

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高職組 機械科

第三名

最佳創意獎

090904

方圓之間—方體內的正多面體造形設計與加工

學校名稱： 高雄市立高雄高級工業職業學校

作者：	指導老師：
職二 林承汶	陳永昌
職二 劉泰源	吳寬瀛
職二 胡峰碩	
職二 陳峰醇	

關 鍵 詞：正多面體、電腦輔助設計、數值控制機械

壹、摘 要

“方體內的正多面體造形設計”就是在方體內加入多面體，在許多大樓門口都可看到類似這樣的多面體造景藝術。正多面體基本造型有四面體、六面體、八面體、十二面體、二十面體，若加以變化可製作出更多的多面體，我們運用多面體和多面體的幾個變化，來製作出更多的多面體，如複合、截角、星狀化等關係。

我們使用電腦輔助設計(CAD)軟體將正多面體圖設計出來，並以空間數學、幾何投影學計算正多面體圖的造型，再由電腦輔助製造(CAM)軟體模擬與產生加工程式，最後以 CNC 數值控制機械加工出來。而加工時有造型的多面體不易夾持，必須使用特殊夾具來固定於虎鉗上，且預防夾持變形也很重要，如此才能製造出我們設計的方體內正多面體造型。

貳、研究動機

在很多建築物的屋頂或是大門口，常見到擺著多面體造景藝術，甚至於多面體裡還會有其他面體。在某些電玩遊戲中，曾看過正方體裡內接球體，球體還會閃閃發光，看起來非常有藝術感，讓我們產生好奇，於是想研究多面體裡，可以存在有哪些東西。

不過，在平時看到的多面體都是紙板貼合、連桿焊接，或是積木組合等方式完成，我們將結合電腦輔助設計與數值控制工具機，加工方體鋁塊成一多面體造型的作品。

在學校實習 CNC 機械課程，加工零件常是堅硬單調的形狀，今利用 CNC 加工製作具有美感的藝術品，讓 CNC 不只是加工零件的機器，也可以運用在藝術品加工上，達到產品創新之目的。

參、研究目的

1. 以數學分析及幾何投影知能，瞭解各種正多面體結構。
2. 以 CAD 軟體設計各種正多面體模型，並製作夾具、校準器，及應力分析來解決夾持變形問題，以便於加工模型。
3. 結合 CAM 軟體及 CNC 工具機來加工各種正多面體造形，製作出具有藝術的作品
4. 創造方體內正多面體的實用性與藝術性，提高作品的商業價值。

肆、實驗器材與設備

1. CNC 綜合切削加工機 1 台。
2. 面銑刀 1 把。
3. $\phi 16$ 、 $\phi 6$ 端銑刀、 $\phi 8$ 球銑刀。
4. 3D 尋邊器
5. 鋁塊 63mm x 63mm x 63mm 若干。
6. V 型枕、加工夾具。
7. 電腦 4 台。
8. 電腦輔助繪圖軟體：AutoCAD 2005。
9. 電腦輔助設計軟體：Solid Works 2006。
10. 電腦輔助製造軟體：Master CAM 9.0。
11. 文書編輯軟體：Microsoft Word 2000。
12. 影像編輯軟體：Hyper Snap-DX 4。

伍、研究過程與方法

一、正多面體結構

若一多面體之各個面是全等的正多邊形且其各個多面角也是全等的多面角，則稱此多面體為正多面體。正多面體只有五種，即正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體以及正二十面體，此五種正多面體又稱為柏拉圖多面體(Platonic Bodies)。

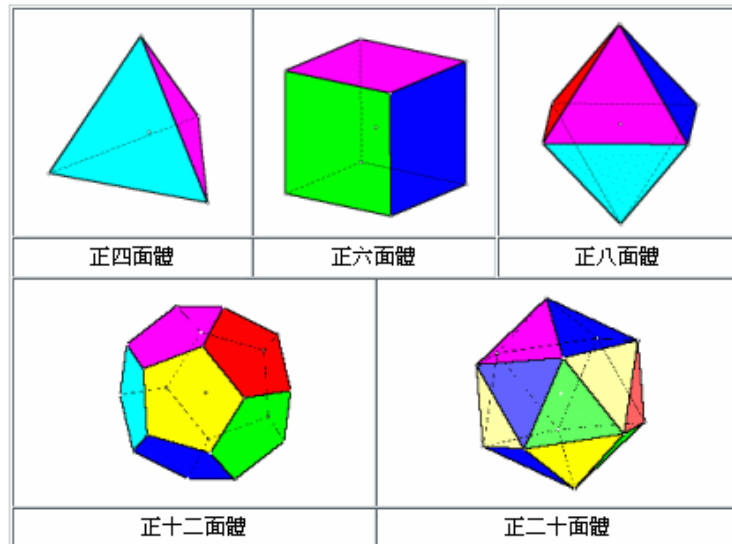


圖 1 正多面體

因目前坊間製作正多面體，多以卡紙裁切展開圖再黏接製成，或以焊接、積木、連接桿等組裝方式呈現正多面體造型，較屬於美工藝術的創作；今我們將以機械加工方法，以金屬材料切削出正多面體的造型，來呈現出金屬的美感與藝術，是較獨特且與眾不同的創作。

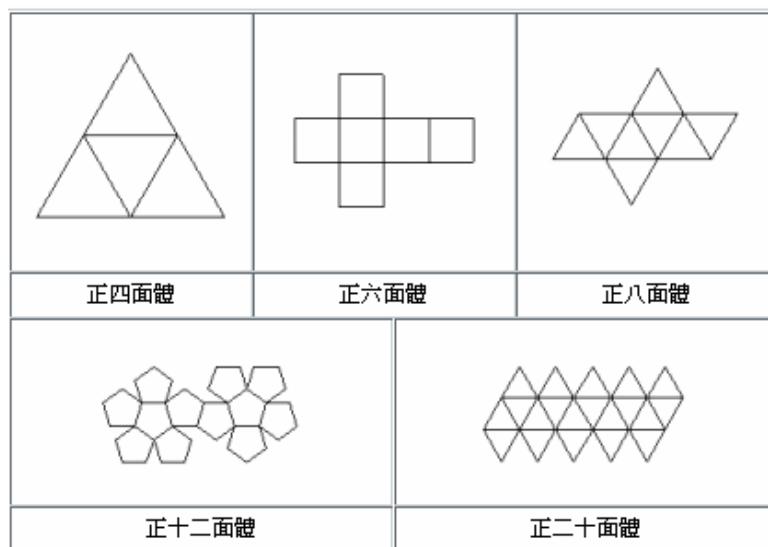


圖 2 正多面體的展開圖

首先，我們需了解正多面體的結構屬性：

表 1 正多面體的結構屬性

名 稱	面 的 性 質	面數	頂點數	邊線數	面的夾角
正四面體	正三角形	4	4	6	70.529°
正六面體	正方形	6	8	12	90.000°
正八面體	正三角形	8	6	12	109.470°
正十二面體	正五邊形	12	20	30	116.565°
正二十面體	正三角形	20	12	30	138.189°

由以上我們發現，如果把柏拉圖多面體各面的中心連接起來，會發生什麼事呢？以四面體為例，我們發現它會形成另一個顛倒的四面體；六面體各面中心連接會形成八面體，十二面體則會形成二十面體。如此可見，兩個多面體的頂點數與面數互相對應，稱為「對偶」，即六面體與八面體為對偶體，十二面體與二十面體為對偶體，而四面體為自對偶體。

二、方體內正多面體造型設計

一般在正方體內所產生的正多面體造型，如圖 3~6 所示，為得方體內最大的多面體體積，每一頂點或邊線皆與正方體有連結關係，本研究也是利用此連結關係，對方體鉛塊加工出五種正多面體的造型。

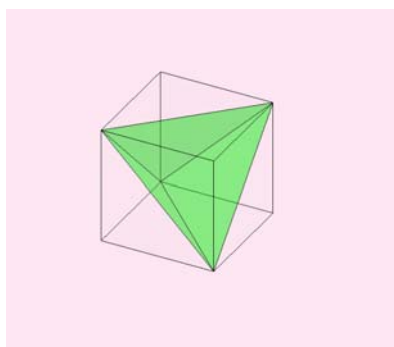


圖 3 方體內接四面體造型

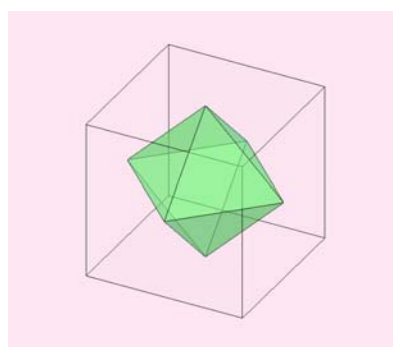


圖 4 方體內接八面體造型

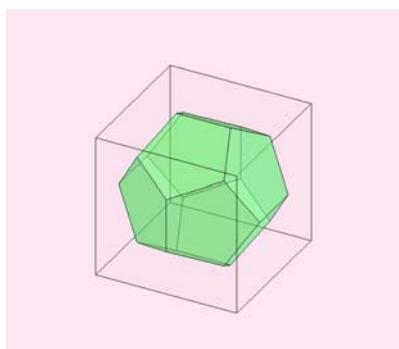


圖 5 方體內接十二面體造型

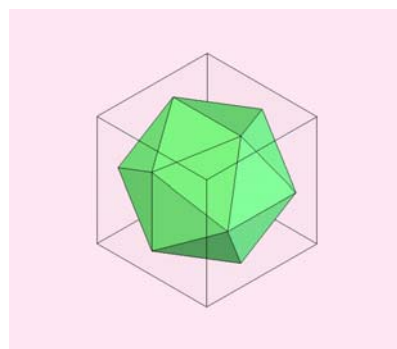


圖 6 方體內接二十面體造型

其中方體內接最大正六面體即方體本身，且以加工正六面體較無太大困難，所以本研究將稍後再提出方體內加工正六面體的創作造型。

由上述五種正多面體造型可再衍生出更多的多面體造型，如複合多面體、截角多面體、星狀多面體等，說明如下：

1. 複合多面體：

將兩個正多面體疊合在一起組合成一個多面體，稱為複合體。對偶的多面體，可以利用邊與邊中點重合方式，如四面體加四面體、六面體加八面體、十二面體加二十面體，都是由兩個正多面體組合成的。

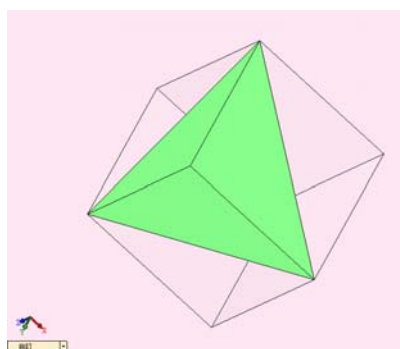


圖 7 四面體

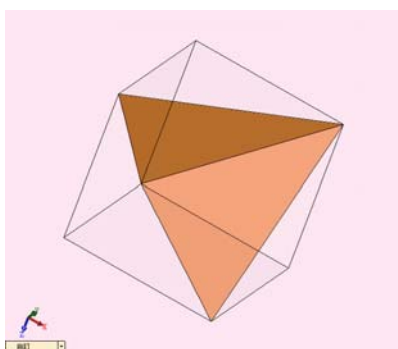


圖 8 四面體

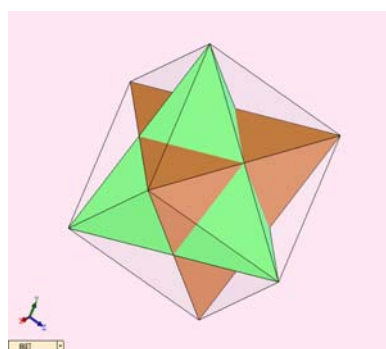


圖 9 複合多面體

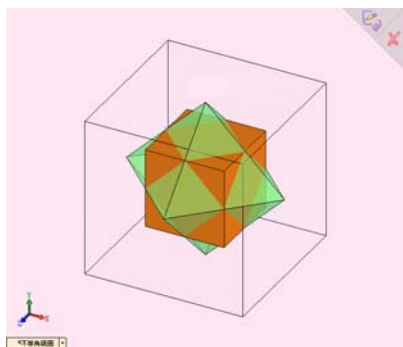


圖 10 六面體加八面體

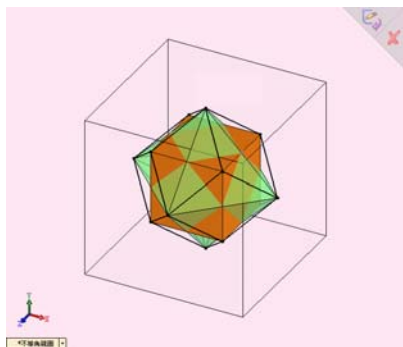


圖 11 將兩兩頂點連接成面

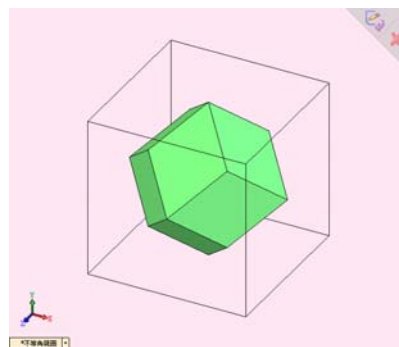


圖 12 得菱形十二面體

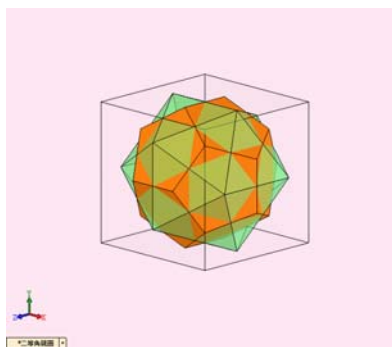


圖 13 十二面體加二十面體

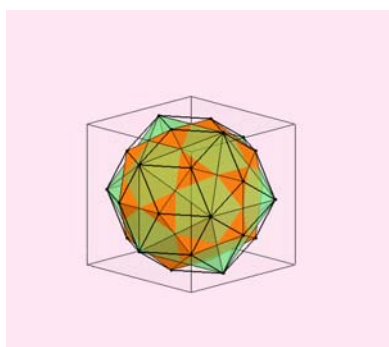


圖 14 將兩兩頂點連接成面

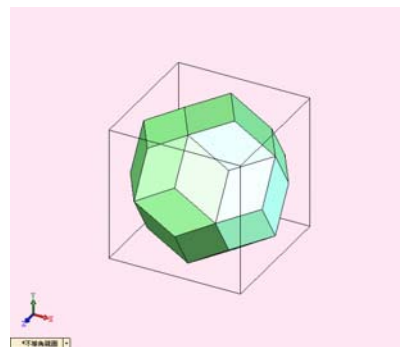


圖 15 得菱形三十面體

2. 截角多面體：

將正多面體的頂角截平，這些截面積正好完美表現出正多面體的頂點圖形，如正四面體、正六面體與正十二面體截角面為三角形，正八面體為正方形，二十面體為五邊形。今將二十面體各角截掉就是巴克球，也就是一般足球的形狀。

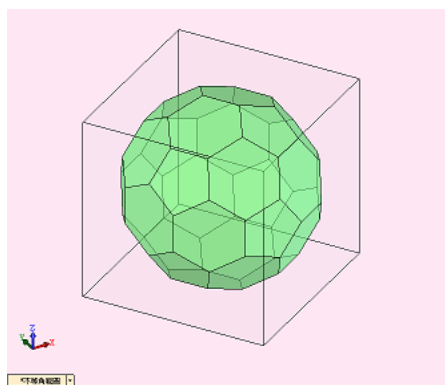


圖 16 為二十面體截角設計圖(巴克球)

3. 星狀多面體：

有些多面體的邊在延伸之後會相交，例如正五邊形的邊會相交成一個五角星形，這個過程我們稱為「星狀化」。雖然五角星形五條邊互相交叉，但它每邊的長度與每個頂角的大小都是相等的，因此可以把它看成是非凸正多面形。

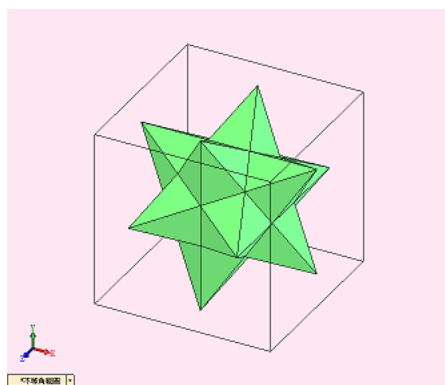


圖 17 為十二面體星狀化圖形

三、多面體的面與面夾角數學驗證

本研究為方體內接正多面體造形設計，要以機械加工方法將方體鋁塊切削出正多面體造型。表 1 中，我們關心的是面與面的夾角來作為加工的角度，因此我們思考空間概念，以數學計算出面與面的夾角，也算是對上述資料的驗證。各角度的計算如下：

(一)正四面體面與面夾角：

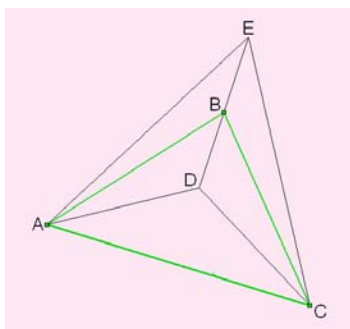


圖 18

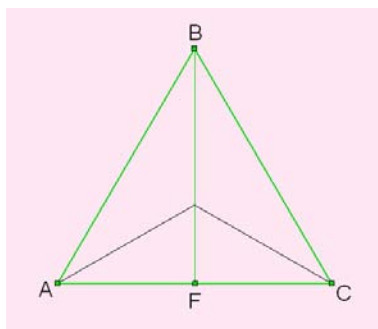


圖 19

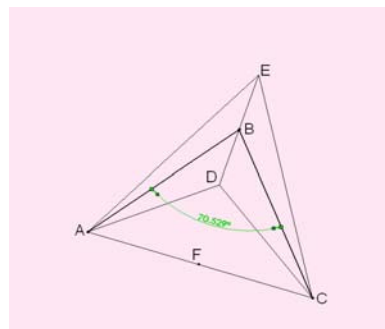


圖 20

設正四面體邊長為 1

連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{AB} \perp \overline{DE}$

$\overline{EC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BC}^2$ ， $\overline{EC} = 1$ ， $\overline{BE} = 0.5$

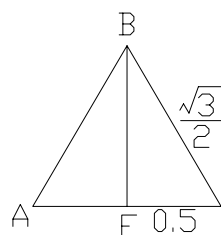
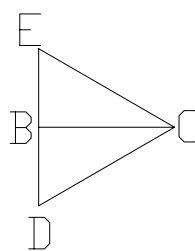
$\overline{BC} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{FC} = 0.5$

$\angle BAC = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{FC}}{\overline{BC}}\right) = 54.735$

$\angle BAC + \angle BCA = 54.735 \times 2 = 109.471$

$\angle ABC = 180^\circ - 109.471 = 70.529$



(二)正八面體面與面夾角

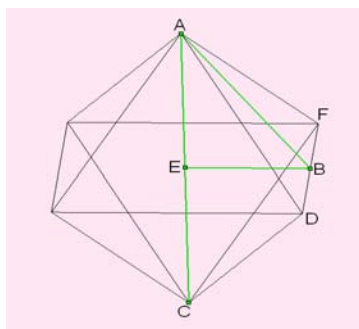


圖 21

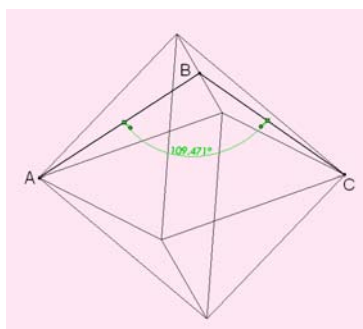


圖 22

設正八面體每一邊長為 1

連接 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$

$\overline{AC} \perp \overline{BE}$ 得一點 E

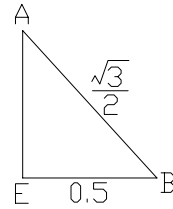
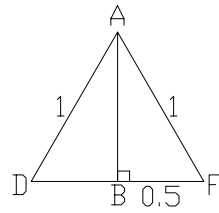
$$\overline{AF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{AB}^2$$

$$1 = \frac{1}{4} + \overline{AB}^2, \quad \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\overline{EB}$ 為邊長的一半 = 0.5

$$\angle ABE = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}\right) = 54.735$$

$$\angle ABC = 2\angle ABE = 109.471$$



(三)正十二面體面與面夾角

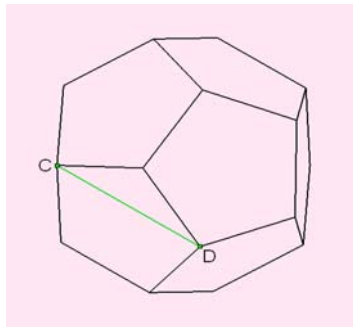


圖 23

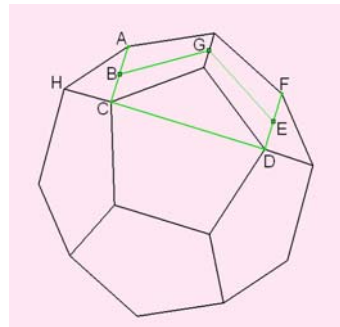


圖 24

設每邊長為 1，即正五邊形邊長為 1

連接 $\overline{HB}$ ， $\overline{HB} \perp \overline{CA}$ (圖 13)

$$\angle CHB = 54^\circ, \quad \angle HCB = 36^\circ$$

$$\overline{CB} = \cos 36^\circ = 0.809$$

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BE} = 2\overline{CB} = 1.618033989$$

平移 $\overline{BG}$ 得一 $\triangle CIJ$

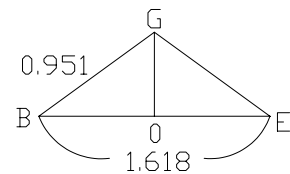
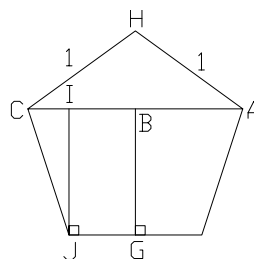
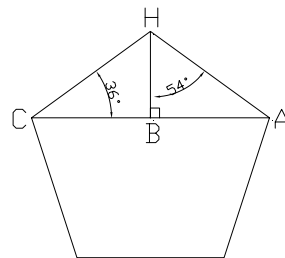
$$\angle CIJ = 18^\circ$$

$$\overline{BG} = \overline{IJ} = \cos 18^\circ = 0.9510565163$$

$$\angle GBO = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{BO}}{\overline{BG}}\right) = 31.71747441$$

$$\angle GBO = \angle GEO$$

$$\angle BGE = 180^\circ - \angle GBO - \angle GEO = 116.5650512$$



(四)正二十面體面與面夾角

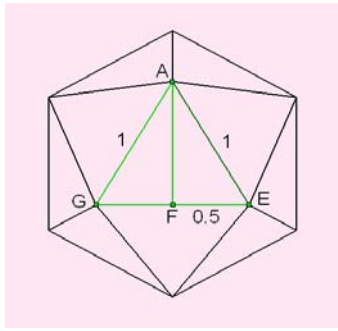


圖 25

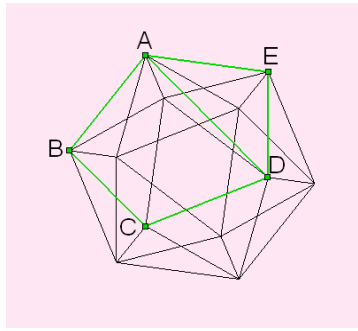


圖 26

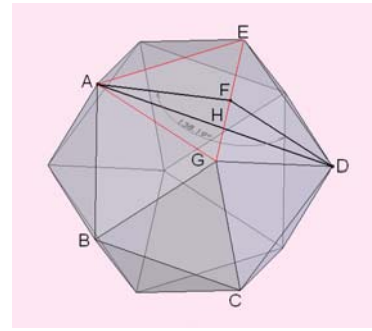


圖 27

設每邊長為 1，即正三角形每邊長為 1

$\overline{EG}$ 中點 F，連 $\overline{AF}$ 、 $\overline{FD}$ 、 $\overline{AD}$

在五邊形 ABCDE 中 (圖 15)

$$\angle AED = 108^\circ$$

$$\because \overline{AE} = \overline{ED}$$

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA = 36^\circ$$

$$\overline{EH} \perp \overline{AD}$$

$$\overline{AH} = \overline{HD} = \cos 36^\circ = 0.809$$

$\triangle AEG$ 為一正 $\triangle$

$$\overline{AF} = \overline{FD} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866025$$

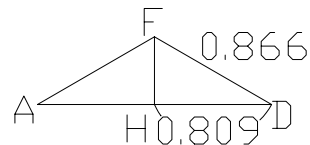
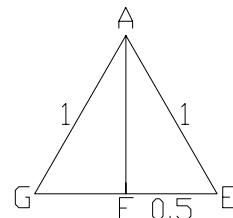
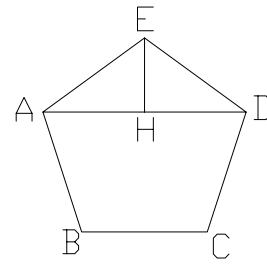
在 $\triangle AFD$ 中

$$\angle FDA = \cos^{-1} \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{FD}} \right)$$

$$\angle FDA = \cos^{-1} (0.809 \div 0.866) = 20.9039^\circ$$

$$\angle FAD + \angle FDA = 20.9039^\circ \times 2 = 41.8078^\circ$$

$$\angle AFD = 180^\circ - 41.8078^\circ = 138.19^\circ$$



四、以幾何投影求加工面最大直徑及最小深度

接著我們要在方體內加工出多面體，需計算每一面的外接圓作為最大加工直徑；而方體頂點至多面體的面之垂直距離作為最小加工深度。這兩項參數，是我們將方體加工出正多面體的最重要依據。

雖然加工各正多面體，以電腦繪圖軟體繪出方體內接正多面體造型，即可查詢出欲加工面的外接圓直徑及方體頂點至面的垂直距離。然而，為了驗證與學習幾何投影的知識，所以我們利用幾何投影法來求取這兩項參數。

首先以三視圖表示方體內多面體造型，多面體將以複斜面及單斜面呈現出面的外型。如

正四面體、正八面體為複斜面，正十二面體為單斜面，而正二十面體有單斜面，也有複斜面。
在此我們以正二十面體為例，求出真實面的外接圓及頂點至面的垂直距離。

(一)單斜面投影

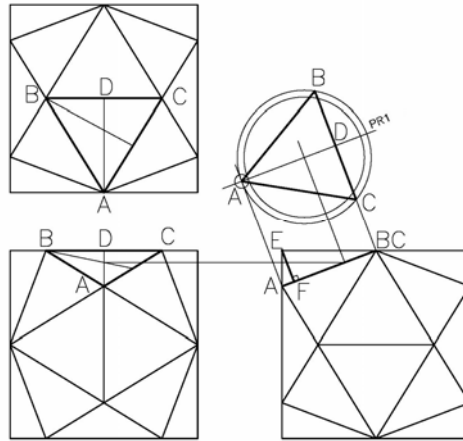


圖 28 單斜面投影求實面

1. 由右側視圖找出單斜面 ABC 的邊視圖。垂直於該邊視圖，繪出平行投影線，並適當位置定 $RP1$ 參考線，交投影線於 A 、 D 點。
2. 從前視圖量取 $\overline{BD}$ 、 $\overline{DC}$ 長度做為輔助視圖的深度得 B 、 C 點，再連接 A 、 B 、 C 點，即完成其單斜面的真實面 ABC 。
3. 在真實面 ABC 繪外接圓，即得加工多面體的最大直徑。右視圖頂點 E 至邊視圖垂直距離 $\overline{EF}$ ，即為頂點至加工面的最小深度。

(二)複斜面投影

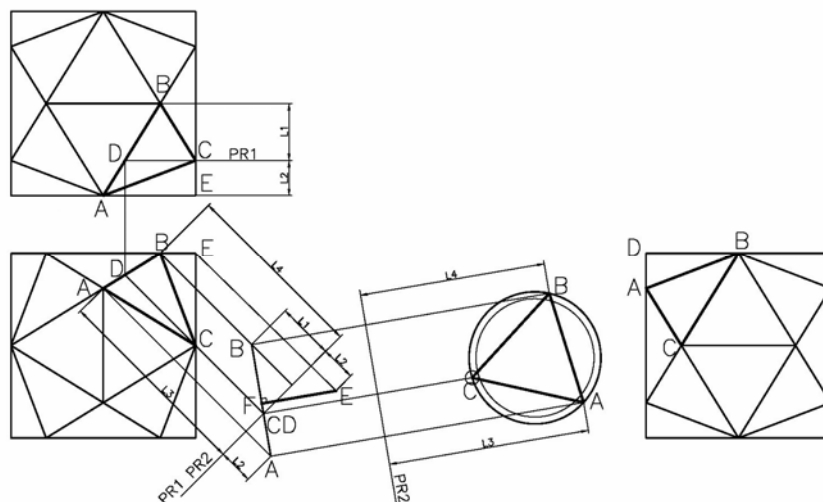


圖 29 複斜面投影求實面

1. 由上視、前視兩個主要視圖，找出複斜面 ABC 中有實長的線 $\overline{CD}$ ，視線取實長線平行方向，做實長之延伸投影線。
2. 在上視圖 $\overline{CD}$ 線上和延伸的投影線上適當位置，分別設定第一參考平面(PR1)。
3. 再從上視圖參考平面(PR1)量取其深度 L1 及 L2，移繪邊視圖的第一參考平面(PR1)，繪出複斜面 ABC 的邊視圖。
4. 自邊視圖做垂直投影線，再取適當距離設定第二參考平面(PR2)。
5. 從前視圖中第二參考平面取其深度 L3、L4，移繪邊視圖的第二參考平面(PR2)，繪出複斜面 ABC 的真實形狀大小。
6. 在真實面 ABC 繪外接圓，即得加工多面體的最大直徑。
7. 頂點 E 至複斜面 ABC 之邊視圖垂直距離 $\overline{EF}$ ，即為頂點至加工面的最小深度。

因此，以邊長 62mm 之正六面體，投影求得內接最大正多面體所需之最大加工直徑與最小深度為：

表 2 方體內接正多面體之最大加工直徑與最小深度 單位(mm)

	每面邊長	最大加工圓直徑	最小深度
正四面體	88.391	102.142	35.985(複斜面上)
正八面體	43.84	50.22	35.796(複斜面上)
正十二面體	23.862	40.29	16.298(單斜面上)
正二十面體	38.318	44.246	24.734(複斜面上) 11.061(單斜面上)

五、電腦輔助造形設計(CAD)

(一) 方體內接正多面體

決定了面與面的夾角與加工面直徑、深度參數後，就可以開始設計所想要的多面體。利用電腦輔助設計(CAD)軟體 Solid Works 和 AutoCAD 來設計正六面體內接各正多面體的造形。

但是加工時，仍需保留正方體外型以便夾持工件，故無法以最大的加工直徑與最小的深度加工，否則會破壞掉外接的正方體。因此設計時，我們的實際參數為：

表 3 方體內接正多面體之實際加工參數

單位(mm)

	正四面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
實際加工圓直徑	48.031	41.194	34.858	31.610
實際加工深度	44.884 (複斜面上)	37.734 (複斜面上)	18.429 (單斜面上)	38.010(複斜面上) 20.471(單斜面上)

1. 方體內接正四面體造形設計

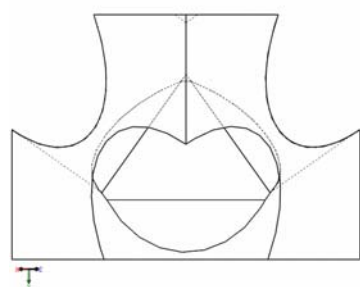


圖 30 俯視圖

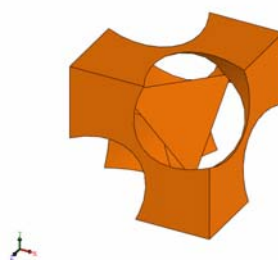


圖 31 不等角立體圖

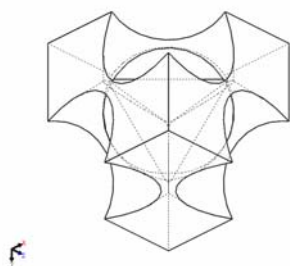


圖 32 等角投影圖

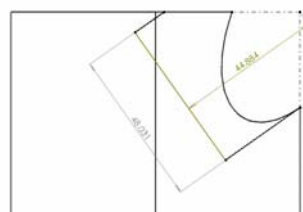


圖 33 銑孔直徑與深度

2. 方體內接六面體造形設計

為使方體內接六面體造型更具藝術，我們設計了多重銑削加工，產生的立體效果有多層次的美感。

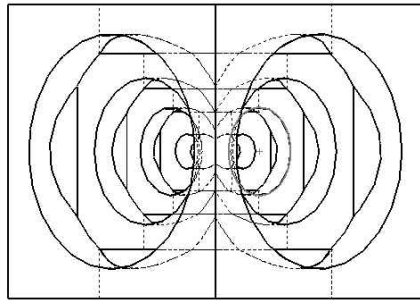


圖 34 前視圖旋轉 45 度投影圖

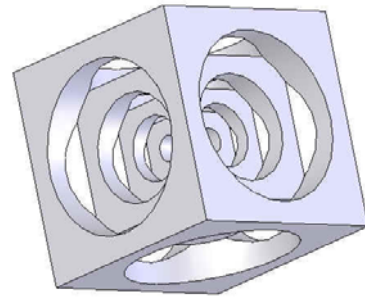


圖 35 立體圖

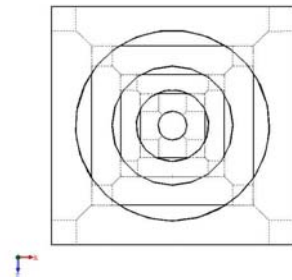


圖 36 前視圖

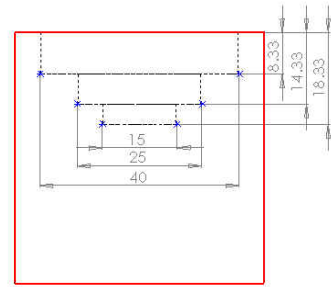


圖 37 銑孔直徑與深度

3. 方體內接八面體造形設計

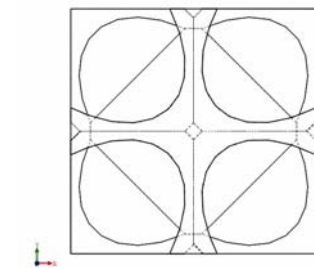


圖 38 前視圖

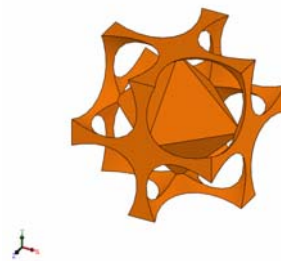


圖 39 不等角立體圖

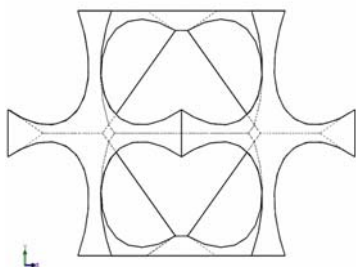


圖 40 前視圖旋轉 45 度之投影

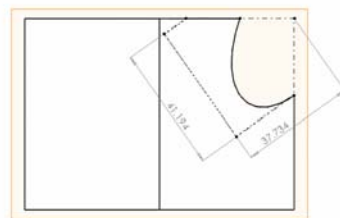


圖 41 銑孔直徑與深度

4. 方體內接十二面體造形設計

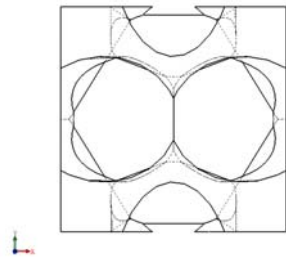


圖 42 俯視圖

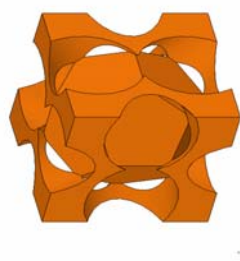


圖 43 不等角立體圖

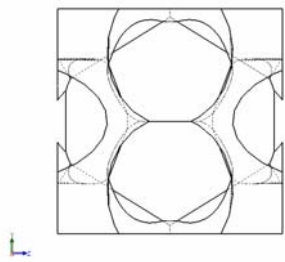


圖 44 前視圖

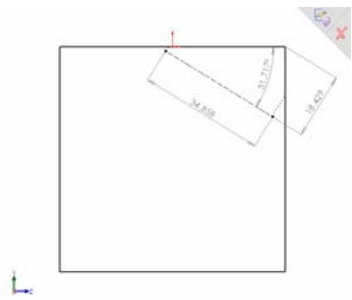


圖 45 銑孔直徑與深度

5. 方體內接二十面體造形設計

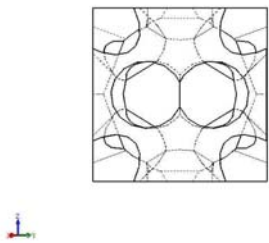


圖 46 俯視圖

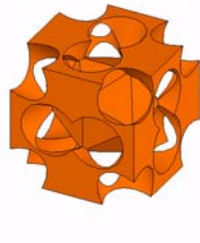


圖 47 不等角立體圖

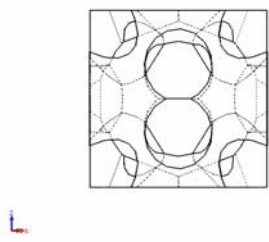


圖 48 前視圖

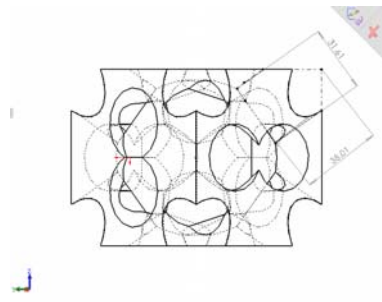


圖 49 鑽孔直徑與深度

(二) 複合多面體：

了解多面體與多面體複合關係，我們可得到四加四多面體、六加八多面體、十二加二十多面體，三種形狀複合的多面體，並使用 SolidWorks 來繪畫出該多面體。

1. 四加四多面體互疊造形設計

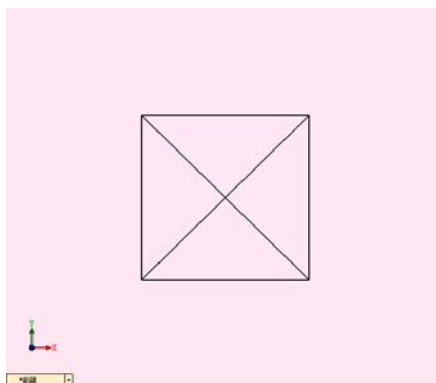


圖 50 前視圖

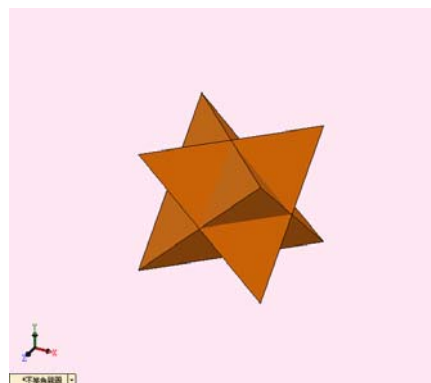


圖 51 不等角立體圖

2. 六加八之菱形十二面體造形設計

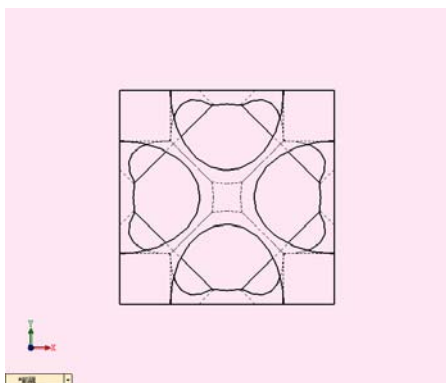


圖 52 前視圖

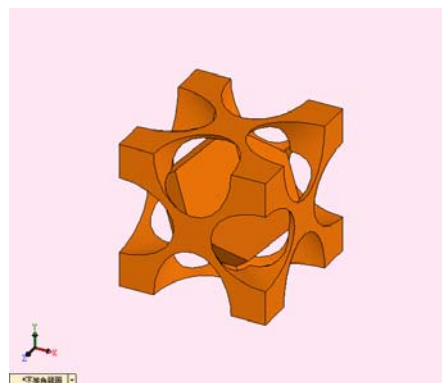


圖 53 不等角立體圖

3. 十二加二十之菱形三十面體造形設計

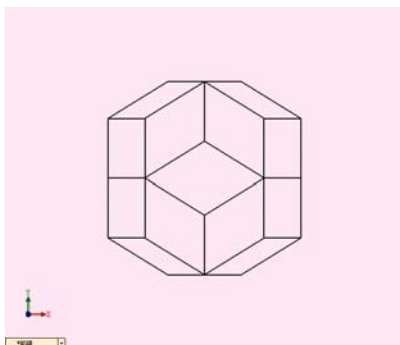


圖 54 前視圖

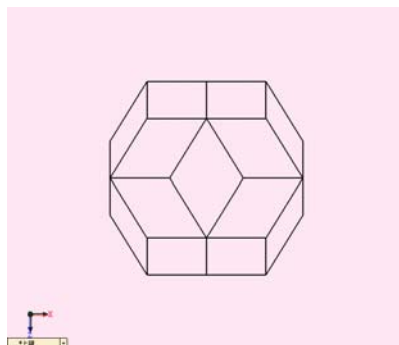


圖 55 俯視圖

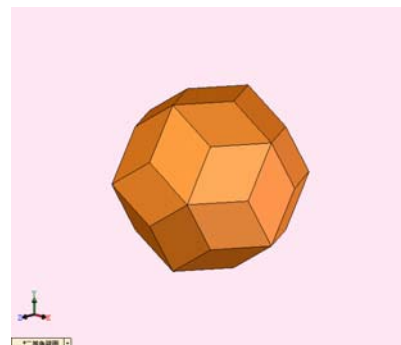


圖 56 不等角立體圖

(三)截角多面體：巴克球造形設計

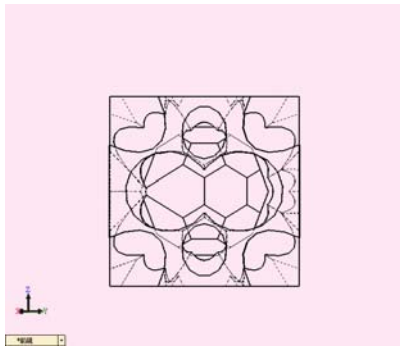


圖 57 前視圖

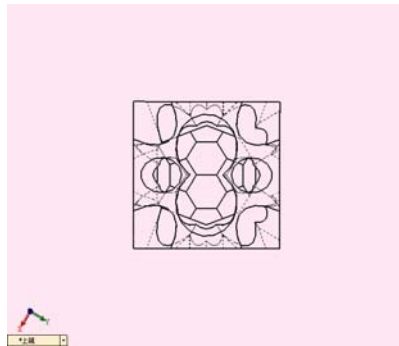


圖 58 俯視圖

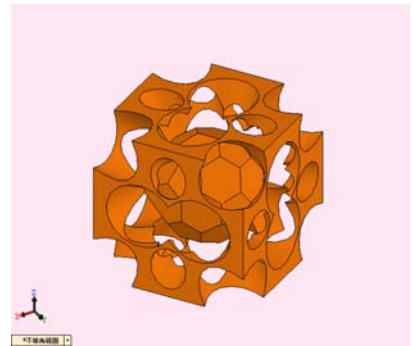


圖 59 不等角立體圖

(三)星狀化多面體：星狀十二面體造形設計

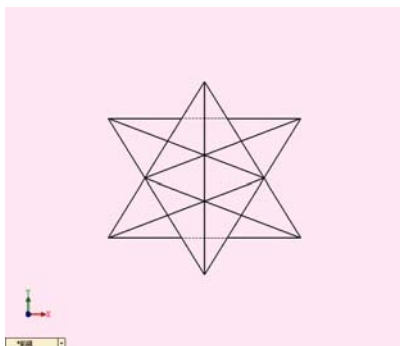


圖 60 前視圖

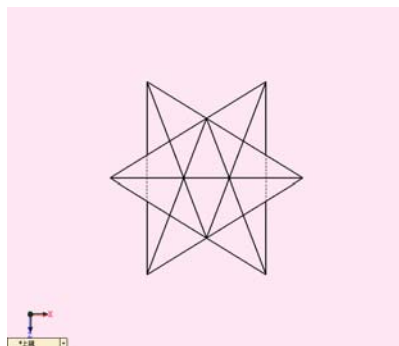


圖 61 俯視圖

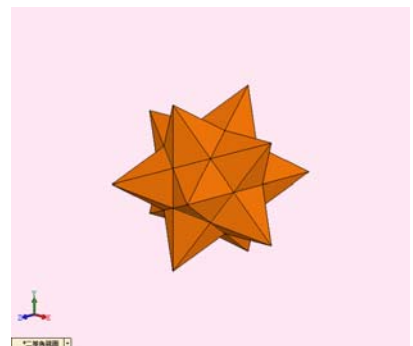


圖 62 不等角立體圖

六、電腦輔助製造(CAM)

我們將 SolidWorks 作好的正多面體 3D 圖，經由轉檔到電腦輔助製造 MasterCAM 軟體上做加工，如設定加工路徑、刀具參數、模擬檢查等，確定各程序都正確後，再以後處理程式轉成 CNC 程式。作法依序如下圖：

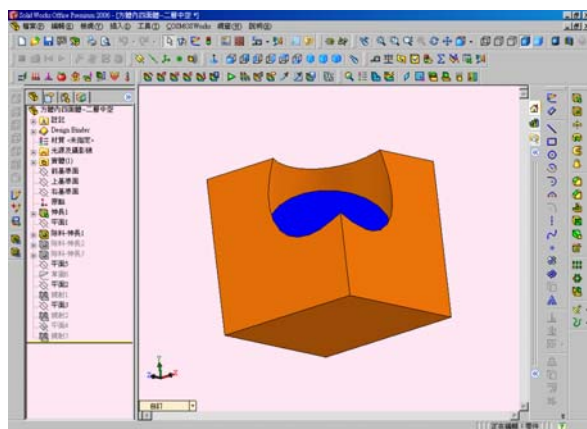


圖 63 方體內正四面體設計

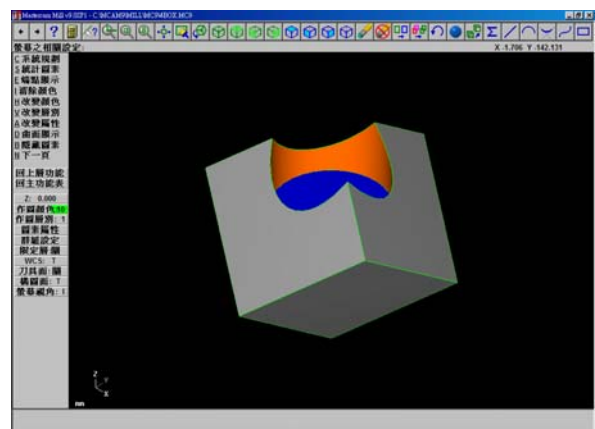


圖 64 轉檔至 CAM 軟體

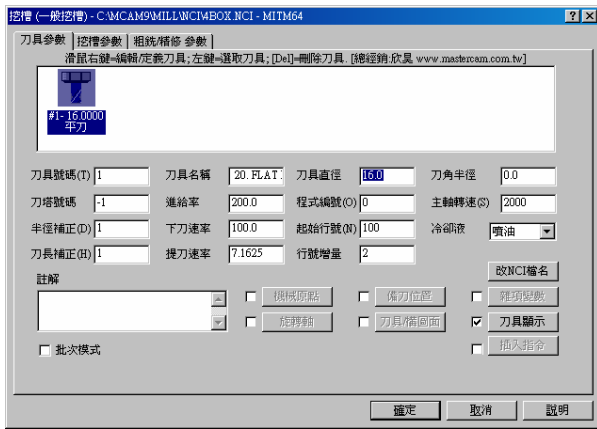


圖 65 設刀具參數

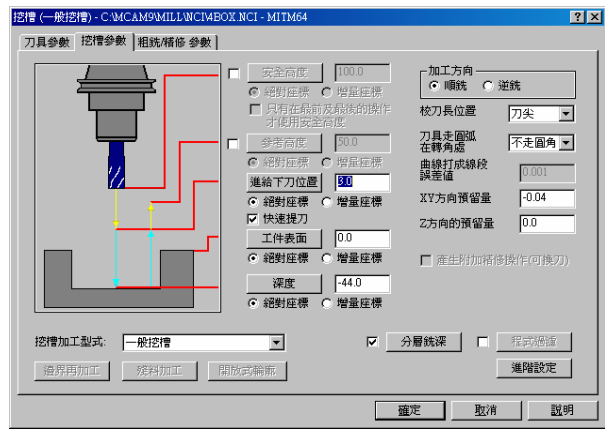


圖 66 設挖槽參數

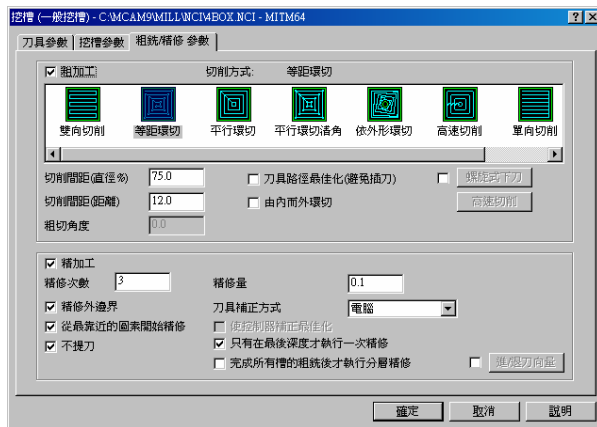


圖 67 設粗銑/精銑參數



圖 68 操作管理員

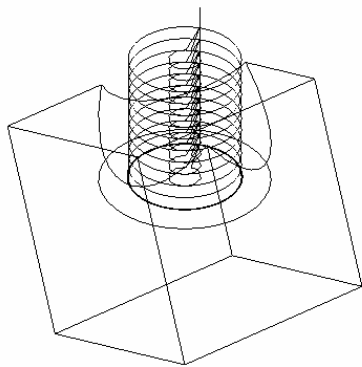


圖 69 刀具模擬完畢

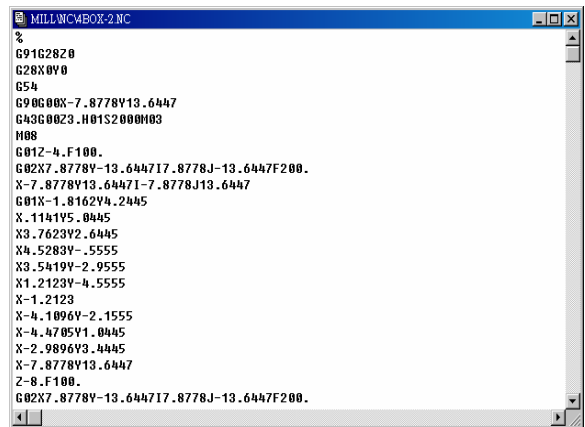


圖 70 NC 程式

七、夾持與定位夾具

夾具(Fixture)係指將工作物固定於加工位置的夾緊機構，其有夾持與定位功能。

(一)工件的夾持

當方體內欲加工出正四面體、正八面體、正二十面體，其加工方向為自頂點投影方向(銑

複斜面)，及加工十二面體為自邊緣傾斜方向(銑單斜面)。因此方體材料與虎鉗夾持面呈複斜或單斜狀態，所以無法直接夾持，必需設計特殊的 V 型夾具以協助固定。



圖 71 特殊的 V 型夾具

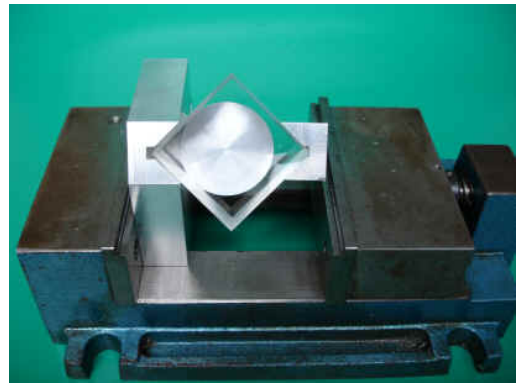


圖 72 挾持情形

(二)設定程式原點的定位夾具

以 CNC 數值控制機器來作加工需要設計定程式原點，因正四面體、正八面體工件外型無法找到機器的座標軸向，此時就必須設計特殊的定位夾具來輔助設定程式原點。



圖 73 特殊的定位夾具

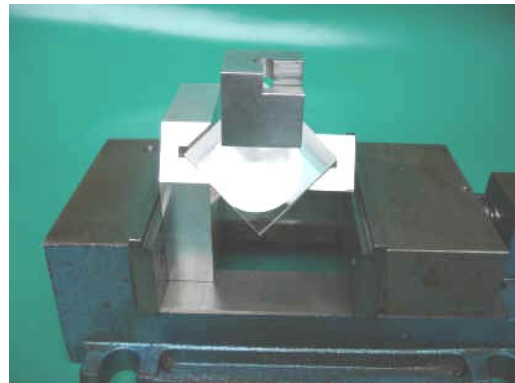


圖 74 放置情形

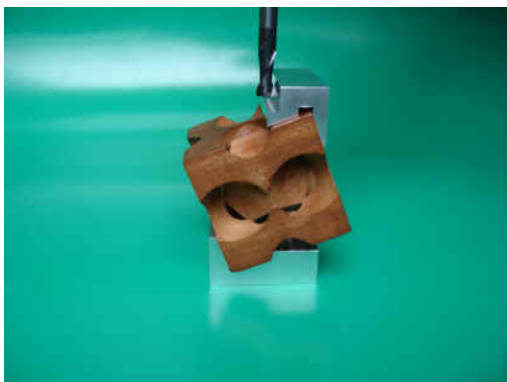


圖 75 正十二面體夾具放置情形



圖 76 正二十面體夾具放置情形

八、電腦數值控制 CNC 銑床加工

(一)刀具與程式原點設定

刀具的種類很多，每一把刀的長度及直徑皆不同，故刀具在自動執行程式前必須先做刀長補正設定及刀徑補正設定。另每次將工件固定至虎鉗，皆要在控制器上設定程式原點的座標值。

(二)DNC 加工

利用 CAM 的功能，指定加工路徑或曲面、加工方法及使用刀具、切削速度、進給速率、精加工預留量等參數，CAD/CAM 軟體可在螢幕上，顯示模擬切削路徑供我們參考。若一切皆符合加工要求，可將加工路徑檔案經由後處理程式轉換成 NC 程式，並與 CNC 控制器連線做 DNC 加工。

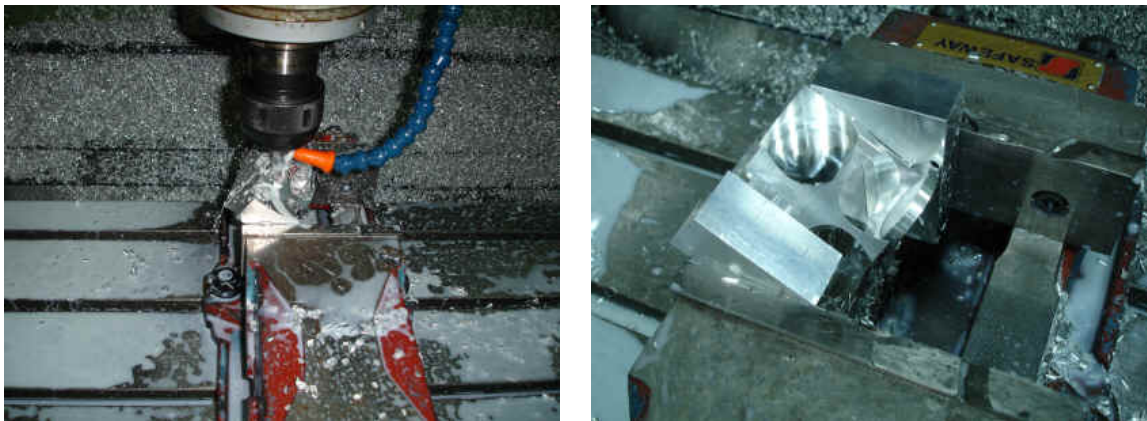


圖 77 CNC 加工工件情形

九、除料後的夾持有破壞問題

(一)應力與變形分析

材料力學告訴我們，材料承受外力作用後，內部所誘生的應力會有變形之問題。因此我們擔心，正多面體加工至最後一面時，除料已使用正方體中空，若夾持在虎鉗上，很容易造成變形。在我們的「電腦輔助設計」選修課程上，有教如何模擬應力與變形量的分析，我們的分析如下：

加工材料	鋁合金 Alloy 6061 T651					
合金成分%	Si 0.58	Fe 0.2	Cu 0.17	Mn 0.02	Mg 1.0	Cr 0.06
彈性模數	6.9e+010 N/m ²					
Poisson 比	0.33					
剪力模數	2.6e+010 N/m ²					
質量密度	2700 kg/m ³					
抗拉強度	1.2408e+008 N/m ²					
降伏強度	5.5149e+007 N/m ²					

1. 正四面體除料後的應力與變形

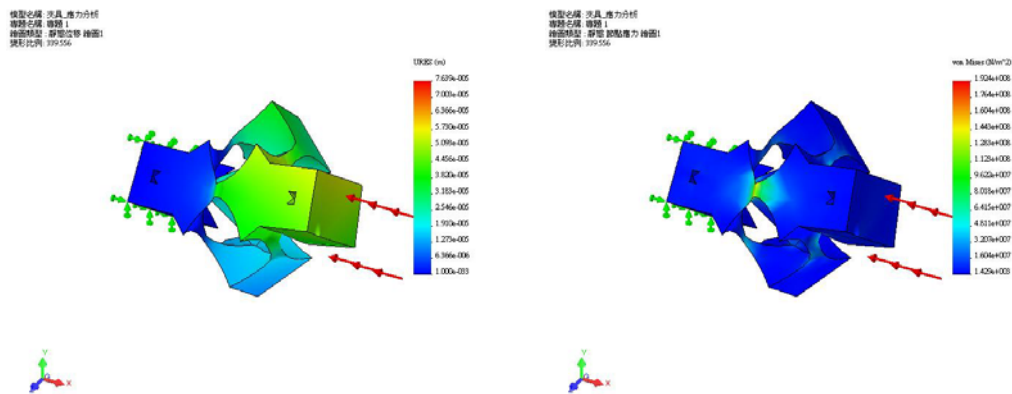


圖 78 正四面體的應力與變形量

2. 正八面體除料後的應力與變形

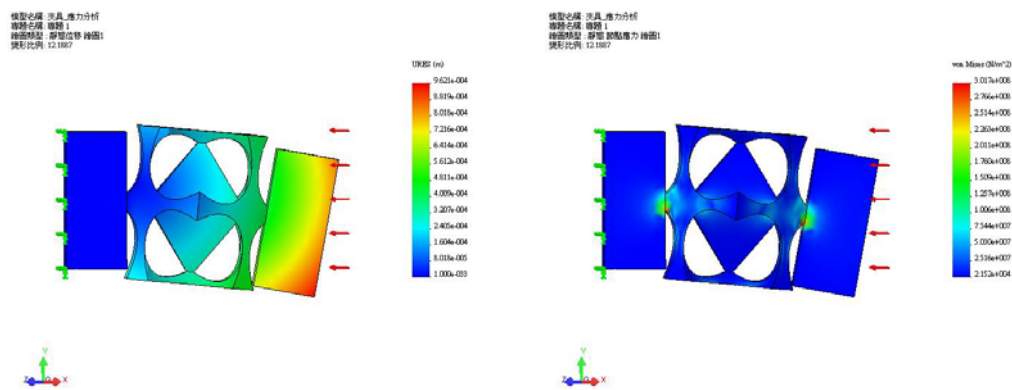


圖 79 正八面體的應力與變形量

3. 正十二面體除料後的應力與變形

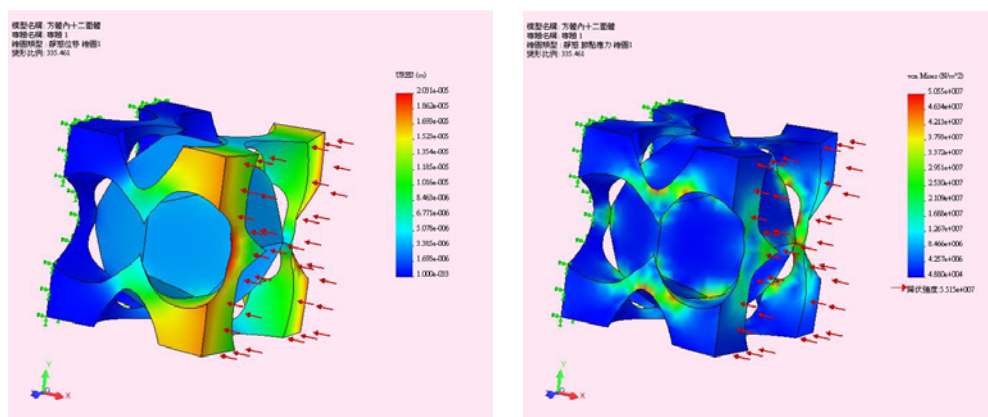


圖 80 正十二面體的應力與變形量

4. 正二十面體除料後的應力與變形

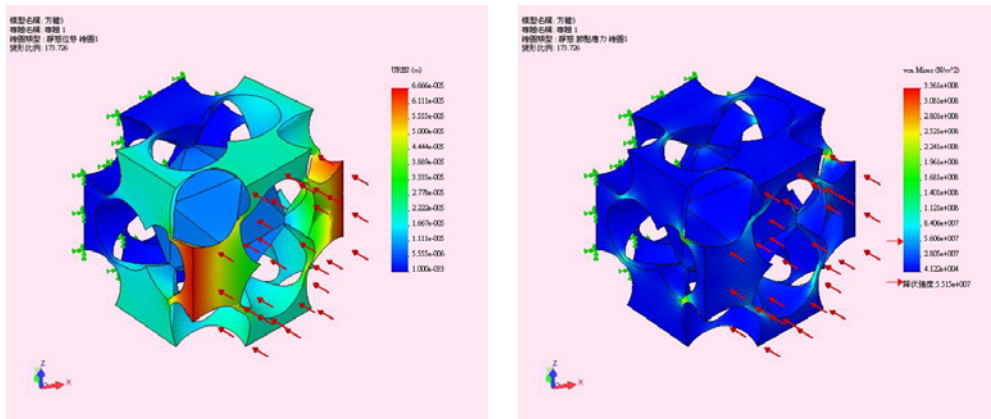


圖 81 正二十面體的應力與變形量

(二) 解決方案

因銑削最後夾持工件有變形問題，因此我們利用塞件補強的方法，來增強工件之強度。



圖 82 正八面體之塞件

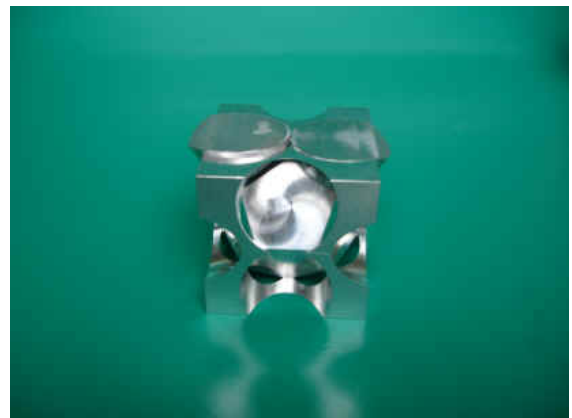


圖 83 正十二面體之塞件

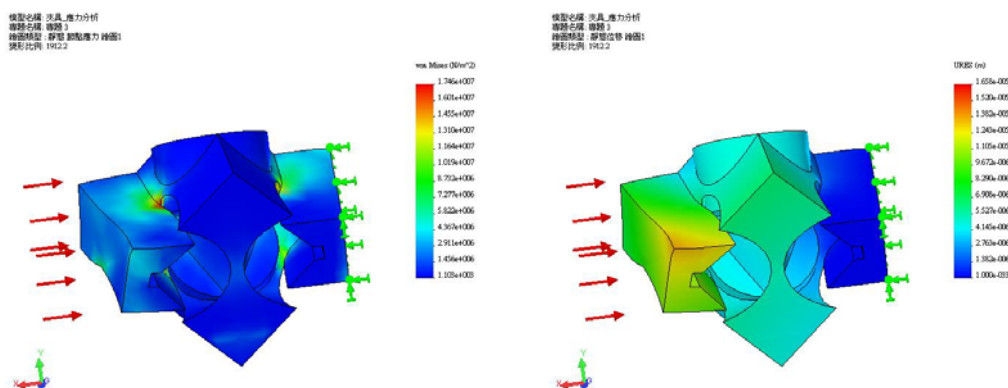


圖 84 正四面體塞件後之應分析

結果顯示置入塞件後的工件，應力不再完全集中於工件上，而大多應力轉移至夾具上，以致於在夾持時不會有變形破壞現象。

陸、研究結果

經由以上的設計與製作，結果如下：

- 一、方體內接正四面體：取方體之四個對頂點做銑孔，即可取得一個內接正四面體。
- 二、方體內接正六面體：取方體之六個面做銑孔，即可取得一個內接正六面體，為增加造型藝術，我們做了多層次的銑孔。
- 三、方體內接正八面體：取方體之八個頂點做銑孔，即可取得一個內接正八面體。
- 四、方體內接正十二面體：取方體之十二個邊做銑孔，即可取得一個內接正十二面體。
- 五、方體內接正二十面體：利用取方體之八個頂點、十二個邊做銑孔，即可取得一個內接正二十面體。
- 六、方體內接菱形十二面體：取方體之十二個邊做銑孔，即可取得一個內接菱形十二面體。

以下為製作完成的成品照片：

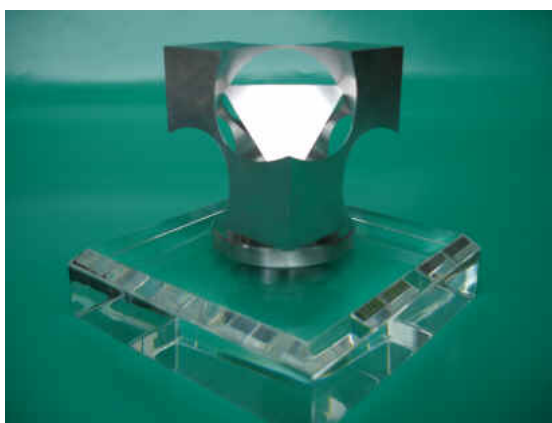


圖 85 方體內接正四面體造型



圖 86 方體內接正六面體多層次造型

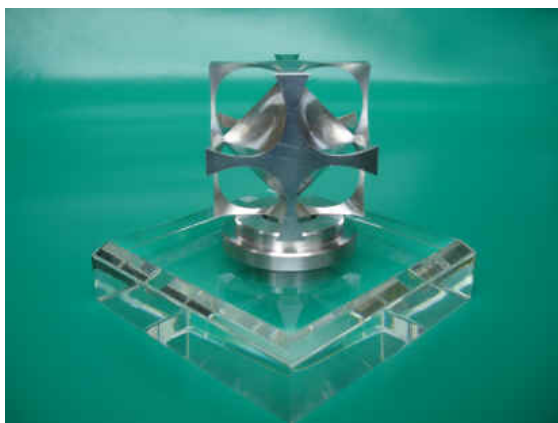


圖 87 方體內接正八面體造型

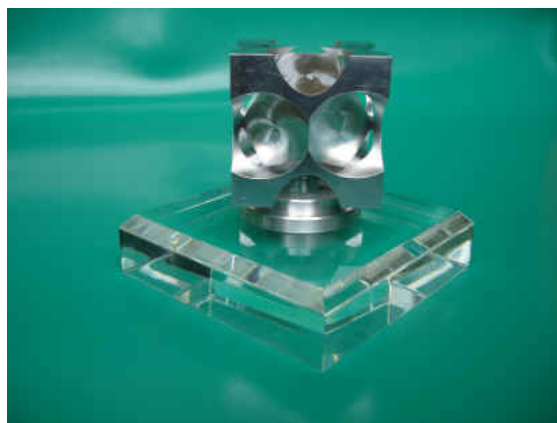


圖 88 方體內接正十二面體造型



圖 89 方體內接正二十面體造型



圖 90 方體內接菱形十二面體造型

柒、討論

一、夾具的角度

之前我們計算正多面體之面與面的夾角，主要目的為製作特殊 V 型夾具的角度。例如，正四面體為銑削方體鉛塊頂點，工件夾持面與虎鉗呈複斜狀態，此時夾具的角度為 35.264° ，如圖 91，為正四面體面與面夾角之半。

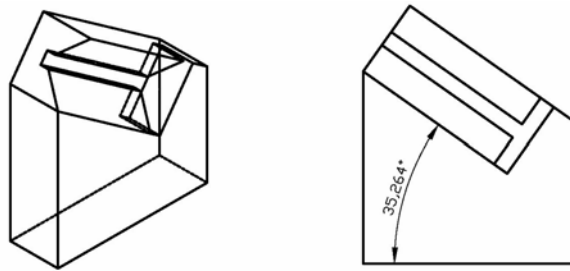


圖 91 加工正四面體夾具

製作正十二面體與正二十面體銑削方體邊線時，工件夾持面與虎鉗呈單斜狀態，此時夾具角度為 $(180 - \text{面與面夾角}) / 2$ ，如圖 92、93。

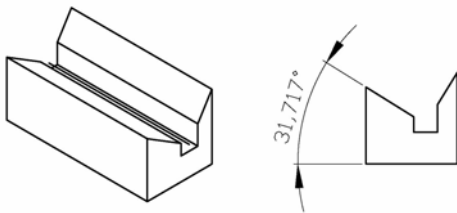


圖 92 加工正十二面體夾具

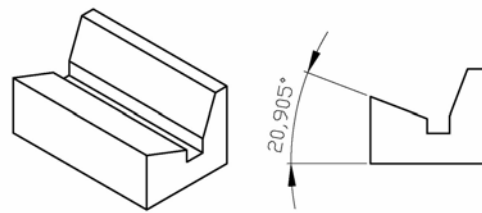


圖 93 加工正二十面體夾具

二、程式原點找尋不易

因四、八、二十面體由頂點加工時，工件外型無法找到機器的座標軸向，因此必須設計特殊的定位夾具來輔助設定程式原點。如圖 94 夾具放置後，等角圖缺口即可對到機器的座標軸向，就可設定工件的程式原點。

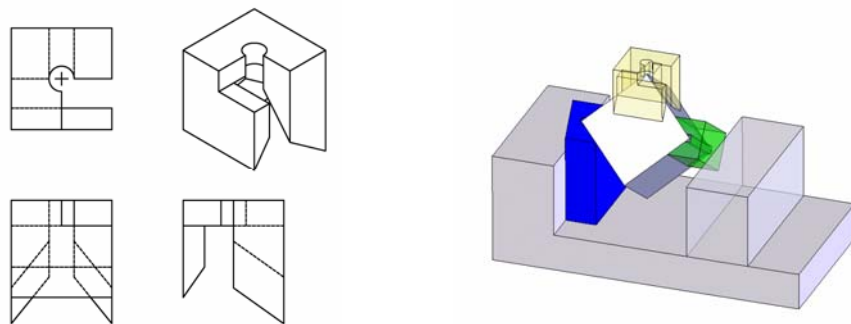


圖 94 程式原點設定夾具

三、銑削圓直徑與深度

銑削的圓直徑愈大則方體切除的愈大，銑削的深度愈大呈現的內接多面體就愈小。為使方體能維持夾持的功能及強度，多面體也能呈現美感不會太小，所以設計造型時需考慮這兩項參數。我們設計各面體內接點時，以 3mm 為最小的強度設計原則。

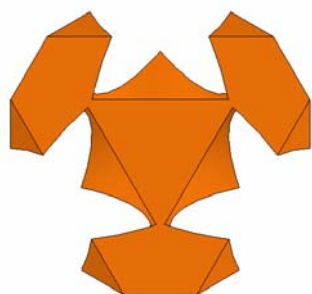


圖 95 正四面體與方體接點

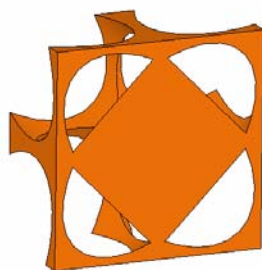


圖 96 正八面體與方體接點

四、夾持夾壞問題

加工後工件夾持很容易夾壞、斷裂。因為加工後方體的材料已銑掉很多，有時銑削到最後一刀時，因為銜接點的強度太弱而斷裂；或者是夾持的虎鉗把工件夾壞，導致要全部重做，所以除了小心夾持外，也需要製作補強的夾具才行。

五、尺寸的誤差

加工尺寸所造成的誤差，會產生多面體不正的結果。製作內接正多面體的創作尺寸要很精準，如果程式原點對不準、刀具長度不對、公差差太多等，皆會導致中心不準，這樣這個藝術品就不能看了。如果一個公差差太多，那麼下一個公差一定會累積到下一個公差，而愈差愈多。

六、桁架接頭的實用價值

我們在製作完本作品後，思考有無在生活週遭的實用價值，讓這些多面體不再只是一個藝術品。我們發現將這方法加以運用在桁架建築的接頭上，可以組織成一個複雜的網狀建築物，目前桁架連接的接頭幾乎都以焊接作業，以本研究的接頭就可免於焊接之方法。



圖 97 接頭設計組合圖



圖 98 接頭設計爆炸圖



(圖片出自 co.163.com)



(圖片出自 www.sz-builder.com.cn)

圖 99 焊接之桁架建築可以本研究之接頭取代

捌、結論

我們的題目是「方圓之間」，方是外面的方體，圓是以圓銑出多面體。在創作的過程中我們發現數學的奧妙，我們研究的作品只是多面體造形設計中的一小部分而已，一個多面體還可以延伸出更多的造型與數學，例如：奈米也是從小小的多面體更深入所研究發現的。

雖然數學的演算是大家意想不到的複雜，而我們製作的內接多面體過程也是困難，因為加工時的夾具關係到結果成功與否，也要考慮到最後成品的強度，所以即使是最小的細節也是不容忽視。

從這次的研究我們學到的東西很多，從空間數學、投影幾何學、電腦輔助設計、電腦輔助製造、材料力學、工模與夾具、數值控制機械加工及立體造形等，真是把我們機械科的技術全用上了，收穫真的很多很多，很感謝老師用心的指導。

除了方體內接正多面體外，方體也可以內接圓球，「方圓之間」真是變化無窮。

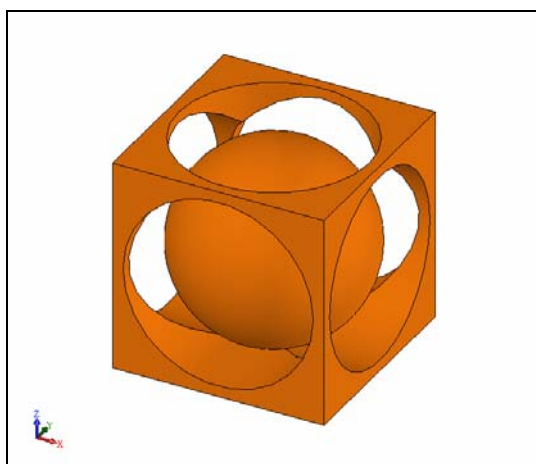


圖 100 方體內接球造型



圖 101 製作方體內接球照片

玖、參考資料

1. 王雪娥、陳進煌，電腦輔助圖 AutoCAD2004，初版，台北市龍江路 76 巷 20 號 2 樓，全華科技，93 年 5 月。
2. 李榮華，機械力學 II，龍騰文化事業股份有限公司，94 年 9 月。
3. 許五郎，工模與夾具，初版，台北市龍江路 76 巷 20 號 2 樓，全華科技，91 年 5 月。
4. 楊玉清，數值控制機械實習 I，初版，高雄市左營區民族一路 1071 號，昱網科技，92 年 9 月。
5. 陳冠良、陳家欣，多面體的等分割與翻轉，<http://www2.kuas.edu.tw/prof/cjh/2003puzzle/poco/01.htm>。
6. 倫迪/薩頓、葉偉文譯，典雅的幾何，初版，台北市 104 松江路 93 巷 1 號 2 樓，天下遠見出版，2002 年 6 月 26 日。
7. 黃鴻源、林錫榕，SolidWorks 寫真輯，初版，臺北市南港區南港路三段 50 巷 7 號 5 樓，碁峰資訊，2004 年 7 月。

評 語

090904 方圓之間-方體內的正多面體造形設計與加工

1. CAD、CAM、CAE 和夾具設計運用，充分發揮難能可貴。
2. 可做為加強 3D 觀念及 CAD、CAM 訓練輔助教材。
3. 除桁架結構運用外，可延伸為裝飾藝術品。
4. 如果結合異類材質，增加顏色變化提昇質感，將可大幅增進藝品價值，建議繼續研究，克服技術問題，朝向精緻飾品，創另一用途。