

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

第三名

最佳創意獎

040104

表面張力與最短路徑探討

學校名稱： 國立臺中第一高級中學

作者： 高二 馮建璋 高二 陳柏穎 高二 張庭瑞 高二 黃暉凱	指導老師： 張宇靖 包宏信
---	---------------------

關鍵詞：表面張力、最短路徑、Steiner tree

壹、摘要

在實驗中，我們探討表面張力與最短距離方面的問題，研究肥皂膜形成圖形的物理意義。在我們的觀察中，肥皂膜會於支持物間形成連線，若支持物是三支柱子以上，在其間形成路徑的總和最短。我們試著在多柱體間利用此性質修建最短連線，並利用數學模型及力學原理找出肥皂膜最短路徑的原因。整體的研究過程可以粗略地分成下列幾點：

- 一、驗證最短距離
- 二、利用力學解釋原因
- 三、分析各情形所表示的意義
- 四、理論地預測出最短距離連線圖形

貳、研究動機

與同學們在玩肥皂泡泡時，看到如果兩個以上的肥皂泡泡碰在一起時，各接觸面會有蠻有趣的幾何圖形。這些幾何圖形與數學、物理間有什麼關係？我們一直很想進行詳細地分析。當物理課程學到表面張力時，知道肥皂泡泡的薄膜有表面張力的作用。不僅如此，我們發現我們所看到的現象和某些數學幾何性質有關，於是我們決定以肥皂膜為主題，闡述其特殊現象並加以深入研討。

參、研究目的

初期嘗試性地做了幾次實驗，分析後發現，肥皂膜形成的交線會形成圖形內之節點。在比對數學的幾何意義之後，我們推論，這些膜上之節點會滿足法國數學家費瑪所提出之最短路徑原則—費瑪點〔節點到各個頂點之距離和會最短〕，根據黃光明教授於貝爾實驗室的研究成果，並參考多方資料，我們利用數學基本架構和力學模型加以證明我們的基本推論。

由於牽涉到多種不同的靜力分析，我們將進行多重比對的工作以確立出共同相似性，在還不清楚完整的理論的情況下，我們認為只有依據實驗所得之數據進行分析，或許過程不臻完善但就現有資料進行力學模型架構分析，相信應該能得到完整性的結論。

肆、研究設備及器材

一、正多邊形壓克力模型：於兩片壓克力板之間夾圓柱，圓柱排列成多邊形，如右圖。共有三、四、五、六、八邊等多邊形。

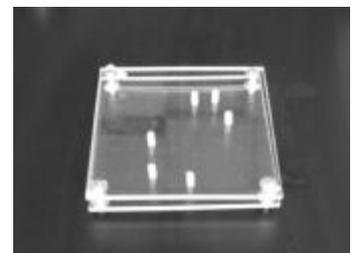
二、任意多邊形：如右圖，圓柱可任意移動，排列成任意多邊形。

三、溶液配方：甘油 15ml、清潔劑 60ml、水 925ml

（配成 1 公升溶液）

四、數據分析：電腦程式—Mathematica

五、其他：吸管、照相機、錄影機



伍、研究過程

一、 正多邊形模型：

1. 將壓克力模型浸入溶液後緩慢取出，靜置後調整形狀。
2. 紀錄、分析薄膜形成之圖形。
3. 運用程式協助，尋找力學模型。

二、 薄膜移動觀察

1. 將壓克力模型浸入溶液後緩慢取出，靜置後調整形成封閉膜。
2. 將封閉膜內空氣抽去，使氣室盡量縮小。



實驗工作台



針筒抽氣將氣室空氣移出

3. 破壞封閉膜，紀錄薄膜移動情形。

三、 任意多邊形模型：

以任意多邊形模型重複一、之步驟 1.~3.。

陸、實驗結果

一、 正多邊形模型

(一) 正三角形

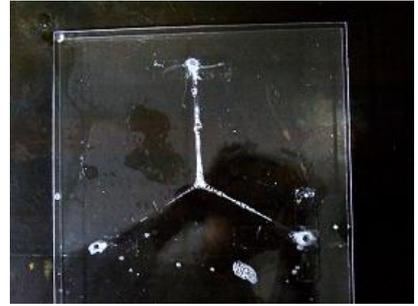
1. 封閉膜：

- (1) 於三個柱體內部形成一封閉圖形。
- (2) 此圖形極不穩定，氣室大小隨著實驗時給與的空氣多寡而不同。



2. 不封閉膜

- (1) 於三個柱體內部形成一節點。
- (2) 節點所延伸之交線，交角皆為 120° 。
- (3) 若試著破壞節點之平衡（牽引移動節點），發現節點均會回到原位置，自行調整為平衡狀態。



(二) 正四邊形

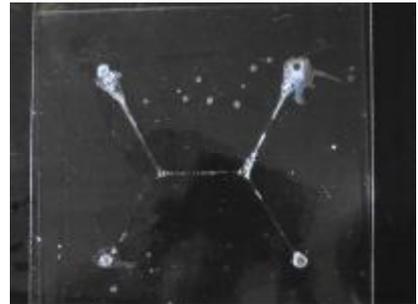
1. 封閉膜

- (1) 於四個柱體內部形成一封閉圖形。
- (2) 與三角形封閉圖形類似，不穩定且不固定，氣室大小隨著實驗時給與的空氣多寡而不同。



2. 不封閉膜

- (1) 在四個柱體間各交線形成兩節點。
- (2) 節點不穩定，形成形狀大致類似。
- (3) 延伸之交線交角均為 120° 。
- (4) 不確定是否同一模型所形成之費瑪點為唯一解。
- (5) 擾動後，圖形樣式不變。



(三) 正五邊形

1. 封閉膜

- (1) 於五個柱體內部形成一封閉圖形。
- (2) 中央氣室間所連接之薄膜，隨邊數增加其曲度減少。
- (3) 擾動後較不易受擾動影響但易破裂。



2. 不封閉膜

- (1) 在五個柱體中形成三節點。
- (2) 形成之圖形較特殊，可能與其數學性質有關。
- (3) 節點間交線夾角皆為 120° ，滿足等權三鎮



情形〔於《柒、討論》中再述〕。

註：重複實驗，得知三、四、五邊形模型形成之圖形為唯一解。

(四) 正六邊形

1. 封閉膜

- (1) 形成六個節點之封閉狀態，且節點連線為正六邊形。
- (2) 節點交線交角為 120° ，可知薄膜交會點之交角皆為 120° 。



2. 不封閉膜

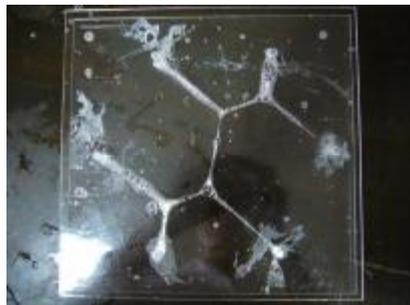
- (1) 有三種不同圖形



圖一〔中心對稱形〕



圖二〔貫軸形〕

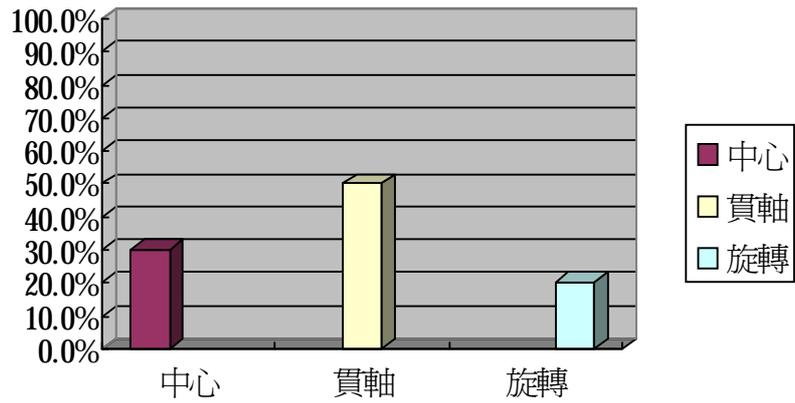


圖三〔旋轉對稱形〕

- (2) 圖一：中心對稱，薄膜間距皆相等。
- (3) 圖二及圖三：將圖一加以擾動，可形成另兩種圖形。
 - a. 圖二類似封閉，是以柱子為主體的貫軸形狀。
 - b. 圖三是以中心為旋轉對稱的圖形。

圖形種類	中心對稱 (圖一)	貫軸形 (圖二)	旋轉對稱形 (圖三)
節點數	4	0	4

表一



《附圖說明：我們將作實驗次數統計，上表為各圖形出現的機率。》

(五) 正八邊形

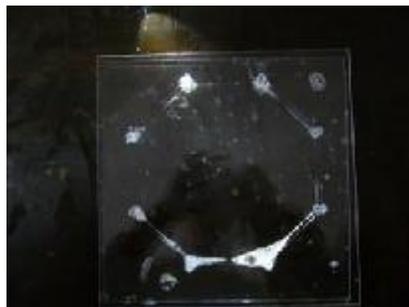
1. 封閉膜

- (1) 有八個節點且形成八邊形。
- (2) 因八邊形內角 $> 120^\circ$ ，因此八邊形封閉膜會內曲，以滿足交角 120° 。

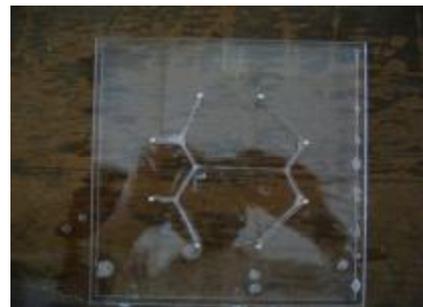


2. 不封閉膜

- (1) 共有五種不同圖形



圖一〔貫軸形〕



圖二〔中軸對稱形 I〕



圖三〔無對稱性形〕



圖四〔中軸對稱形 II〕

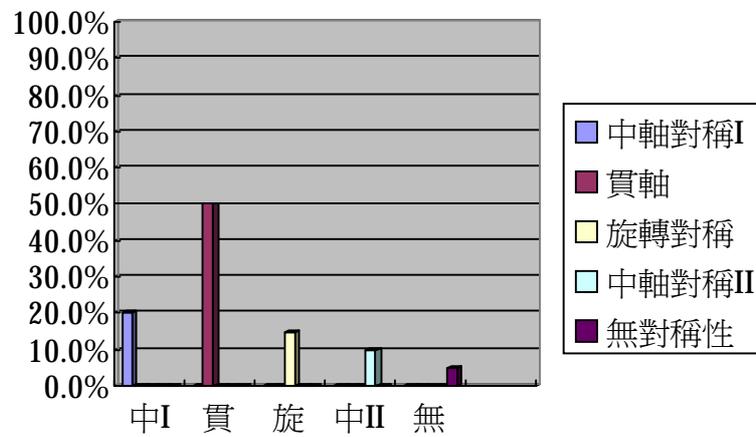


圖五〔旋轉對稱形〕

- (2) 圖一：與六邊形不封閉貫軸形類似，無節點生成，出現次數高且最穩定。
 (3) 圖二~五：擾動後可形成另四種圖形，但較不穩定。
 (4) 各圖形節點數之比較如下：

圖形種類	貫軸形 (圖一)	中軸對稱形〔I〕 (圖二)	無對稱性形 (圖三)	中軸對稱形〔II〕 (圖四)	旋轉對稱形 (圖五)
節點數	0	6	4	2	4

表二 節點數



上圖說明：我們將作實驗次數統計之後用百分比表示。由圖可知，在八邊形中仍是以貫軸形為主要圖形，但是圖形樣式增為五種。

二、薄膜移動觀察

錄影記錄後，擷取部分影像如下圖：

五邊形：



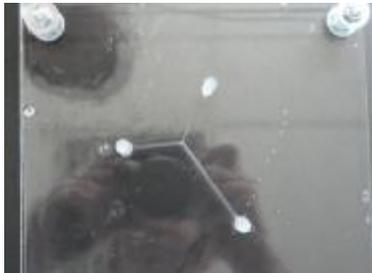
六邊形：



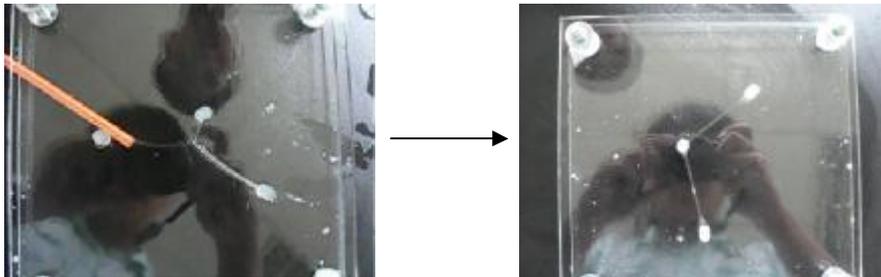
三、任意多邊形模型

(一) 三邊形

1. 柱子圍成的三角形之內角皆 $\leq 120^\circ$ 時，會形成一節點。



2. 當其中一角 $> 120^\circ$ 時，雖會形成節點，但因受力不平衡，節點向角度大之方向移動而連上柱體。



(二) 四邊形

在不同形狀的四邊形柱體間恆形成類似的圖形。



(三) 五邊形及六邊形：

在五邊形及六邊形柱體間形成的圖形，不易分類。

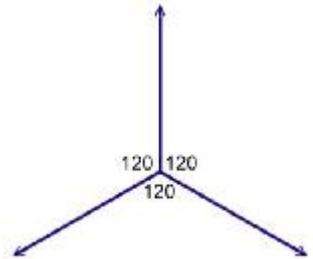


柒、討論

一、總論

(一) 表面張力

1. 在液面上之分子受到內部分子之吸引力，因受力不平衡，有一向內之淨力，使液體表面收縮成最小，此即表面張力。
2. 表面張力大小：在液面邊緣處，單位長度所受垂直之拉力。
⇒ 因薄膜受表面張力作用且大小相等，薄膜於節點所形成的交角必為 120° 。



(二) 費瑪定理

1. 等權三鎮：

如右圖，以三角形 $\triangle ABC$ 三邊，分別向外做正三角形如圖一，這三個正三角形的外接圓相交於點 P

則 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \min$ 。

2. 證明：

在三角形中任取一點 E ， $P \neq E$

則 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \leq \overline{EA} + \overline{EB} + \overline{EC}$ 。

我們知道 $PAGB$ 為一凸四邊形，根據 Ptolemy 定理：

$$\overline{EA} \cdot \overline{BG} + \overline{EB} \cdot \overline{AG} \geq \overline{EG} \cdot \overline{AB}$$

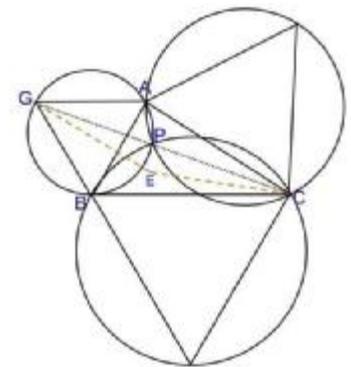
$$\text{且 } \overline{AB} = \overline{AG} = \overline{BG}, \overline{EA} + \overline{EB} \geq \overline{EG}$$

$$\text{等式再加 } \overline{EC} \Rightarrow \overline{EA} + \overline{EB} + \overline{EC} \geq \overline{EG} + \overline{EC} \geq \overline{GC}$$

$$\text{即 } \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \leq \overline{EA} + \overline{EB} + \overline{EC}$$

前一個等號代表 $EAGB$ 共圓，後一等號代表 G, P, C 共線

故當 $E=P$ 時，會有極值產生。



(三) 最小表面積

進行實驗時，發現在三角形中所形成的節點符合數學中費馬點的特徵，即由此點與各頂點間的連線總長最小，以下是我們利用類推的方式提出解釋。

1. 在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態，由此可解釋實驗所得的現象。

2. 在四邊形中會形成兩個節點而各成爲等權三鎮，不是一個等權四鎮(在一個四邊形中尋找一個點(兩對角線的交點)，此點與各頂點的距離總和爲最小)，且四邊以上的圖形都只會形成三鎮。

3. 利用最小表面積的想法解釋：

例如，

邊長爲1的正方形中

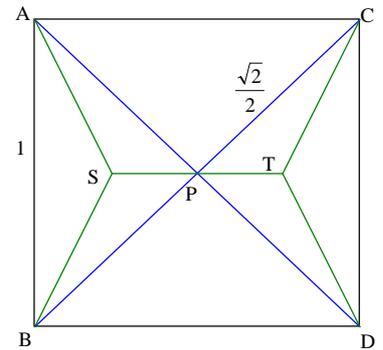
其等權四鎮所得之總長爲 $2\sqrt{2}$

而等權三鎮的兩個節點所得之總長爲

$$\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = 1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2}$$

⇒ 在正方形中符合我們的想法

由此可推論多邊形亦是如此。



二、物理推論

(一) 正 N 邊形以上多邊圖形分析

1. 封閉膜

(1) 封閉膜的形：

將模型從溶液取出時使空氣進入，再作適當調整即可形成氣室。

(2) 形成條件：

a. 薄膜於節點所形成的交角必爲 120° 。

b. 氣室內空氣的壓力作用力大小 = 大氣壓力之總力 + 薄膜向內的收縮力。

(3) 正三角形：

三角形內部出現氣室時，薄膜外曲。由條件(1)，膜之間夾角需爲 120° 方能達到淨力平衡，測量後，角度大約在 $118.5 \sim 120.5$ 左右，符合我們的假設。

(4) 正四邊形：

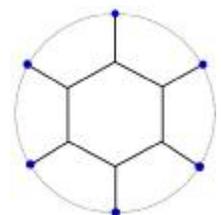
正四邊形之氣室與三角形相似，膜的曲度比三角形封閉圖形小，薄膜於節點所形成的交角皆近似於 120° 。

(5) 正五邊形：

三四邊形類似，但其曲度更小，由此可推論，當邊數爲六時曲度爲 0，若小於六會向外凸，大於六則向內凹。

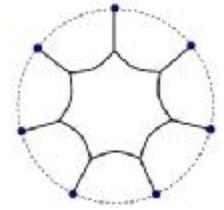
(6) 正六邊形：

正六邊形的內角皆爲 120° ，因此收縮後薄膜間的角度剛好是 120° ，薄膜不會彎曲。



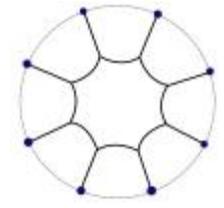
(7) **正七邊形：**

預估圖形如右，因角度特殊較難精確實驗操作，僅作圖預估。



(8) **正八邊形：**

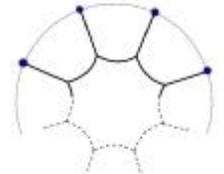
正八邊形的內角為 135°，因此收縮時薄膜會內凹，使薄膜夾角互為 120°。為符合條件(1)&(2)，會形成右圖之形狀。



※由以上推論，我們認為，在內部空氣為定值下，所形成的圖形為唯一解。

(9) **正 n 邊形(推測)：**

由以上推論可知，邊數越多，其內角越大，薄膜彎曲情況會更明顯。



2. 封閉圖形最短距離探討

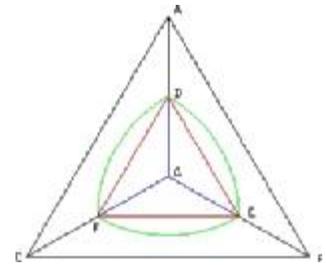
實驗發現封閉情況中，薄膜為保持力平衡而彎曲。另由總論(二)，可證明封閉膜形成的路徑比未封閉的還長。證明如下：

(1) **三角形：**

如圖一，因曲線比直線長，且由總論(二)可得

$$\overline{DF} + \overline{FE} + \overline{ED} > \overline{DG} + \overline{GE} + \overline{GF}$$

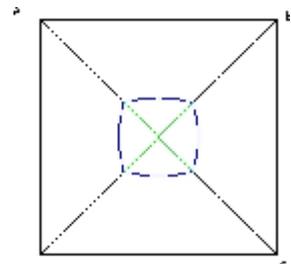
所以封閉膜的路徑較長。



圖一

(2) **四邊形：**

四邊形和三角形的證法相同，如圖二，先考慮膜為直線即可。



圖二

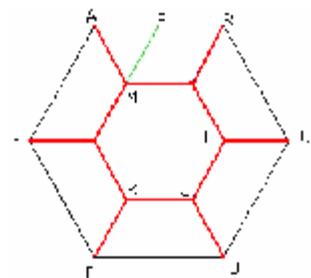
(3) **六邊形：**

如右圖三，設 $\overline{PM} // \overline{BH} \Rightarrow \overline{PB} = \overline{MH}$

又 $\triangle AMP$ 為正三角形

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AM} + \overline{MH}$$

所以黑色線條總長 = 紅色線條總長。



圖三

(4) **六邊以上圖形：**

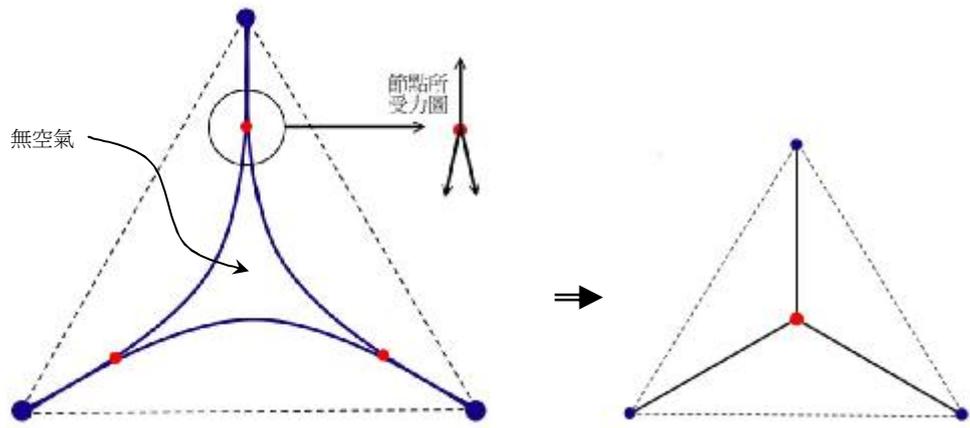
因膜會彎曲，可知其總長不是最短路徑。

由此可知，當圖形為封閉時，最短路徑不存在

3. 不封閉膜

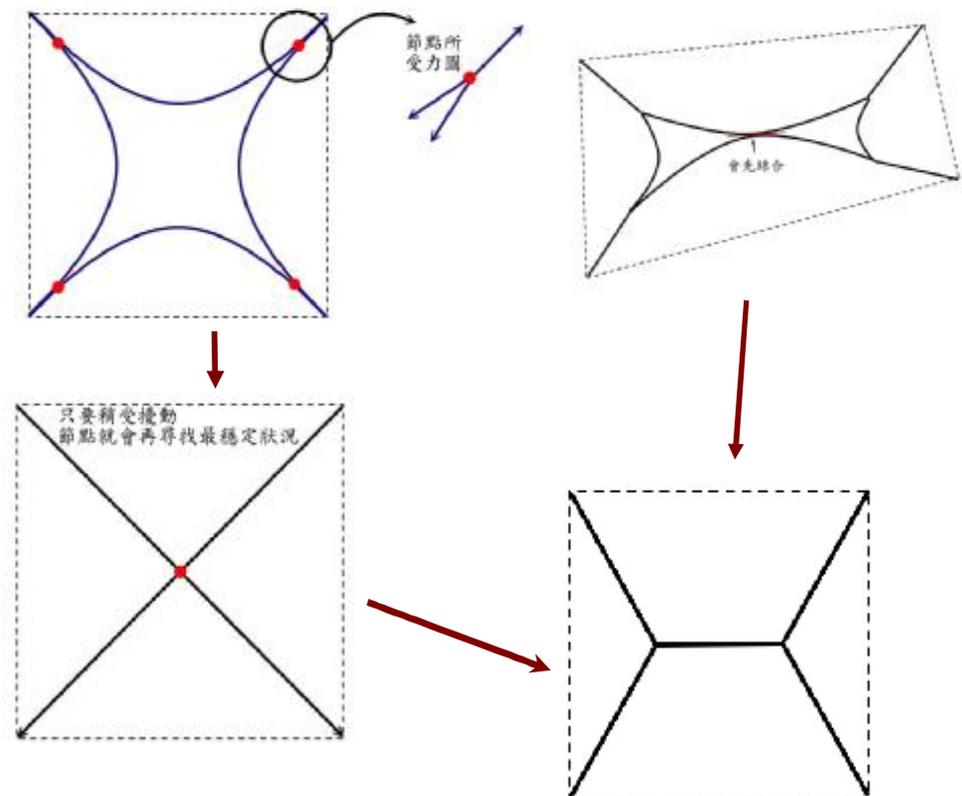
(1) **正三角形**

薄膜形成時，因大氣壓力作用，薄膜會向內塌縮（如下頁圖），節點所受合力向內，因此會聚向中心點。



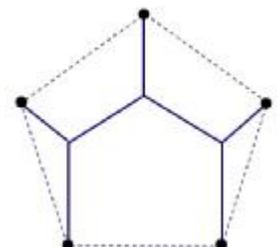
(2) 正四邊形

- 如下頁圖左，理想的狀態下，正方形薄膜四面塌縮的速率相等，所以會先往中心聚成一點，但稍受擾動後，即會再尋找更穩定的狀態。
- 任意四邊形之邊長不等，塌縮速率不盡相同，節點不會先聚在中心，而是直接形成最穩定狀態(如下頁圖右)。
- 實驗時，因無法做到理想狀態，會看到正方形亦會直接形成最穩定狀態。



(3) 正五邊形

根據實驗結果，三角形形成一個節點，而四邊形形成兩個，五邊形形成三個，因此可歸類三到五邊形為同一種形成方式。



(4) 正六邊形

六邊形所形成之圖形共有三種，每一種圖形都有其獨立之對稱性。可細分以下幾種圖形：

- a. 中心對稱：兼備點與線之對稱，且各節點之連接膜夾角均為 120° 。
- b. 貫軸形：貫串各柱體所形成的圖形，其出現次數為最多。
- c. 旋轉對稱形：以中心為旋轉中心對稱之圖形。

以上三種若加以擾動，則會互相變動。

(5) 正八邊形

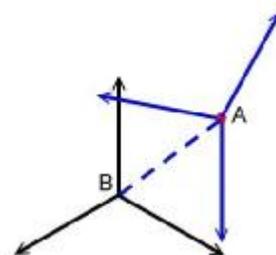
八邊形共有五種不封閉型，不一定有對稱性。當八邊形為貫軸形時，不容易改變其狀態。當節點移動尋求平衡時，可能以系統總能量為最小之趨勢形成圖形。因此我們將試著去預測節點位置，尋找共通性。

(二) 力與節點之相互關係

1. 表面能量與力之關係

設有一節點 A，受到三力作用而產生位移到平衡點 B。假設，在能量低點的節點(即 B 點)位能為零，則 A 點的位能大小為淨力對 A 移至 B 所作之功，也就是表面能量相對大小。

如右圖，節點 A 由淨力作功，產生位移後(至 B 點)達力平衡。由此即可得此點之相對位能。



註：此力與路徑有關，且三力所夾之角會隨節點位置而改變。

(1) 推導：

設某節點受三力影響，三力大小相等，合力與一力夾角 θ ，而其中一力又與另一力夾角 φ ，如圖：

$$\text{可得 } F_k = |\vec{F} + \vec{F}|^2 = F^2 + F^2 + 2F^2 \cos 2\theta$$

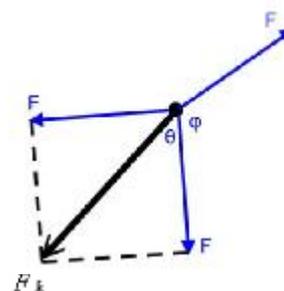
則總力大小

$$F_{\text{總}}(x) = |\vec{F}_k + \vec{F}|^2 = F_k^2 + F^2 + 2F_k F \cos(\theta + \varphi)$$

展開後得到：

$$F_{\text{總}}(x) = 3F^2 + 2F^2 \cos 2\theta + 2F\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)} \cdot F \cos(\theta + \varphi)$$

若因總力作用節點位移 dS ，則所做的功為：



$$dW = F_{\text{總}}(x) \cdot dS$$

$$\text{則 } U(s) = W = \int_{x_1}^{x_2} [3F^2 + 2F^2 \cos 2\theta + 2F\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)} \cdot F \cos(\theta + \phi)] \cdot dS$$

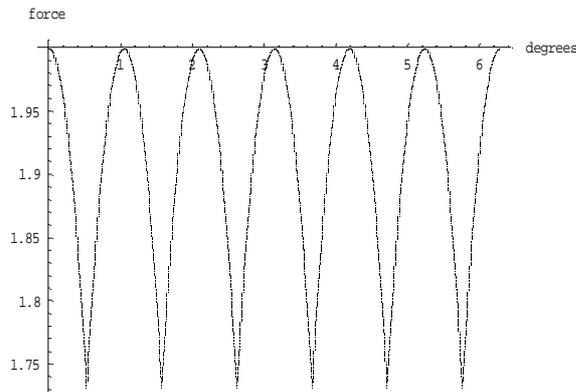
其中 x_1 和 x_2 分別為起始位置和淨力平衡位置。

(2) 結論：

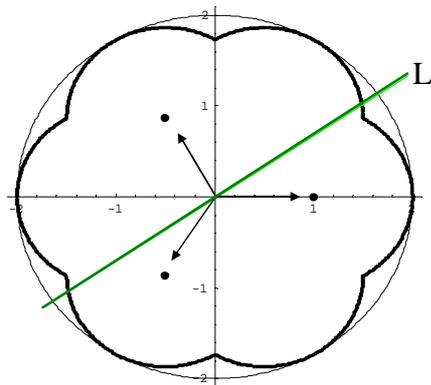
- a. 當受力不平衡時，節點向夾角小之方向位移。
- b. 推導出之位能式，可表示出力與表面能量的相對關係，但不易量化。
- c. 若知道角度，即可預測節點確實的運動方式及位置。

2. 多重作用力分析 (Multiple Forces Analysis, MFA)

若考慮正三角形的情況，穩定時，中間會產生一個節點，這節點在各方向的受力如下：



圖一：角度為 rad.，縱軸為力的大小
(令表面張力的大小為 1)



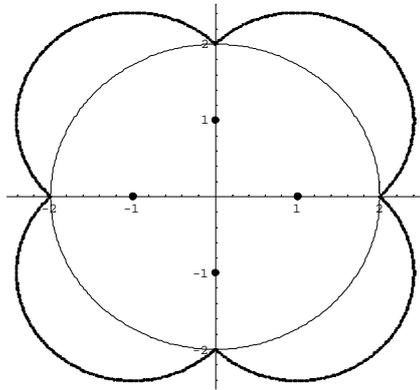
圖二

上圖的點為三角形的三節點， L 為任取的過圓心線段，與較粗的弧線交點至圓心的距離即為節點在 L 方向的受力大小。

圖一橫軸是角度、縱軸是力量，可發現有六個方向的受力最大，而且最大的力為 $2F$ (薄膜有兩面)，且此狀況較穩定。

但是在分析正方形時發現，若在中間形成一個點，雖可形成力平衡，但與

實驗結果不符。深入研究後發現，若此節點存在，則該點的受力應該如下圖三，在各個方向的受力都大於等於 $2F$ 。若考慮一個點最大只能承受 $2F$ 的力，超過後會在承受最大力的方向分裂成兩個點的話，就可以解決此問題。



圖三

數學證明：

設線段 L 之四單位向量分別為 V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4

假設此四向量在任意方向的投影和必小於 2

若取 $V_1(0,1)$ $V_2(1,0)$ $V_3(0,-1)$ $V_4(-1,0)$

L 為 X 軸，而各向量在 L 上投影總和為 2，與假設不合。

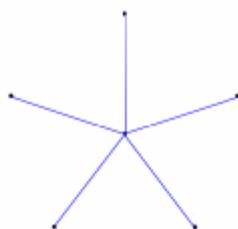
根據反證法，可得任意四個長度為 1 的向量在任意方向的投影和至少
有兩個方向會大於等於 2。

上述方法在四個力以上也會成立，由此可知由薄膜所會而成的點只能分出 3 個膜，因此可利用下列程序來預測薄膜的行為：

- (1) 在多邊形中找出一個點，使該點連接各頂點的向量和為零。
- (2) 分析各向量在各個方向的投影長度。
- (3) 向最大值存在的方向分出節點。
- (4) 將各節點移動至受力平衡的位置。
- (5) 檢查一點所連接的薄膜數。
- (6) 若薄膜數超過三個，則重複步驟(2)~(5)直到符合所有條件為止。

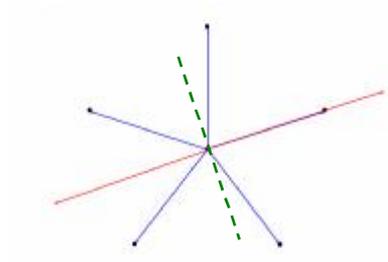
※以正五邊型為例：

- (1) 在正中間取一點

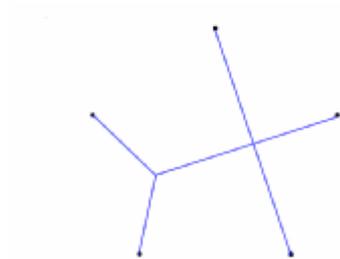


(2) 分析各力：

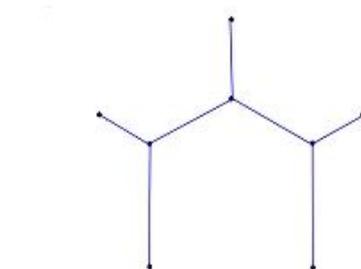
如下圖，由正五邊形在 5 個方向皆對稱，所以只需要找一種情況討論。
剛開始以綠色虛線將正五邊形分成兩部份，左半邊向左邊拉，右半邊向
右邊拉。



(3) 於左下方分出節點並調整至力平衡

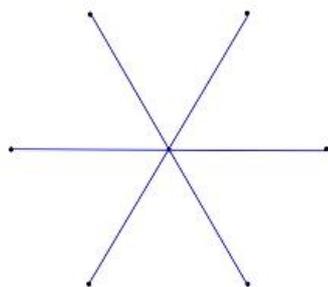


(4) 當分出的節點達到穩定狀態時，右邊的点受力仍大於 $2F$ ，故右邊的点可
分成兩點，但因在兩個方向受的力相同所以會任選一邊分裂。最後產生
的圖形如下圖，與實驗結果相符。

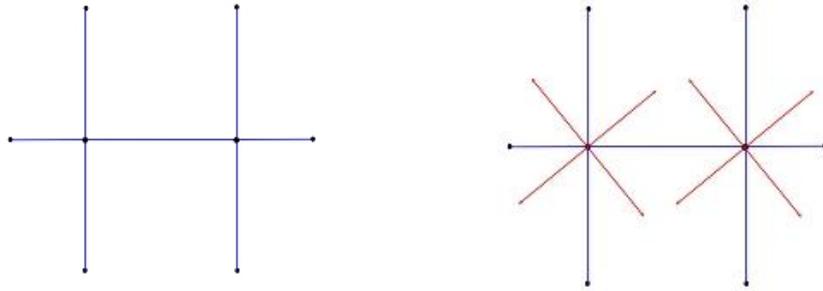


※以正六邊形為例：

(1) 在正中間取一點



(2) 受力產生節點並移動至達到力平衡



【上圖為這時左邊的点 and 右邊的点 的受力情况】

(3) 因為兩點分裂的方向不同，有以下兩種可能

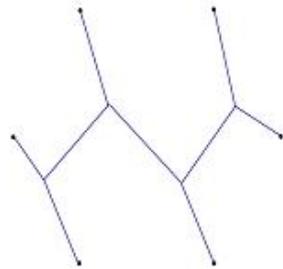


圖 A：兩點分裂的方向為 / /

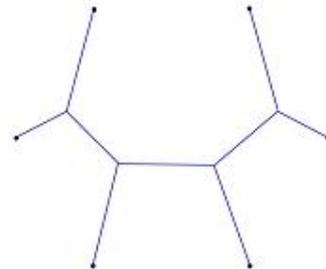


圖 B：分裂的方向為 \ /

(4) 最後的情況變成



圖 A'

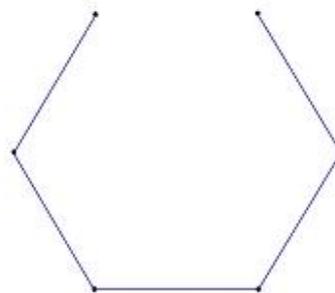
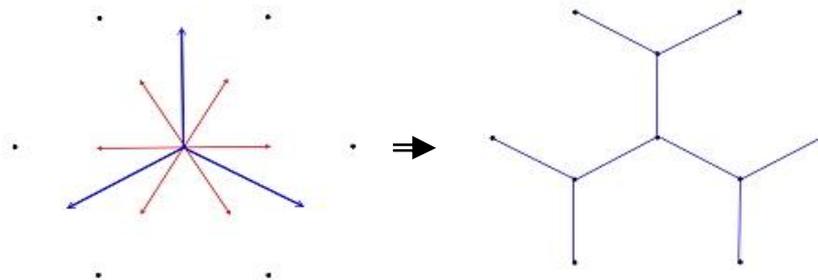


圖 B'

(5) 但六邊形有另一種可能，在第一個階段直接在三個最大的受力方向直接分裂而形成，如下圖。



※以上所提方法在所有形狀都適用，均可預測薄膜的形狀，甚至可解決最短路徑問題。

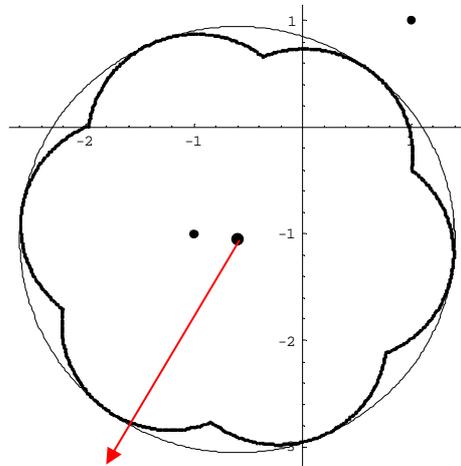
3. 薄膜移動觀察實驗結果：

- (1) 薄膜移動情形與推測之圖形相仿，即 MFA 能預測節點位置和圖形。
- (2) 不受外力干擾時，薄膜向合力作用方向移動，且每邊膜承受力不超過一定值。
- (3) 以上實驗證明了 MFA 理論正確性，可用以嘗試以下的多邊形之預測。

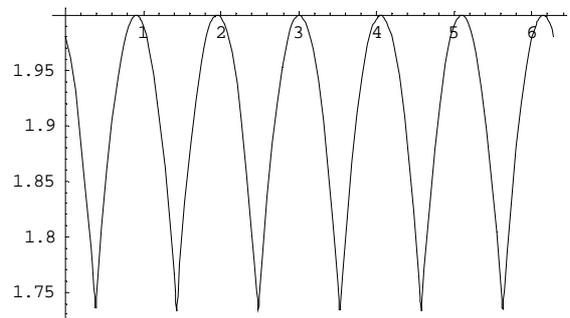
4. 任意多邊形節點預測：

(1) 任意三邊形：

我們利用 Mathematica 寫程式分析力圖，得到將各方向向量合大小相加所得之力圖如下：



此點為三力作用平衡點，其餘三小點則為柱體位置。



【力與角度關係圖】

在向量合大於 $2F$ 情況下，肥皂膜恆走最大受力方向，如圖所示，其肥皂膜在圖形中達淨力平衡點。

- 任意三角形其中一角大於 120° 時，不會有節點產生（如下圖一），最短路徑即為柱體間連線；反之，則節點形成於圖型內部（如下圖二）。
- 實驗結果符合我們的推論。



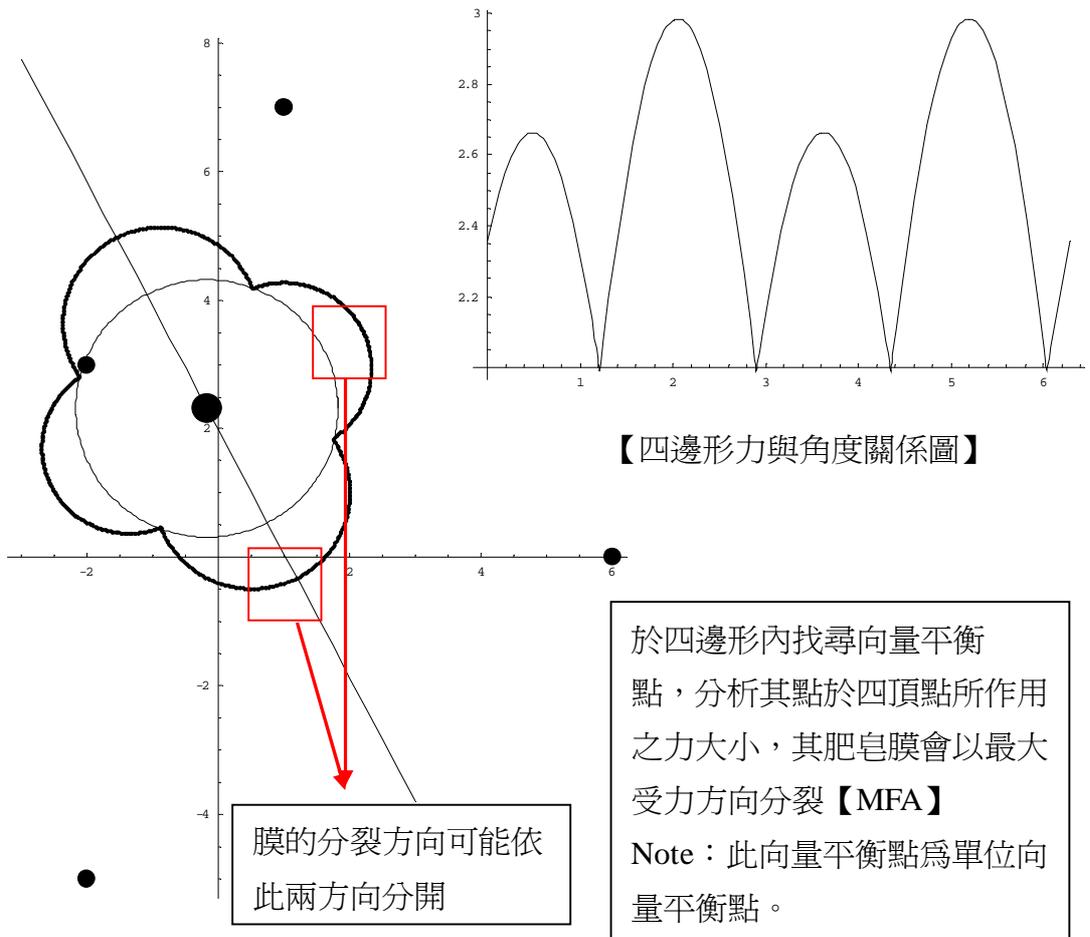
圖一



圖二

(2) 任意四邊形：

分析力圖如下

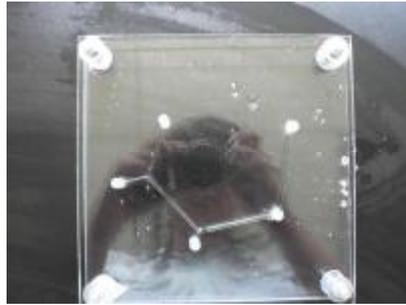
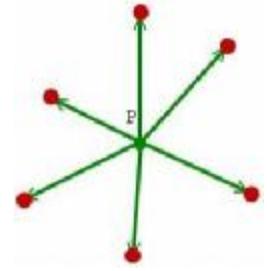


- a. 任意邊形的情況無法有系統的整理每種角度和形狀，但是在力圖中，我們能利用程式找尋一開始的淨力平衡點，此點的找尋成了程式模擬最大的困難，因此在模擬節點位置時便要思考的更加完備。
- b. 比較下兩圖，可得知 MFA 在四邊形的實驗中亦成立。



(3) 任意五邊形及六邊形：

- a. 在 MFA 中，要先找一點，此點與各頂點所形成的膜必須要保持力平衡，但在廣義 MFA 中卻不容易尋找這個點，不易以程式模擬最後的形狀，且六邊形以上圖形在實驗中會產生不同但穩定的形狀，更加深了運用程式模擬的困難。
- b. 下圖為初步之實驗結果。



(4) 任意邊形的研究難處：

- a. 無規律性：
任意邊形無論邊長和角度皆有多種可能，在有限的資料難以完善。
- b. 程式模擬困難：
程式製作能力尚不足，且包含多種變數，在理論上有難以完備的缺陷。
- c. 最初受力平衡點：
此點與各頂點所形成的單位向量合必須為零，但尚缺足夠的數學工具來做預測。

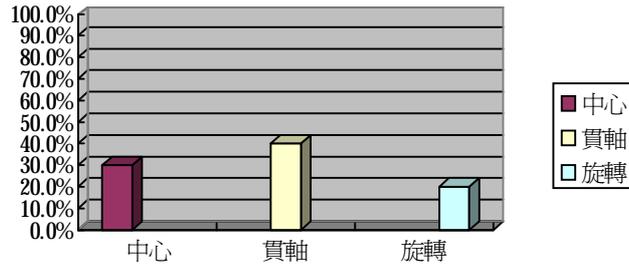
(三) 數量化及能量觀點

在先前的討論中我們做了簡單的解釋及預測，但是六邊形以上形成了非唯一解的情形，到底是否每種情形都為最短距離呢？還是只有一種才是最短距離？以下將更深入探討。

1. 實驗次數分析及統計

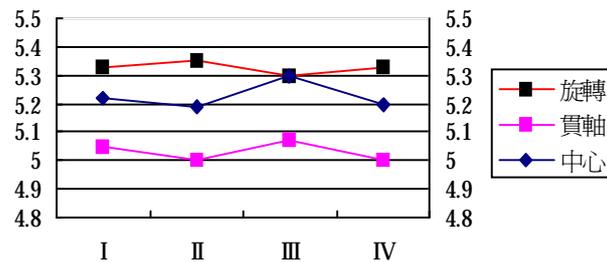
(1) 以六邊形為例：

- a. 下頁圖為六邊形主要圖形的統計，貫軸型出現次數最多，因此可推測貫軸型為系統總位能最低，總長度最短。



【上圖為實驗時各圖形的出現機率】

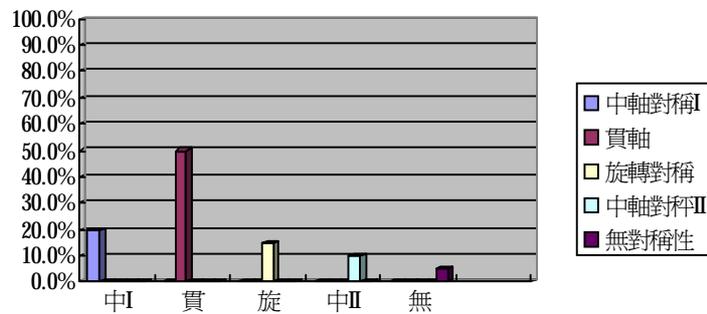
b. 實際測量各圖形之總長並分析如下圖，符合以上的推論。



【上圖表縱軸表示長度(以邊長為單位長)，橫軸為測量次數。】

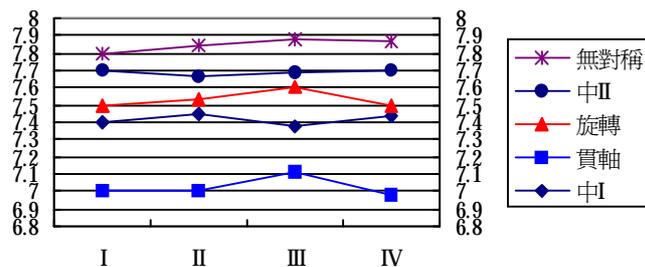
(2) 以八邊形為例：

a. 下圖為八邊形主要圖形的統計結果，貫軸亦為出現次數較多之圖形。



【上圖為實驗時各圖形的出現機率】

b. 測量各圖形之總長並分析如下頁圖，在五個主要圖形中只有一種是最短路徑，其餘的並不符合。



【上圖表縱軸表示長度(以邊長為單位長)，橫軸為測量次數。】

2. 能量觀點

由實驗分析可知，最短距離恆只有一解，也可由數學方法證明得知。之所以會出現多種圖形，其原因應該是位能高低所造成。我們猜測，由於位能不同而有所謂「位能障」〔Energy gaps〕產生，當節點達淨力平衡時，即為位能之相對低點，此時節點位能遠小於附近位能高低而產生障礙，我們可藉由測量長度來證實這想法。當節點已達位能低點但非系統最低點，此節點處於不穩定平衡或暫時性平衡。若加以擾動，節點得到的能量超越位能障時，將會達到另一穩定狀態，但是我們並無法很準確的實驗出系統之位能障產生，故我們認為以圖形出現百分比來間接的證實我們的想法。

各邊形所產生之位能障高低並不會一樣，我們無法找到確切的共通性，不過確定的是，長度與面積會改變其位能高低，包括許多種不同因素我們認為整體系統物理方法分析是非常複雜的。

(四) 程式模擬

※Mathematica

以正三角形為例分析：

1. 如右圖，假設 P 為動點，則 P 到 ABC 三點的距離總和 L 為

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} +$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{-----(1)}$$

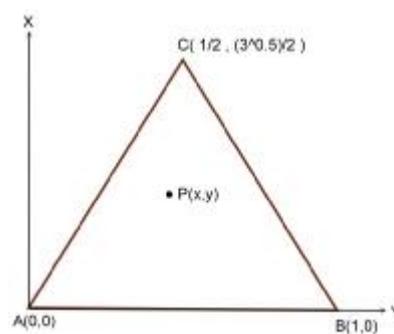


圖 A

因表面張力大小和膜的長度無關，所以位能和總長只差一個常數，因此我們只要分析總長就可以了。

2. 將公式(1)以 Mathematica 軟體繪圖。

$$\text{Plot3D}[\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \{x,0,1\}, \{y,0,1\},$$

AxisLabel→{"x","y"."Length"}, Mesh→False]

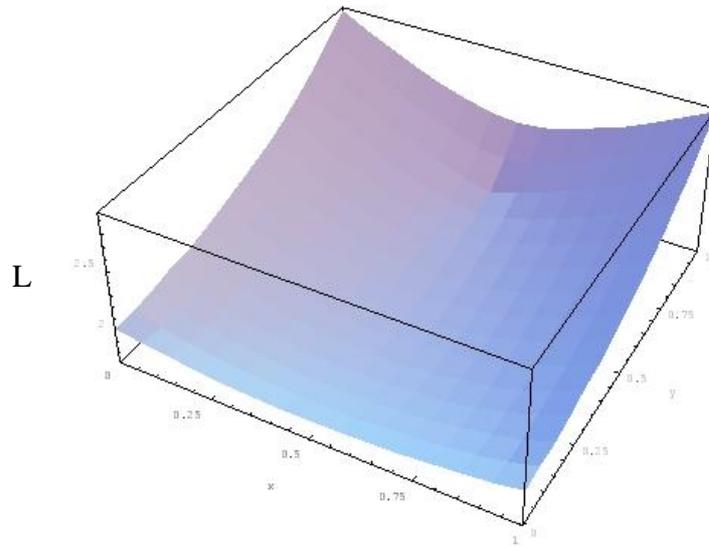


圖 B

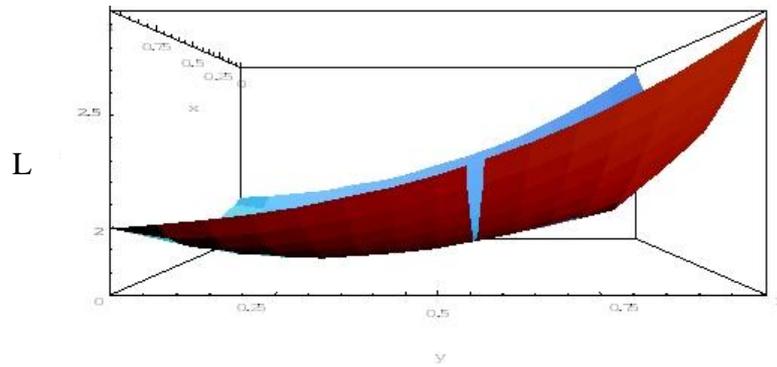


圖 C

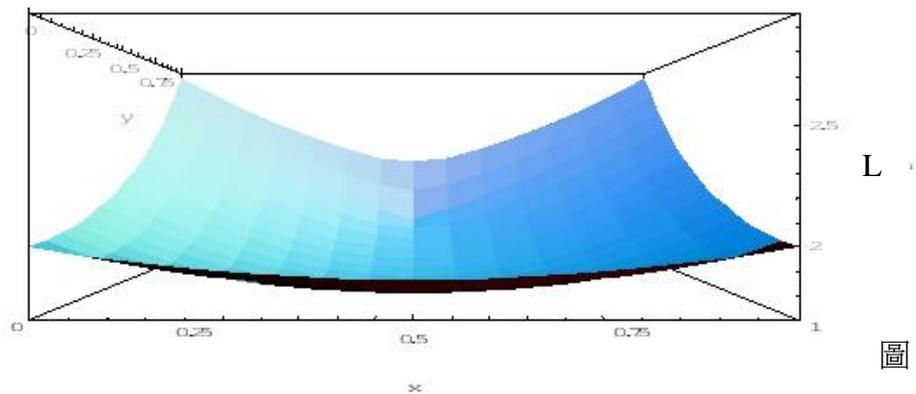


圖 D

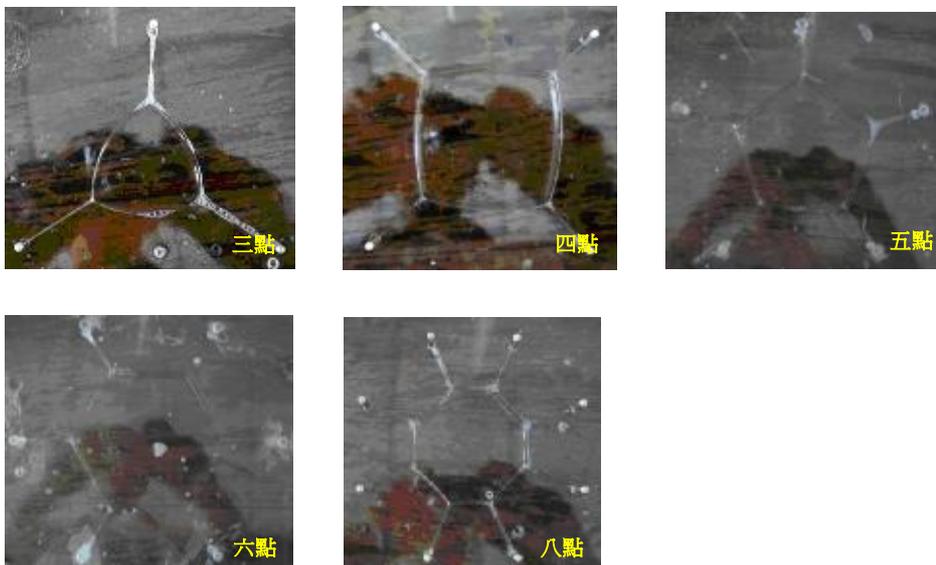
(圖 B 圖 C 圖 D 為相同但不同視角的圖形)

其中 L 為座標中的 Z 軸，由圖 C 和圖 D 中可知 L 在 $x > 0.5$ 和 $y > 0.57$ 時，隨著 x, y 增加而增加，且 L 只有一個最低點，此結果與幾何推導相符合。根據 Mathematica 計算的結果，此點與三頂點之夾角均為 120° ，符合費馬點之特徵。

捌、結論

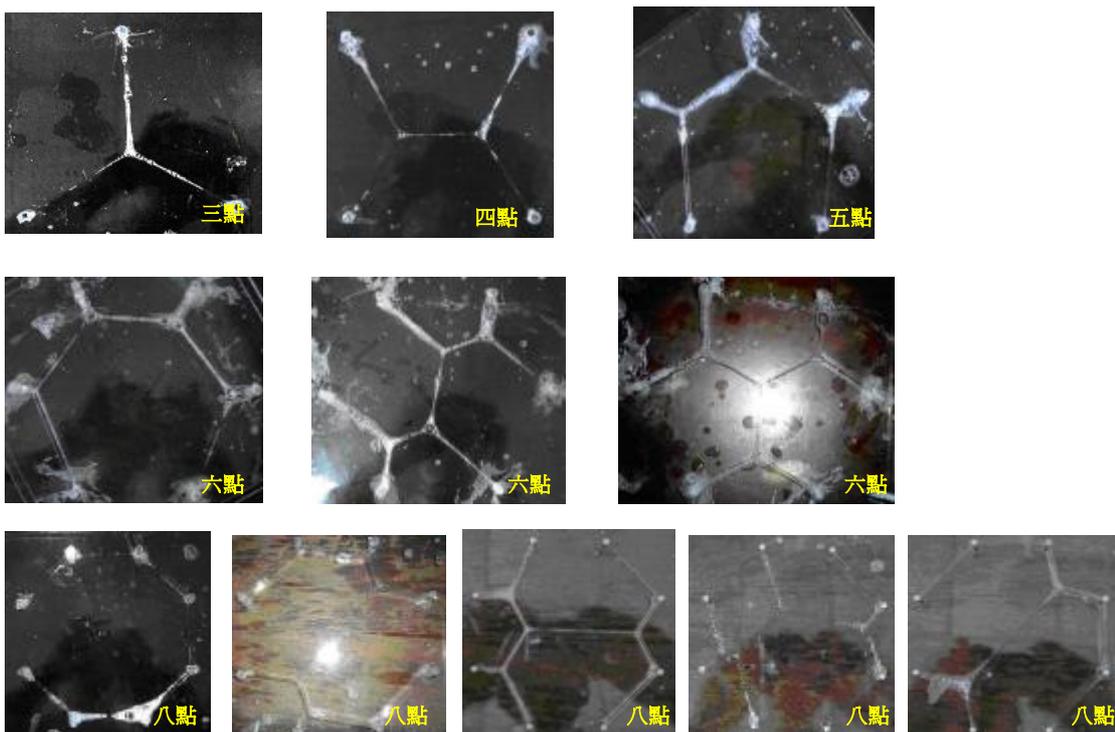
在柱子間的肥皂膜形成的情形有封閉膜與非封閉膜兩大類情形，

一、封閉膜的結果如下



1. 形成封閉膜時，薄膜易破裂，且隨著所給與氣室空氣的多寡，氣室大小也不同。
2. 三點及四點時，較不穩定，五點以上不易受擾動影響。且經計算得知，當薄膜形成封閉圖形時，其圖形之長總度非最短。

二、非封閉膜的結果如下



1. 正 N 邊形 [$N \leq 5$] 之不封閉圖形，經過多次實驗，發現僅有唯一解，不容易破壞其平衡，加以擾動後，發現圖形的樣式不會改變。
2. 正 N 邊形 [$N \geq 6$] 之不封閉圖形，其圖形非唯一解，加以擾動後，會從原先的穩定狀態轉換成其他圖形。

以力平衡討論時，當薄膜形成節點時，不論薄膜是什麼圖形，每一節點旁必有三條線，且此三線相互的夾角為 120° ，此為最穩定狀態。由推論得知，若知道分力夾角，就能夠預測節點在圖形內的運動方式。在多力作用的分析中，能夠推測平面圖形中的最短路徑。若以能量觀點解釋，路徑越短，表面能量越小。

※未來展望：

費瑪提出最短路徑問題後，困擾了數學家 and 物理學家許久，黃光明教授在貝爾實驗室提出 Gilbert-Pollak 猜想的證明後，這些問題在某些層面上已獲得解決。但在處理這種問題時難免要運用拓樸等高深數學，而此次實驗我們覺得可以用物理實驗的方法提出一個較簡單的方法來找出最短的路徑，甚至可以用程式進行模擬。但是因為數學和程式設計的能力問題還無法完全推廣到任意邊形，所以未來我們打算尋找其他工具來進行模擬。我們雖然用肥皂膜來找出最短路徑，但在數學上並未嚴謹證明薄膜實驗結果與拓樸方法所得結果相同，所以我們未來將運用廣義費瑪定理來完備我們的想法。另外在這次實驗中，因製作的器材所取的點數不多，可再延伸多幾個點，或許可以找出較完整的規則。另外也可利用靜力平衡的實驗裝置進行實驗，作對照比較。

玖、參考書目

1. 卻爾斯.巴諾.渥依斯(Charles Vernon Boys)撰/歐陽鍾仁譯(民 68)。肥皂泡的世界。台北市：正中書局
2. 黃家禮編著 (民 89)。幾何明珠。臺北市：九章出版社。
3. David Lovett, Demonstrating Science with Soap Films, Department of Physics, University of Essex, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia.
4. 黃光明 (民 82)。談談 Gilbert-Pollak 猜想的證明。數學傳播季刊，十七卷，四期。

評 語

040104 表面張力與最短路徑探討

本件作品以在兩壓克力板間，製作各種多軸性對稱來限制其間薄膜的連接線經，並能以所連接路徑的長度，來討論幾何圖像。所發展的工具簡單，但能用以討論後產生的路徑圖像，具有創意性。