

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080413

三角格世界裡的大漩渦—從三角格裡尋找一些
相關的級數

學校名稱： 臺北縣板橋市新埔國民小學

作者： 小五 謝軒顥	指導老師： 莊千慧 黃光逸
---------------	---------------------

關 鍵 詞：W 值、Ds 值、Us 值

摘要

本文稱一個小三角格的三個頂角的方向和大三角形的頂角方向相同為上三角格或上三角形；而稱另一種為倒三角格或倒三角形。求解包含著任意一個小三角格的大小上三角形總數，我們簡稱 U_s 。稱求解倒三角形總數為 D_s 。

<要點如下>

- (一) 任意 1 單位上 $\triangle M_a N_b L_c$ 的 $U_s = a \times b \times c$ (其中 a, b, c 依次為直線 M, N, L 的足碼。)
- (二) 任意 1 單位倒 $\triangle M_a N_b L_c$ 的 $D_s = (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) + \dots + 1 \times [1 + (b-a)] - w$ (上式中設 $a < b < c$)
為方便設 $(a-1) = p$, $(b-1) = q$, (即表示 M_1 到三角格最接近的頂點有 p 個點, N_1 到最接近的頂點有 q 個點)
 $D_s = p \times q + (p-1) \times (q-1) + (p-2) \times (q-2) + \dots + 1 \times [1 + (p-q)] - w$ (式中 $q > p$)
或 $D_s = (1+2+3+\dots+p) \times q - [1 \times (p-1) + 2 \times (p-2) + 3 \times (p-3) + \dots + (p-2) \times 2 + (p-1) \times 1] - w$
- (三) 漩渦區：在邊長單位數 n 為偶數時，落在倒 $\triangle M_{\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}} L_{\frac{n}{2}}$ 之內的任一倒三角格。求 D_s 值時必須減去一個特定值，我們稱為 w 值。其餘倒三角格 w 值為零。
同理 n 為奇數時，在倒 $\triangle M_{\frac{n+1}{2}} N_{\frac{n+1}{2}} L_{\frac{n+1}{2}}$ 之內的任一三角形亦然。對此區域我們不知是否有什麼特殊專有名稱，我們稱之為漩渦區。
- (四) 漩渦區的 w 值特性：
- * n 為偶數時，第一圈 $w_1 = 1+2$, 第 2 圈 $w_2 = (1+2) + (1+2+3+4)$
第 k 圈 $w_k = (1+2) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5+6) + \dots + (1+2+3+\dots+2k)$
 $= (1 \times 3) + (2 \times 5) + (3 \times 7) + \dots + k \times (2k+1)$
 - * n 為奇數時，第一圈 $w_1 = 1$, 第 2 圈 $w_2 = 1+2+3$
第 k 圈 $w_k = 1 + (1+2+3) + (1+2+3+4+5) + \dots + (1+2+3+\dots+2k-1)$
 $= 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + \dots + k \times (2k-1)$
 - * 漩渦區之外的倒三角格 $w = 0$ 。

壹、研究動機：

一、去年暑假到台北市國語日報社上暑期科學營，數學老師在黑板上掛張 12 單位的三角格，我們都說「太老套了，每本奧林匹亞競試題都有。」忽然老師拿起簽字筆在中間隨便塗掉一個，問：「這樣到底減少了多少個實心或沒缺角的三角形？」也就是說：「這個被塗掉的小三角格，被包含在幾個三角形之中？」就這樣，開啓研究本報告的動機。

二、與九年一貫能力指標的相關性

- (一)、 N-4-03 能辨識具規則性的數列。
- (二)、 N-4-04 能理解等差數列的樣式、規則性及未知量。
- (三)、 S-2-04 能認識平面圖形全等的意義。
- (四)、 S-2-06 能理解平面圖形的線對稱關係。
- (五)、 A-2-01 能在具體情境中，理解乘法結合律、乘法對加法的分配律與其他乘除混合計算之性質，並運用於簡化計算。
- (六)、 A-3-07 能運用變數表示式，說明數量樣式之間的關係。
- (七)、 C-S-03 能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。

三、與教材相關性

- (一)、南一版數學第九冊第 10 單元，加法、乘法交換律、結合律
- (二)、南一版數學甲第九冊，P42，用比較簡單方法算算看⑧ $1+2+3+\dots+100$
- (三)、南一版數學第十冊第 1 單元，線對稱圖形

貳、研究目的：

- 一、找到速算任意上三角格的公式。(1 單位格，2 單位格...)
- 二、找到速算任意倒三角格的公式。(1 單位格，2 單位格...)
- 三、從 U_s 值的公式和求 D_s 值的公式裡，分別找一些相關的級數。
- 四、三角格內的 D_s 值有什麼規律。

參、研究方法

問題 → 實際操作 → 推論(說明) → 舉例驗證 → 結論

肆、解釋名詞

一、上三角格(形)：三個頂角與大三角形的三個頂角方向相同者稱上三角格(形)。

二、倒三角格(形)：三個頂角與大三角形的三邊垂直者稱倒三角格(形)。

三、 U_s ：求包含著某特定三角格(形)的所有上三角形之總數簡稱求 U_s 值。

四、 D_s ：求包含著某特小三角格(形)的所有倒三角形之總數，稱 D_s 值。

五、漩渦區：邊長 n (偶數)單位的大三角形中，所有在倒 $\triangle M_{\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}} L_{\frac{n}{2}}$ 裡的倒三角格，

求 D_s 值時，必須要減去一個有規律的特定值，與其他圈外三角格的算法不同，所以特別稱此區域為漩渦區。 n 為奇數的漩渦區，在

倒 $\triangle M_{\frac{n-1}{2}} N_{\frac{n-1}{2}} L_{\frac{n-1}{2}}$ 之內，而那個有規律的特定值，我們稱為 w 值。

六、 n ：指整個大三角形的邊長單位數。在本文中所稱 1 單位上三角格或 2 單位倒三角格，皆指在大三角形中被縷空的小三角格。

七、 T_{US} 值和值：邊長 n 單位的三角形，它所有上三角形的總和稱 T_{US} 值，所有倒三角形的總和稱 T_{DS} 值。

伍、研究過程

一、上三角格的 D_s 值速算法：

(一)、問題一

如何速算單 1 格(1 單位長)的上三角格

U_s 值？

<實作>

任意一個上三角格，他將被包含於幾個重疊的上三角形之內？

說明：我們將由長到短依序將各線段加上線段名稱和足碼，本文每個圖形皆一律稱右上往左下斜線為 $M_1, M_2, M_3, \dots$ ；稱左上往右下斜線為 $N_1, N_2, N_3, \dots$ ，而稱水平橫線為 $L_1, L_2, L_3, \dots$ 。

則任意一個邊長 1 單位的上三角格，稱為上 $\triangle M_a N_b L_c$ ，(其中規定 a, b, c 依次為 M, N, L 線段足碼代號)。

包含著它的大小重疊上三角形的總數稱 U_s 。

公式 $U_s = a \times b \times c$ ，

如圖(1)，上 $\triangle M_a N_b L_c$ (綠色)， $U_s = 3 \times 4 \times 5 = 5 \times 3 \times 4 = 4 \times 5 \times 3$

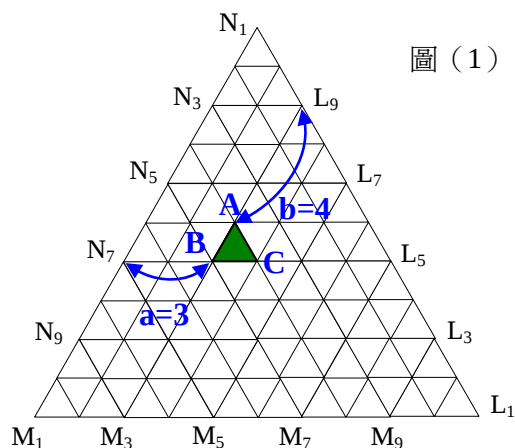


圖 (1)

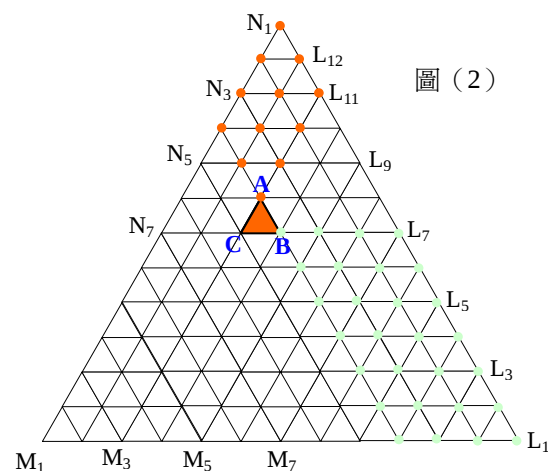


圖 (2)

<驗證>

如圖(2)上 $\triangle M_3 N_4 L_7$ 的 U_s 值？

夾頂角 A 的兩邊 M_3 與 N_4 上有 $(3 \times 4) = 12$ 個點，

往 L_7 到 L_1 共 7 條平行線，可畫 $12 \times 7 = 84$ 個三角形。

同理。夾角 B 的兩邊 L_7 與 N_4 之內共有

$7 \times 4 = 28$ 個點，往 M_3 到 M_1 共 3 條平行線，

可畫 $28 \times 3 = 84$ 個三角形。

$\therefore U_s = 3 \times 4 \times 7 = 7 \times 4 \times 3 = 3 \times 7 \times 4 = 84$

<結論>求上 $\triangle M_a N_b L_c$ 的 U_s 值，

不論 a, b, c 的大小順序，結果都一樣 $U_s = a \times b \times c = b \times c \times a = c \times a \times b$

(二)、問題二

邊長 2 單位上三角格的 U_s 值速算法：

註：2 單位的上三角格足碼 $a+b+c=n+1$

<實作>如圖(1)， $n=12$ ，上有一 2 單位的上 $\triangle M_3N_4L_6$ ，如果要計算完全通過這邊長 2 單位的三角格 U_s 值時，則公式 $U_s=axbxc$ 依然適用，但如果連其中每一個 1 單位的三角格也要計算時，則上 $\triangle M_3N_4L_6$ 的 U_s 值

$$U_s=3 \times 4 \times (6+1)+3 \times 6+4 \times 6=3 \times 4 \times (6+1)+(3+4) \times 6$$

$$\text{或 } U_s=4 \times 6 \times (3+1)+4 \times 3+6 \times 3=4 \times 6 \times (3+1)+(4+6) \times 3 \text{ 或 } U_s=3 \times 6 \times (4+1)+(3+6) \times 4$$

<推論>2 單位的上三角格 $M_aN_bL_c$ 的 U_s 值

$$U_s=axb \times (c+1)+(a+b) \times c \text{ 或 } U_s=acx(b+1)+(a+c) \times b \text{ 或 } U_s=bcx(a+1)+(b+c) \times a$$

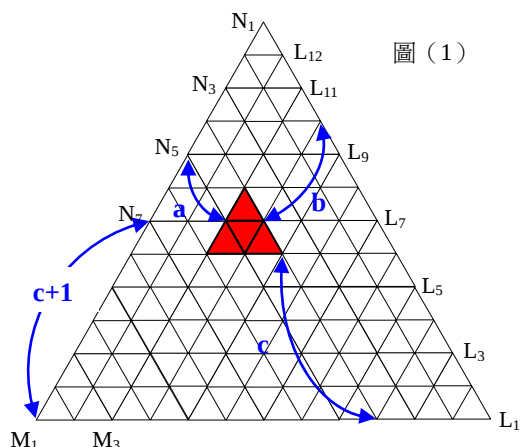


圖 (1)

(三)、問題三

求邊長 1 單位的倒三角格的 U_s 值 = ?

註：1 單位的倒三角格足碼 $a+b+c=n+4$

<實作>如圖(2)， $n=12$ ，有一倒 $\triangle M_7N_4L_5$ ，求 U_s 值 = ?

解：因 1 單位倒三角格之最小上三角形，必包圍這倒三角格的三邊，為一個 2 單位的上三角形 $\triangle M_6N_3L_4$ ， $\therefore$

$$U_s=3 \times 4 \times 6$$

<推論>任一倒 $\triangle M_aN_bL_c$ 的 $U_s=(a-1) \times (b-1) \times (c-1)$

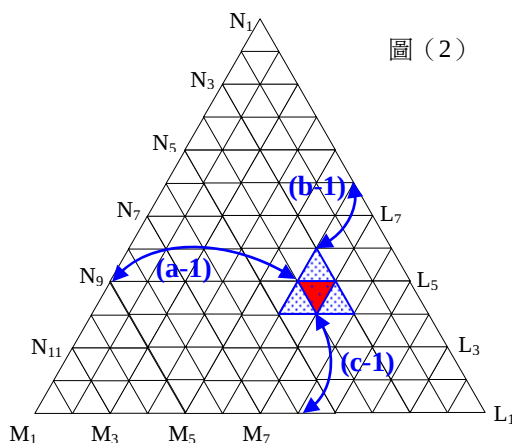


圖 (2)

(四)、問題四

求 3 單位上三角格的 U_s 值註：3 單位上

三角格足碼 $a+b+c=n$

<實作>如圖(3) $n=12$ ，有一 3 單位的上 $\triangle M_4N_3L_5$ 如果要連其中每個 1 單位和 2 單位的 U_s 值都合併計算時，依圖可知

$$\begin{aligned} U_s &= 4 \times 3 \times (5+2) + 4 \times (5+1) + 3 \times (5+1) + 3 \times 5 + 4 \times 5 \\ &= 4 \times 3 \times (5+2) + (4+3) \times (5+1) + (4+3+1) \times 5 \\ &= 5 \times 3 \times (4+2) + (5+3) \times (4+1) + (5+3+1) \times 4 \\ &= 5 \times 4 \times (3+2) + (5+4) \times (3+1) + (5+4+1) \times 3 \end{aligned}$$

<推論>

3 單位的上三角格 $\triangle M_aN_bL_c$ 的 U_s 值

$$U_s=axb \times (c+2)+(a+b) \times (c+1)+(a+b+1) \times c$$

$$\text{或 } U_s=acx(b+2)+(a+c) \times (b+1)+(a+c+1) \times b \text{ 或 } U_s=bcx(a+2)+(b+c) \times (a+1)+(b+c+1) \times a$$

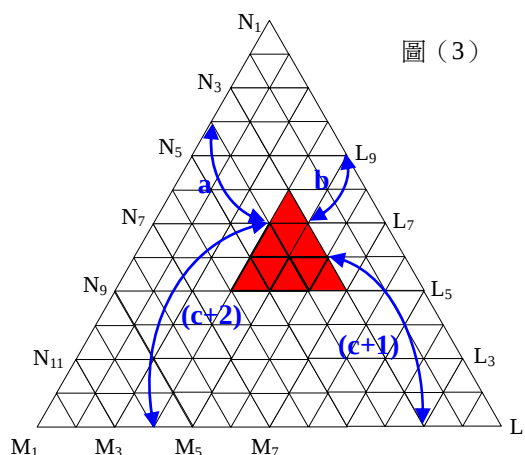


圖 (3)

二、從 U_s 值的探討中找到的相關級數

(一)、問題一

如果我們從頂點依序的一個點一個點由上往下數，它的重疊上三角形總數，

$T_{US}=1 \times n + 2 \times (n-1) + \dots + n \times 1$ 和我們用邊長單位數的類型來算三角形總數

$T_{US}=1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n)$ 的結果，是不是一樣？

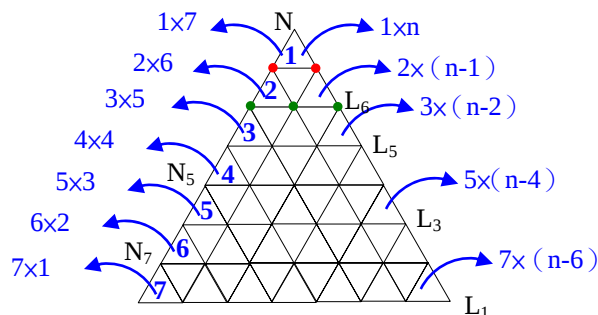


圖 (1)

<實作>

如圖(1)，由最上頂點往 $L_7, L_6 \dots L_1$ 可作 (1×7) 個，由 L_7 線上 2 個紅色點往 L_6 到 L_1 ，可作 $2 \times (7-1)$ 個三角形，依序將它寫在 M_1 與 M_2 間的上三角格裡，這有規則的數列，不就是沿邊線上每個上三角格的 U_s 值嗎？

如圖(1)， $n=7$ ，將公式 $U_s = a \times b \times c$ ，所算得的 U_s 值在 M_1 與 M_2 所夾各上三角格逐一填入：

得上△① $U_s = 1 \times 7 = 1 \times n$

上△② $U_s = 2 \times 6 = 2 \times (n-1)$

上△③ $U_s = 3 \times 5 = 3 \times (n-2)$

上△④ $U_s = 4 \times 4 = 4 \times (n-3)$

上△⑤ $U_s = 5 \times 3 = 5 \times (n-4)$

上△⑥ $U_s = 6 \times 2 = 6 \times (n-5)$

+) 上△⑦ $U_s = 7 \times 1 = 7 \times (n-6)$

U_s 總合 $= 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + 4 \times (n-3) + 5 \times (n-4) + 6 \times (n-5) + 7 \times (n-6)$

重疊三角格速算法求上三角形總數

$T_{US} = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n)$

<結論>

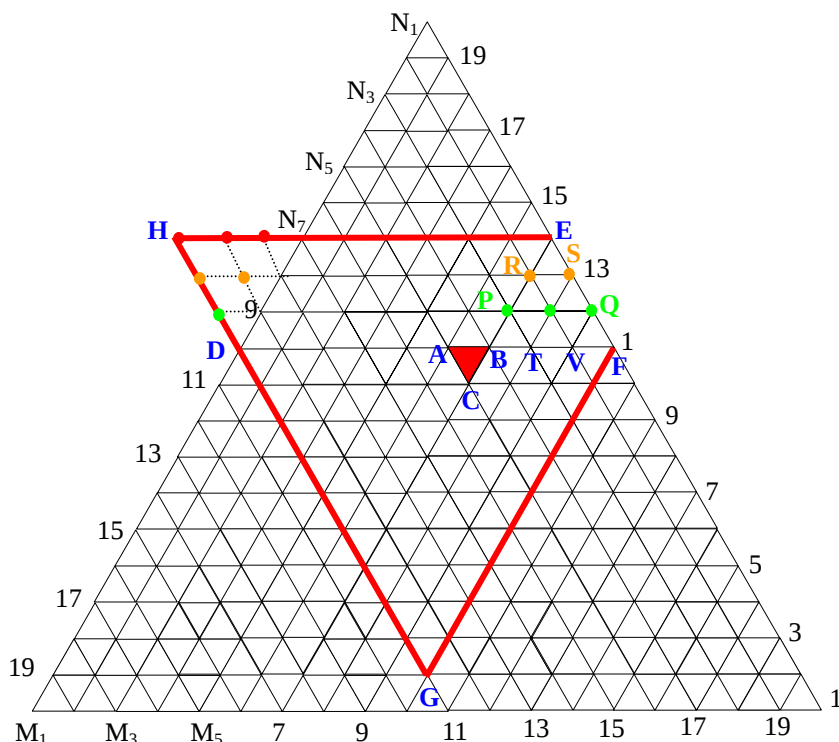
任意一邊長 n 單位的三角形，他的重疊上三角格總數=任意一邊線上(即 M_1 與 M_2 ，或 N_1 與 N_2 ，或 L_1 與 L_2 所夾)所有 1 單位格 U_s 值總合。

公式為 $1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) \dots + (1+2+3+4+5 \dots + n)$

$= 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) \dots + (n-1) \times 2 + n \times 1$

三、1 單位倒三角格 D_s 值和 W 值的研究

本文所指三角格或三角形皆指倒三角格或倒三角形。



(一)、問題一，如何求邊長 1 單位三角格的 D_s 值？

<實作>

<想法>

我們將圖(1)往逆時針方向轉 45° ，我們將發現 $\triangle ABC$ 是在紅色梯形，EHGF 裡的一個上三角格，我們稱這梯形為有效區域。

<說明>

如何畫有效區域：

我們找到 $\triangle ABC$ ，三個頂角中最靠近邊線的角 B，和那條邊線 N_1 作為畫有效區域梯形的上底，然後選擇夾角 B 的兩邊中，較短的邊 L_{11} 和邊線 M_1 的交點 D，作為畫下底的基準點。夾角 B 的兩邊 M_7 和 L_{11} 分別交 N_1 於 E、F 兩點。由 E 和 F 畫兩腰和過 D 點畫的下底交於 H 和 G。則梯形 EHGF 稱為有效區域。因為所有包含著 $\triangle ABC$ 的大小三角形都在此梯形中。

<解法 I>

因梯形的角 H 有缺口，所以往角 G 方向計算， $\overline{BF}$ 上有 4 個點， N_5 到 N_{10} 有 6 條平行線，可數 $4 \times 6 = 12$ 個三角格， $\overline{PQ}$ 上有 3 個點， N_5 到 N_9 有 5 條平行線（不能數到 N_{10} ），可數 (3×5) 個三角形， $\overline{RS}$ 上有 2 個點， N_5 到 N_8 有 4 條平行線，可數 (2×4) 個，由 E 點到 N_7 可數 (1×3) 個三角形，
 $\therefore D_s = 4 \times 6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 50$

<解法 II>

如果我們往缺口較大的角 H 方向計算，則 $\overline{BE}$ 上 4 個點，往 N_5 到 N_{10} 方向可數 $(3+4+5+6)$ 個三角形， $\overline{ST}$ 上有 3 個點，往 N_5 到 N_{10} 方向可數 $(4+5+6)$ 個三角形，同理 $\overline{QV}$ 上有 2 個點可數 $(5+6)$ 個，而 F 點可數 6 個三角形，

因此 $D_s = (3+4+5+6) + (4+5+6) + (5+6) + 6 = 50$

<解法 III>

在 $\triangle EBF$ 中有 $(1+2+3+4)$ 個點，每個點都往 N_5 到 N_{10} 間的平行線數三角形，將有 $(1+2+3+4) \times 6$ 個，但 $\overline{PQ}$ 線上 3 個點多數 (3×1) 個，R、S 兩點多數 (2×2) 個，E 點多數 (1×3) 個要減掉，

$\therefore D_s = (1+2+3+4) \times 6 - (3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3) = 50$

<推論>

我們經過好多次舉例，再實際試算(一個一個點算 D_s 值)，

似乎可確定：求 $\triangle M_a N_b L_c$ 的 D_s 值，可在 a 、 b 、 c 三個足碼中取最小的 2 個(因足碼越小表示該邊所對的頂角越靠近邊線)

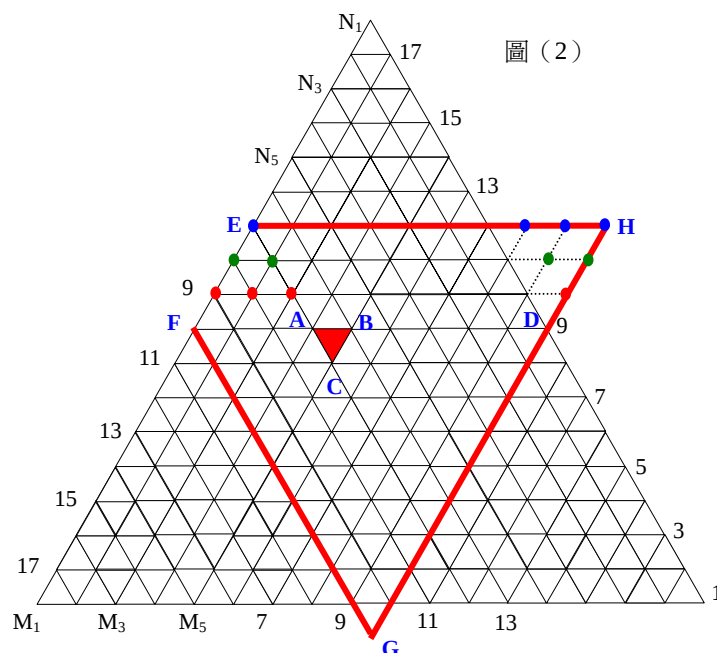
若設 $a < b < c$ 則依照(解法 I)可得公式(I)

$D_s = (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) + \cdots + 1 \times [1 + (b-a)] + \cdots$ (式中 $a < b < c$)

依照(解法 III)可得公式(II)

$D_s = [1+2+3+\cdots+(a-1)] \times (b-1) - [1 \times (a-2) + 2 \times (a-3) + 3 \times (a-4) + \cdots + (a-2) \times 1]$

因公式(I)容易了解又方便，以下討論大都採用公式(I)為主。



(二)、問題二

當 n 為奇數，畫三角格的有效區域，發現有 2 個缺口，如圖(2)要怎樣求 D_s 值？

<實作>

如圖(2)，作有效區域 EHGF，經過多次演練，我們確定往缺口較小的角 G，計算較方便。依然利用上列舉公式。但還必須減去缺較小的角 G，在運算時多數的三角形，才是正確的 D_s 值。這個要被減去的數，我們稱 W 值。

解法(I)：

足碼最小是 5 和 7，表示角 A 離 $M_1(5-1)=4$ 個點，角 B 離 N_1 有 $(7-1)=6$ 條直線
 $\therefore D_s = 4 \times 6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 3 - 1 = 49$

(式中被減去 1，便是由 F 點到 M_{10} 上的 G 點多數 1 個，表 $W_1=1$)

解法(II)：

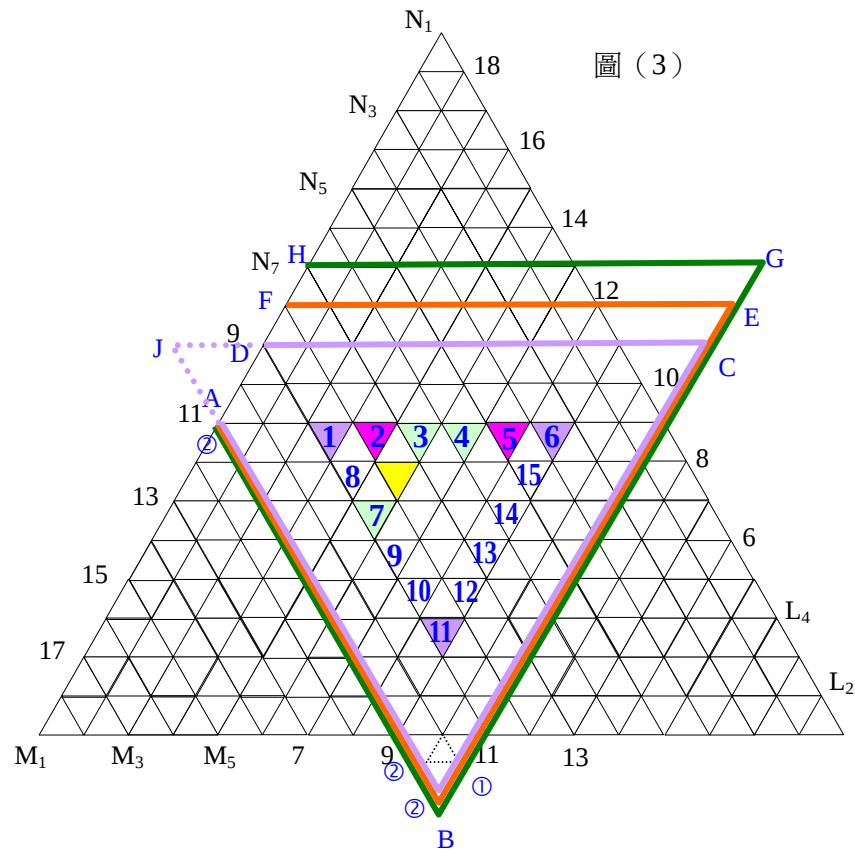
$\triangle AEF$ 裡共有 $(1+2+3+4)$ 個點，B 到 N_1 有 6 條直線共 (10×6) 個三角形，再減去 $\triangle AFE$ 內紅色圈點往 M_{10} 數有 3×1 個，綠色圈點往 M_{10} ， M_9 數有 2×2 個，加藍色 1×3 。還有 F 點到 G 點也多算一個三角形。

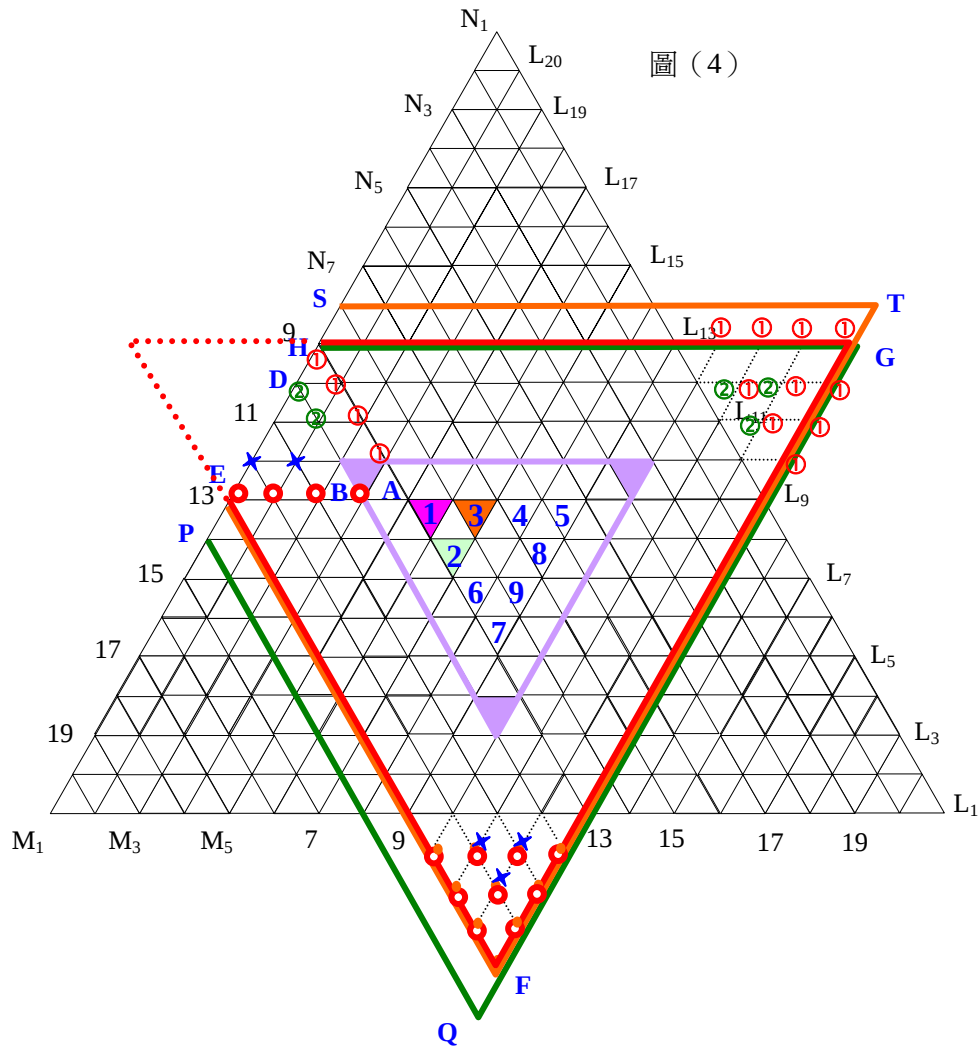
$\therefore D_s = (1+2+3+4) \times 6 - (3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3) - 1 = 49$

<說明>什麼叫做漩渦區：

1. 當 n 為奇數時，任意一個在倒三角形足碼 $a=b=c=\frac{n+1}{2}$ 裡面的 1 單位小三角格，畫有效區域時，在梯形的兩底角都有缺口，也就是說在算 D_s 值時，都要減去缺口較小那方向在邊線外的交點運算數值。因此我們便稱在倒 $\triangle M_{\frac{n+1}{2}} N_{\frac{n+1}{2}} L_{\frac{n+1}{2}}$ 的區域為漩渦區。(因我們不知是否有特定專有名詞) 計算此區域的各倒三角格 D_s 值都要減去一定的數值，稱為 W 值。

2. 當 n 為偶數時，漩渦區在倒 $\triangle M_{\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}} L_{\frac{n}{2}}$ (即足碼 $a=b=c=\frac{n}{2}$) 裡面。





(四)、問題四

n 為偶數第 2 圈的每個三角格 W_2 也都相等嗎？

<實作>

上圖(4)中紅色△①頂角 A 到 H 有 4 個點，各標示①往角 G 方向缺口的紅色點也標示①共有(1+2+3+4)個點，每個點可作 1 個三角形。

另外 $\overline{BD}$ 上有 2 個綠色點標示②往 M_{12} 和 M_{11} 數三角形有(1+2)個要減去。

$$\therefore W_2 = (1+2) + (1+2+3+4)$$

同理綠色△②的有效區域 PQGH 缺口角 G 較小，所有外露的三角形如同紅色△①。

$$\therefore W_2 = (1+2) + (1+2+3+4)$$

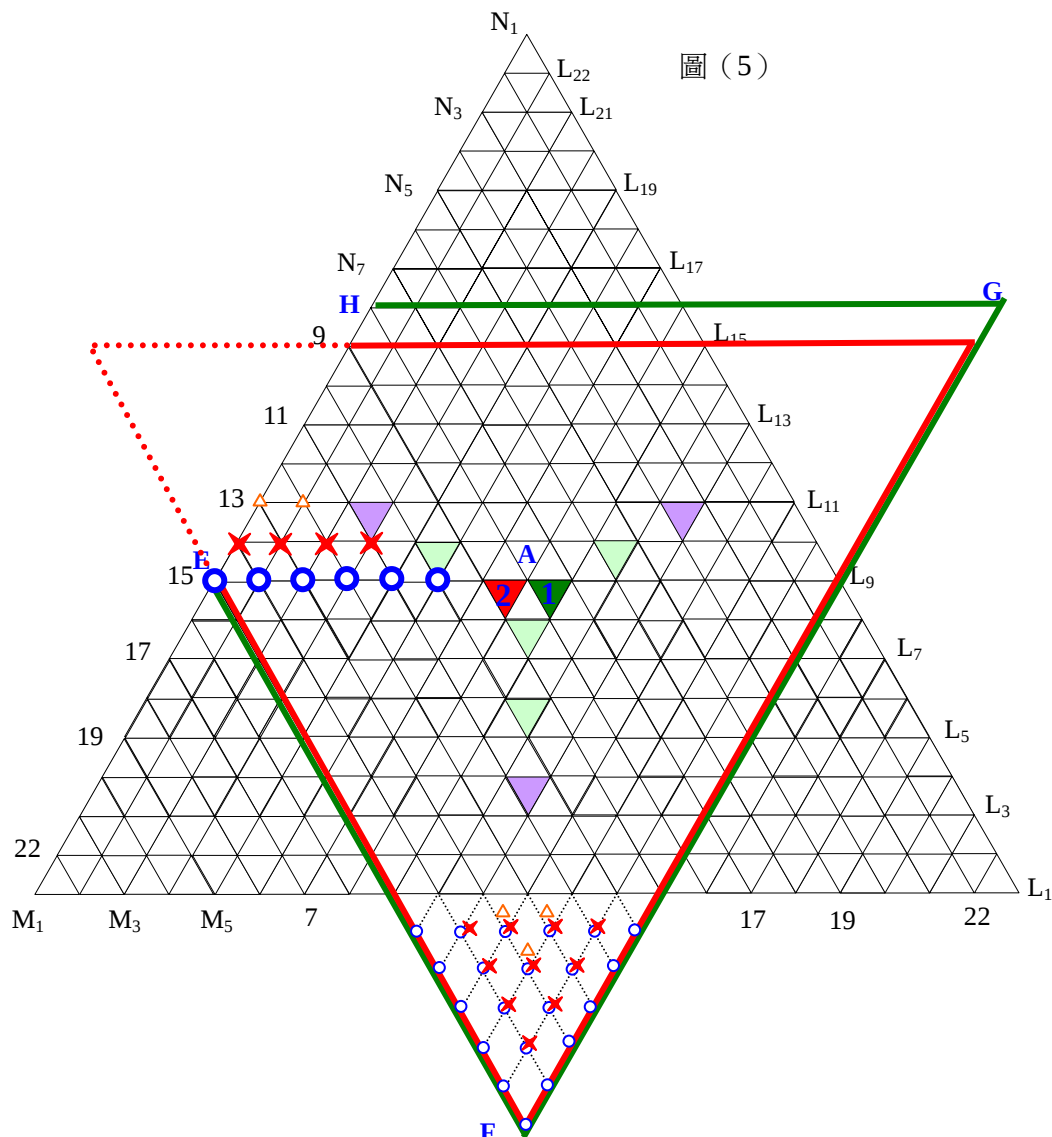
再談黃色△③的有效區域 EFTS，缺口雖在另一方向的角 F，但缺口大小如同角 G

$$\therefore W_2 = (1+2) + (1+2+3+4)$$

同理△①對稱△⑤和△⑦不但 W 值相等， D_s 值也相等。

△③對稱△④和△②， W 值當然相等。如果△⑧和△⑨作有效區域時缺口是在角 K，角 K=角 F=角 G，

$$\therefore n \text{ 為偶數第 2 圈每個三角格 } W_2 \text{ 都是 } (1+2) + (1+2+3+4)。$$



(五)、問題五

n 為偶數第 3 圈所呈現的 W 值為多少？

<實作>

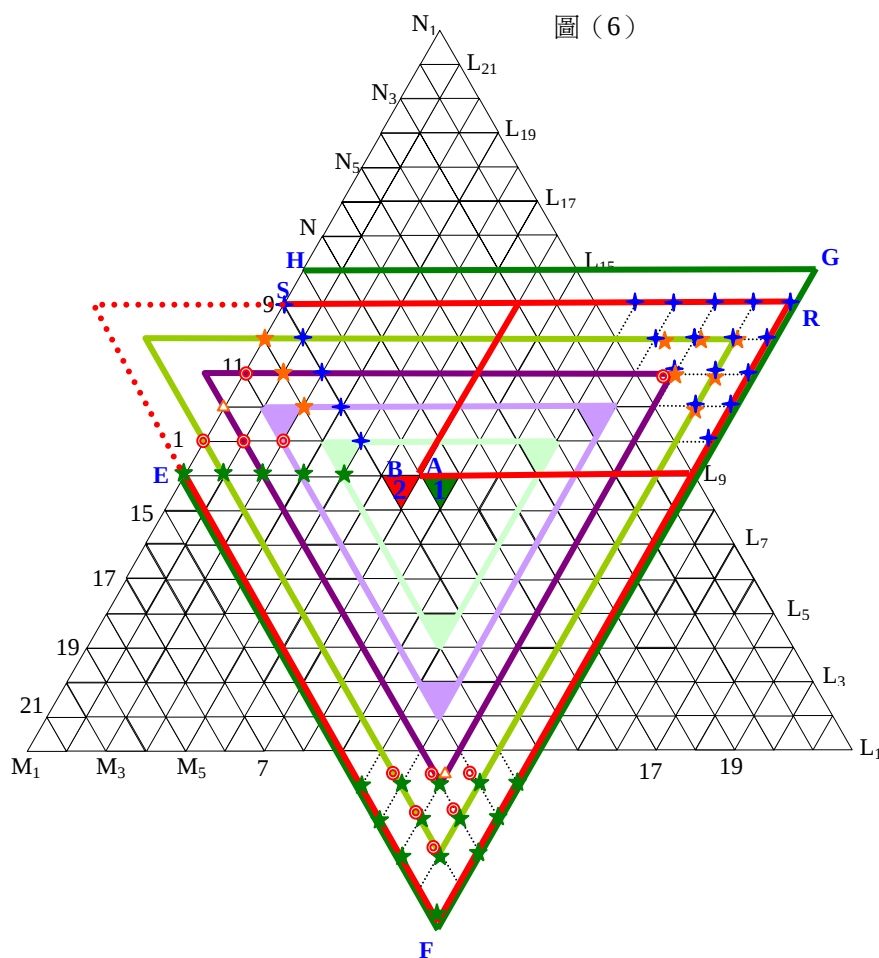
如上圖(5)雖然綠色△①較靠近 N_1 ，但我們改由較遠的 M_1 作為有效區域梯形的上底，結果 W 值也相同。

綠色△①有效區域的角 F 較小， $\overline{AE}$ 線上有 6 個藍色點所作的三角形，會外露 $(1+2+3+4+5+6)$ 個三角形在角 F 方向，同理 L_{10} 上有 4 個紅色交叉點，往角 F 方向數三角形有 $(1+2+3+4)$ 個三角形外露在角 F 方向， L_{11} 只有 $(1+2)$ 個橘色三角形外露。

$$\therefore W_3 = (1+2) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5+6)。$$

同理紅色倒△②兩邊缺口一樣大，若選角 F 記數，則如同綠△①完全一樣的點。

$$\therefore W_3 = (1+2) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5+6)。$$



(六)、問題六

n 為奇數，第 3 圈每個三角格的 W 值都是 $1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)$ 嗎？

<實作>如圖(6)

綠色△①有效區域 EFGH，角 F 較小， $\overline{AE}$ 線上有 5 個綠色星號到角 F 方向有 (1+2+3+4+5)個點， L_{10} 上有 3 個雙圈點對到角 F 方向有 (1+2+3)個點。另 L_{11} 有一個三角形小點，對到角 F 也只有 1 個點。同理，紅色△②有效區域兩個底角相等，往角 R 方向記號，和綠色△①完全相等。 $\therefore W_3=1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)$ 。

<推論>

依此方法，作第 2 圈每個三角格的 $W_2=1+(1+2+3)$ 。

(七)、<舉例驗證>

若有一單位倒 $\triangle M_9 N_8 L_7$ 求 W 值= ? Ds 值= ?

解：∵ $a+b+c=n+4 \Rightarrow \therefore n=(9+8+7)-4=20$ (偶數)

最外圈 K_1 的足碼 $a_1=b_1=c_1=\frac{20}{2}=10$

圈數=(最外圈足碼)-(該三角格中的最大足碼)+1=10-9+1=2

$n=20$ 爲偶數 $W_2=(1+2)+(1+2+3+4)=13$

$$D_s = (7-1) \times (8-1) + (7-2) \times (8-2) + (7-3) \times (8-3) + (7-4) \times (8-4) + (7-5) \times (8-5) + (7-6) \times (8-6) - W_2$$

$$= 42 + 30 + 20 + 12 + 6 + 2 - 13 = 99$$

(八)、<結論>

1.漩渦區外：

$\triangle M_a N_b L_c$ 中足碼最大者決定。設 C 為最大足碼，若 $C > \frac{n+1}{2}$ (奇數) 或 $C > \frac{n}{2}$ (偶數)，則此三角格必在漩渦區外。 $W=0$ ， $D_s=(a-1) \times (b-1) + (a-2) + (b-2) \dots 1 \times [1+(b-a)]$

2.漩渦區內：

(1) n 為奇數

當最大足碼 $c \leq \frac{n+1}{2}$ ，則此三角格必在漩渦區內。

圈數 $K = (\frac{n+1}{2} - \text{該三角格中的最大足碼}) + 1$

$K=1 \rightarrow W_1$ ， $K=2 \rightarrow W_2$ ，

(2) n 為偶數

當最大足碼 $c \leq \frac{n}{2}$ ，則在漩渦區內。

圈數 $K = (\frac{n}{2} - \text{該三角格中的最大足碼}) + 1$

$K=1 \rightarrow W_1$ ， $K=2 \rightarrow W_2$ ，

$D_s = (a-1) \times (b-1) + (a-2) + (b-2) \dots 1 \times [1+(b-a)] - W$ (設 $b > a$)

漩渦區的圈數和 W 值的關係

圈數	n 奇數	偶數
1	$W_1=1$	$W_1=1+2=1 \times 3$
2	$W_2=1+(1+2+3)=1 \times 1+2 \times 3$	$W_2=(1+2)+(1+2+3+4)=1 \times 3+2 \times 5$
3	$W_3=1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)$ $=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5$	$W_3=(1+2)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5+6)$ $=1 \times 3+2 \times 5+3 \times 7$
K	$W_4=1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)$ $+(1+2 \dots 2 \times 4-1)$ $=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5+4 \times (2 \times 4-1)$ $W_K=1+(1+2+3) \dots (1+2+3+4+5)$ $\dots+(1+2+3 \dots 2 \times K-1)$ $=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5 \dots$ $\dots K \times (2 \times K-1)$	$W_4=1 \times 3+2 \times 5+3 \times 7+4 \times 9$ $W_K=1 \times 3+2 \times 5+3 \times 7 \dots$ $+K \times (2K+1)$

四、2 單位倒三角格的研究

(一)、問題一

1 單位格的上三角格怎樣算它被包含在幾個倒三角形之內？也就是說要如何求它的 D_s 值？

<實作>

由圖可知 1 單位的上 $\triangle M_a N_b L_c$ 將被包圍在 2 單位的倒 $M_{a+1} N_{b+1} L_{c+1}$ 裡

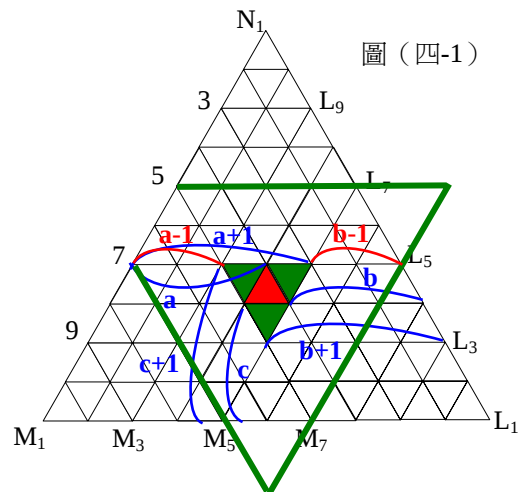
因為 2 單位格它的頂角到對邊有 2 單位長，

所以算 D_s 值時，足碼減 2，才是頂點到邊線長。

$$\therefore D_s = (a+1-2) \times (b+1-2) + (a-2) \times (b-2) \dots + 1 \times (b-a) - W$$

$$\therefore D_s = (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) \dots + 1 \times (b-a) - w$$

(w 值由 $(b+1)$ ， $(a+1)$ ， $(c+1)$ 三者中最大值決定圈數)



<驗證>

如右圖紅色 $\triangle M_4 N_4 L_4$ ，求 D_s 值？

解：

其最小倒三角格為 $M_5 N_5 L_5$ ，

$$\text{圈數 } K = \frac{n}{2} - 5 + 1 = 1$$

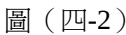
$$W_1 = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore D_s = (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) \dots + 1 \times (b-a) - w$$

$$= (4-1) \times (4-1) + (4-2) \times (4-2) + (4-3) \times (4-3) - W_1$$

$$= 14 - 3$$

$$= 11$$



(二)、問題二

如果 2 單位格的其中有一個 1 單位小格在第 3 圈，而另兩個小格在漩渦區的第 2 圈 D_s 值將如何速算？ W 值如何決定？

<實作>

<解法 I>如圖(四-2)只算 2 單位格 $\triangle ABC$ 的 D_s 值，作有效區域 EPST，

可知 $K_2 \rightarrow W_2 = 1 + 2 + 3$ 或由 $\triangle M_7 N_9 L_8$ 的最大足碼 9，求得圈數 $K = \frac{19}{2} - 9 + 1 = 2$

$\triangle ABC$ 的 $D_5 = 5 \times 6 + 4 \times 5 + \dots + 1 \times 2 - W_2 = 63$ ，若細數每個小三角格

$$\triangle ② \quad D_5 = 6 \times 6 + 5 \times 5 \dots 1 \times 1 - W_2 = 84 (\because \triangle M_7 N_9 L_7, \text{圈數 } K = \frac{9+1}{2} - 9 = 2)$$
$$\triangle ③ D_s = 6 \times 7 + 5 \times 6 \dots 1 \times 2 - W_3 = 90 (\text{有效區域 EFGH})$$
$$\triangle \textcircled{1} D_5 = 5 \times 7 + 4 \times 6 \dots 1 \times 3 - W_2 = 78 (\because \triangle M_6 N_9 L_8, \text{圈數 } K = \frac{9+1}{2} - 9 = 2)$$

$\therefore D_s = \triangle ②$ 的 $D_s + \triangle ③$ 的 $D_s - \triangle ABC$ 的 D_s 值 $+ \triangle ①$ 只運算到 M_6 有 $(1+2+3+4+5) \times 1$
 $\therefore D_s = 84 + 90 - 63 + (1+2+3+4+5) = 126$

<解法 II>

由 $\triangle ①$ $D_5 + \triangle ③$ 在 N_8 上 6 個點到它的有效區域 M_{13} 與 M_7 間的三角形 + $\triangle ②$ 在 L_7 上 6 個點到有效區的三角形。

$$D_5 = 78 + (7+6+5+4+3+2) + (6+5+4+3+2+1) = 126$$

與上式依公式代入的結果相等。

(三)、<結論>

2 單位格 $\triangle M_a N_b L_c$ (若設 $a < c < b$) 可分別計算 3 個三角形 D_s 值 (如圖四-3)
每個小三角格的 W 值, 由其足碼最大者決定圈數, 便知 W 值

$$\triangle ABC = \triangle M_a N_b L_c \quad D_s = (a-2) \times (c-2) + (a-3) \times (c-3) \dots 1 \times (1+c-a) - w \dots \dots \dots (1)$$

$$\triangle ② = \triangle M_a N_b L_{c-1} \quad D_s = (a-1) \times (c-1-1) + (a-2) \times (c-3) + (a-3) \times (c-4) \dots 1 \times (1+c-1-a) - w (2)$$

$$\triangle ③ = \triangle M_a N_{b-1} L_c \quad D_s = (a-1) \times (c-1) + (a-2) \times (c-2) + (a-3) \times (c-3) \dots 1 \times (1+c-a) - w \dots \dots (3)$$

$D_s = (2) + (3) - (1) + \triangle M_{a-1} N_b L_c$ 到 M_1 有 $[1+2+3 \dots + (a-2)]$ 個點, 只運算到 M_{a-1} 線上的三角形

$$\therefore D_s = (2) + (3) - (1) + [1+2+3 \dots + (a-2)] - [(2) \text{式 } w \text{ 值} + (3) \text{式 } w \text{ 值} - (1) \text{式 } w \text{ 值}]$$

$$= (a-1) \times (c-2+c-1) + (a-2) \times [c-3+c-2-(c-2)] + (a-3) \times [c-4+c-3-(c-3)] \dots$$

$$\dots 1 \times [(1+c-1-a) + (1+c-a)] - [(2) \text{式 } w + (3) \text{式 } w - (1) \text{式 } w] + [1+2+3 \dots + (a-2)]$$

$$D_s = (a-1) \times (2c-3) + (a-2) \times (c-3) + (a-3) \times (c-4) \dots 1 \times (c-a)$$

$$- [(2) \text{式 } w \text{ 值} + (3) \text{式 } w \text{ 值} - (1) \text{式 } w] + [1+2+3 \dots + (a-2)]$$

上式若 $a < b < c$

$$D_s = (a-1) \times (2b-3) + (a-2) \times (b-3) + (a-3) \times (b-4) \dots 1 \times (b-a)$$

$$+ [1+2+3 \dots + (a-2)] - [3 \text{ 個 } w \text{ 值加減相消後只剩 } 1 \text{ 個 } w \text{ 值最大者}]$$

(四)、<驗證>

求 2 單位格 $\triangle M_7 N_9 L_8$ 的 D_s 值 (如圖四-2)

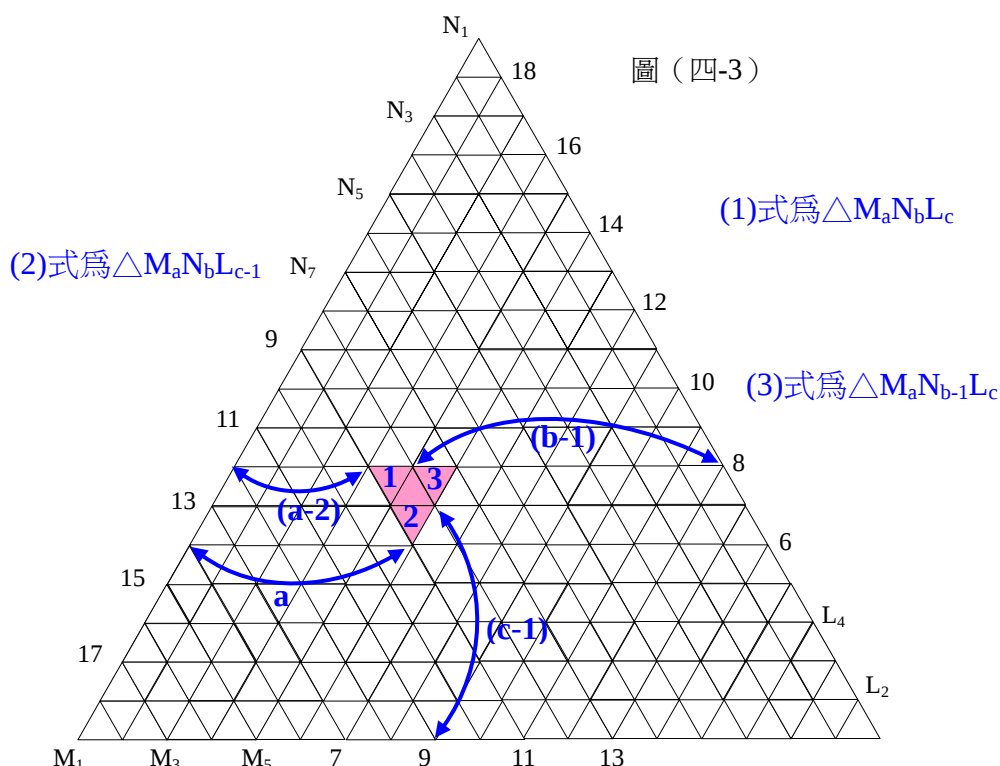
$a=7, b=9, c=8$ 代入公式

$$D_s = 6 \times (2 \times 8 - 3) + 5 \times (8 - 3) + 4 \times (8 - 4) + 3 \times (8 - 5) + 2 \times (8 - 6) + 1 \times (8 - 7)$$

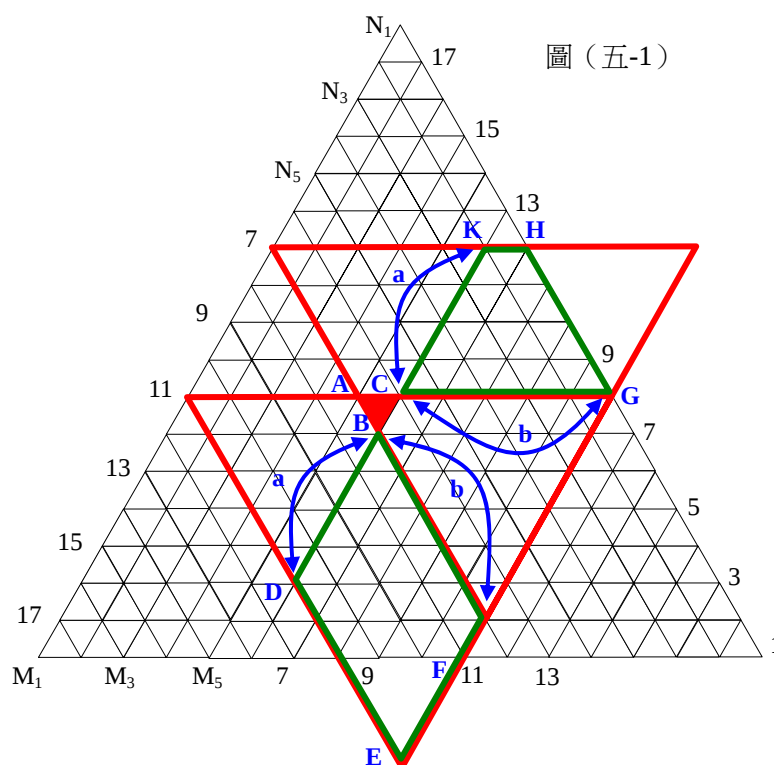
$$+ (1+2+3 \dots + 5) - (7+22-7) = 126$$

↓ 只剩一個 w 值最大者

代入公式和實作中的解法(I), 解法(II)皆相等。



五、從 D_s 值的研究中找到的相關級數



(一)、問題一

倒三角格 $Ds = (a \times b) + (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) \dots + 1 \times [1 + (b-a)]$

$= (1+2+3+\dots+a) \times b - [1 \times (a-1) + 2 \times (a-2) + \dots + (a-1) \times 1]$ 在圖形中表示什麼意義？

<實作>

如圖(五-1)△M₆N₇L₈在不計算 W 值情況下

(1)等式左邊為在綠色平行四邊形 BDEF 之內，由大到小每個平行四邊形內，直線交點的累加，恰似一連串的平行四邊面積的累計。

$$Ds = (a \times b) + (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) \dots + 1 \times [1 + (b-a)]$$

(2)等式右邊為梯形 CGHK 之內，由大到小每個梯形內，直線交點的累計，亦有梯形面積累加的意義。

$$\begin{aligned}Ds &= b + [b + (b-1)] + [b + (b-1) + (b-2)] + [b + (b-1) + (b-2) + (b-3)] + [b + (b-1) + (b-2) + (b-3) + (b-4)] \\ &= (b + 2b + 3b + 4b + 5b) - [1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4)] \\ &= (1+2+3+4+5) \times b - [1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1] \\ &= (1+2+3 \dots + a) \times b - [1 \times (a-1) + 2 \times (a-2) + \dots + (a-1) \times 1]\end{aligned}$$

<結論>

從求倒三角格的 D_s 值中找到的第一個相關級數

$$D_s = (a \times b) + (a-1) \times (b-1) + \dots + 1 \times [1 + (b-a)]$$

$$=(1+2+3+\dots+a)\times b-[1\times(a-1)+2\times(a-2)+\dots+(a-1)\times 1]$$

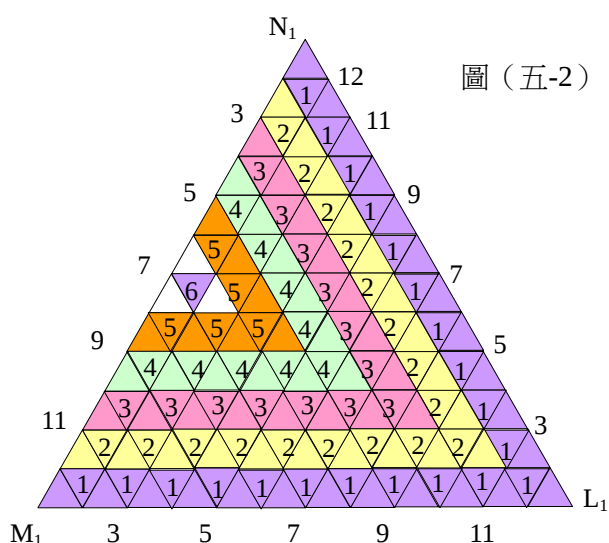
[式中的 a 爲三角格最小足碼減 1，b 爲另一次小的足碼減 1]

(二)、問題二

如果像由 U_s 值的探討中找相關的級數一樣，由每個點向固定方向數倒三角形，所求得的 T_{Ds} 值，是否和我們用三角格單位長類型，來算倒三角形總數的結果也一樣？

<實作>如圖(五-1)， $n=12$ ，在 M_1 與 M_2 所夾各倒三角格內，記上 D_s 值，其實，這 D_s 值也就是由 M_1 線上各點往右下數倒三角形的總數，同理在 M_2 線上各點往右下數三角格，把它記在 M_2 與 M_3 的倒三角裡...如此得到一個有規律的數列，現以 $n=12$ 為例，列表比較(偶數)

數字類型	三角格數量 $n=12$	T_{Ds} 值	三角格的類型	數量	T_{Ds} 值
數字 1	$2 \times (n-1) - 1 = 21$	$1 \times 21 = 21$	1 單位格	6×11	66
2	$2 \times (n-3) - 1 = 17$	$2 \times 17 = 34$	2 單位格	5×9	45
3	$2 \times (n-5) - 1 = 13$	$3 \times 13 = 39$	3 單位格	4×7	28
4	$2 \times (n-7) - 1 = 9$	$4 \times 9 = 36$	4 單位格	3×5	15
5	$2 \times (n-9) - 1 = 5$	$5 \times 5 = 25$	5 單位格	2×3	6
6	$2 \times (n-11) - 1 = 1$	$6 \times 1 = 6$	6 單位格	1×1	1
		$T_{Ds} = 161$			161



圖(五-2)

<結論>

(1) n 為偶數，數字類型有 $(\frac{n}{2})$ 種，便是這公式的項數

而且由圖可知第 $(\frac{n}{2})$ 種數字類型的個數只有 1 個，也就是說末項值為 $\frac{n}{2} \times 1$ 。

$$T_{Ds} = 1 \times [2 \times (n-1) - 1] + 2 \times [2 \times (n-3) - 1] + 3 \times [2 \times (n-5) - 1] + \dots + \frac{n}{2} \times 1$$

$\therefore$ 由 D_s 值中找到的第二個相關級數為：

$$n \text{ 為偶數時， } T_{Ds} = 1 \times [2 \times (n-1) - 1] + 2 \times [2 \times (n-3) - 1] + 3 \times [2 \times (n-5) - 1] + \dots + \frac{n}{2} \times 1$$

$$= 1 \times 1 \times 2 \times 3 + 3 \times 5 + \dots + \frac{n}{2} \times (n-1)$$

n 奇數，設 n=13，依圖(五-3)列表比較：

數字類型	三角格數量	T _{DS} 值	三角格的類型	T _{DS} 值
數字 1	$2 \times (n-1) - 1 = 23$	$1 \times 23 = 23$	1 單位格	6×13
2	$2 \times (n-3) - 1 = 19$	$2 \times 19 = 38$	2 單位格	5×11
3	$2 \times (n-5) - 1 = 15$	$3 \times 15 = 45$	3 單位格	4×9
4	$2 \times (n-7) - 1 = 11$	$4 \times 11 = 44$	4 單位格	3×7
5	$2 \times (n-9) - 1 = 7$	$5 \times 7 = 35$	5 單位格	2×5
6	$2 \times (n-11) - 1 = 3$	$6 \times 3 = 18$	6 單位格	1×3
		T _{DS} =203		203

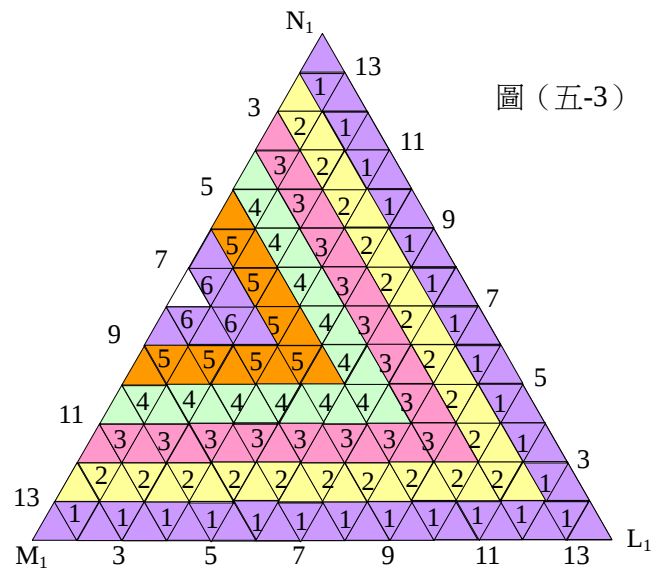


圖 (五-3)

<結論>

(2)n 為奇數，數字類型有 $(\frac{n-1}{2})$ 種，也是這公式的項數，末項值是 $(\frac{n-1}{2}) \times 3$

$$T_{DS} = 1 \times [2 \times (n-1) - 1] + 2 \times [2 \times (n-3) - 1] + 3 \times [2 \times (n-5) - 1] + \dots + (\frac{n-1}{2}) \times 3$$

$$\text{三角格單位長類型公式 } T_{DS} = 1 \times 3 + 2 \times 5 + \dots + (\frac{n-1}{2}) \times n$$

∴這是 n 為奇數時由 Ds 值找到的另一相關級數：

$$T_{DS} = 1 \times [2 \times (n-1) - 1] + 2 \times [2 \times (n-3) - 1] + 3 \times [2 \times (n-5) - 1] + \dots + (\frac{n-1}{2}) \times 3$$

$$= 1 \times 3 + 2 \times 5 + \dots + (\frac{n-1}{2}) \times n$$

六、 D_s 值在三角格裡有什麼規律？

依公式將所有 D_s 值填入圖(五-4)，發現了什麼規律？

<實作>

用最簡單公式 $D_s = \frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times (2a+1+3d) \dots$ (式中的 a 為最小足碼減 1 的數值)

$d=(b-a)$ 算出所有 D_s 值：

1. 對稱軸：分別由 3 個頂點， D_s 值為 1,5,14,30...到垂直對邊的三角格。
即 3 條藍色網點狀線上的三角格為對稱軸；對稱軸兩側各有成雙成對相等的對應值。
2. 對稱軸的特性：對稱軸線上，由頂點起 $D_s=1,5,14,30 \dots$ 直到進入漩渦區之前，皆為平方級數， $1=1^2, 5=1^2+2^2, 14=1^2+2^2+3^2, 30=1^2+2^2+3^2+4^2 \dots$ 因為此線上的三角格 $a=b$ 。
3. 等差數列：由上式的平方級數三角格，往右下斜或左下斜的三角格 D_s 值皆成等差級數列，直到在進入漩渦區之前。

例：在 M_2 與 M_3 間或 N_2 與 N_3 間，依次為 5,8,11,14...29(32-1),29,28,...

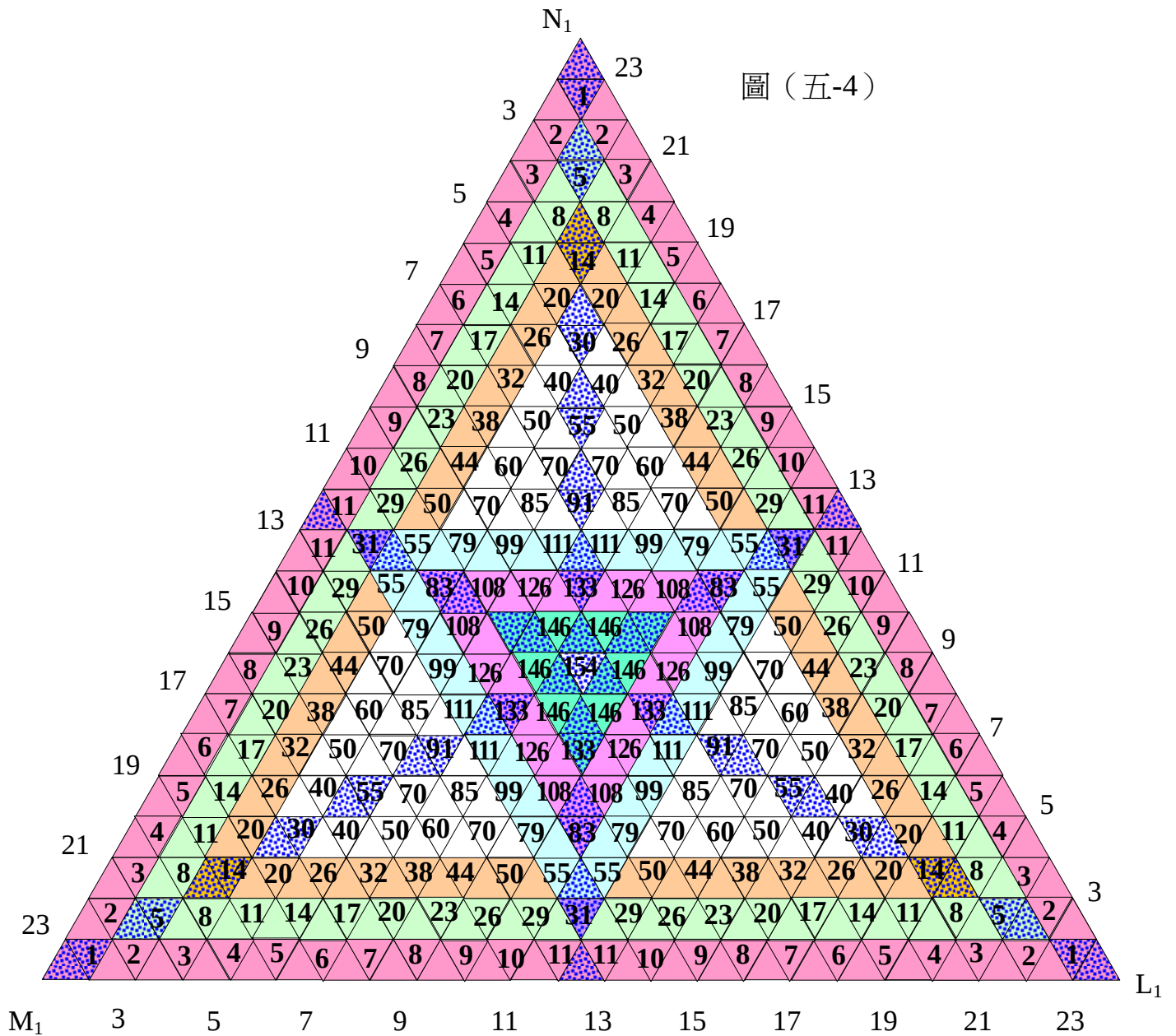
在 M_3 與 M_4 間或 N_3 與 N_4 間，依次為 14,20,26,32...

主因是： a 值固定，而 b 值由小逐漸增大，由討論中的公式

$$D_s = \frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times (2a+1+3d) \text{ 更可清楚了解形成原因。}$$

當 a 固定， $d=(b-a)$ 是公差。

4. 漩渦區外：有三個完全重疊且各個對應值皆相等的三角形。
5. 漩渦區內：依然有 3 條淺綠色的對稱軸，左右對稱值相等。



陸、總結

(一)、上三角格部分：

(1). 1 單位格上 $\triangle M_a N_b L_c$

$$U_s = a \times b \times c$$

(2). 2 單位格上 $\triangle M_a N_b L_c$

$$U_s = a \times b \times (c+1) + (a+b) \times c$$

(3). 3 單位格上 $\triangle M_a N_b L_c$

$$U_s = a \times b \times (c+2) + (a+b) \times (c+1) + (a+b+1) \times c$$

(4). 4 單位格上 $\triangle M_a N_b L_c$

$$U_s = a \times b \times (c+3) + (a+b) \times (c+2) + (a+b+1) \times (c+1) + (a+b+2) \times c$$

(5). 5 單位格上 $\triangle M_a N_b L_c$

$$U_s = a \times b \times (c+4) + (a+b) \times (c+3) + (a+b+1) \times (c+2) + (a+b+2) \times (c+1) + (a+b+3) \times c$$

(二)、倒三角格部分：

(1). 1 單位格倒 $\triangle M_a N_b L_c$ ($a+b+c=n+4$)

$$D_s = [1+2+3+\dots+(a-1)] \times b - [1 \times (a-2) + 2 \times (a-3) + 3 \times (a-4) + \dots + (a-3) \times 2 + (a-2) \times 1] - w$$

(式中 $a < b < c$)

上式運算不便，改採下式較佳：

$$D_s = (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) + (a-3) \times (b-3) + \dots + 1 \times [1 + (b-a)] - w$$

(式中 $a < b < c$)

$$= \frac{1}{6} \times (a-1) \times (a) \times [2(a-1) + 1 \times 3 \times (b-a)] - w$$

上式中若設 $p=a-1, q=b-1, q-p=b-a=d$

(表示三角格頂點到 M_1 有 p 個點，到 N_1 有 q 個點)

$$D_s = p \times q + (p-1) \times (q-1) + \dots + 1 \times (1+d) - w$$

$$= \frac{1}{6} \times p \times (p+1) \times [2 \times p + 1 \times 3 \times d] - w$$

當 $a=b$ 時， $d=0$ ，此三角格必在對稱軸上。

$$D_s = p^2 + (p-1)^2 + (p-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 - w$$

$$= \frac{1}{6} \times p \times (p+1) \times (2p+1) - w$$

(2). w 值的決定

w 值的大小由足碼 a, b, c 三數中最大者決定：

① n 為偶數時：設 c 為最大足碼。

$$C > \frac{n}{2}, \text{ 此三角格落在漩渦區外, } w=0$$

$$\text{漩渦區內: } c \leq \frac{n}{2} \text{ (c 為最大足碼)}$$

$$\text{圈數 } k = \left(\frac{n}{2} - c\right) + 1$$

當 $k=1$, $W_1=1+2=1 \times 3$

$k=2$, $W_2=(1+2)+(1+2+3+4)=1 \times 3+2 \times 5$

$k=3$, $W_3=(1+2)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5+6)=1 \times 3+2 \times 5+3 \times 7$

$\vdots$

$k=m$, $W_m=1 \times 3+2 \times 5 \dots m \times (2m+1)$

② n 為奇數時：設 c 為最大足碼

$c > \frac{n+1}{2} \rightarrow$ 在漩渦區外， $w=0$

漩渦區內： $c \leq \frac{n+1}{2}$

圈數 $k = (\frac{n+1}{2} - c) + 1$

當 $k=1$, $W_1=1=1 \times 1$

$k=2$, $W_2=1+(1+2+3)=1 \times 1+2 \times 3$

$k=3$, $W_3=1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5$

$\vdots$

$k=m$, $W_m=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5 \dots m \times (2m-1)$

(3). 2 單位格倒 $\triangle MaNbLc$ ($a+b+c=n+5$) (若設 $a < b < c$)

$D_s = (a-1) \times (2b-3) + (a-2) \times (b-3) + (a-3) \times (b-4) \dots 1 \times (b-a) + [1+2+3 \dots + (a-2)] - [3 \text{ 個 } w \text{ 值加減後只剩一個 } w \text{ 值最大者}]$

(三)、我們找到那些相關的級數：

(1) 上三角格總數 $T_{US} =$ 沿任一邊線上 U_s 值總和

$1 + (1+2) + (1+2+3) \dots + (1+2+3+4+5 \dots + n)$

$= 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) \dots + (n-1) \times 2 + n \times 1$

(2) 倒三角格總數 T_{DS} 兩公式相等

n 為奇數 $T_{DS} = 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 \dots + (\frac{n-1}{2}) \times n$

$= 1 \times [2 \times (n-1) - 1] + 2 \times [2 \times (n-3) - 1] + 3 \times [2 \times (n-5) - 1] \dots + (\frac{n-1}{2}) \times 3$

n 為偶數 $T_{DS} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 \dots + (\frac{n}{2}) \times (n-1)$

$= 1 \times [2 \times (n-1) - 1] + 2 \times [2 \times (n-3) - 1] + 3 \times [2 \times (n-5) - 1] \dots \frac{n}{2} \times 1$

(3) $D_s = (1+2+3 \dots + a) \times b - [1 \times (a-1) + 2 \times (a-2) + 3 \times (a-3) \dots + (a-2) \times 2 + (a-1) \times 1]$

$= axb + (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) \dots 1 \times [1 + (b-a)]$

[式中 a 為 1 單位格倒三角格 M_1 到最接近的頂角之點數，

b 為 N_1 到最接近的頂點之點數。且設 $b > a$]

$= \frac{1}{6} \times ax(a+1) \times (2a+1+3d)$

式中 $d = b - a$ ，證明在捌討論中。

柒、對本作品我們最滿意的地方。(或許是自認為一點小小的貢獻吧！)

一、我們起初不知什麼叫做三角級數，或平方級數，我們只希望找到 D_s 值的最簡公式，當我們由 $D_s=(1+2+3\ldots+a)\times b-[1\times(a-1)+2\times(a-2)+3\times(a-3)\ldots+(a-1)\times 1]$

逐步簡化到 $D_s=\frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times (2a+1+3 \times d)$ (式中 $d=b-a$) 時，我們隱約的知道，平方級數和三角級數間的密切關係。

老師說：這個公式可以解答很多要用數學歸納法才能證明的問題。我們只要將 $d=(b-a)$ 值代入上式便可求解。

例：①當 $a=b$ 時， $D_s=1^2+2^2+3^2\cdots a^2=\frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times (2a+1)$

② $b=a+1$ 時， $D_s=1\times 2+2\times 3+3\times 4\ldots a\times(a+1)=\frac{1}{3} \times a \times (a+1) \times (a+2)$

二、利用三角格的圖形解釋了許多乍看之下似乎不相干的級數。

例如：

① $(a \times b)+(a-1) \times (b-1)+(a-2) \times (b-2)\ldots+1 \times [1+(b-a)]$
 $= (1+2+3\ldots+a) \times b-[1 \times (n-1)+2 \times (n-2)\ldots+(n-1) \times 1]$

若非由圖形很難了解，等式左方為一連串由大到小的平行四邊形（或長方形）面積的累計，而等式右邊又是一連串由小到大梯形面積的累加結果。這兩種大小不同，形狀不同的幾何圖形面積的累加怎會相等？

② $1+(1+2)+(1+2+3)\cdots+(1+2+3\cdots+n)=1 \times n+2 \times (n-1)+3 \times (n-2)\ldots+n \times 1$

由圖形上一看便知等式兩邊都是上三角格的 T_{us} 值。

三、三角形內漩渦區的 D_s 值，竟然是由有效區域露在三角形外的較小缺口來決定要減去的 W 值是多少？。漩渦區的 W 值，當 n 為奇數時 $W_k=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5\ldots k \times (2k-1)\ldots$ (式中 k 為圈數)，這級數的結構，和求 n 為偶數倒三角格的總數 $T_{Ds}=1 \times 1+2 \times 3+3 \times 5\ldots \frac{n}{2} \times (n-1)$ ，形式完全一樣。

相同的當 n 為偶數時， $W_k=1 \times 3+2 \times 5+3 \times 7+\ldots+k \times (2k+1)\ldots$ (式中 k 為圈數)，這級數又和 n 為奇數，求倒三角格總數 $T_{Ds}=1 \times 3+2 \times 5+3 \times 7\ldots \frac{n-1}{2} \times n$ ，形式完全一樣。

是什麼原因？只留給我們一個想像空間。

捌、討論：

一、當我們把兩個 $n=15$ 的三角形，合併成一個菱形時，發現漩渦區不見了，而且有些三角格，在求 D_s 值時，公式已不適用，或許是將來研究題材。

二、爲了驗算方便，將一些本報告有關的公式節錄如下，僅供有興趣朋友參考。不作嚴謹的證明。

$$\begin{aligned}(1) \quad p(n) &= 1+(1+2)+(1+2+3)\dots+(1+2+3\dots+n) \\ &= 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) \dots n \times 1 \\ &= \frac{1}{6} \times n \times (n+1) \times (n+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad p(n) &= 1 \times (n-1) + 2 \times (n-2) + 3 \times (n-3) \dots (n-1) \times 1 \\ &= 1 + (1+2) + (1+2+3) \dots [1+2+3 \dots + (n-1)] \\ &= \frac{1}{6} \times n \times (n-1) \times (n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad D_s &= a \times b + (a-1) \times (b-1) + (a-2) \times (b-2) \dots 1 \times (b-a) \\ &= (1+2+3 \dots + a) \times b - [1 \times (a-1) + 2 \times (a-2) + 3 \times (a-3) \dots (a-1) \times 1]\end{aligned}$$

設 $b > a$ ， $b-a=d$ ，則 $b=a+d$ 代入上式

$$D_s = \frac{1}{2} \times a \times (a+1) \times (a+d) - \left[\frac{1}{6} \times a \times (a-1) \times (a+1) \right]$$

$$[\because 1 \times (a-1) + 2 \times (a-2) + 3 \times (a-3) \dots + (a-1) \times 1 = \frac{1}{6} \times a \times (a-1) \times (a+1) \text{ 依上公式(2)}]$$

$$= a \times (a+1) \times \left[\frac{1}{2} \times (a+d) - \frac{1}{6} \times (a-1) \right]$$

$$= a \times (a+1) \times \frac{1}{6} \times 6 \times \left[\frac{1}{2} \times (a+d) - \frac{1}{6} \times (a-1) \right]$$

$$= \frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times [3 \times (a+d) - (a-1)]$$

$$= \frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times [2a+1+3d]$$

上式中當 $a=b$ 時 $d=0$

$$D_s = a^2 + (a-1)^2 + (a-2)^2 \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{1}{6} \times a \times (a+1) \times (2a+1)$$

參考資料：

- (1)第 22 屆全國中小學科展優勝作品專輯 p.201 神奇三角形世界。
- (2)第 44 屆全國中小學科展優勝作品專輯（上網）正方形的迷惑。
- (3)數列與級數 建弘出版社 陸思明著 P.165,P.133。94 元月新版。
- (4)數學拾貝 三民書局 蔡聰明著 P.4 畢氏學派的弄法石。92 年 7 月初版一刷。

評	語
---	---

080413 三角格世界裡的大漩渦-從三角格裡尋找一些相關的級數

本作品為從三角格裡尋找一些相關級數，乃個人完成，難能可貴。作者思考極靈活，觀察能敏銳、分析推理能力亦佳。口頭說明清晰流俐，研究過程描述詳盡，值得給予第三名獎勵。