

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第一名

080408

神奇的尺

學校名稱：屏東縣屏東市忠孝國民小學

作者：	指導老師：
小五 李淨雯	陳淑琳
小五 游瑞夫	林季福
小五 劉人豪	
小五 邱翊婷	
小五 陳奕璿	

關 鍵 詞：節約尺、間隔、組合

作品名稱：神奇的尺

摘要

本研究探討一支刻度很少而長度為整數 $K\text{cm}$ 的節約尺，這支尺可以從 1cm 、 2cm 、 3cm 、 $\dots$ ，量到 $K\text{cm}$ ，我們找出最大的 K ，並且探討尺的間隔數和尺長的關係。我們發現有 N 個間隔，一定會產生 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ 種間隔，尺長不會超過 $\frac{(N+1) \times N}{2}\text{cm}$ 。我們還找出了間隔組合總數的算法，當間隔數越多，間隔組合總數就越驚人，從幾十萬筆資料中，我們找出了 1~8 個間隔的最佳解。當我們把這些間隔組合總數算法所形成的數列排在一起，發現這些數列竟然和巴斯卡三角形有關。

壹、研究動機

上數學課時，老師給我們一支 15cm 尺，要我們畫線。這支尺沒有全部的刻度，只有 1、4、5、11、13 如圖 1，老師問：「你們可不可以用這支尺，畫出長度為整數 1~ 15cm 的線？畫線要一筆畫不可用接的。」於是激起我們的興趣，就開始研究這個「刻度很少，卻能量出 1 到跟直尺長度相同的所有整數公分長」的尺。

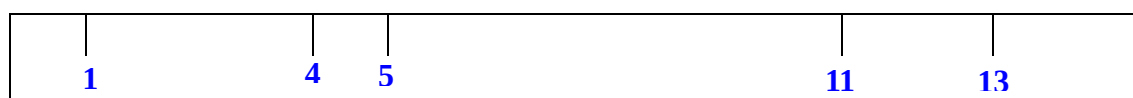


圖 1 使用 5 個刻度的 15cm 尺

與教材的相關性如下：

- 一、第十冊第五單元圖形的面積
- 二、第十冊第八單元怎樣解題
- 三、第九冊第十一單元怎樣計算

貳、研究目的

- 一、這支 15cm 尺所使用的刻度可不可以再少一點？
- 二、尺的長度和所用的刻度個數有沒有關係？
- 三、這些刻度很少的尺，可以量出最長的長度是多少？
- 四、長度最長的尺，刻度要如何訂定？
- 五、訂這些刻度有沒有什麼規律？

參、研究設備及器材

我們用到了紙、筆、橡皮擦、電腦（軟體 Word 和 Excel）、壓克力板、游標尺。

肆、研究過程

- 一、 15cm 的尺

(一) 五個刻度(1、4、5、11、13)

從 1cm 開始畫出長度為整數公分的線，一直畫到尺本身的長度 15cm，我們一下子就找出來了。

0~1 可畫 1cm	11~13 可畫 2cm	1~4 可畫 3cm
0~4 可畫 4cm	0~ 5 可畫 5cm	5~11 可畫 6cm
4~11 可畫 7cm	5~13 可畫 8cm	4~13 可畫 9cm
5~15 可畫 10cm	4~15 可畫 11cm	1~13 可畫 12cm
0~13 可畫 13cm	1~15 可畫 14cm	0~15 可畫 15cm

(二) 四個刻度

我們把(1、4、5、11、13)去掉 4，只用(1、5、11、13)四個刻度，發現可畫出 1、2、4、5、6、8、10、11、12、13、14、15cm，無法畫出 3、7、9cm。

那麼其他的四個刻度可不可以呢？我們把所有可能的四個刻度都排列出來：

(1、2、3、4)、(1、2、3、5)……(1、2、3、14)	11 種
(1、2、4、5)、(1、2、4、6)……(1、2、4、14)	10 種
.....	
(1、2、12、14)、(1、2、13、14)	2 種
(1、2、13、14)	1 種
(1、3、4、5)、(1、3、4、6)……(1、3、4、14)	10 種
(1、3、5、6)、(1、3、5、7)……(1、3、5、14)	9 種
.....	
(1、3、13、14)	1 種
.....	
(1、11、12、14)、(1、11、13、14)	2 種
(1、11、13、14)	1 種
(1、12、13、14)	1 種

四個刻度一共有 $(11+10+\cdots+1)+(10+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1=286$ 種，不能把長度為整數 1~15cm 的線全部畫出，所以最少一定要有五個刻度。

二、刻度個數與間隔個數

那麼尺的長度與刻度個數有沒有關係呢？

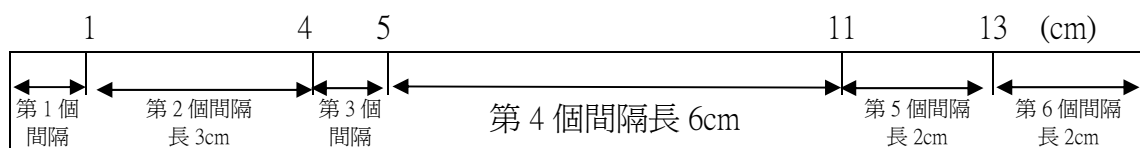


圖 2 5 個刻度有 6 個間隔

用刻度來畫線時，線的長度是用減法算出來的，例如要畫 6cm 的線是 $11-5$ 算出來

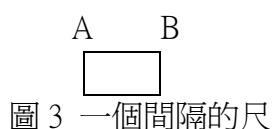
的，老師建議我們改用間隔來算，變成加法可能會比較容易。所以五個刻度(1、4、5、11、13)就改記為六個間隔(1、3、1、6、2、2)，如圖 2。

尺有 n 個刻度就有 $n+1$ 個間隔，要用 15cm 尺畫出長度為整數 1~15cm 的線，最少要有六個間隔，那麼尺的長度與間隔個數有沒有關係呢？

三、間隔個數、尺長與各間隔長度

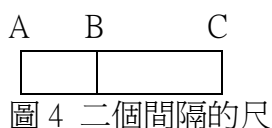
我們希望這尺可畫出長度為 1、2、 $\dots$ 、 K cm 的線， K 越大越好。我們以(1、2、3)表示 3 個間隔的長度各是 1、2、3cm，並且把可畫最大 K 的各間隔長度，稱為**最佳解**。以下從最少的間隔數開始，來探討間隔個數與尺長、各間隔長度的關係。

(一) 1 個間隔



只有一個間隔所以沒有刻度如圖 3，尺的長度只有 1cm，最佳解是(1)。

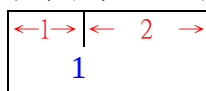
(二) 2 個間隔



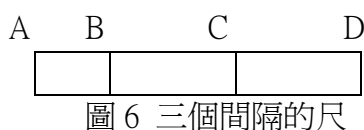
二個間隔的尺如圖 4，只有 1 個刻度，從 A 點開始可畫出 AB、AC 兩種長度的線，從 B 點開始可以畫出 BC 長度的線，所以有 $2+1=3$ 種間隔。那麼，可不可以畫出 1~3cm 的線？

由於要從 1cm 開始畫線，所以一定要有一個間隔的長度是 1cm，因此，我們把所探討的尺，限定在**第一個間隔長度為 1cm**的範圍內。

我們找出最佳解是(1、2)，尺長為 3cm，只有一個刻度是 1，如圖 5。



(三) 3 個間隔



3 個間隔的尺如圖 6，從 A 點開始有 AB、AC、AD 三種間隔，從 B 點開始有 BC、

BD 二種間隔，從 C 點開始有 CD 一種間隔，所以總共有 $3+2+1=6$ 種間隔，那麼可以畫出 1~6cm 的線嗎？

我們把 3 個間隔長度共 6cm，第一個間隔長度是 1cm 的組合找出來，共有 4 種：
 $(1、1、4)、(1、2、3)、(1、3、2)、(1、4、1)$ 。

我們發現最佳解是 $(1、3、2)$ ，最長的尺長為 6cm，刻度是 $(1、4)$ ，如圖 7。

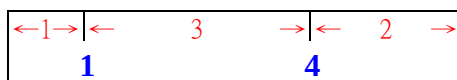


圖 7 三個間隔的最佳解

(四) 4 個間隔

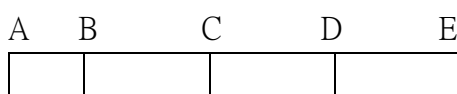


圖 8 四個間隔的尺

四個間隔的尺如圖 8，共有 $4+3+2+1=\frac{(4+1)\times 4}{2}=10$ 種間隔，第一個間隔長

度是 1cm，4 個間隔長度共 10cm 的組合：

- | | |
|---------------------------------------|-----|
| $(1、1、1、7)、(1、1、2、6)、\dots、(1、1、7、1)$ | 7 種 |
| $(1、2、1、6)、(1、2、2、5)、\dots、(1、2、6、1)$ | 6 種 |
| | |
| $(1、6、1、2)、(1、6、2、1)$ | 2 種 |
| $(1、7、1、1)$ | 1 種 |

共有 $(7+6+5+4+3+2+1)=\frac{(7+1)\times 7}{2}=28$ 種，不能畫出 1~10cm，所以再檢

查長度和 9cm 的組合。

4 個間隔長度共 9cm 的組合共有 $6+5+4+3+2+1=\frac{(6+1)\times 6}{2}=21$ 種，最佳解

是 $(1、1、4、3)、(1、3、3、2)$ ，可以量出最長的長度為 9cm，如圖 9。

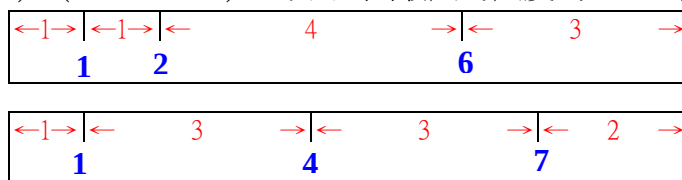


圖 9 四個間隔的最佳解有兩個

(五) 5 個間隔

因為有 5 個間隔，所以共有 $5+4+3+2+1=\frac{(5+1)\times 5}{2}=15$ 種間隔，由於已知

15cm 的尺至少要有 6 個間隔，所以檢查長度和共 14 cm 的組合。

1、長度和為 14

5 個間隔長度共 14cm 的組合：

(1、1、1、1、10)、(1、1、1、2、9) 、…、(1、1、1、10、1) 10 種

(1、1、2、1、9)、(1、1、2、2、8) 、…、(1、1、2、9、1) 9 種

.....

(1、1、9、1、1) 1 種

(1、2、1、1、9)、(1、2、1、2、8) 、…、(1、2、1、9、1) 9 種

(1、2、2、1、8)、(1、2、2、2、7) 、…、(1、2、8、1、1) 8 種

.....

(1、2、9、1、1) 1 種

.....

(1、9、1、1、2)、(1、9、1、2、1) 2 種

(1、9、2、1、1) 1 種

(1、10、1、1、1) 1 種

總共有

(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)

+ (9+8+7+6+5+4+3+2+1)

+

+ (2+1)

+ (1)

=220

我們發現 5 個間隔的 220 種組合總數，就是 4 個間隔的算法算 10 次(從 10 開始往下到 1)後的總和。由於這些組合越來越多，所以我們利用 Excel 試算表來計算，方法如表一：

表一

欄名	位置	公式	公式說明	範例
間隔 1	A2	1		1
間隔 2	B2	數字		1
間隔 3	C2	數字		1
間隔 4	D2	數字		1
間隔 5	E2	=14-A2-B2-C2-D2	14 減去前 4 個間隔長度	10
長度 1	F2	=A2		1
長度 2	G2	=A2+B2		2
長度 3	H2	=A2+B2+C2		3
長度 4	I2	=A2+B2+C2+D2		4

欄名	位置	公式	公式說明	範例
長度 5	J2	=A2+B2+C2+D2+E2		14
長度 6	K2	=B2		1
...	...	...	...	
長度 15	T2	=E2		10
1cm	U2	=COUNTIF(F2:T2,1)	計算長度 1 到長度 15 出現幾次 1	4
...	...	...	...	
14cm	AH2	=COUNTIF(F2:T2,14)	計算長度 1 到長度 15 出現幾次 14	1

另外老師教我們在計算出現幾次 1cm 到 14cm 的儲存格上，設定格式化的條件：如果儲存格的值大於 0，就讓儲存格變成紅色，這樣只要那一列計算出現幾次 1cm 到 14cm 的儲存格全部是紅色的，就是我們要的答案了！

結果 220 列沒有一列是全部紅的。

2、長度和為 13

長度和 13 cm 的第一種組合是(1、1、1、1、9)，所以從(1、1、1、1、9)到(1、9、1、1、1)的組合有：

$$\begin{aligned}
 & (9+8+7+6+5+4+3+2+1) \\
 & + (8+7+6+5+4+3+2+1) \\
 & + \dots\dots \\
 & + (2+1) \\
 & + (1) \\
 & = 165
 \end{aligned}$$

最佳解是(1、1、4、4、3)、(1、3、1、6、2)、(1、5、3、2、2)，如圖 10。

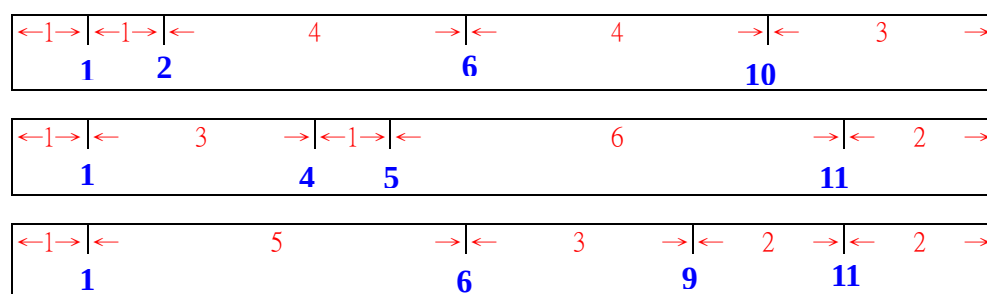


圖 10 五個間隔的最佳解

(六) 6 個間隔

6 個間隔的尺，共有 $\frac{(6+1) \times 6}{2} = 21$ 種間隔。由於 5 個間隔只能畫到 13cm，少了兩種，所以由 19 cm 開始檢查。第一種組合是(1、1、1、1、1、14)，第二個間隔長度

可以由 1 到 14。先假定第二個間隔長度為 1，根據前面 5 個間隔的組合，(1、1、1、1、14)到(1、14、1、1、1)的組合共有： $(14+13+\cdots+2+1)+(13+12+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1=560$

假定第二個間隔長度為 2，(1、2、1、1、1、13)到(1、2、13、1、1、1)的組合共有： $(13+12+\cdots+2+1)+(12+11+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1$

假定第二個間隔長度為 3，(1、3、1、1、1、12)到(1、3、12、1、1、1)的組合共有： $(12+11+\cdots+2+1)+(11+10+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1$

以此類推，6 個間隔的組合由(1、1、1、1、1、14)到(1、14、1、1、1、1)，共有：
 $[(14+13+12+\cdots+2+1)+(13+12+\cdots+2+1)+\cdots+(2+1)+1]$
 $+ [(13+12+\cdots+2+1)+\cdots+(2+1)+1]$
 $+ \cdots$
 $+ [(2+1)+1]$
 $+ [1]=2380$

這是 5 個間隔的算式算 14 次(由 14 開始到 1)後的總和。結果這 2380 列資料沒有找到；再檢查長度和為 18 的 1820 列資料，也沒有找到。再檢查長度和為 17 的組合，由(1、1、1、1、1、12)到(1、12、1、1、1、1)的 1365 列資料，找到了最佳解是
 (1、1、1、5、5、4)、(1、1、4、4、4、3)、(1、1、6、4、2、3)、
 (1、1、6、4、3、2)、(1、3、6、2、3、2)、(1、7、3、2、2、2)，如圖 11。

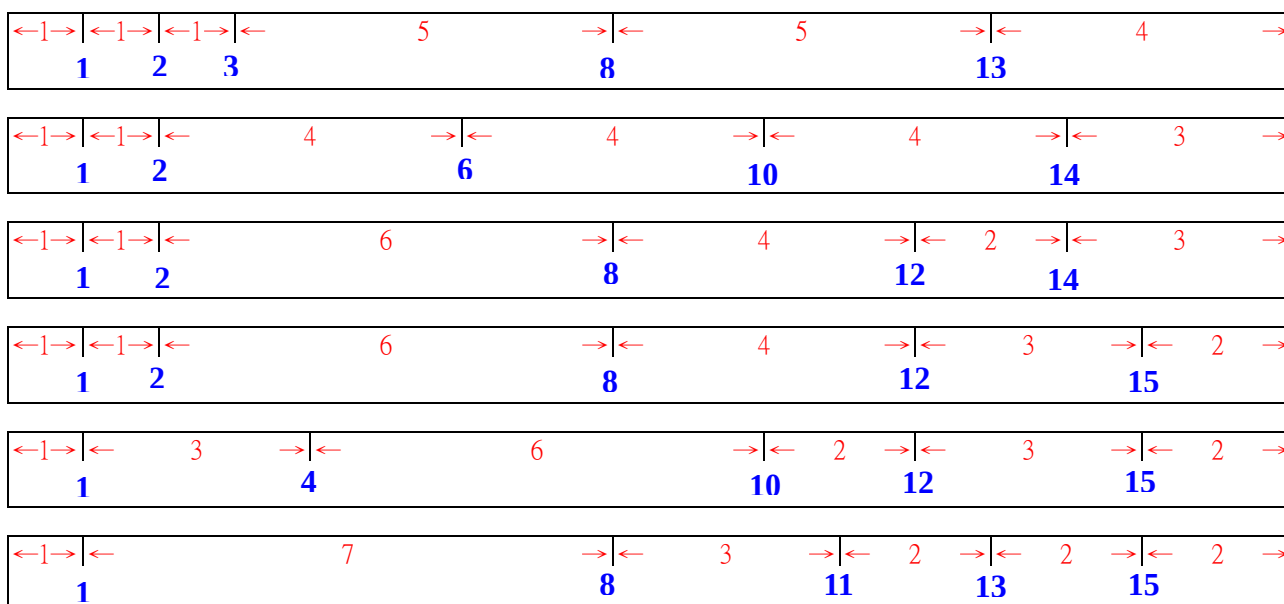


圖 11 六個間隔的最佳解

(七) 7 個間隔

7 個間隔的尺，總共有 $\frac{(7+1) \times 7}{2} = 28$ 種間隔。由於 6 個間隔無法連續畫到 21cm，只能連續畫到 17cm，少了四種，所以由 24cm 開始檢查。

由前面 3~6 個間隔的組合總數算法，我們發現都可以用前一種的算式，7 個間隔的第一種組合是(1、1、1、1、1、1、18)，是 6 個間隔的算式算 18 次(由 18 開始到 1)後的總和。(1、1、1、1、1、18)到(1、18、1、1、1、1)的組合共有：

$$\begin{aligned} & \{[(18+17+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1]+[(17+16+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1]+\cdots+[(2+1)+1]+1\} \\ & + \{[(17+16+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1]+[(16+15+\cdots+1)+\cdots+(2+1)+1]+\cdots+[(2+1)+1]+1\} \\ & + \cdots \cdots \cdots \\ & + \{[(2+1)+1]+1\} \\ & + \{1\} = 26334 \end{aligned}$$

這數量很大看得眼睛都花了，再修正試算表的公式如表二，增加了一格 BF2 來檢查 1cm 到 24cm 總共有幾個 0，如果 BF2 儲存格的值為 0，表示可以畫出 1~24cm，再設定 BF2 格式化的條件：如果儲存格的值等於 0，讓儲存格變成藍色，這樣只要那一格變成藍色，就是我們要的答案了！

表二

欄名	位置	公式	公式說明	範例
間隔 1	A2	1		1
間隔 2	B2	數字		1
...	...	...	...	
間隔 6	F2	數字		1
間隔 7	G2	=24-A2-B2-C2-D2-E2-F2-	24 減去前 6 個間隔長度	18
長度 1	H2	=A2		1
長度 2	I2	=A2+B2		2
...	...	...	...	
長度 27	AH2	=F2+G2		19
長度 28	AI2	=G2		18
1cm	AJ2	=COUNTIF(H2:AI2,1)	計算長度 1 到長度 28 出現幾次 1	6
...	...	...	...	
24cm	BG2	=COUNTIF(H2:AI2,24)	計算長度 1 到長度 28 出現幾次 24	1
檢查 0	BH2	=COUNTIF(AJ2:BG2,0)	檢 1cm 到 24cm 的欄位有幾個 0	11

結果 26334 列資料都沒有，我們把長度和減為 23，找到了最佳解(1、1、9、4、3、3、2)、(1、3、6、6、2、3、2)。

(八) 8 個間隔

8 個間隔的尺，總共有 $\frac{(8+1) \times 8}{2} = 36$ 種間隔。由於 7 個間隔無法連續畫到 28cm，只能連續畫到 23cm，少了五種，所以由 31cm 開始檢查。

8 個間隔的第一種組合是(1、1、1、1、1、1、1、24)，是 7 個間隔的算法算 24 次(由 24 到 1)後的總和。我們檢查了(1、1、1、1、1、1、1、24)到(1、24、1、1、1、1、1、1)總共 475020 種組合，沒有發現最佳解。尺長改為 30cm，檢查(1、1、1、1、1、1、1、23)到(1、23、1、1、1、1、1、1) 的 376740 種組合，還是沒有發現，就再檢查(1、1、1、1、1、1、1、22)到(1、22、1、1、1、1、1、1)的 296010 種組合，終於找到了最佳解

(1、1、12、4、3、3、3、2)、(1、2、3、7、7、4、4、1)、
(1、3、6、6、6、2、3、2)、(1、4、4、7、7、3、2、1)。

伍、研究結果

一、這支 15cm 尺所使用的刻度可不可以再少一點？

15cm 尺用 5 個刻度 1、4、5、11、13 可以畫出長度為整數 1~15cm 的線，用 4 個刻度不能。

二、尺長和間隔個數有沒有關係？

我們發現間隔數和幾種間隔是有關係的，見表三，如果這把尺有 N 個間隔，幾種間隔的算法就是 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ 種間隔。

表三

間隔數	產生幾種間隔	公式算法
1	1	1
2	2+1	$\frac{(2+1) \times 2}{2} = 3$
3	3+2+1	$\frac{(3+1) \times 3}{2} = 6$
4	4+3+2+1	$\frac{(4+1) \times 4}{2} = 10$
5	5+4+3+2+1	$\frac{(5+1) \times 5}{2} = 15$
6	6+5+4+3+2+1	$\frac{(6+1) \times 6}{2} = 21$
7	7+6+5+4+3+2+1	$\frac{(7+1) \times 7}{2} = 28$
8	8+7+6+5+4+3+2+1	$\frac{(8+1) \times 8}{2} = 36$

如果這把尺產生的 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ 種間隔的長度沒有重覆，尺長就是 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ cm，不

然就小於 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ cm，所以尺長不會超過 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ cm。

三、這些間隔很少的尺，可以量出最長的長度是多少？要如何定這些刻度？

我們找出 1~8 個間隔的最佳解、可量出的最長長度以及刻度的定法，詳見表四。

表四

間隔數	最長長度	各間隔長度(最佳解)	刻度
1	1	(1)	沒有
2	3	(1、2)	(1)
3	6	(1、3、2)	(1、4)
4	9	(1、1、4、3) (1、3、3、2)	(1、2、6) (1、4、7)
5	13	(1、1、4、4、3) (1、3、1、6、2) (1、5、3、2、2)	(1、2、6、10) (1、4、5、11) (1、6、9、11)
6	17	(1、1、1、5、5、4) (1、1、4、4、4、3) (1、1、6、4、2、3) (1、1、6、4、3、2) (1、3、6、2、3、2) (1、7、3、2、2、2)	(1、2、3、8、13) (1、2、6、10、14) (1、2、8、12、14) (1、2、8、12、15) (1、4、10、12、15) (1、8、11、13、15)
7	23	(1、1、9、4、3、3、2) (1、3、6、6、2、3、2)	(1、2、11、15、18、21) (1、4、10、16、18、21)
8	29	(1、1、12、4、3、3、3、2) (1、2、3、7、7、4、4、1) (1、3、6、6、6、2、3、2) (1、4、4、7、7、3、2、1)	(1、2、14、18、21、24、27) (1、3、6、13、20、24、28) (1、4、10、16、22、24、27) (1、5、9、16、23、26、28)

陸、討論

一、尺長和間隔數

我們在網路上找到「節約尺」的資料—2005 網際網路程式設計全國大賽高中組的決賽題目。題目上說一把總長度為 K 的節約尺一定要符合兩個條件：

- (1) 必需可以量出 1 到 K 之間所有整數公分長。
- (2) 總刻度數不等於 K，這裡的刻度數定義為尺上刻痕所分隔的片段個數。

原來老師給的 15cm 尺是一把**最少刻度的節約尺**，題目所說的「**刻度**」就是我們的「**間隔**」，他們要設計程式判斷一組「**刻度**」所組成的尺是不是節約尺，但並沒有要判斷是不

是最少「**刻度**」。我們的最佳解，是 **N 個間隔的節約尺中長度最長的**，同時也是**該長度的節約尺中間隔個數最少的**。

N 個間隔的節約尺，一定可以量 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ 種間隔，但是不一定可以由 1、2、...、到 $\frac{(N+1) \times N}{2}$ cm，間隔數越多，長度重覆的情形就越多，如表五。

表五

間隔數	可量出的間隔數	尺長	長度重覆次數
1	1	1	0
2	3	3	0
3	6	6	0
4	10	9	1
5	15	13	2
6	21	17	4
7	28	23	5
8	36	29	7

由於我們所研究的是**最少間隔**而且**長度最長**的節約尺，所以根據表五可以推出 1~30cm 的節約尺所需要的最少間隔數，詳見表六。

表六

尺長	1	2~3	4~6	7~9	10~13	14~17	18~23	24~29	30
最少的間隔數	1	2	3	4	5	6	7	8	9

二、間隔組合總數

我們從 1 個間隔開始，找出所有的間隔組合起迄，並算出間隔組合總數詳見表七。除了間隔數是 1 和 2 以外，其他都是由**第一個間隔組合**的**最後一個間隔長度**開始往下遞減計算的，而且是用前一種間隔組合總數的算式算出，並且以此算式往下算到 1 後的總和。

表七

間隔數	尺長	間隔組合起迄	間隔組合總數的算法
1	1	(1)	1
2	3	(1、2)	1
3	6	(1、1、 4)~(1、 4 、1)	4
4	10	(1、1、1、 7)~(1、 7 、1、1)	7 +6+5+4+3+2+1
5	15	(1、1、1、1、 11)~(1、 11 、1、1、1)	(11 +10+...+1)+(10 +9+...+1)+...+(2 +1)+(1)

間隔數	尺長	間隔組合起迄	間隔組合總數的算法
6	19	(1、1、1、1、1、14) ~(1、14、1、1、1、1)	[(14+13+...+1)+(13+12+...+1)+...+(2+1)+1] + [(13+12+...+1)+...+(2+1)+1] + + [(2+1)+1] + [1]
7	24	(1、1、1、1、1、1、18) ~(1、18、1、1、1、1、1)	{ [(18+17+...+1)+...+(2+1)+1] + [(17+...+1) +...+(2+1)+1]+...+[(2+1)+1]+1 } + { [(17+16+...+1)+...+(2+1)+1] + [(16+15 +...+1)+...+(2+1)+1]+...+[(2+1)+1]+1 } + + { [(2+1)+1]+1 } + { 1 }

間隔組合總數會受間隔數、尺長的影響，由於我們限定第一個間隔長度為 1cm，當間隔數是 3、尺長是 6 時，間隔第一種組合就是(1、1、4)。間隔數是 4，尺長是 10 時，第 4 個間隔長度就是 $10-3=7$ ；尺長是 9 時，第 4 個間隔長度就是 $9-3=6$ 。所以如果間隔數是 m ，尺長是 K ，那麼第一個間隔組合的前面 $m-1$ 個間隔長度是 1，最後一個間隔長度就是 $K-(m-1)$ 。

以下我們把間隔組合總數的算法推廣到一般情形，間隔組合是由(1、...、1、A)~(1、A、...、1)時，這裏所討論的尺並沒有限定是節約尺，當 A 分別是 1、2、3、4、5、...時，

3 個間隔組合總數是 1、2、3、4、5、...

4 個間隔組合總數是 1、3、6、10、15、21、28、36、45、55、66、78、...

5 個間隔組合總數是 1、4、10、20、35、56、85、120、165、220、286、...

6 個間隔組合總數是 1、5、15、35、70、126、210、330、495、715、1001、1365、...

7 個間隔組合總數是 1、6、21、56、126、252、462、792、1287、2002、3003、4368、...

8 個間隔組合總數是 1、7、28、84、210、462、924、1716、3432、6435、11440、19448、...

我們把這些數列排在試算表，詳見表八，發現一些有趣的現象：

表八

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	...
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	...
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	...
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	...
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3432	6435	11440	...

(一) 每個數列都由 1 開始的。

- (二) 下一列的數是由上一列的前幾項連加產生的，例如， $B2 = A1 + B1$ ， $E4 = A3 + B3 + C3 + D3 + E3$ 。
- (三) 每一格是左方格和上方格的和，例如 $C2 = A1 + B1 + C1 = B2 + C1$ ， $F4 = A3 + B3 + C3 + D3 + E3 + F3 = E4 + F3$ 。

我們利用(一)和(三)的發現，使用試算表以公式複製，就可拉出很大的範圍，還把這公式往前推，如表九。想要知道 9 個間隔(1、14、1、1、1、1、1、1、1)~(1、1、1、1、1、1、1、1、14)共有幾種組合，只要查表九中 9 個間隔數列的第 14 項，就可以知道共有 77520 種組合了。

表九

2 個間隔	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3 個間隔	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4 個間隔	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
5 個間隔	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
6 個間隔	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060
7 個間隔	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628
8 個間隔	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
9 個間隔	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280

我們在觀察表九時，覺得好像在那裏看過，當把表格轉 45°，赫然發現這不就是課本上的**巴斯卡三角形**嗎？

三、最佳解的規律

在表四「間隔數與最佳解」中，很難觀察出有什麼規律，但是有發現一些線索：

- (一) 每種間隔數都有(1、…、2)這樣的最佳解。
- (二) 大部分最佳解的最後一個數字是 2 或 3。
- (三) 從間隔數 4 以上，都有(1、1、…)的這樣的最佳解。
- (四) 除了 5 個間隔以外，3~8 個間隔都有(1、…、3、2)這樣的最佳解。
- (五) 6~8 個間隔都有(1、3、…、2、3、2) 這樣的一組最佳解。
- (六) 6 個間隔有(1、1、…、3、2)的最佳解，7 個間隔有(1、1、…、3、3、2)，8 個間隔有(1、1、…、3、3、3、2)。

柒、結論

這次我們做了「神奇的尺」這個題目，才發現尺只用幾個刻度，可畫出由 1cm 開始到尺長的線，不過還是需要一定的刻度數量，而且方法也不只一種呢！剛開始間隔少時，最佳解還好找，不過，到了五個間隔時，數量多了，算得頭都昏了，所以我們利用電腦的 EXCEL 裡的公式—COUNTIF 來找。間隔變多了，間隔組合變化也跟著變多，算間隔組合總數的算式，變得越來越長，實在看得眼花撩亂！當我們把這些間隔組合總數的數列排在一起，竟然看到了巴斯卡三角形，這尺的確是很神奇呀！

捌、參考資料及其他

- 一、Brian Bolt(著)林傑斌(譯)(民 85)。**數學遊樂園之趣味盎然**。臺北市：牛頓。
- 二、2005 網際網路程式設計全國大賽：<http://contest.cc.ntu.edu.tw/npsc2005/>

評語

080408 神奇的尺

本作品各種情況的分析詳盡，能合理的類推，對於各種情況的排列組合總數觀念清晰，並能推出合理的公式，頗富創意，團隊合作甚佳。