

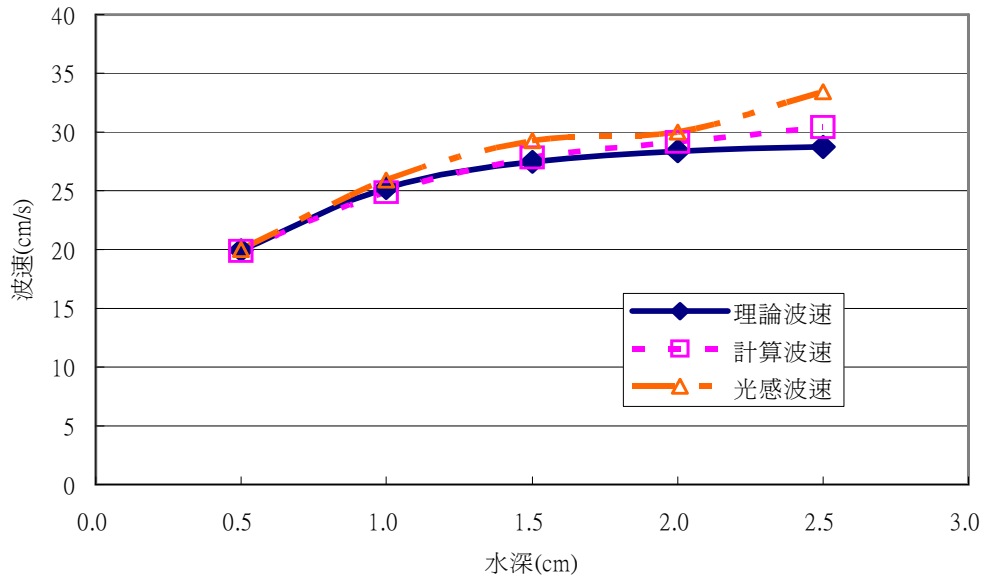
水深 (cm)	理論波長 (cm)	拍照波長 (cm)	光感波長 (cm)	拍照 vs 光感 誤差百分率	光感 vs 理論 誤差百分率	拍照 vs 理論 誤差百分率
0.5	3.70	3.64	3.68	1.19%	0.54%	1.72%
1.0	4.68	4.47	4.82	7.36%	2.99%	4.59%
1.5	5.08	5.26	5.47	3.87%	7.68%	3.51%
2.0	5.25	5.58	5.52	1.11%	5.14%	6.31%
2.5	5.32	6.00	6.18	2.91%	16.17%	12.78%
平均值：				3.29%	6.50%	5.78%



圖七、波長數據關係圖

(四) 波速：

水深 (cm)	理論波速 (cm/s)	拍照波速 (cm/s)	光感波速 (cm/s)	光感 vs 拍照 誤差百分率	光感 vs 理論 誤差百分率	拍照 vs 理論 誤差百分率
0.5	19.96	19.90	19.995	0.47%	0.16%	0.31%
1.0	25.23	24.85	25.876	4.12%	2.55%	1.51%
1.5	27.47	27.85	29.307	5.22%	6.69%	1.41%
2.0	28.38	29.18	30.019	2.87%	5.78%	2.83%
2.5	28.73	30.43	33.411	9.80%	16.30%	5.92%
平均值：				4.50%	6.30%	2.40%



圖八、波速數據關係圖

## 二、水波折射實驗：

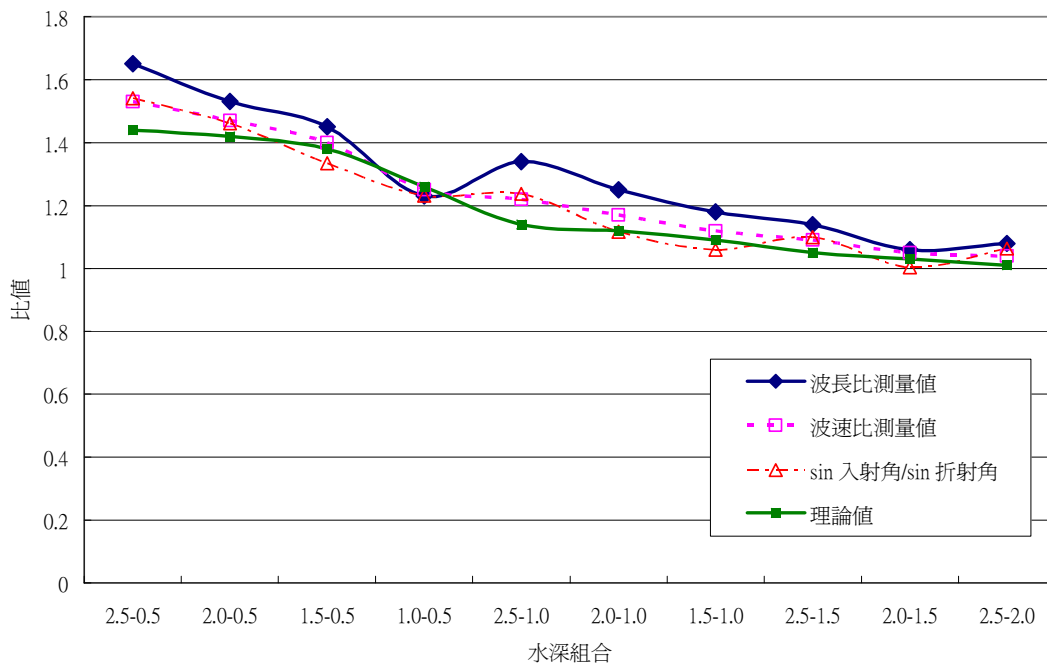
因本實驗僅以拍攝取得入射及折射角，故波長及波速直接取自「驗證水波公式」實驗的拍照數據；理論值亦使用該實驗的理論值。

(一) 將入射角  $\theta_1$  及折射角  $\theta_2$  代入  $n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  中，結果如下表：

水深(深-淺)	n 值	波長比 測量值	波長比 理論值	n 值 vs 測量波長比 誤差百分率	n 值 vs 理論波長比 誤差百分率
2.5-0.5	1.54	1.65	1.44	6.99%	7.01%
2.0-0.5	1.46	1.53	1.42	8.49%	2.89%
1.5-0.5	1.33	1.45	1.38	8.65%	3.33%
1.0-0.5	1.23	1.23	1.26	5.22%	2.30%
2.5-1.0	1.24	1.34	1.14	8.53%	8.51%
2.0-1.0	1.12	1.25	1.12	11.33%	0.27%
1.5-1.0	1.06	1.18	1.09	10.81%	2.84%
2.5-1.5	1.10	1.14	1.05	4.76%	4.76%
2.0-1.5	1.00	1.06	1.03	6.84%	2.52%
2.5-2.0	1.06	1.08	1.01	5.22%	5.25%
平均誤差				7.68%	3.97%

(二) 將入射角  $\theta_1$  及折射角  $\theta_2$  代入  $n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$  中，結果如下表：

水深(深-淺)	n 值	波速比 測量值	波速比 理論值	n 值 vs 測量波速比 誤差百分率	n 值 vs 理論波速比 誤差百分率
2.5-0.5	1.54	1.53	1.44	2.96%	7.01%
2.0-0.5	1.46	1.47	1.42	5.36%	2.89%
1.5-0.5	1.33	1.40	1.38	6.67%	3.33%
1.0-0.5	1.23	1.25	1.26	5.40%	2.30%
2.5-1.0	1.24	1.22	1.14	2.54%	8.51%
2.0-1.0	1.12	1.17	1.12	4.61%	0.27%
1.5-1.0	1.06	1.12	1.09	5.45%	2.84%
2.5-1.5	1.10	1.09	1.05	2.91%	4.76%
2.0-1.5	1.00	1.05	1.03	5.89%	2.52%
2.5-2.0	1.06	1.04	1.01	2.54%	5.25%
平均誤差				4.43%	3.97%



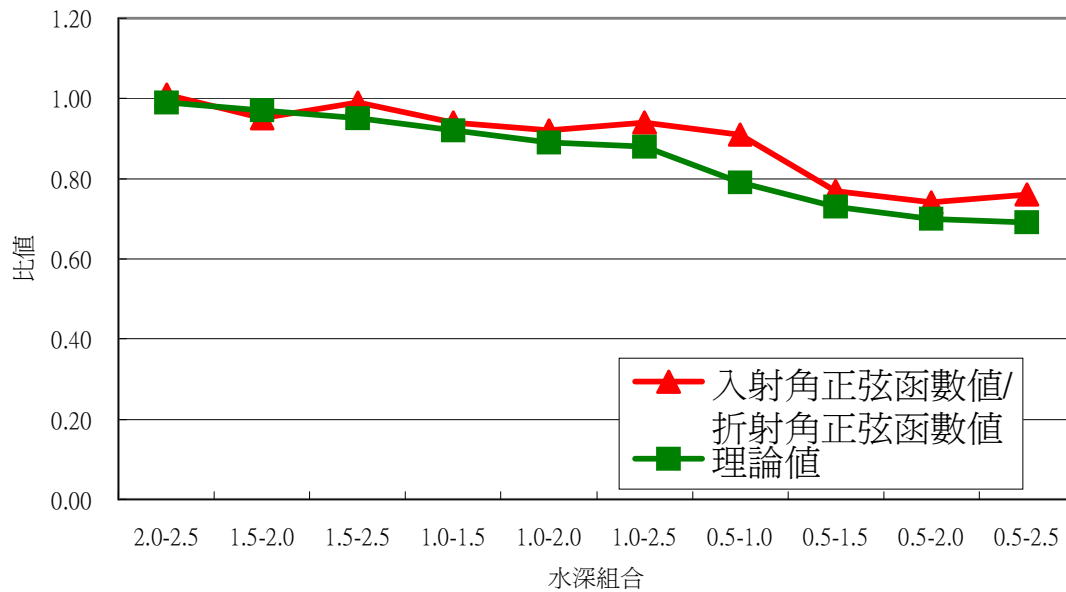
圖九、折射數據一關係圖  
(註：理論值的波長比及波速比相同，單以理論值代表)

### 三、全反射實驗：

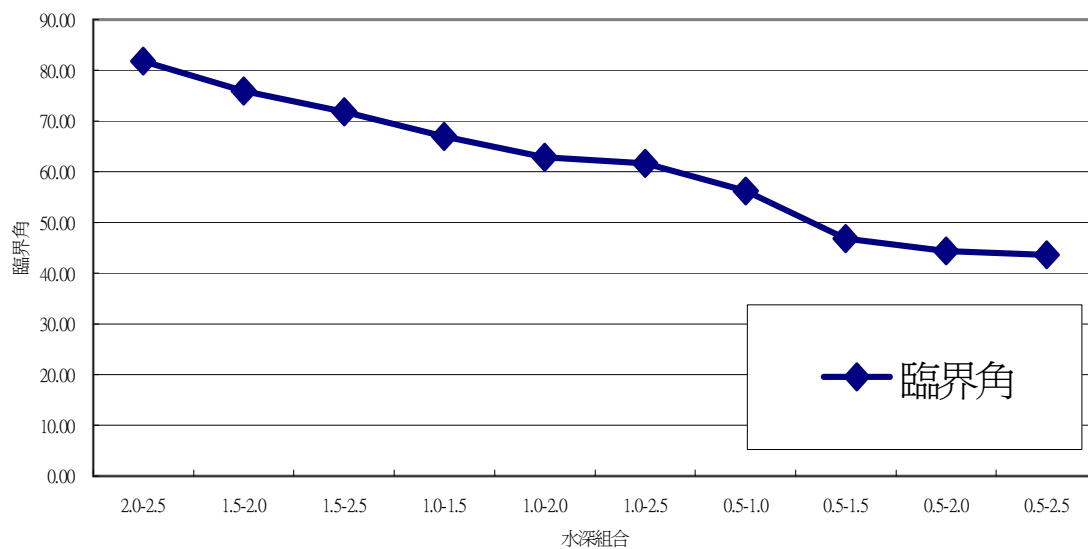
將入射角  $\theta_1$  及折射角  $\theta_2$  代入  $n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  中。此數據只取理論值做比較，取自「驗

證水波公式」實驗的理論波長。入射角分類的角度只做參考，實際上會測量更精準的數據。有些角度已經超過或接近臨界角，反射現象過強而無法測量其折射角，直接標註於表格。結果如下表：

	入射角分類	$\sin \theta_1 / \sin \theta_2$	$\sin \theta_1 / \sin \theta_2$ 平均值	理論 臨界角	波長比 理論值	誤差百分率
2.0-2.5	30	1.00	0.99	81.89	0.99	0.34%
2.0-2.5	45	0.99				
2.0-2.5	60	1.00				
1.5-2.0	30	0.91	0.95	75.93	0.97	3.12%
1.5-2.0	45	0.96				
1.5-2.0	60	0.99				
1.5-2.5	30	0.99	0.98	71.81	0.95	3.51%
1.5-2.5	45	0.98				
1.5-2.5	60	0.98				
1.0-1.5	30	0.93	0.94	66.93	0.92	3.09%
1.0-1.5	45	0.93				
1.0-1.5	60	0.97				
1.0-2.0	30	0.89	0.92	62.87	0.89	4.36%
1.0-2.0	45	0.92				
1.0-2.0	60	0.96				
1.0-2.5	30	0.90	0.94	61.64	0.88	5.49%
1.0-2.5	45	0.94				
1.0-2.5	60	0.99				
0.5-1.0	30	0.84	0.91	56.19	0.79	6.51%
0.5-1.0	45	0.90				
0.5-1.0	60	0.99				
0.5-1.5	30	0.77	0.77	46.89	0.73	6.08%
0.5-1.5	45	全反射				
0.5-1.5	60	全反射				
0.5-2.0	30	0.74	0.74	44.43	0.70	9.24%
0.5-2.0	45	全反射				
0.5-2.0	60	全反射				
0.5-2.5	30	0.76	0.76	43.63	0.69	9.66%
0.5-2.5	45	全反射				
0.5-2.5	60	全反射			誤差平均值：5.14%	



圖十、折射數據二關係圖



圖十一、臨界角與水深組合關係圖

## 柒、 討論

### 一、 驗證水波公式：

- (一) 因光感應器的靈敏度過高，使用普通的燈時會測到光本身的閃爍頻率，影響實驗結果，須改使用高頻雷射光。
- (二) 雷射光的電力消耗快，實驗進行到後半段時開始不穩定【見圖六的 B 曲線】，其疊加結果對於量測波速的數據可能有影響；但因雷射的週期遠小於水波的週期，不影響頻率數據。

(三) 預期拍照數據的誤差應較光感應器大，結果卻相反，推測為雷射光不穩定影響。

(四) 相同數據來源，波長和波速的誤差卻不同，推測為  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  中有開根號及超越正切函數造成。

(五) 數據誤差最大值 6.5 %，顯示我們的實驗設計應符合公式的條件。且以 0.5 cm 水深的數據最準確，圖七與圖八中三種數據皆在 0.5 cm 水深時重疊，因此可認定符合微小振幅波條件。

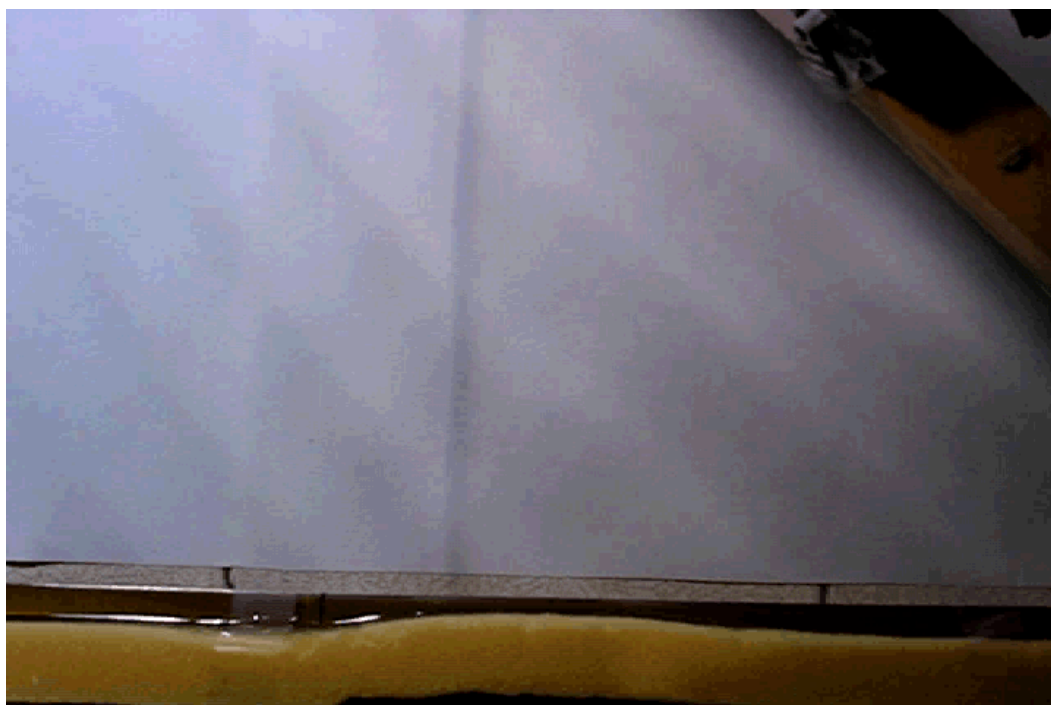
(六) 資料中得知馬達空轉時頻率應為 6Hz，但是在實驗中，我們卻測出 5.4016Hz 的頻率。原因為：水的阻力的影響及彈簧本身的自然頻率，三者交互作用下使馬達為 6Hz 的頻率變成 5.4Hz。

## 二、 水波折射實驗：

(一) 理論值的波長比及波速比相等，但測量值卻不同。推測為通過介面時，頻率有些微的改變，使其誤差略大。

(二) 波長比的誤差較波速比的大，可能是之前實驗中波長的誤差本身就比波速大的緣故。

(三) 從圖十可看出當波速差越小時、折射率越小的趨勢。



照片十二、1.0 cm-0.5 cm 45 度入射角時折射現象

## 三、 全反射實驗：

預期中，超過臨界角的入射波應完全在介面反射，而使水波如被困在淺水區般，無



法透射到深水區。但我們卻在介面後的深水區發現穿透波紋，且穿透波與入射波間沒有夾角，因此不認為是折射波【照片十三】。



照片十三、0.5 cm-2.5 cm水深 45 度入射角時全反射現象

我們對此感到疑惑，於是再度查詢資料，得知：

水波單純由淺水區到深水區的全反射，雖然在深水區仍可以看到波穿透過去，但是穿透過去的波會快速遞減，若淺水區寬度很窄，水波有機會再次進入深水區。以光波說明此性質：

1. 由最基礎的平面電磁波的波動方程式，可知光波在均勻、絕緣的三度空間中，電場強度的複數解為

$$\tilde{E} = E \cdot \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (26)$$

波數向量  $\vec{k}$  的方向為波前進的方向

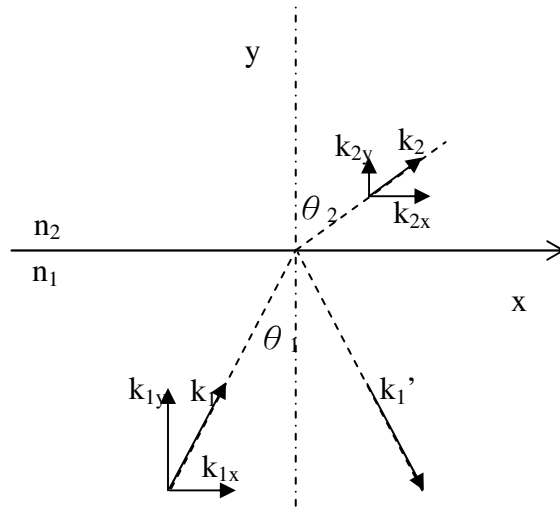
2. 光由介質 1(折射率  $n_1$ )進入介質 2(折射率  $n_2$ )，且  $n_1 > n_2$ 。入射光、折射光、反射光在同一平面上，所以 z 分量為零

$$\text{入射: } \tilde{E}_1 = E_1 \cdot \exp[i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)] = E_1 \cdot \exp[i(k_{1x} \cdot x + k_{1y} \cdot y - \omega t)] \quad (27)$$

$$\text{反射: } \tilde{E}'_1 = E'_1 \cdot \exp[i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{r} - \omega t)] = E'_1 \cdot \exp[i(k_{1x}' \cdot x + k_{1y}' \cdot y - \omega t)] \quad (28)$$

$$\text{折射: } \tilde{E}_2 = E_2 \cdot \exp[i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)] = E_1 \cdot \exp[i(k_{2x} \cdot x + k_{2y} \cdot y - \omega t)] \quad (29)$$

3. 由下圖【圖十二】可知  $k_{2y} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2}$  (30)



圖十二

#### 4. 折射定律

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

$$(1). \text{將 } k_2 \text{ 向量分解 } k_{2x} = k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1 \quad (31)$$

$$(2). \text{臨界角 } \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}, k_2 = k_1 \cdot \frac{n_2}{n_1} = k_1 \cdot \sin \theta_c \quad (32)$$

將(31)、(32)式代回 (30) 式得：

$$k_{2y} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_c - k_1^2 \sin^2 \theta_1} = k_1 \cdot \sqrt{\sin^2 \theta_c - \sin^2 \theta_1} \quad (33)$$

#### 5. 入射角 $\theta_1$ 大於臨界角 $\theta_c$ ，即為全反射。

此時波數  $k_{2y}$  為虛數，令  $k_{2y} = ik$  代回 (33) 式

$$k_{2y} = ik = ik_1 \cdot \sqrt{\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_c} \quad (34)$$

再代入 (29) 式

$$\tilde{E}_2 = E_2 \cdot \exp[i(k_{2x} \cdot x + ik \cdot y - \omega t)]$$

$$\tilde{E}_2 = E_2 \cdot \exp(-k \cdot y) \cdot \exp[i(k_{2x} \cdot x - \omega t)] \quad (35)$$

(35) 式表示當入射角大於臨界角時，在介質 2 中仍有穿透波，行進方向沿著界面方向(即 x 軸)，但沿著 y 方向其電場強度隨著指數函數迅速衰減。

#### 6. 定義光波在介質 2 中有效的穿透深度為入射波長的 d 倍

$$d = \frac{1}{k} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_c}} \quad (36)$$

7. 對於全反射，當入射角大於臨界角時，入射波的能量並非在介面上全部反射，而是穿透到介質 2 的一定深度後逐漸反射的，所以全反射時，反射波有一相位角。

8. 我們依此類推水波在發生全反射時，也有相同的效應，一如照片十三在深水區所發現的波紋。然而可見光波長數千埃，不易觀測，但水波波長數公分，較易觀察此現象。
9. 我們將全反射實驗的實驗結果中出現全反射的實驗條件代入(36)式，約略推算出其穿透深度，由下表可見當入射角與臨界角越相近時，其穿透深度越深：

水深(淺-深)	入射角	臨界角	波長倍率	穿透深度 (cm)
0.5-1.5	60	46.89	2.147	7.94
0.5-2.0	45	44.43	10.026	37.10
0.5-2.0	60	44.43	1.961	7.26
0.5-2.5	45	43.63	6.468	23.93
0.5-2.5	60	43.63	1.911	7.07

10. 由於目前數據不足，且實驗水波槽過小，介面後可穿透的寬度僅剩 15 公分，因此尚無法驗證此推算；另外，我們知道光波的理论中，此穿透波的強度在介面後會迅速遞減，且在遞減後仍會維持一段長度，要如何測量到這個微弱的波也是一項挑戰。須另進行實驗改進以作測量。

## 捌、 結論

### 一、 實驗器材：

- (一) 學校折射實驗以墊高四腳的壓克力板製造淺水效應之設計，不符水波公式所需條件，無法製造好的折射效果。應該使用實心墊高裝置。
- (二) 以樂高馬達作為起波器，較能控制穩定頻率及微小振幅波等條件。
- (三) 即使已知起波器的頻率，仍要再次測量，
- (四) 使用無影燈作光源並使水波槽離投影白紙近，拍攝效果較好。
- (五) 光感應器測量波速時需要更穩定的雷射光源。
- (六) 以光感應器測頻率可以測得很準確的水波頻率，比以往用閃頻器要來得方便及準確。

二、 學校實驗用水波槽符合完整水波公式  $c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$  所需條件。

三、 在高中課程參考資料中，常以淺水波公式  $c = \sqrt{gh}$  做水波實驗波速近似值的推算，但是根據公式探討及實驗結果並不適合以此公式推算近似值。

四、 水波在符合表面波方程式所需條件下，由淺水區通過介面而至深水區時，超過臨界

角後，確實有出現全反射現象。當其全反射時，在介面的另一邊會出現微弱的穿透波，並非像大眾所知的光的全反射般無波穿透，所以水波是關不住的。

#### 五、 未來研究方向：

在全反射的實驗討論中，我們得知波的全反射並非在介面上完全反射，而是短暫地穿透後再反射。我們希望能量測穿透波的長度，證實其與理論所推相同。但由於目前的水波槽寬度過小，無法測量到完整的穿透深度，且可進行實驗的數據過少，我們將採取改變最少的方法做部分改進以進行穿透深度的量測。

### 玖、 參考資料及其他

- 一、 教育部審定。高級中學物質科學物理篇下冊（再版）。臺北市：南一書局企業股份有限公司。（第十三章 波動）。（民 93）
- 二、 單薄、陳自強、黃棟州 譯著。量子物理學（再版）。台南市：復漢出版社。（223-248 頁）。（民 76）
- 三、 趙楷華、鍾錫華。光學。儒林圖書有限公司。（258-.275 頁）。（民 81）
- 四、 Corson D.R. and Lorrain P., *Electromagnetic Field and waves*, W.H. Freeman and Company. (Chapter12, pp.505-526) . (1972)
- 五、 Currie, I.G., *FUNDAMENTAL MECHANICS OF FLUIDS*, McGraw-Hill, Inc. (Chapter 1, Chapter 6) . (1974)
- 六、 Newman, J.N., *Marine Hydrodynamics*, The Massachusetts Institute of Technology. (Chapter 6) . (1977)

## 評 語

040112 被困住的水波？

本件作品以在水波槽引發線性波源，來探討水波的全反射現象，而能在全反射條件下，觀測到似衰逝波的透射波紋，但應可再以定量的物理參數來討論衰逝波行為，提供更多更扎實的實驗數據，証實所觀測得的透射波之物理特性，發展空間大。