

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

第二名

040111

會逆轉的石頭—Rattleback 逆旋現象

學校名稱： 臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 高至辰	鄭永銘
高二 郭先予	

關 鍵 詞：轉動、逆旋現象、Rattleback

摘要：

Rattleback (又名 Celt Stone) 爲一橢圓形底面之物體，當往某個特定的方向旋轉後，它會開始上下震盪，然後再朝相反的方向旋轉。逆轉原因來自動摩擦力之分力所造成的力矩，此分力與接觸面摩擦係數有關，在某些條件下會產生最佳逆轉效果。我們以自己所製作的模型，來分析各種變因與逆轉效果的關係。並觀測到運動過程中，其對稱中心在 X、Y 兩方向的震盪振幅會隨時間呈現收斂的狀態，軌跡呈現出「帶阻尼的利薩求圖形」。

壹、 研究動機

一次物理課(教學單元：轉動)，老師播放了一部短片。在影片中一塊橢圓形的石頭，在開始旋轉後不久逐漸地停止，然後竟然朝相反的方向逆轉！這種不可思議的現象，深深的吸引著我們，引起了我們濃厚的求知慾望。因此我們想要一探究竟，來分析出隱藏在驚奇背後的物理原理。並希望藉由這個「生動活潑有趣」的主題，重新喚醒大眾「生活皆科學，處處是驚奇」之體認。

貳、 研究目的

- 一、 尋找並製作出各種可逆轉的 Rattleback 模型
- 二、 探討配重的位置及質量對 RattleBack 逆轉之影響
- 三、 探討逆旋現象的能量變化關係
- 四、 探討接觸面性質所造成的影響
- 五、 分析其軌跡光點圖形來探討產生逆轉之原因

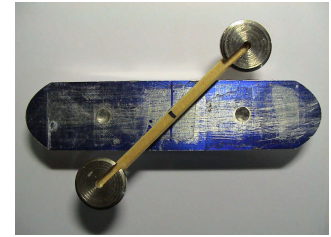
參、 研究設備及器材

- 一、 筆記型電腦、DV 攝影機(CCD) 、數位相機、雷射光筆、天平、彈簧秤。
- 二、 電腦軟體：MovieMaker、Excel、Mathematica、Cadkey、Matlab、Autolev Windows Plotting
- 三、 木板、紙板、玻璃、塑膠托盤、賽璐珞墊板、迴紋針、鵝卵石、湯匙、髮夾、彩蛋、茶壺、鋁製剛體模型、砝碼、量角器、塑膠支架、針車油、紙屏、描圖紙、竹筷、竹籤、膠帶、紙巾、紙黏土、迴紋針、泡綿膠。

肆、 研究過程及方法

- 一、 尋找並製作出各種可逆轉的 rattleback 模型，從中擇優選爲本實驗擷取數據之模型
 - (一)、 尋找周遭的物品：石頭、湯匙、髮夾、蛋殼…，經由配重找出可逆轉模型。
 - (二)、 自製模型：切割茶壺側邊的曲面來使用、以 mathematica 與 Cadkey 軟體畫出 3D 與 2D 圖交由鐵工廠以車床做出鋁製剛體。
- 二、 配重實驗—由各種 rattleback 模型中找出最佳模型，藉此來探討配重的位置及質量對其逆轉之影響。
 - (一)、 改變配重軸與橢圓面長軸的偏移夾角：

- 1、如右圖，將竹筷過質心，並在兩端之等長處，加上相同的固定質量(兩邊砝碼各 10g)，並固定砝碼與質心之距離(均為 5.5cm)。
- 2、操縱竹筷與長軸之夾角，其角度分別是 0 度、10 度、30 度、45 度、60 度、90 度
- 3、利用彈簧秤以定力撥動，並施力在 Rattleback 的特定位置，以測量其可逆轉的最大角度。



(二)、 改變兩砝碼至質心距離

- 1、控制與長軸所夾的偏移角度，使其固定在可逆轉之最佳角度。然後操縱兩個砝碼偏離中心的距離，此時兩砝碼距 Rattleback 中心之距離需彼此相同。
- 2、操縱兩砝碼距質心的距離，測量其可逆轉的最大角度。

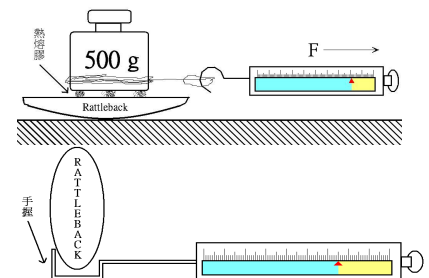
(三)、 改變配重質量

- 1、控制兩砝碼距質心的距離，使其固定在可逆轉之最佳數據；配重軸之偏移角度也固定在可逆轉之最佳條件下。
- 2、操縱兩砝碼的質量，測量其可逆轉的最大角度。

三、 摩擦實驗－探討 Rattleback 旋轉表面之粗糙程度對其逆轉情形之影響

(一)、 經由不同之接觸面實驗以找出最佳化的表面

- 1、尋找各種不同之表面
- 2、以彈簧秤測量各表面之 μ_s 、 μ_k ，並紀錄。
- 3、將 Rattleback 置於不同表面上，用一定力撥動，使之旋轉。分別紀錄施力大小、正向旋轉角度、逆轉次數以及每次逆旋之角度。

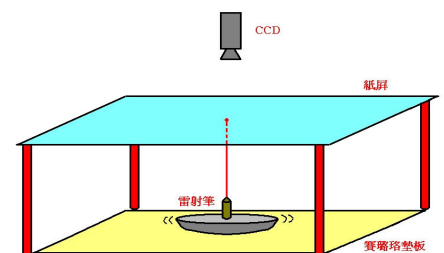


四、 將軸直接下壓－探討 Rattleback 之振動對其逆轉之影響

- 1、將竹筷固定於 Rattleback 之上，並使竹筷和長軸夾逆時針 45 度角
- 2、將竹筷之一端壓到底並放開，並觀察其轉動之方向並紀錄逆轉之最大角度

五、 拍攝 RattleBack 紙屏投影軌跡來探討其逆轉之成因

- 1、如右圖，將雷射光筆固定於 Rattleback 中心。
- 2、將描圖紙固定於塑膠支架上，將 Rattleback 模型適當配重後置於紙屏下。
- 3、打開雷射筆電源，以按壓的方式壓下 Rattleback 模型的長、短軸與與中線夾 45 度處，分別以 DV 拍攝雷射光點在描圖紙上所掃過之軌跡。
- 4、再以轉動的方式，以逆時鐘方向及順時鐘方向使其開始轉動，拍攝其軌跡。
- 5、以 MovieMaker 擷取畫面後，用小畫家定出光點的座標，再以 Excel 畫出光點之 X、Y 座標對時間的函數圖，以及 X-Y 軌跡曲線圖。
- 6、分析歸納所得之數據，並尋求其數學理論。



伍、 研究結果

一、 尋找並製作出各種可逆轉的 rattleback 模型：

(一)、 尋找生活周遭的物品：

- 1、 石頭：如右圖，可逆轉的外觀型態具有下列特性－表面非常光滑、近似橢圓外型、XYZ 三軸的轉動慣量彼此都不同、必須存在著不對稱性（例如缺一角），請參考影片 [stone1.wmv](#)、[stone2.wmv](#)。



- 2、 湯匙：如右圖，除了具有上列石頭的特性外，可以採用配重的方式來形成可逆轉現象，其配重方向不可與長軸或短軸重合，請參考影片 [spoon1.avi](#)。



- 3、 髮夾：如右圖，欲逆轉其配重方式與湯匙相似，且逆轉的效果十分的明顯。此模型有長短軸之剖面半徑固定的優點，請參考影片 [hairtie.wmv](#)。



- 4、 蛋殼：如右圖，欲逆轉其配重方式與湯匙相似，此模型具有可架設雷射光筆來研究光點軌跡之優點，是本實驗擷取光點軌跡的第一代雛形模型。請參考影片 [egg.wmv](#)。



(二)、 自製模型：

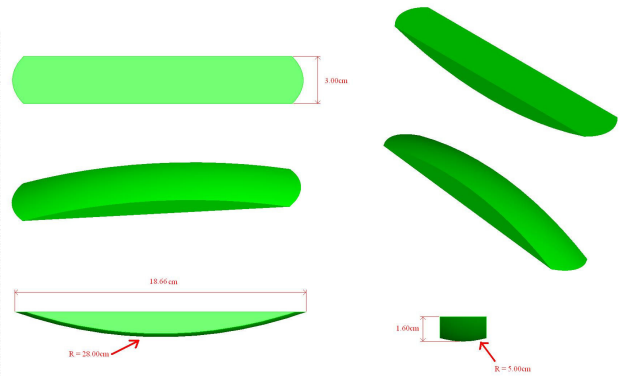
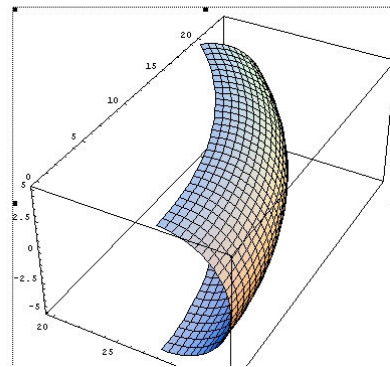
- 1、 茶壺：如右圖，茶壺側邊所切割下來的曲面與髮夾曲面類似，但逆轉效果並不如髮夾。我們推測原因是因為其重心太低所致，請參考影片 [teapot.avi](#)。
- 2、 鋁製剛體：如右圖，以 Mathematica 軟體畫出 3D 圖、以 Cadkey 畫出 2D 圖，並交由鐵工廠以車床做出成品。實驗證明這是所有模型中逆轉效果最好的，因此當成本實驗擷取光點軌跡的最佳模型。請參考影片 [rigid.mpg](#)。



```

In[7]:= T = {Cos[s] (R + r Sin[t]), Sin[s] (R + r Sin[t]), r Cos[t]}
Do[ParametricPlot3D[T /. {R -> 20, r -> j}, {s, 0, (0.25) Pi},
  {j, 5, 5}]
Out[7]:= {Cos[s] (R + r Sin[t]), Sin[s] (R + r Sin[t]), r Cos[t]}

```

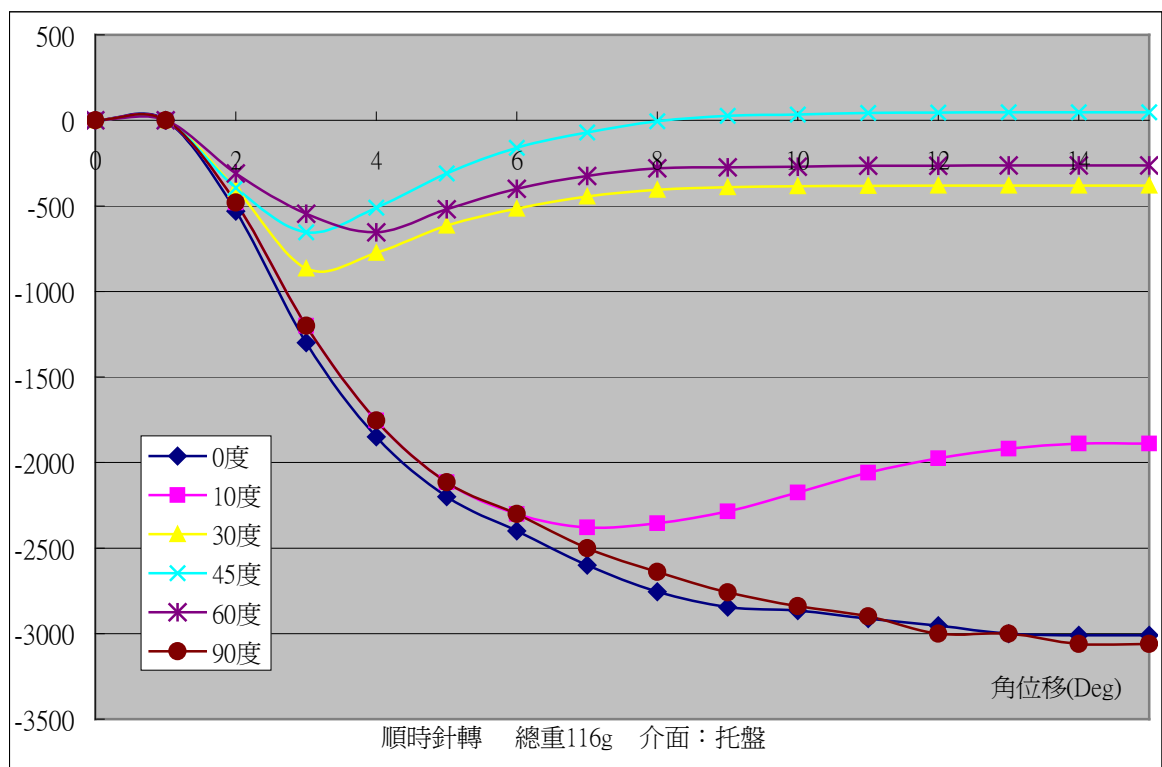


二、配重實驗

(一)、改變配重軸與橢圓面長軸的「偏移夾角」實驗：

1、配重為砝碼

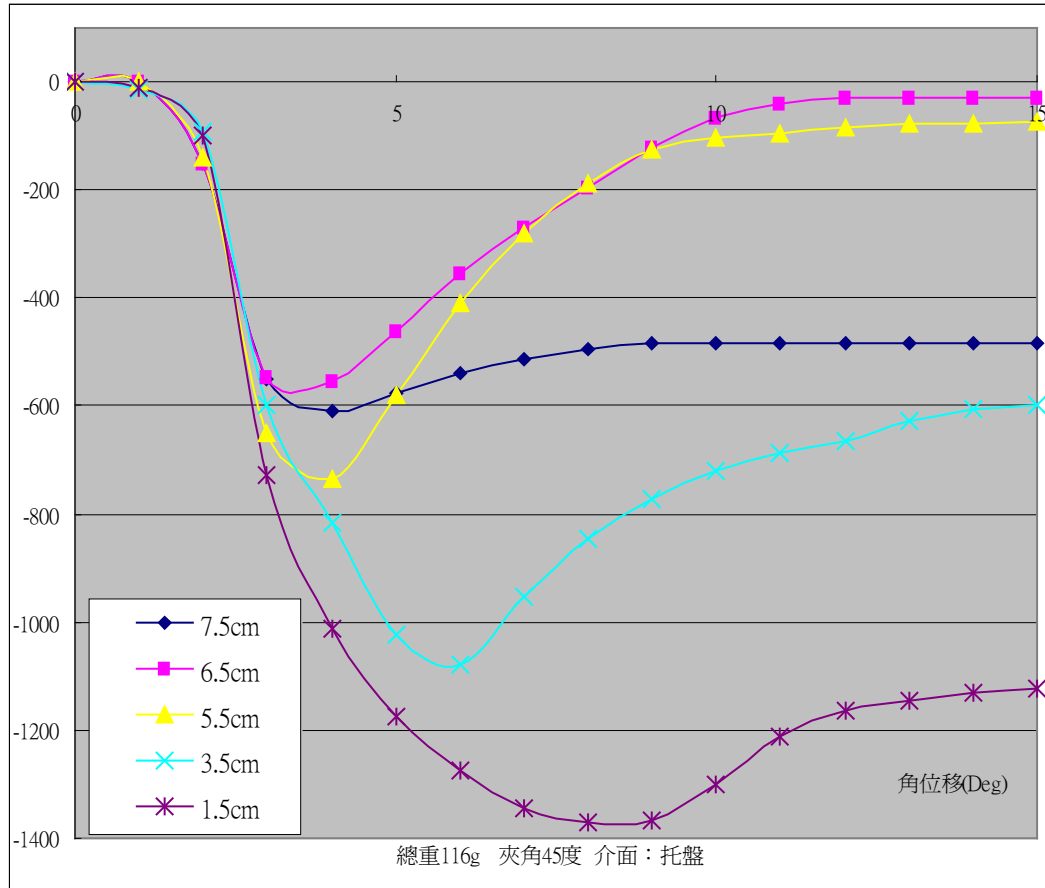
- (1) 鋁製 RattleBack 質量 96 g、砝碼 10g×2 個、系統總質量 116g
- (2) 介面：托盤 $\mu_s = 0.17632$ $\mu_k = 0.1227$
- (3) 配重與質心距離：5.5cm
- (4) 可逆轉角度：0 度→0°；10 度→460°；30 度→495°；45 度→607°；60 度→392；90 度→0°



(二)、「改變兩砝碼至質心距離」實驗：

1、配重為砝碼

- (1) 鋁製 RattleBack 質量 96 g、砝碼 10g×2 個、系統總質量 116g
- (2) 介面：托盤 $\mu_s = 0.17632$ $\mu_k = 0.1227$
- (3) 配重與長軸夾角：45°
- (4) 可逆轉角度：1.5cm→248°；3.5cm→480°；**5.5cm→810°**；6.5cm→525°；7.5cm→125°

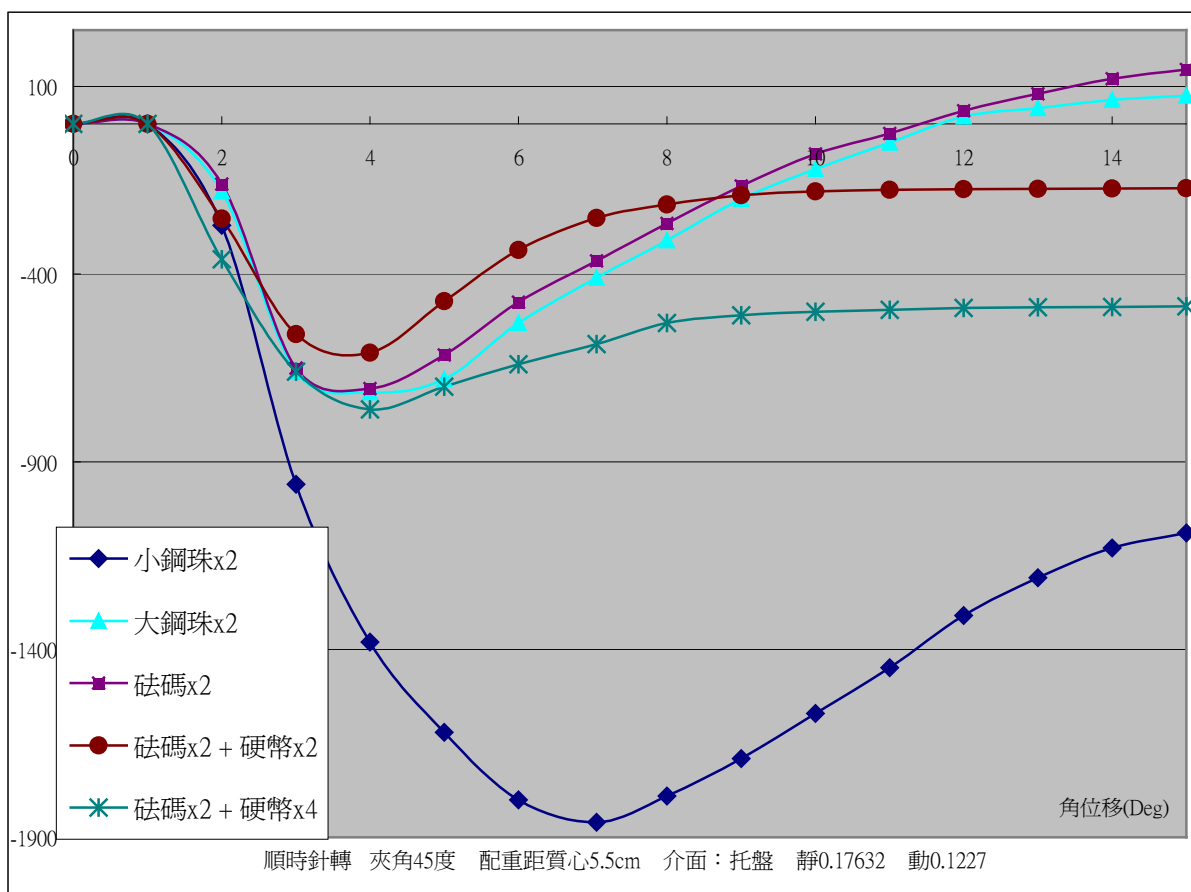


(三)、 「改變配重質量」實驗

1、 配重為砝碼

- (1) 鋁製 RattleBack 質量 96 g
- (2) 介面：托盤 $\mu_s = 0.17632$ $\mu_k = 0.1227$
- (3) 配重與長軸夾角：45 度
- (4) 本實驗所採用的五種配重數據如下表：

名稱	配重質量(g)	可逆轉角度(°)
小鋼珠×2	2.0	800
大鋼珠×2	8.0	605
砝碼×2	20.0	850
砝碼×2+硬幣×4	34.4	438
砝碼×2+硬幣×8	48.8	274



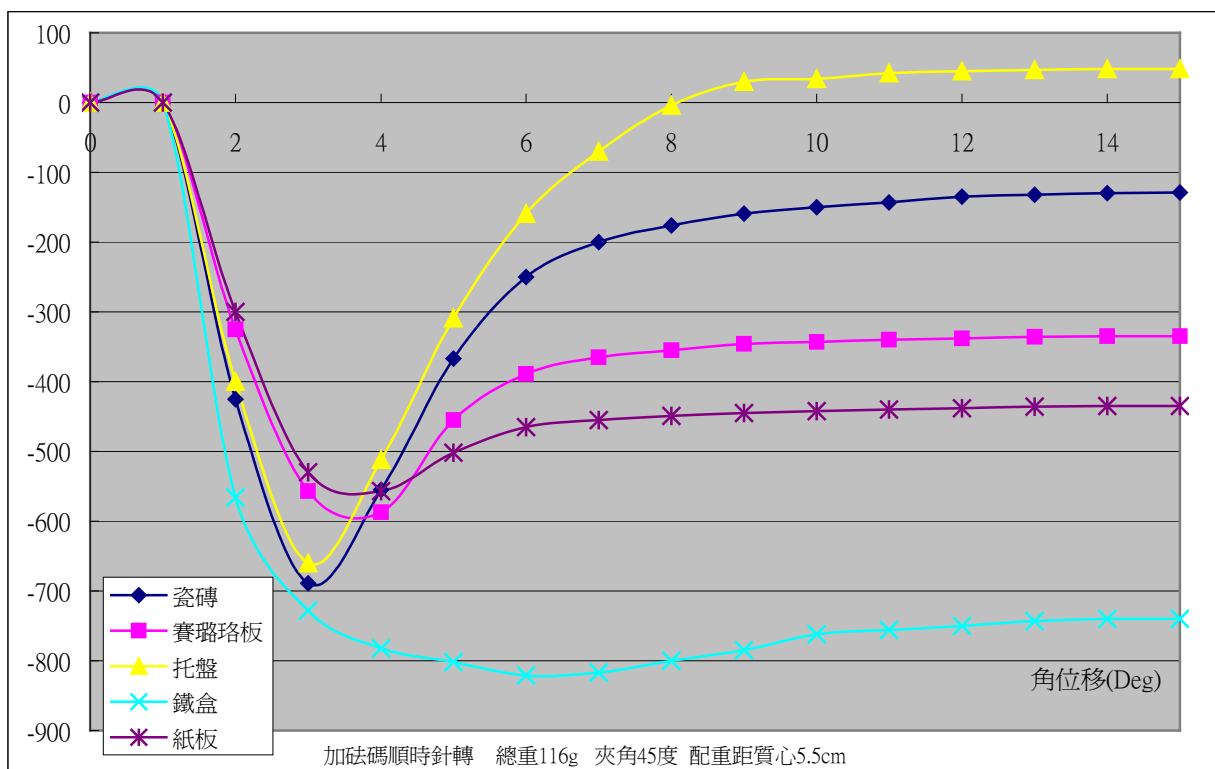
三、 摩擦實驗

(一)、 不同之接觸面實驗：

介面	μs	μk
瓷磚	0.12278	0.0874
賽璐珞板	0.21255	0.1763
托盤	0.17632	0.1227
鐵盒	0.08748	0.0699
紙板	0.23086	0.1583

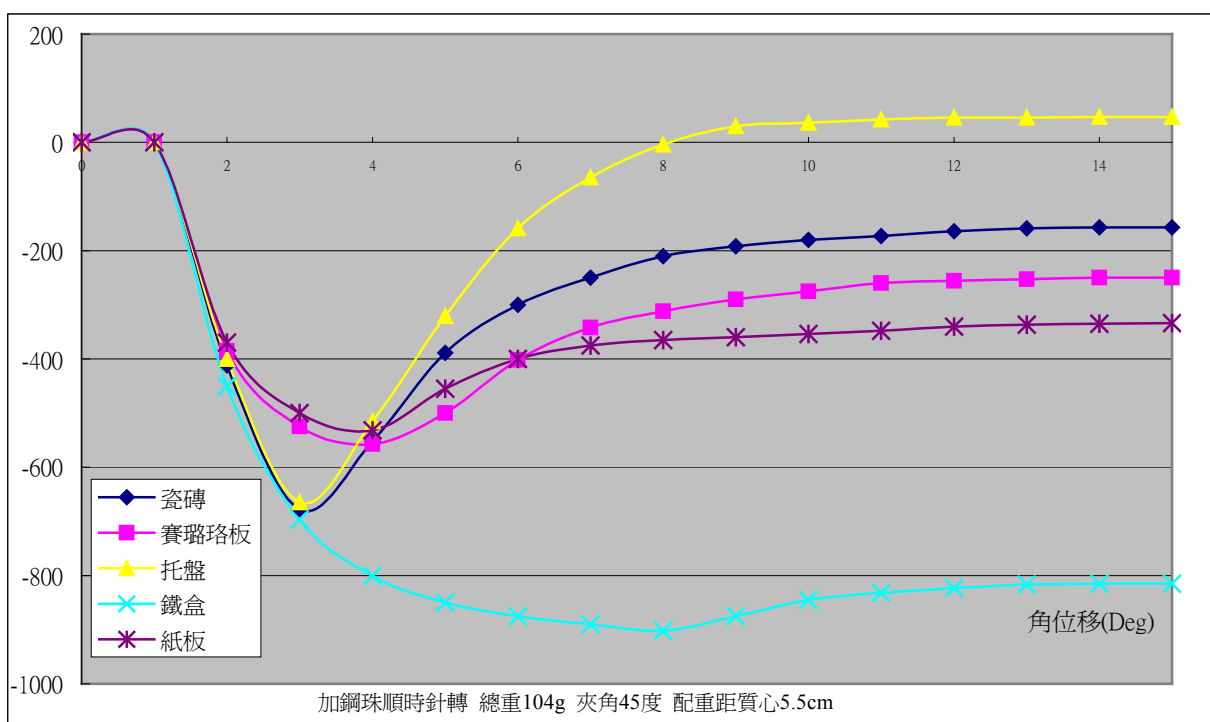
1. 配重為砝碼

- (1) 系統總質量：116g
- (2) 配重與長軸夾角：45 度
- (3) 配重與質心距離：5.5cm
- (4) 可逆轉角度：鐵盒 $\mu k=0.0699 \rightarrow 81^\circ$ ；瓷磚 $\mu k=0.0874 \rightarrow 560^\circ$ ；托盤 $\mu k=0.1227 \rightarrow 708^\circ$ ；紙板 $\mu k=0.1583 \rightarrow 122^\circ$ ；賽璐珞板 $\mu k=0.1763 \rightarrow 252^\circ$



2. 配重為鋼珠

- (1) 系統總質量：104g
- (2) 配重與長軸夾角：45 度
- (3) 配重與質心距離：5.5cm
- (4) 可逆轉角度：鐵盒 $\mu k=0.0699 \rightarrow 87^\circ$ ；瓷磚 $\mu k=0.0874 \rightarrow 521^\circ$ ；托盤 $\mu k=0.1227 \rightarrow 712^\circ$ ；紙板 $\mu k=0.1583 \rightarrow 198^\circ$ ；賽璐珞板 $\mu k=0.1763 \rightarrow 307^\circ$



四、配重後「將軸直接下壓」實驗：

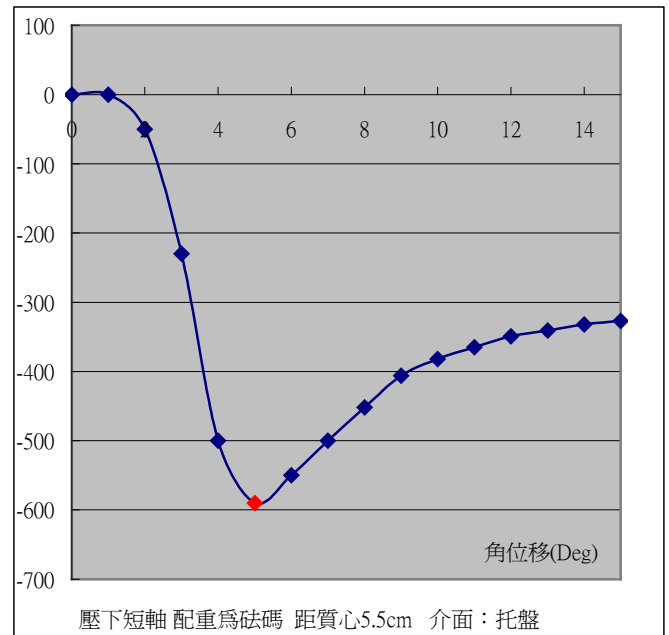
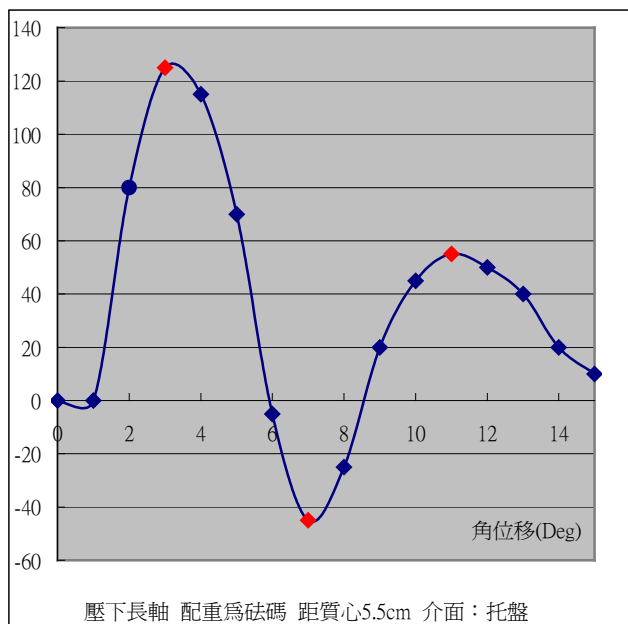
(一)、配重為砝碼

1、鋁製 RattleBack 質量 96 g、砝碼 10g×2、系統總質量 116g

2、配重與長軸夾角：45 度

3、配重與質心距離：5.5cm

4、介面：托盤 $\mu_s = 0.17632$ $\mu_k = 0.1227$



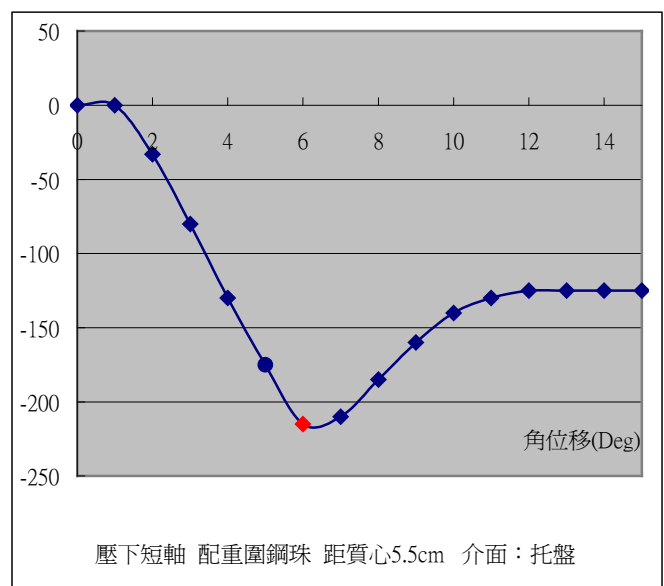
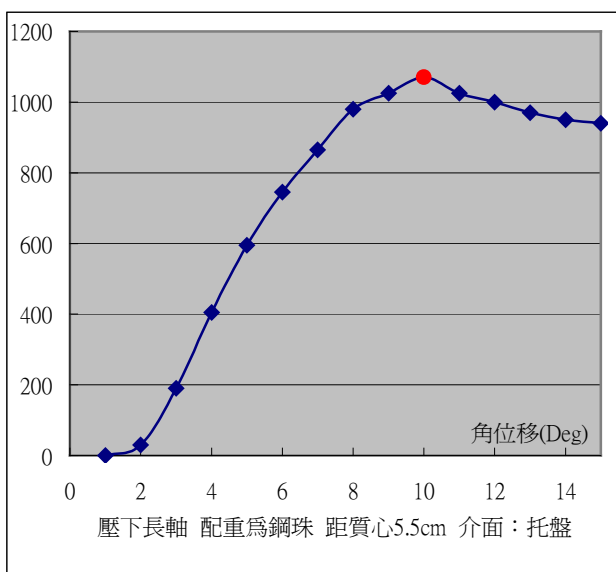
(二)、配重為鋼珠

1、鋁製 RattleBack 質量 96 g、鋼珠 4g×2、系統總質量 114g

2、配重與長軸夾角：45 度

3、配重與質心距離：5.5cm

4、介面：托盤 $\mu_s = 0.17632$ $\mu_k = 0.1227$

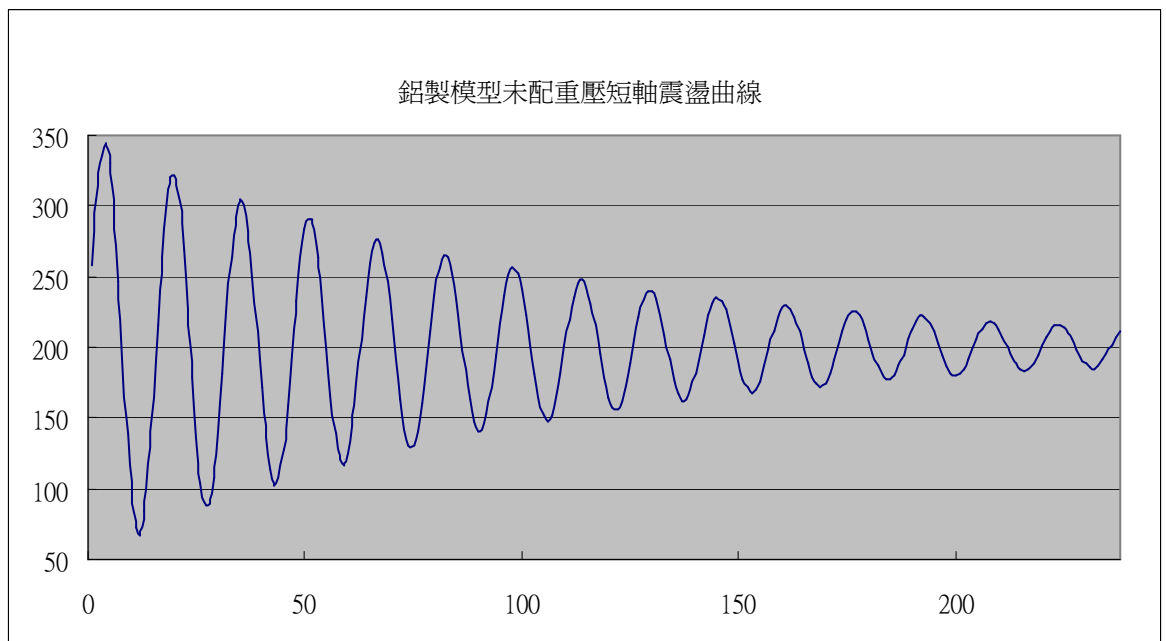
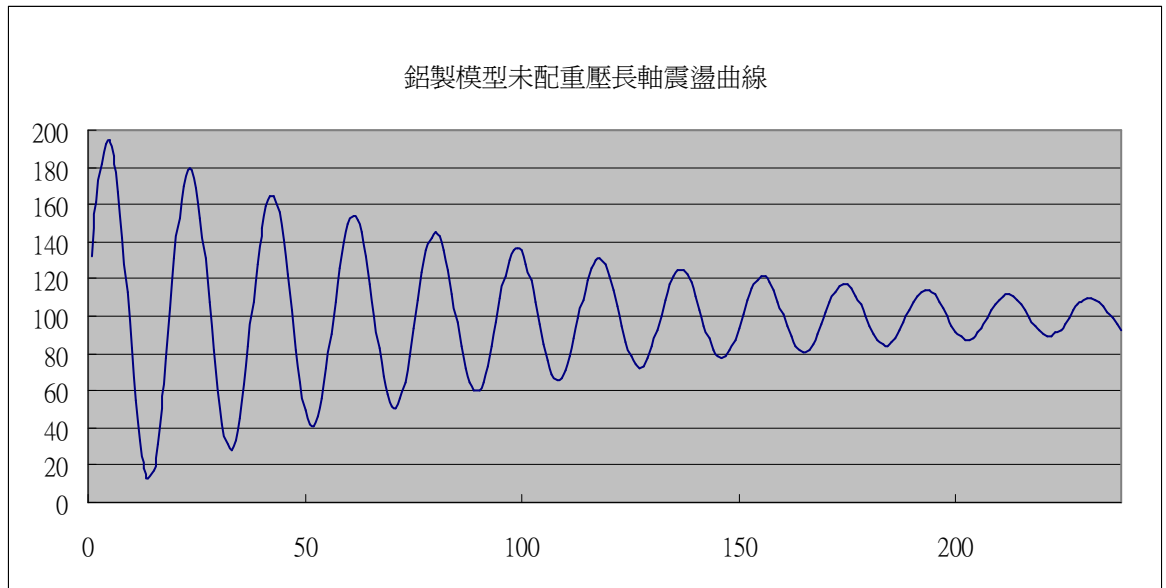


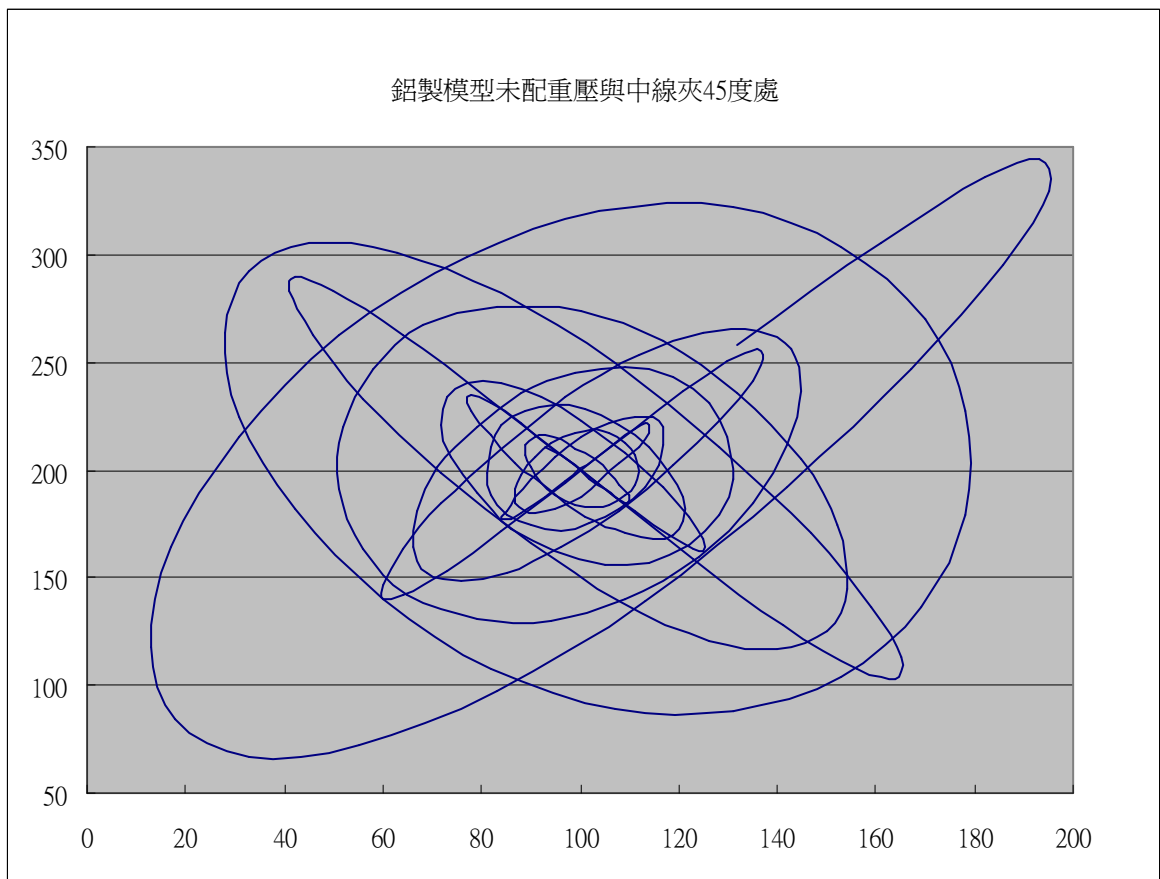
五、「拍攝 RattleBack 紙屏投影軌跡」實驗：

(一)、軌跡圖形：

本實驗分為兩部分－按壓及旋轉。在按壓實驗中，主要為了觀察在適當配重下按壓長短軸對 RattleBack 所造成的影響。旋轉實驗則是觀察 RattleBack 在不同的轉動方向時，其逆旋效應是否有所不同。每一實驗均有三張圖，分別顯示「X 座標對時間的關係圖」、「Y 座標對時間的關係圖」以及「X-Y 軌跡圖」，若發生逆旋，則以紅點標示逆旋起點，並放大特寫該處曲線。詳細的說明請參見「討論」，各圖表的原始數據，請參見 EXCEL 檔。

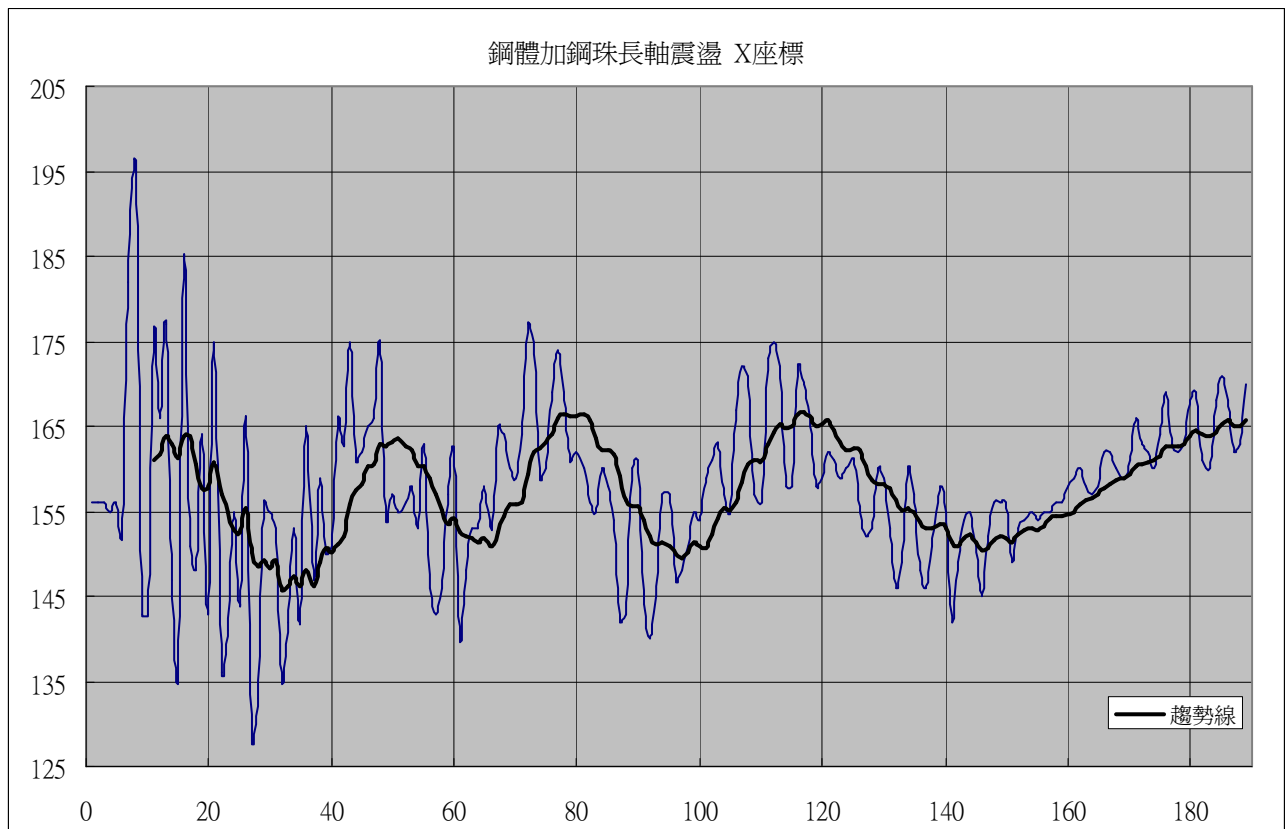
(二)、未配重按壓實驗：

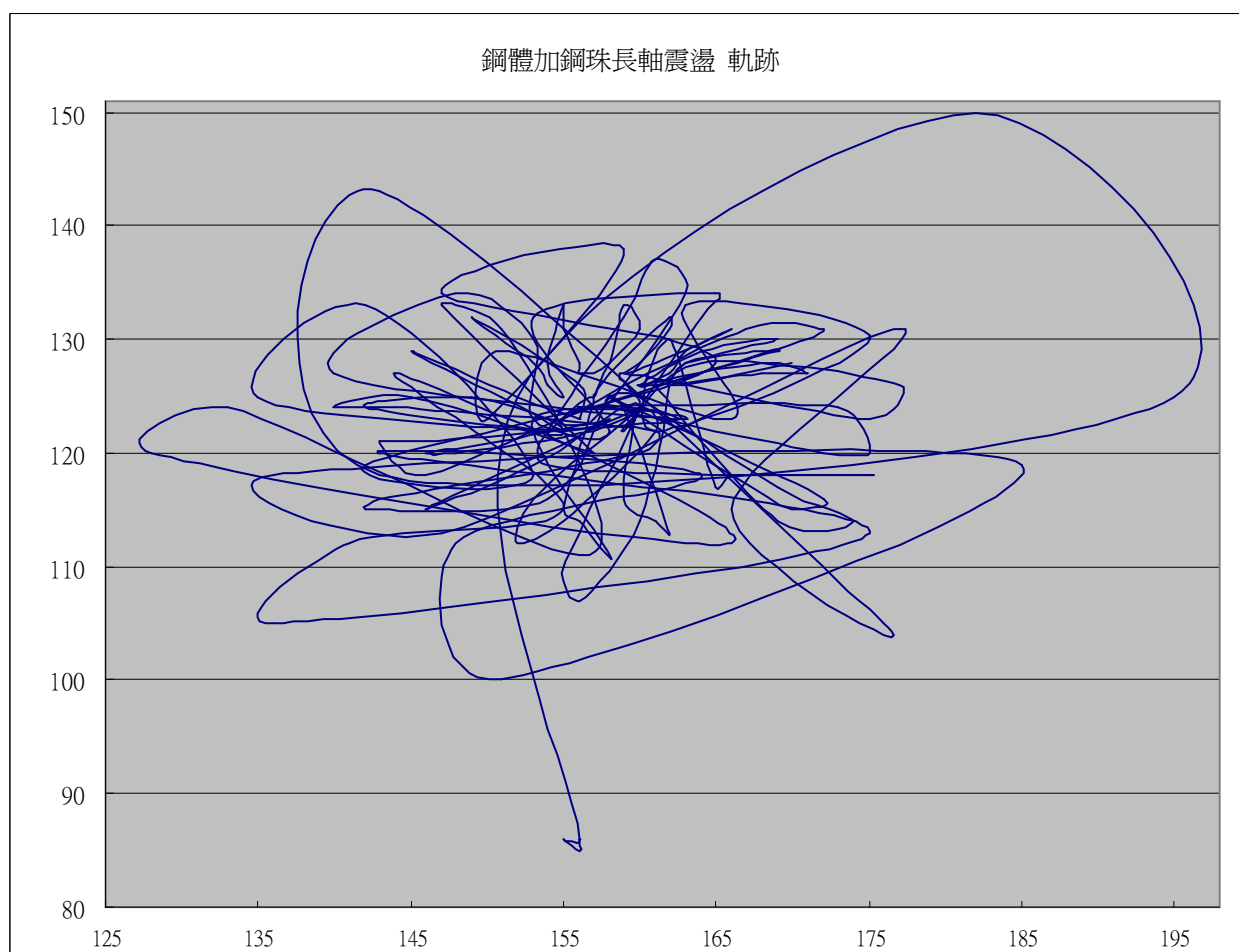
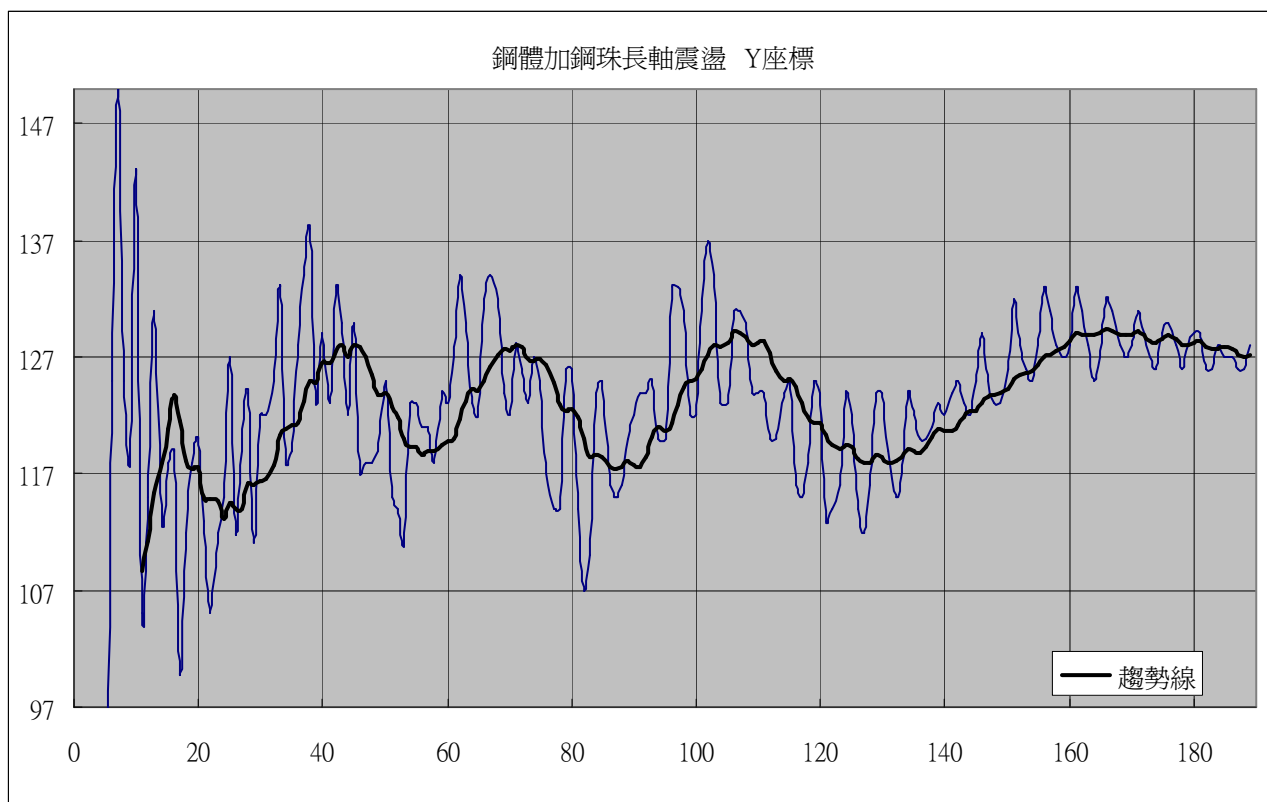




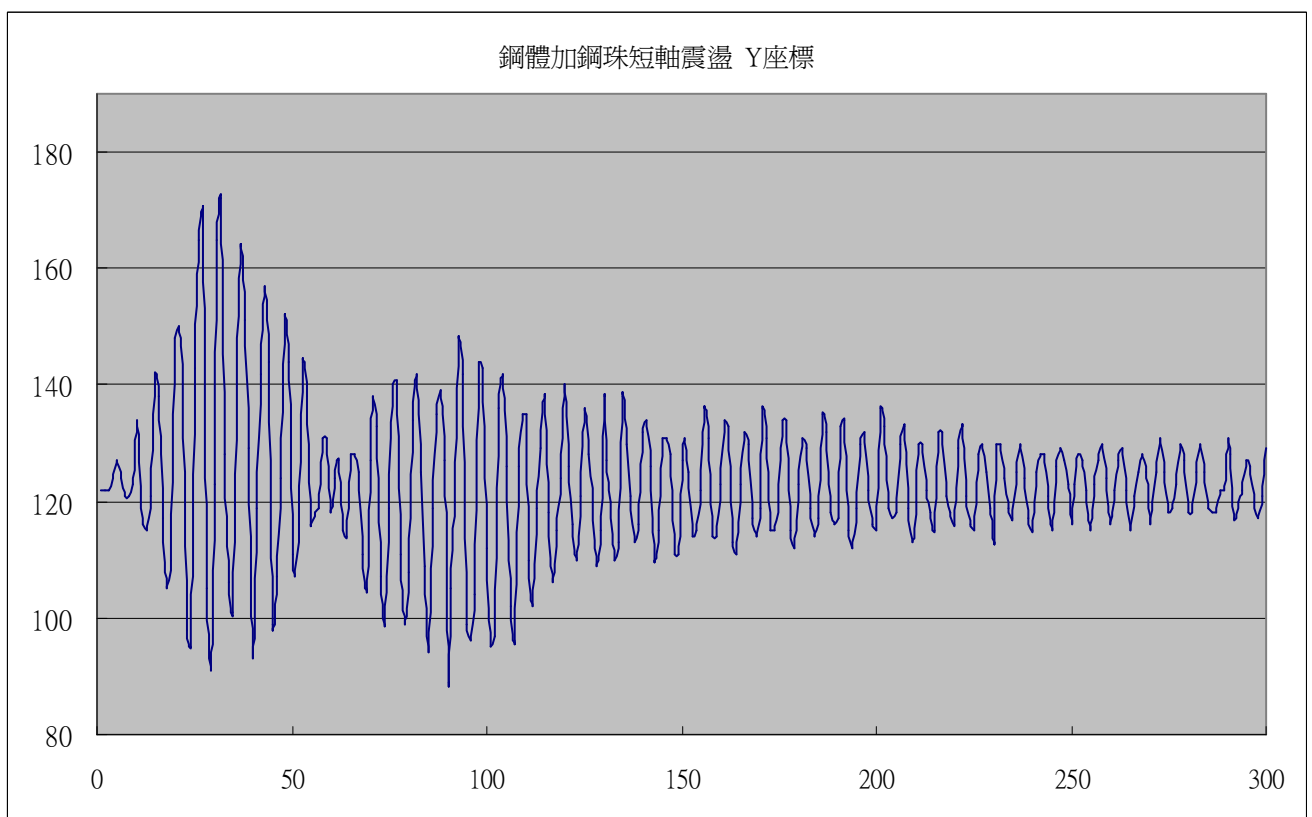
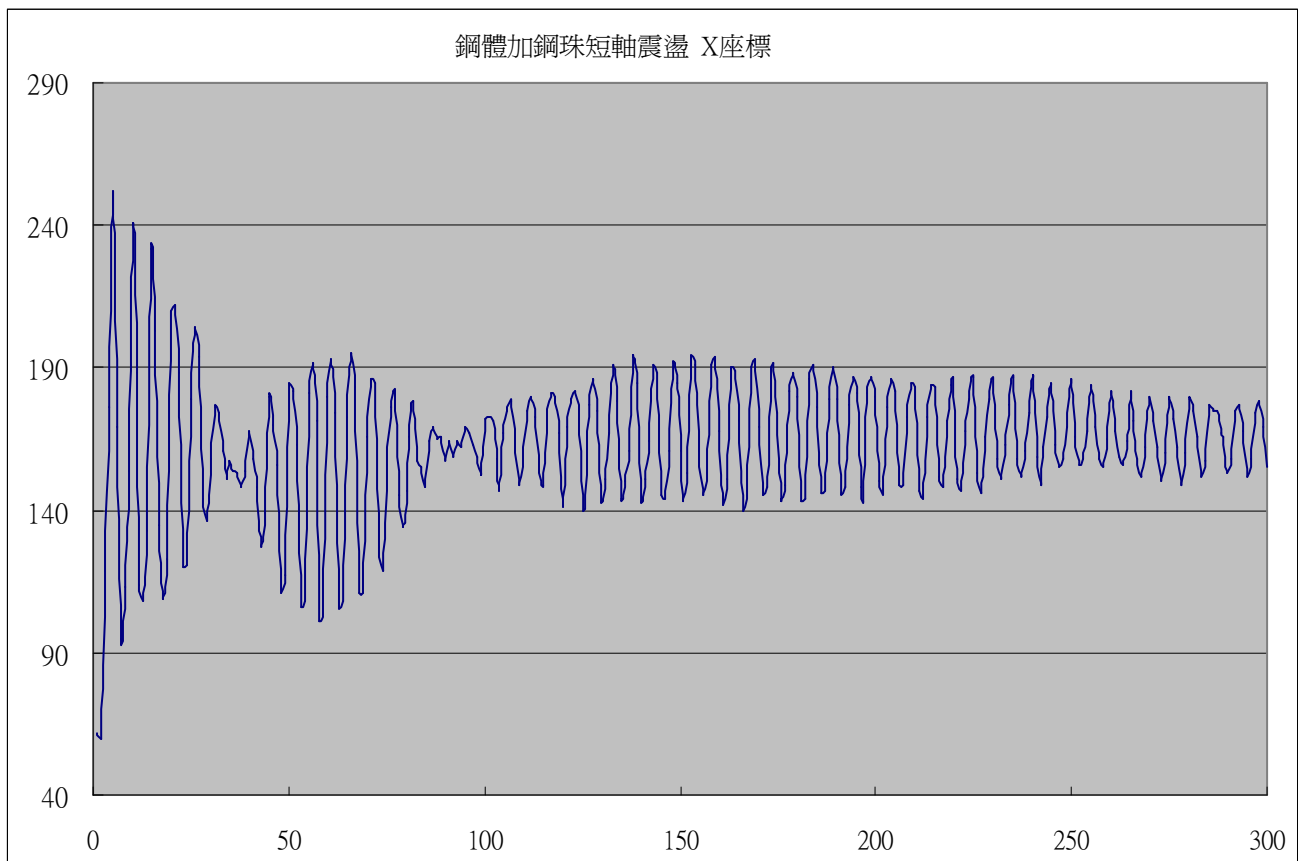
(三)、 配重按壓實驗：

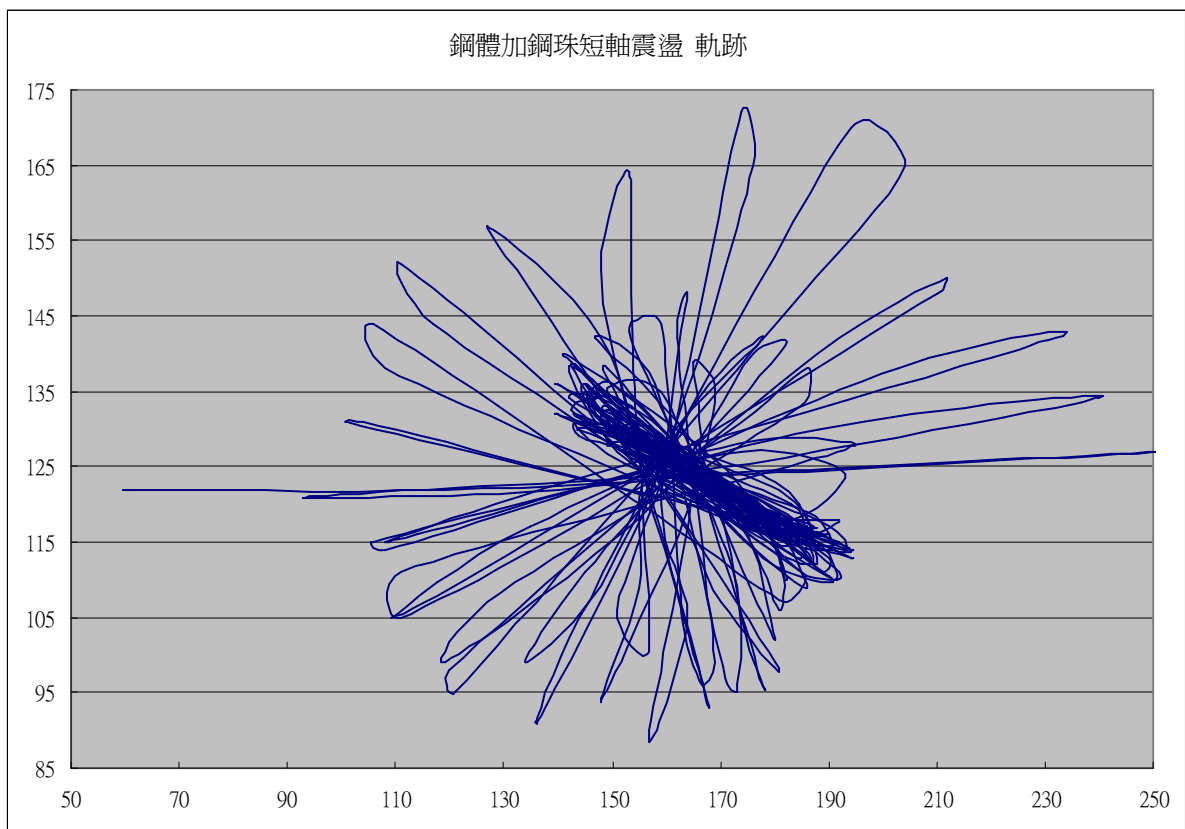
1、 配重按壓長軸：(鋼體加鋼珠長軸震盪.xls)





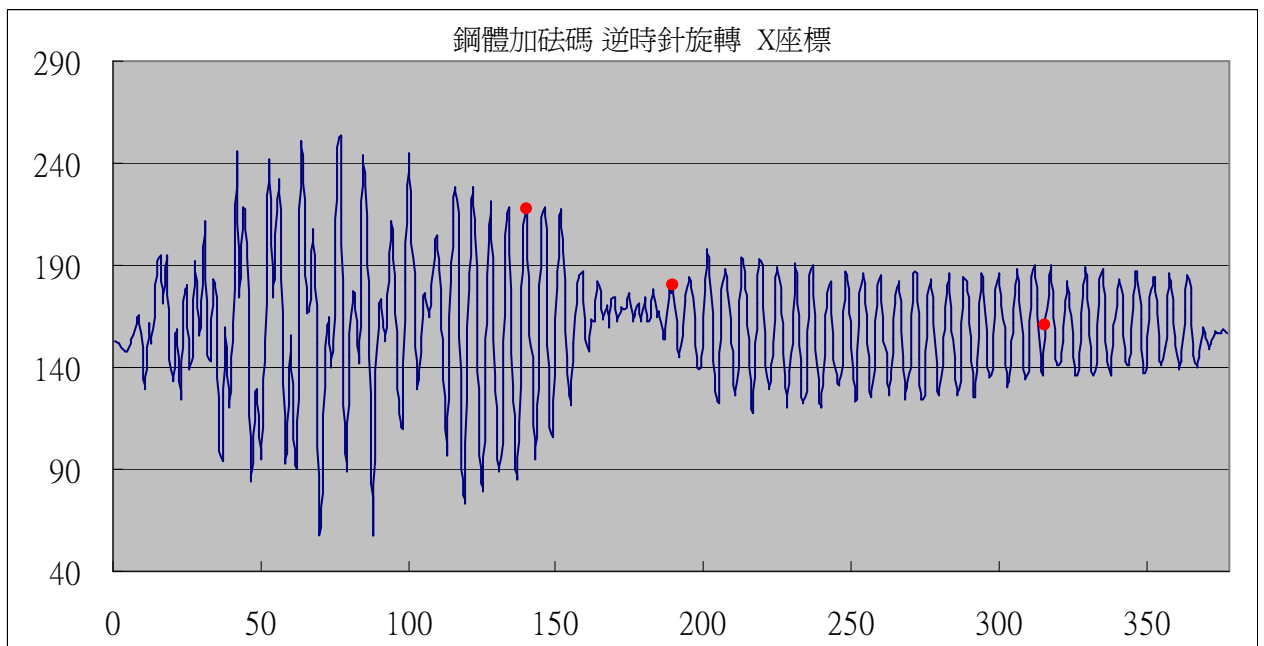
2、 配重按壓短軸：（鋼體加鋼珠短軸震盪.xls）

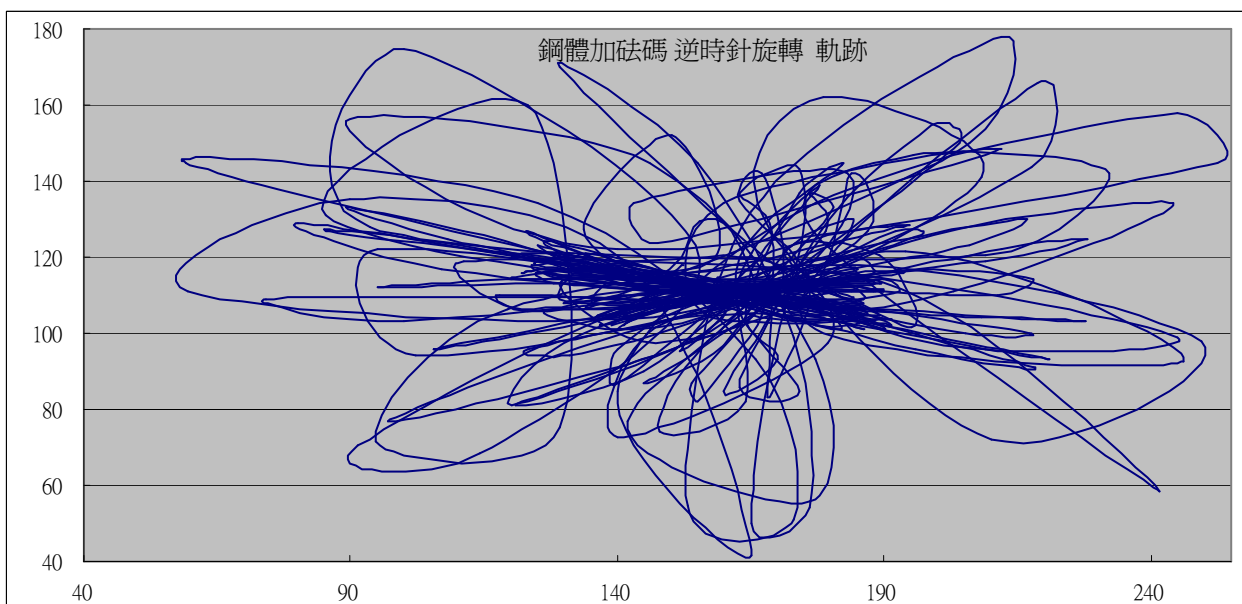
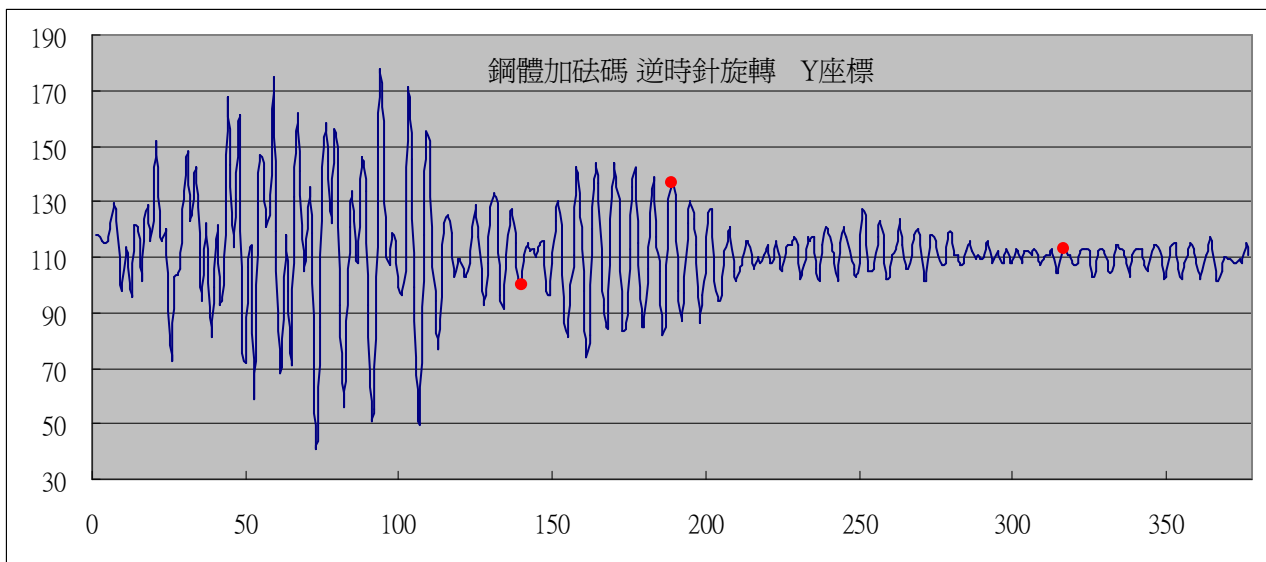




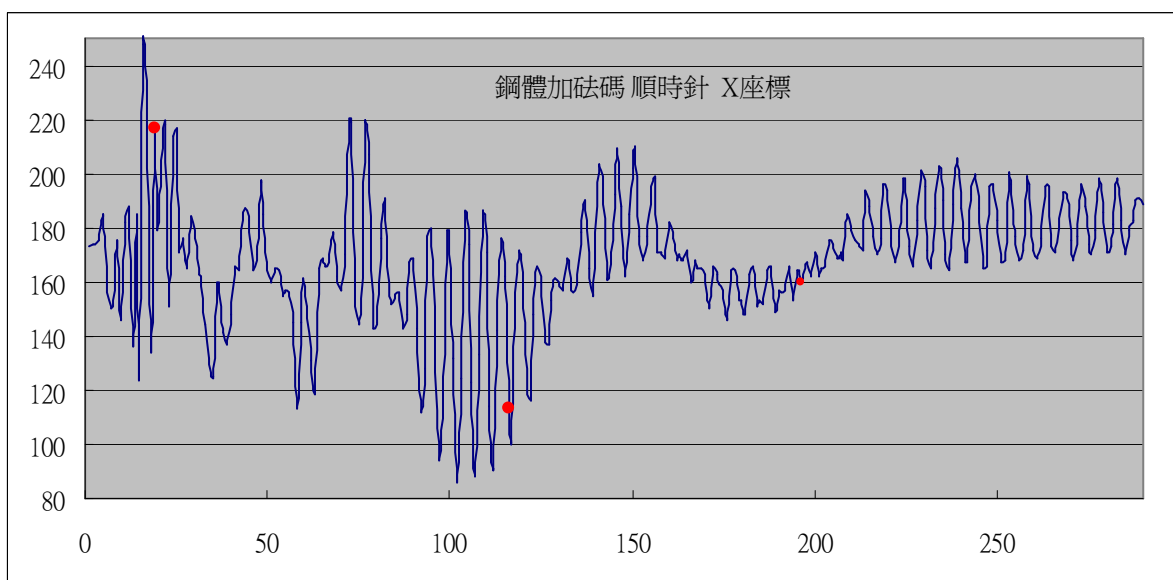
(四)、 配重旋轉實驗：

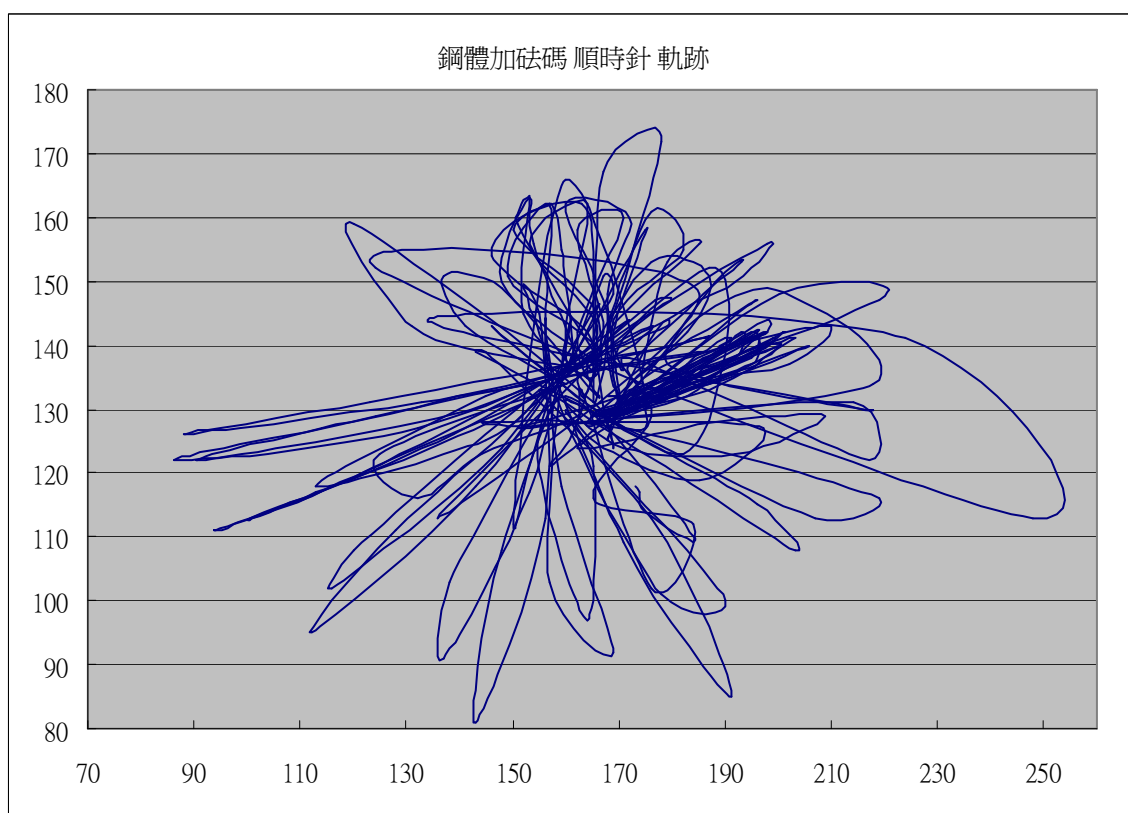
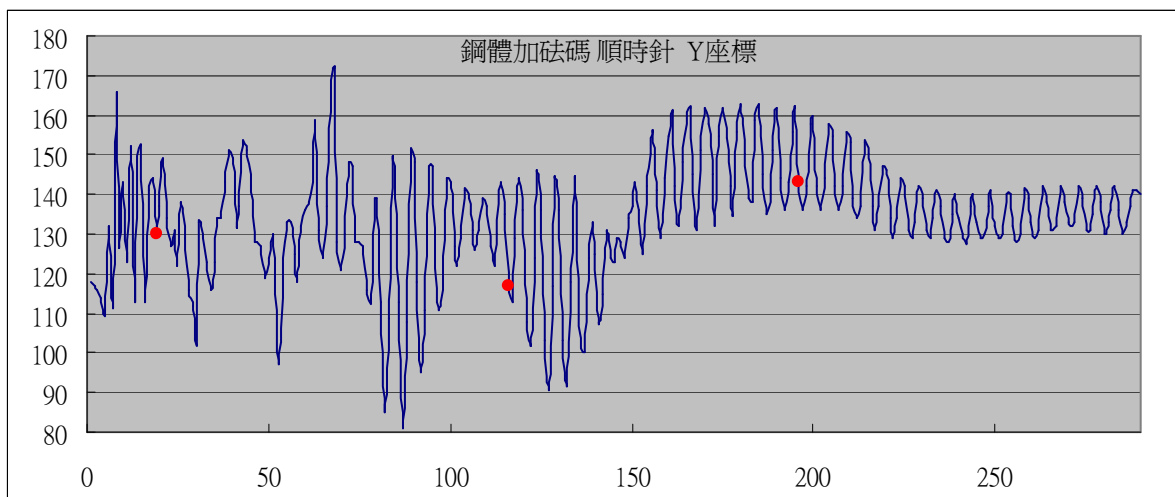
1、逆時針旋轉：(鋼體加砝碼 逆時針光點.xls)





順時針旋轉：（鋼體加砝碼 順時針.xls）

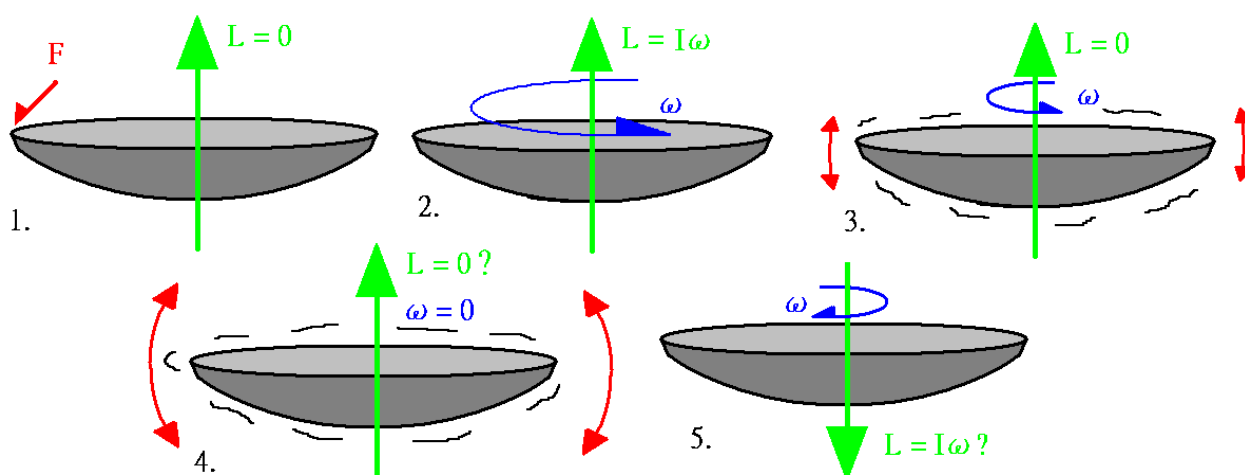




陸、 討論

- 一、 可逆轉的石頭外型近似橢圓，表面光滑，存在著不對稱性。因此符合這些特性的物體，例如湯匙、髮夾、蛋殼、彎曲的鐵片…，只要適當的在它們的邊緣配重，並且選擇放在光滑的表面上旋轉，這些物體就是可逆轉的 Rattleback 了。
- 二、 我們比較了髮夾、湯匙、塑膠彩蛋後發現，髮夾長短軸之剖面半徑固定，而湯匙、彩蛋的曲率半徑則隨處而異。因此，爲了有系統的分析逆旋現象，選擇髮夾模型是恰當的。但由於髮夾太輕，使得雷射筆無法固定。所以我們設計了一個「鋁製 Rattleback 模型」，加上光筆來探討其逆旋的軌跡。

- 三、 改變配重軸與橢圓面長軸的「偏移夾角」實驗，由數據得知，當配重軸與橢圓面的長軸夾 0 度或 90 度時，RattleBack 在旋轉過程都不會改變旋轉方向。而**配重軸與長軸夾 45 度時，逆旋效果最明顯**。因此可推論，配重軸與長軸的夾角存在一個最佳化角度。在該角度下，造成逆旋的動摩擦分力能有最大的力矩，而造成逆旋的效果最佳。
- 四、 由「改變砝碼至質心距離」實驗結果，顯示在**距離 5.5cm 時效果最好**。對此我們提出解釋：『當砝碼距離質心越遠時，Rattleback 之轉動慣量相對越大，在相同的力矩下所造成的角加速度就會變小，因此改變其原先轉動方向的效果就會降低。當砝碼距離質心太近時，雖然轉動慣量較小，但地面接觸點與配重之距離也會變小，因而造成可逆轉的力矩也變少，因此逆旋效果下降。所以，兩砝碼距離質心的距離也存有一最佳化距離。』
- 五、 根據「改變配重質量」實驗的結果，隨著配重質量增加，逆轉角亦漸漸增加，且在配重質量 20g 時達到最大值；但當配重質量增加，總逆轉角卻大幅滑落。對此我們提出解釋：當配重質量較小時，Rattleback 的轉動慣量雖然較小，但是其逆轉的主要動力來自於摩擦力垂直分力之力矩，由於正向力的減小，此力矩因此無法使它產生較大的反方向角加速度。但是當配重質量過重時，轉動慣量的增加使得摩擦力垂直分力所產生的逆轉力矩較不易改變其轉動方向，同時配重質量的增加亦意味著系統因摩擦生熱消耗的能量增加（原因是「摩擦力通過質心之分力」增加），導致逆轉角下降。因此我們判斷配重物的質量亦存在著最佳化，只要善加調配就能得到最佳逆轉狀況。
- 六、 由「摩擦實驗」接觸面之性質可得知，摩擦係數太大或太小，Rattleback 逆旋之角度均會減少。只有在某個最佳化數據時（**托盤 $\mu k=0.1227 \rightarrow 708^\circ$** ），Rattleback 逆轉之角度會出現最大值。對此我們提出解釋：『這是由於在逆轉的過程中，因為存在著動摩擦力，因此會造成 Rattleback 的能量損失，而阻礙逆轉之進行。而摩擦係數太小時，雖然相對的阻力減小，但卻造成逆轉的力矩也變小了。因此，在「阻力」與「力矩大小」的相互影響下，也存在著一個最佳化的條件，使得逆轉效果最好。』不過，由於大部分的接觸面是較粗糙的，因此選擇接觸面時，原則上應選擇較光滑者為佳。在此前提下，「減少阻力」是比「提高力矩量值」影響來的大。
- 七、 若以能量觀點來詮釋逆轉現象，我們認為當 RattleBack 依最初的方向旋轉時，有一初始轉動動能 $E=(1/2)I\omega^2$ ，其中 I 為轉動慣量，而 ω 為角速率。轉動過程中由於動摩擦的作用，產生了上下震盪的力矩，因而將部分的轉動動能轉變成搖晃的動能。因此，表現出來的角速率會慢慢遞減，而終漸成為零。但是此時上下搖晃的動能與摩擦力作用仍然存在，藉此進而發生了相反方向之逆旋現象，如下圖。而在「直接下壓軸實驗」中也印證了此一觀點：『亦即經由上下搖晃，即可朝 rattleback” 比較喜歡的轉動方向” 加速旋轉』。

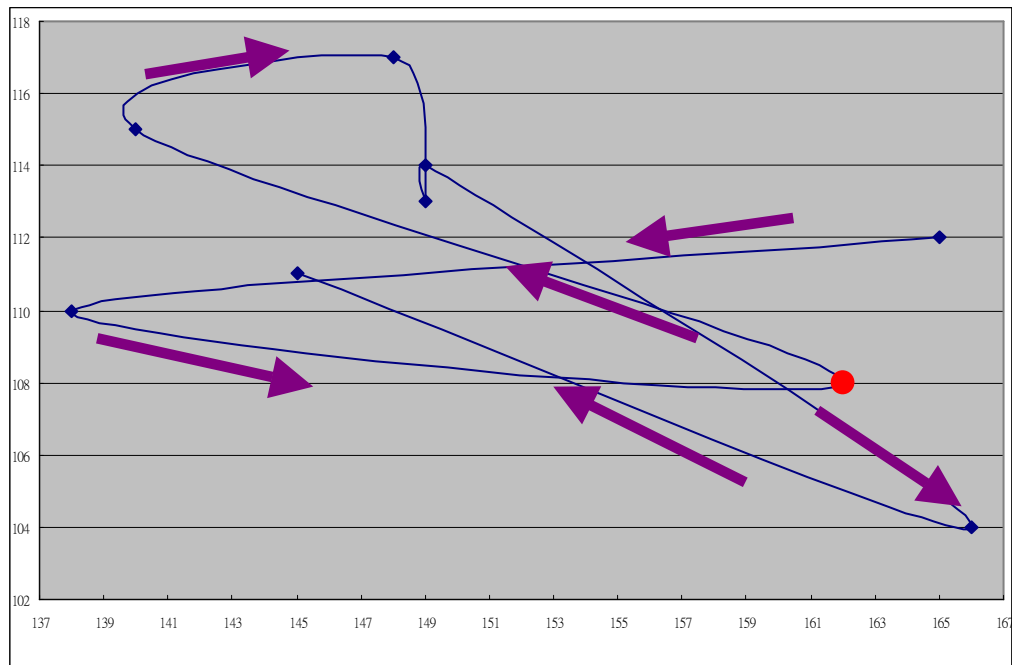
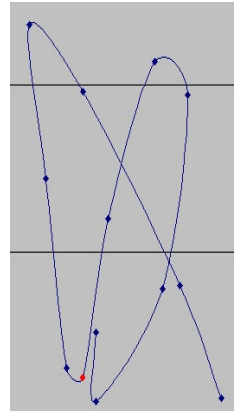


八、未配重之按壓實驗中， $X-t$ 函數圖、 $Y-t$ 函數圖，均呈現週期性的震盪運動，其振幅也都逐漸收斂，顯示二者均為帶阻尼之震盪曲線。而在按壓 45 度的實驗所顯示的 $X-Y$ 軌跡圖，更是一幅漂亮的「具有阻尼的利薩求圖形」。根據實驗結果，長軸的震盪週期與短軸的震盪週期比約為 19：16。當按壓 45° 時能同時引發這兩種運動，故光點在 X 及 Y 方向皆有震盪運動，此軌跡類似示波器中週期比為 5：4 之「李賽圖形」，因此可佐證 X 軸 Y 軸二者為互相獨立之運動。

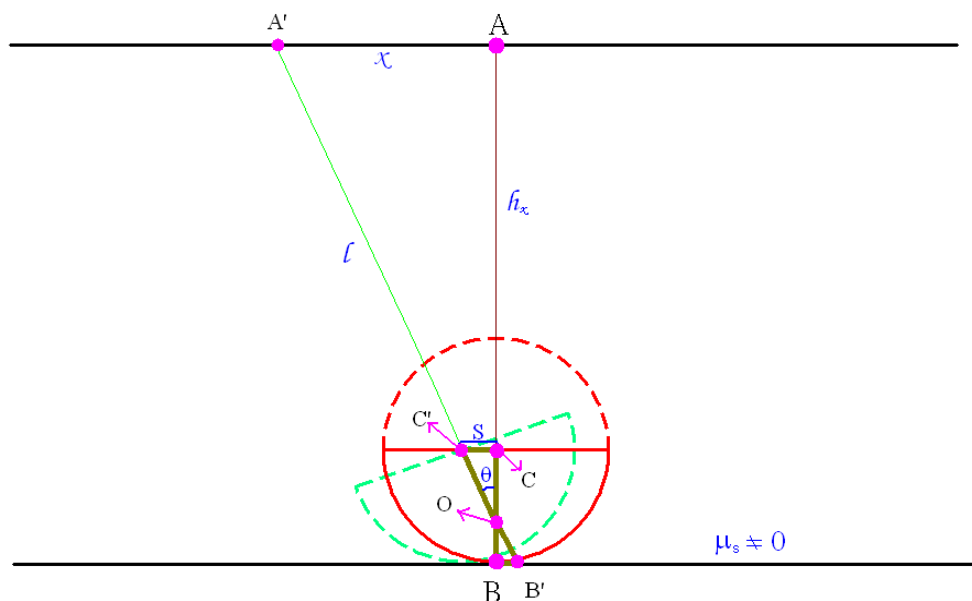
九、我們在實驗中也發現，【髮夾、鋁製模型】的逆旋型態與【湯匙以及茶壺】模型互異。我們認為 Rattleback 會比較喜歡朝哪個方向逆旋的主要原因，來自長軸與短軸的競爭。以髮夾做例子、由於長軸震盪頻率較大，滑動的位移也較長，影響較為明顯，故長軸的震盪將主導整個逆旋，而使得另一方向不能發生逆旋（如實驗鋼體加鋼珠順時針旋轉）。但是在湯匙與茶壺模型中，兩軸震盪的頻率，短軸略大於長軸，所造的位移也相去不遠，在此情況下，變為短軸主導逆旋現象的發生。因此這兩種互異的型態，在同方向的偏移角度配重下，其可逆轉的方向就不同了。

十、另外，我們更發現，如果適當的調整偏移角度及配重，讓長軸與短軸的競爭影響作用接近，則 Rattleback 就會連續發生數次逆旋的有趣現象，請參考影片『鋁製模型加砝碼 順時針影片.wmv』。由影片中可觀察到，第一次長軸發生震盪後開始逆旋，沒多久換成短軸也開始震盪，而發生第二次反方向的逆轉。甚至發生 2 次逆旋之後，長軸又開始震盪，而有第三次逆旋的發生…。藉著調整長軸與短軸的競爭，竟然被我們發現了這種耦合系統(Coupling system)，不禁令我們十分的興奮。對於這種現象的解釋，我們認為這是一種能量的耦合效應，長軸與短軸這兩種震盪就是藉著 Rattleback 的轉動來彼此傳遞能量的！

十一、關於按壓實驗，我們先分別以長軸、短軸來實驗，觀察軌跡，分析圖形彼此的關連。由於按壓長短軸的震盪，為各自獨立的運動，因此，針對此二軸分別來討論，即可能找出 X 及 Y 的參數式。而旋轉實驗，則是加入配重後，使配重軸與幾何長軸夾一角度，進而造成逆轉現象。分析在逆旋起點附近的軌跡曲線，證明其逆轉現象發生時，曲線旋繞的方向確實有變化，如右圖。以鋼體加鋼珠順時針旋轉為例：觀察順時針旋轉時，其 X 座標與 Y 座標的軌跡於逆旋發生前，座標皆呈不規則的上下快速震盪，而在逆旋發生之後，其軌跡型態猶如按壓長短軸的型態，『具有微小震盪的週期函數』。觀察逆旋點附近曲線變化，可以清楚的發現，XY 座標軌跡由先前的「順時針旋繞」，轉為「逆時針旋繞」，如圖所示，在曲線的其他部位並無此現象。此點即為開始逆轉之「折返點」。由數據顯示此時的震盪，提供了逆旋發生必然要有長軸(或短軸)的震盪的強力支持。



十二、原先我們使用「投影紙屏法」以研究光點軌跡，當 RattleBack 模型旋轉時，常會偏移原位，而使得實驗數據不容易擷取。所以，後來改良而將雷射光筆固定於 RattleBack 模型上，來投影至描圖紙上。



如上圖所示， h 為 OA 線段長，當模型(紅色實線部分)向左偏移，其中央雷射光筆也偏移了 θ ，令接觸點的水平位移為 S ，則由圖中之三角形 OAA' 相似於三角形 OCC' ， S 可依比例放大為 X 。若 h 愈高，則 S 的放大比例愈明顯。如此，即可方便觀察軌跡圖形。由圖中亦可得 X 的關係式 $X=h\tan\theta$ 。同理，由於 X 與 Y 各自獨立，所以 Y 方向也有一關係式 $Y=h\tan\theta$ ，利用 XY 參數，即可建立一座標系。令描圖紙上 A 為原點，利用所測得之 X 、 Y 座標，可依此模型來推導出相關的運動方程式。

柒、 結論

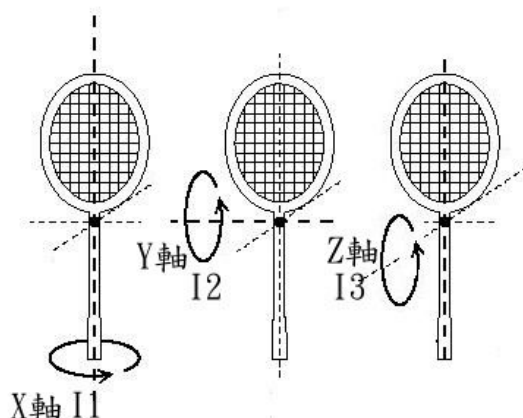
- 一、 日常生活中，以周遭的物品經過適當的配重，就可能會發生逆旋現象。這種初看似乎違反角動量守恆的現象，其實是因為系統存在著外力「動摩擦力」所導致，因此不可用獨立系統的觀點來說明其違背了守恆律。
- 二、 Rattleback 的逆旋效果，與「物體外型」、「配重質量」、「配重軸與幾何長軸之夾角」、「配重距離」、「接觸面的動摩擦係數」，均有著密切的關係。因此，經由適當地調整這些變因，便能產生出最佳的逆轉力矩，使逆旋現象表現出「最佳化效果」。
- 三、 Rattleback 之逆轉，受到損失能量的不利因素，與有利於逆轉的力矩因素。而各軸向的不對稱性是逆轉的必要條件，所以找石頭時選擇有缺角而具有光滑表面的瘦長橢圓形，將有利於逆轉的發生。
- 四、 動摩擦力指向長軸的分力，會造成了 Rattleback 上下震盪的現象。因此旋轉的過程中，有無發生長軸的上下震盪，是決定其是否會逆轉的重要因素。動摩擦力之垂直分力則是生成了逆轉的力矩，就是此力矩的存在，才會造成 Rattleback 的逆旋現象。

五、令雷射光筆的光軸、鋁製模型的長軸、短軸為剛體座標系的三個主座標軸。I1、I2 及 I3 為對應於各主軸之轉動慣量， ω_1 、 ω_2 及 ω_3 是角速度沿主軸方向的分量， τ_1 、 τ_2 及 τ_3 是外力矩沿各主軸方向的分量，而 α_1 、 α_2 及 α_3 是各主軸的角加速度分量。則可得出**尤拉運動方程式**（Euler equations of motion）：

$$\begin{cases} \tau_1 = I_1 \alpha_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ \tau_2 = I_2 \alpha_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ \tau_3 = I_3 \alpha_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}, \text{此係由數學家 Leonhard Euler 首先導出。}$$

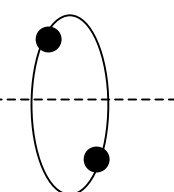
式中 α_1 、 α_2 及 α_3 各為 ω_1 、 ω_2 及 ω_3 對時間之微分，在數學上此方程式為三個角速度分量的一階非線性聯立微分方程組。其解為 $\omega(t) = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}$ ，式子中的指數 Ω 有以下關係：

$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}} \\ \Omega_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_3 I_1}} \\ \Omega_3 = \omega_3 \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2}} \end{cases}$$

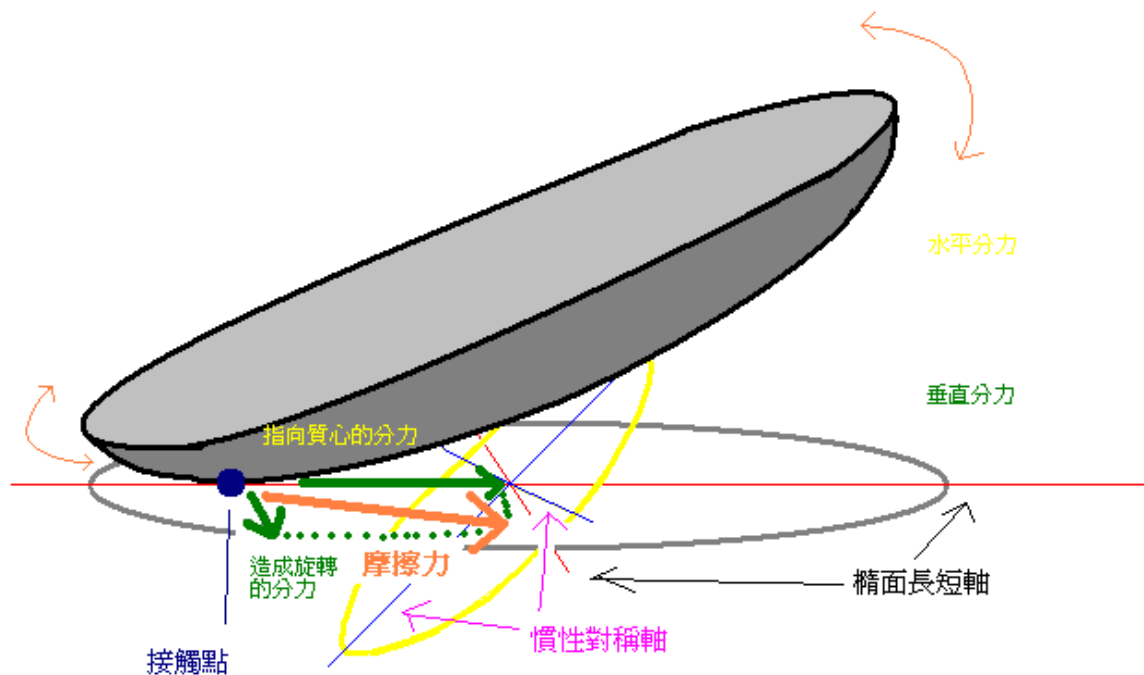


以網球拍為例，如上圖，當剛體旋轉時，如果繞著 X 軸、Y 軸、Z 軸的轉動慣量分別為 I1、I2、I3。因為 $I_1 < I_2 < I_3$ ，所以 Ω_2 此時為虛數，這將會造成此軸向之不穩定的晃動現象。因此轉動慣量居中的 I2 之 Y 軸，剛體是無法穩定繞此軸旋轉的，將會造成此軸向不穩定的晃動現象，此即為 **Tennis Racket Theorem**。

而對於我們所做的鋁製模型而言，轉動慣量居中的 I2 之 Y 軸即為短軸（圖中之虛線）。因此鋁製模型轉動一段時間後，就會繞此軸而上下振動。若依能量觀點而言，此振動動能來自轉動動能，此時就如同耦合的雙擺（double pendulum），彼此發生能量轉移的現象一般。



然後，由於鋁製模型上下振動時會造成接觸面的滑動現象，因此系統會受到地面施予模型的滑動摩擦力。因為配重軸偏離了橢圓面的長軸，因此模型在滑動時，此時動摩擦力並不平行於長軸，而有平行與垂直於長軸的兩個分力。其中平行長軸的分力減緩了振動的幅度，而垂直長軸的分力則對質心造成了力矩。因此，就是因為該力矩的存在，才讓 **Rattleback** 形成可逆轉的現象。



六、一顆會逆轉的石頭，開啓了我們這段有趣的科學探索之旅。在尋找及分析所找到物體的物理特性時，我們進行了一系列的實驗活動，藉著這顆『神奇的魔法石』，我們累積了一些知識，也增長了一些智慧，同時更令我們不禁讚嘆「生活處處皆科學，探索處處是驚奇」！

捌、參考資料

一、中文部分

林明瑞，物質科學物理篇下冊，南一書局，第九章轉動，第 93~112 頁。

劉啓台，工程力學觀念分析，建宏書局，第 5~38 頁。

二、英文部分

Thornton and Marion, **Classical Dynamics of Particles and Systems**, 4th ed, Chap. 11, Dynamics of Rigid Bodies。

三、網路資源

(一) 影片：逆轉的石頭, from <http://www.balloon.com.tw/rattleback.wmv>

(二) NEWTON BBS：Ask A Scientist, Physics Archive(1999). from <http://www.newton.dep.anl.gov/askasci/phy99/phy99066.htm>

評語

040111 會逆轉的石頭-Rattleback 逆旋現象

逆轉現象的產生與分析極為深入，並能利用配重軸與長軸之偏移夾角控制逆轉現象，令人印象深刻。若能進一步對各變因產生最大逆轉角度深入分析物理原因更佳。