中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080406

乾坤大挪移

學校名稱：　桃園縣新屋鄉頭洲國民小學

作者：	指導老師：
小五　羅資涵	蘇旭榮
小五　姜巧卿	蘇郁惠
小五　謝維樱	
小五　姜子荃	

關　鍵　詞：移位遊戲、數學歸納法、跳島攻法

壹、 摘要

※本文所探討的是關於有趣的移位遊戲

(本文問題一，共討論三種情形)：偶數個硬幣依序交錯排成一直線，設有反面硬幣數 n 個(ex.正、反、正、反→反、反、正、正)，最少移動次數 $\frac{n(n+1)}{2}$ 次；偶數個硬幣數非交錯(ex.正、正、反、反→反、反、正、正)，最少移動次數 n^2 次；與奇數個硬幣數非交錯排列(ex.正、正、反→反、正、正)，最少移動次數 $n(n+1)$ 次。

(本文問題二，共討論五種情形)：利用技巧定義出「跳島攻法」，當移動過程符合跳島攻法，可得到最少移動次數步驟，其最少移動次數的公式：※當符合（空格數/字母數）≦1/2 時，奇數個字母為 $\frac{N^2+3N-8}{2}$ 次；偶數個字母為 $\frac{N(N+1)}{2}$ 次。

以上雙主題研究皆以數學歸納法證明公式正確性，希望藉此推廣到一般移位遊戲，謝謝！

貳、 研究動機

寒假育樂營上數學課時，老師總是喜歡出一些有趣的數學問題，來激盪我們的腦力，其中一個問題(問題一)讓我們印象深刻，遊戲內容如下：

如圖一，有 6 個銅板，正反面交錯，一個接著一個排成一直線，使得這 6 個銅板最後變成圖二的情形，請問最少要移動多少次？

正 反 正 反 正 反 → 反 反 反 正 正 正

圖一　　　　　　　　　　　　　　圖二

配合現在學到南一版數學(十)五下第八單元「如何解題」，我們幾個同學便利用下課時間，找老師驗證答案，大家也有相同的疑問想做進一步的探討，在完成問題一的各類研究後，老師卻突發奇想地將原移位遊戲改為變形題(問題二)如下：

下面有六個方格，其中四格按順序排上 A、B、C、D 四個英文字母，另外兩格為空格，依照移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D、C、B、A，試問最少要移動幾個步驟？

		A	B	C	D

→

		D	C	B	A

於是我們就針對這兩種移位遊戲做各種研究，並試圖做出研究結論。在研究的過程中，老師提醒我們歷年科展針對移位遊戲的研究不勝枚舉，因此我們提出歷屆相關研究如下，並釐清我們的研究價值。

編號	屆別 組別	得獎 名次	主題名稱	研究主要內容
1	34屆 高小組	全國 第二名	毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現	針對移位遊戲作更深入的探討，該作品中對兩邊棋子數不相等的部分做了完整的探討，並歸納出公式，是以往不曾被研究過的新題材。
2	36屆 高小組	全國 第一名	翻來覆去乾坤轉~翻硬幣遊戲的新發現	針對各種情形作多元的探討，利用數據規律性推導出最低步公式。
3	39屆 高中組	全國 第二名	乾坤大挪移	移位的對稱性、黑棋白棋的對稱性、空格位置統計，切入主題的觀點已是高中程度較難理解。
4	43屆 國小組	全國 第二名	最佳全翻位的探討	內容延伸36屆「翻來覆去乾坤轉~翻硬幣遊戲的新發現」，討論情形較為完整。
5	45屆 國小組	全國 第三名	翻出一片天	內容相似43屆「最佳全翻位的探討」，發現遊戲規律，歸納出各種情形的解題策略。

※研究價值與差異

1. 題目本身為老師設計原創。
2. 遊戲過程中大膽定義「跳島攻法」以檢驗各種情形的正確性。
3. 除推導出最少移動次數的公式外，更嘗試以數學歸納法作嚴謹的證明。
4. 經由數學方法是可以設計或改進移位遊戲。
5. 經由雙主題的研究，較有推廣至一般移位遊戲的效益。

參、 研究目的

一、完成這兩個遊戲最少的移動步驟。

二、利用移位遊戲移動的最少次數、技巧，推論此遊戲之規律性及公式，並嘗試較為嚴謹的數學方法證明。

三、利用數學方法改進或設計移位遊戲。

四、希望將結論推廣至一般移位遊戲。

肆、 研究設備及器材

一、以厚紙板製成的遊戲紙卡操作

二、移動過程紀錄表

伍、 研究過程或方法

問題一

※完成這個遊戲最少的移動步驟

方法：依序從偶數個硬幣數 2 個、4 個、6 個、8 個…，到順序變化，一直到奇數個硬幣數的討論共三種情形，實際操作多次，並詳細將移動過程加以紀錄。如下列三個表格所示：【】爲最少次數。

<正反硬幣總數爲偶數，且硬幣排列交錯>

學生 / 最少次數 / 硬幣個數與順序	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁
(偶數兩個)正、反	【1】	【1】	【1】	【1】
(偶數四個)正、反、正、反	【3】	【3】	【3】	【3】
(偶數六個)正、反、正、反、正、反	【6】	【6】	【6】	【6】
(偶數八個) 正、反、正、反、正、反、正、反	【10】	【10】	【10】	【10】
(偶數十個) 正、反、正、反、正、反、正、反、正、反	【15】	【15】	【15】	【15】
(偶數十二個) 正、反、正、反、正、反、正、反、正、反、正、反	【21】	【21】	【21】	【21】
(偶數十四個) 正、反、正、反、正、反、正、反、正、反、正、反、正、反	【28】	【28】	【28】	【28】

<正反硬幣總數爲偶數>

學生 硬幣個數與順序 最少次數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁
(偶數兩個)正、反	【1】	【1】	【1】	【1】
(偶數四個)正、正、反、反	【4】	【4】	【4】	【4】
(偶數六個)正、正、正、反、反、反	【9】	【9】	【9】	【9】
(偶數八個) 正、正、正、正、反、反、反、反	【16】	【16】	【16】	【16】
(偶數十個) 正、正、正、正、正、反、反、反、反、反	【25】	【25】	【25】	【25】
(偶數十二個) 正、正、正、正、正、正、反、反、反、反、反、反	【36】	【36】	【36】	【36】
(偶數十四個) 正、正、正、正、正、正、正、反、反、反、反、反、反、反	【49】	【49】	51	【49】

<正反硬幣總數爲奇數>

學生 硬幣個數與順序 最少次數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁
(奇數三個)正、正、反	【2】	【2】	【2】	【2】
(奇數五個)正、正、正、反、反	【6】	【6】	【6】	【6】
(奇數七個)正、正、正、正、反、反、反	【12】	【12】	【12】	【12】
(奇數九個) 正、正、正、正、正、反、反、反、反	【20】	【20】	【20】	【20】

(奇數十一個) 正、正、正、正、正、正、反、反、反、反、反	【30】	【30】	【30】	【30】
(奇數十三個) 正、正、正、正、正、正、正、反、反、反、反、反、反	【42】	【42】	【42】	【42】
(奇數十五個) 正、正、正、正、正、正、正、正、反、反、反、反、反、反、反	【56】	【56】	58	【56】

一、研究主題

如圖一，有 6 個銅板，正反面交錯，一個接著一個排成一直線，使得這 6 個銅板最後變成圖二的情形，請問最少要移動多少次？

正 反 正 反 正 反 → 反 反 反 正 正 正

圖一　　　　　　圖二

【移動規則】(一)每次只可以互相交換相鄰的兩個硬幣。

延伸子題(一)

如圖一，有 6 個銅板，一個接著一個排成一直線，使得這 6 個銅板最後變成圖二的情形，請問最少要移動多少次？

正 正 正 反 反 反 → 反 反 反 正 正 正

圖一　　　　　　圖二

【移動規則不變】

延伸子題(二)

如圖一，有 7 個銅板，一個接著一個排成一直線，使得這 7 個銅板最後變成圖二的情形，請問最少要移動多少次？

正 正 正 正 反 反 反

圖一　→　反 反 反 正 正 正 正

【移動規則不變】　　　　　　圖二

二、研究過程

(一)我們從最少的硬幣數討論，以獲得移動規律，利用數據推導結論公式，嘗試利用數學歸納法作嚴謹證明。

※硬幣總數爲偶數，正反面交錯排列(已知硬幣總數爲奇數的結果相同)

正反→反正：共計一次 1.反正
正反正反→反反正正：共計三次 1. 反正正反 2.反正反正 3.反反正正
正反正反正反→反反反正正正：共計六次 1.反正正反正反 2.反正反正正反 3.反反正正正反 4.反反正正反正 5.反反正反正正 6.反反反正正正
正反正反正反正反→反反反反正正正正：共計十次 1.反正正反正反正反 2.反正反正正反正反 3.反反正正正反正反 4.反反正正反正正反 5.反反正反正正正反 6.反反反正正正正反 7.反反反正正正反正 8.反反反正正反正正 9.反反反正反正正正 10.反反反反正正正正
正反正反正反正反正反→反反反反反正正正正正：共計十五次 1.反正正反正反正反正反 2.反正反正正反正反正反 3.反反正正正反正反正反 4.反反正正反正正反正反 5.反反正反正正正反正反 6.反反反正正正正反正反 7.反反反正正正反正正反 8.反反反正正反正正正反 9.反反反正反正正正正反 10.反反反反正正正正正反 11.反反反反正正正正反正 12.反反反反正正正反正正 13.反反反反正正反正正正 14.反反反反正反正正正正 15.反反反反反正正正正正
正反正反正反正反正反正反→反反反反反反正正正正正正：共計二十一次 1.反正正反正反正反正反正反 2.反正反正正反正反正反正反 3.反反正正正反正反正反正反 4.反反正正反正正反正反正反 5.反反正反正正正反正反正反 6.反反反正正正正反正反正反 7.反反反正正正反正正反正反 8.反反反正正反正正正反正反 9.反反反正反正正正正反正反 10.反反反反正正正正正反正反 11.反反反反正正正正反正正反 12.反反反反正正正反正正正反 13.反反反反正正反正正正正反 14.反反反反正反正正正正正反 15.反反反反反正正正正正正反 16.反反反反反正正正正正反正 17.反反反反反正正正正反正正 18.反反反反反正正正反正正正 19.反反反反反正正反正正正正 20.反反反反反正反正正正正正 21.反反反反反反正正正正正正

公式推導過程：(n 為硬幣正面數或反面數，a_n 為最少移動次數)

當 n=1 時，$a_1=1$

當 n=2 時，$a_2=3=a_1+2$

當 n=3 時，$a_3=6=a_2+3$

當 n=4 時，$a_4=10=a_3+4$

當 n=5 時，$a_5=15=a_4+5$

$a_2=3=a_1+2$

$a_3=6=a_2+3$

$a_4=10=a_3+4$

$a_5=15=a_4+5$

$a_n=a_{n-1}+n$

等式左邊、右邊分別相加，得

$a_2+a_3+a_4+a_5+\text{-----}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\text{--------}+a_{n-1}+2+3+4+5+\text{--------}+n$

等式兩邊消去 $a_2+a_3+a_4+\text{--------}+a_{n-1}$，得 $a_n=1+2+3+4+5+6+\text{-------}+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

數學歸納法證明：

當 n=1 時 $a_1=1$ 等式成立

假設 $n=k$ 時等式成立，即 $a_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，

則 $n=k+1$，$a_{k+1}=a_k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ 等式成立

移動(k+1)次

反反反…反反反 正正正…正正正正反

k 個 k+1 個

根據數學歸納法，等式恆成立。

※硬幣總數為偶數

正反→反正：共計一次 1.反正
正正反反→反反正正：共計四次 1.正反正反 2.正反反正 3.反正反正 4.反反正正
正正正反反反→反反反正正正：共計九次 1.正正反正反反 2.正正反反正反 3.正反正反正反 4.正反反正正反 5.正反反正反正 6.反正反正反正 7.反反正正反正 8.反反正反正正 9.反反反正正正

正正正正反反反反→反反反反正正正正：共計十六次 1.正正正反正反反反 2.正正正反反正反反 3.正正反正反正反反 4.正正反反正正反反 5.正正反反正反正反 6.正反正反正反正反 7.正反反正正反正反 8.正反反正反正正反 9.正反反反正正正反 10.正反反反正正反正 11.正反反反正反正正 12.正反反反反正正正 13.反正反反反正正正 14.反反正反反正正正 15.反反反正反正正正 16.反反反反正正正正
正正正正正反反反反反→反反反反反正正正正正：共計二十五次 1.正正正正反正反反反反 2.正正正正反反正反反反 3.正正正正反反反正反反 4.正正正正反反反反正反 5.正正正反反正反正反反 6.正正反正反正反正反反 7.正正反反正正反正反反 8.正正反反正反正正反反 9.正正反反反正正正反反 10.正正反反反正正反正反 11.正正反反反正反正正反 12.正正反反反反正正正反 13.正反正反反反正正正反 14.正反反正反反正正正反 15.正反反反正反正正正反 16.正反反反反正正正正反 17.正反反反反正正正反正 18.正反反反反正正反正正 19.正反反反反正反正正正 20.正反反反反反正正正正 21.反正反反反反正正正正 22.反反正反反反正正正正 23.反反反正反反正正正正 24.反反反反正反正正正正 25.反反反反反正正正正正
正正正正正正反反反反反反→反反反反反反正正正正正正：共計三十六次 1.正正正正正反正反反反反反 2.正正正正正反反正反反反反 3.正正正正正反反反正反反反 4.正正正正正反反反反正反反 5.正正正正反反正反正反反反 6.正正正反正反正反正反反反 7.正正正反反正正反正反反反 8.正正正反反正反正正反反反 9.正正正反反反正正正反反反 10.正正正反反反正正反正反反 11.正正正反反反正反正正反反 12.正正正反反反反正正正反反 13.正正反正反反反正正正反反 14.正正反反正反反正正正反反 15.正正反反反正反正正正反反 16.正正反反反反正正正正反反 17.正正反反反反正正正反正反 18.正正反反反反正正反正正反 19.正正反反反反正反正正正反 20.正正反反反反反正正正正反 21.正反正反反反反正正正正反 22.正反反正反反反正正正正反 23.正反反反正反反正正正正反 24.正反反反反正反正正正正反 25.正反反反反反正正正正正反 26.正反反反反反正正正正反正 27.正反反反反反正正正反正正 28.正反反反反反正正反正正正 29.正反反反反反正反正正正正 30.正反反反反反反正正正正正 31.反正反反反反反正正正正正 32.反反正反反反反正正正正正 33.反反反正反反反正正正正正 34.反反反反正反反正正正正正 35.反反反反反正反正正正正正 36.反反反反反反正正正正正正

公式推導過程：(n 為正面數或反面數，a_n 為最少移動次數)

當 n=1 時，$a_1=1=1\times1$

當 n=2 時，$a_2=4=2\times2$

當 n=3 時，$a_3=9=3\times3$

當 n=4 時，$a_4=16=4\times4$

當 n=5 時，$a_5=25=5\times5$

當 n=6 時，$a_6=36=6\times6$

可推論出當 n 個時，$a_n=n\times n=n^2$

數學歸納法證明：

當 n=1 時 $a_1=1$ 等式成立

假設 $n=k$ 時等式成立，即 $a_k=k\times k$，則 $n=k+1$

$$a_{k+1}=a_k+k+(k+1)=k\times k+k+(k+1)=(k+1)(k+1)=(k+1)^2$$ 等式成立

移動 k 次

移動(k+1)次

正反反反…反反反　正正正…正正正反

k 個　　k 個

根據數學歸納法，等式恆成立。

※硬幣總數為奇數

正正反→反正正：共計二次 1.正反正 2.反正正
正正正反反→反反正正正：共計六次 1.正正反正反 2.正反正正反 3.正反正反正 4.正反反正正 5.反正反正正 6.反反正正正
正正正正反反反→反反反正正正正：共計十二次 1.正正正反正反反 2.正正反正正反反 3.正正反正反正反 4.正正反反正正反 5.正反正正反正反 6.正反反正正正反 7.正反反正正反正 8.正反反正反正正 9.正反反反正正正 10.反正反反正正正 11.反反正反正正正 12.反反反正正正正
正正正正正反反反反→反反反反正正正正正：共計二十次 1.正正正正反正反反反 2.正正正反正正反反反 3.正正正反正反正反反 4.正正正反反正正反反 5.正正反正正反正反反 6.正正反反正正正反反 7.正正反反正正反正反 8.正正反反正反正正反 9.正正反反反正正正反 10.正反正反反正正正反 11.正反反正反正正正反 12.正反反反正正正正反

13.正反反反正正正反正 14.正反反反正正反正正 15.正反反反正反正正正 16.正反反反反正正正正 17.反正反反反正正正正 18.反反正反反正正正正 19.反反反正反正正正正 20.反反反反正正正正正
正正正正正正反反反反反→反反反反反正正正正正正：共計三十次 1.正正正正正反正反反反反 2.正正正正反正正反反反反 3.正正正正反正反正反反反 4.正正正正反反正正反反反 5.正正正反正反正正反反反 6.正正正反反正正正反反反 7.正正正反反正正反正反反 8.正正正反反正反正正反反 9.正正正反反反正正正反反 10.正正反正反反正正正反反 11.正正反反正反正正正反反 12.正正反反反正正正正反反 13.正正反反反正正正反正反 14.正正反反反正正反正正反 15.正正反反反正反正正正反 16.正正反反反反正正正正反 17.正反正反反反正正正正反 18.正反反正反反正正正正反 19.正反反反正反正正正正反 20.正反反反反正正正正正反 21.正反反反反正正正正反正 22.正反反反反正正正反正正 23.正反反反反正正反正正正 24.正反反反反正反正正正正 25.正反反反反反正正正正正 26.反正反反反反正正正正正 27.反反正反反反正正正正正 28.反反反正反反正正正正正 29.反反反反正反正正正正正 30.反反反反反正正正正正正
正正正正正正正反反反反反反→反反反反反反正正正正正正正：共計四十二次 1.正正正正正正反正反反反反反 2.正正正正正反正正反反反反反 3.正正正正正反正反正反反反反 4.正正正正正反反正正反反反反 5.正正正正反正反正正反反反反 6.正正正正反反正正正反反反反 7.正正正正反反正正反正反反反 8.正正正正反反正反正正反反反 9.正正正正反反反正正正反反反 10.正正正反正反反正正正反反反 11.正正正反反正反正正正反反反 12.正正正反反反正正正正反反反 13.正正正反反反正正正反正反反 14.正正正反反反正正反正正反反 15.正正正反反反正反正正正反反 16.正正正反反反反正正正正反反 17.正正反正反反反正正正正反反 18.正正反反正反反正正正正反反 19.正正反反反正反正正正正反反 20.正正反反反反正正正正正反反 21.正正反反反反正正正正反正反 22.正正反反反反正正正反正正反 23.正正反反反反正正反正正正反 24.正正反反反反正反正正正正反 25.正正反反反反反正正正正正反 26.正反正反反反反正正正正正反 27.正反反正反反反正正正正正反 28.正反反反正反反正正正正正反 29.正反反反反正反正正正正正反 30.正反反反反反正正正正正正反 31.正反反反反反正正正正正反正 32.正反反反反反正正正正反正正 33.正反反反反反正正正反正正正 34.正反反反反反正正反正正正正 35.正反反反反反正反正正正正正 36.正反反反反反反正正正正正正 37.反正反反反反反正正正正正正 38.反反正反反反反正正正正正正 39.反反反正反反反正正正正正正 40.反反反反正反反正正正正正正 41.反反反反反正反正正正正正正 42.反反反反反反正正正正正正正

公式推導過程：(n 為硬幣反面數，，a_n 為最少移動次數)

當 n=1 時， $a_1=2=1\times2$

當 n=2 時， $a_2=6=3\times2$

當 n=3 時， $a_3=12=3\times4$

當 n=4 時， $a_4=20=4\times5$

當 n=5 時， $a_5=30=5\times6$

當 n=6 時， $a_6=42=6\times7$

可推論出當 n 個時，$a_n=n(n+1)$

數學歸納法證明：

當 n=1 時 $a_1=2$ 等式成立

假設 $n=k$ 時等式成立，即 a_k =k(k+1)，

則 $n=k+1$，$a_{k+1}=a_k+k+(k+1)=k(k+1)+k+(k+1)=(k+1)(k+2)$ 等式成立

移動 k 次

移動(k+1)次

正反反反…反反反 正正正…正正正反

k 個 k 個

根據數學歸納法，等式恆成立。

問題二：

※完成這個遊戲最少的移動步驟

方法：依次從字母數 2 個、3 個、4 個、5 個、6 個、7 個，實際操作多次，找出遊戲技巧來定義「跳島攻法」，進而討論空格數為一個、左右各空一格、空格數隨字母數增加等情形，詳細將移動過程加以紀錄。如下列五個表格所示：

＊【】為最少次數。

※原題最左邊空格數 2 個(利用對稱法已知空格放置最右邊的答案相同)

學生 / 最少次數 / 字母個數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	跳/走
A、B	【3】	【3】	【3】	【3】	1/2
A、B、C	【5】	【5】	【5】	【5】	3/2
A、B、C、D	【10】	【10】	【10】	【10】	6/4

A、B、C、D、E	【16】	【16】	【16】	【16】	10/6
A、B、C、D、E、F	【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G	【31】	【31】	33	【31】	21/10

※最左邊空格數 1 個(利用對稱法已知空格放置最右邊的答案相同)

學生 最少次數 字母個數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	跳/走
A、B	【3】	【3】	【3】	【3】	1/2
A、B、C	【5】	【5】	【5】	【5】	3/2
A、B、C、D	【10】	【10】	【10】	【10】	6/4
A、B、C、D、E	【16】	【16】	【16】	【16】	10/6
A、B、C、D、E、F	【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G	【31】	【31】	【31】	【31】	21/10

※空格數 2 個，最左邊最右邊各 1 個，且 2 個空格均需使用

學生 最少次數 字母個數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	跳/走
A、B	5	5	5	5	
A、B、C	7	7	7	7	
A、B、C、D	【10】	【10】	【10】	【10】	6/4
A、B、C、D、E	【16】	【16】	【16】	【16】	10/6

A、B、C、D、E、F	【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G	【31】	【31】	33	【31】	21/10

※最左邊空格數 3 個，且 3 個空格均需使用

學生 / 最少次數 / 字母個數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	跳/走
A、B、C、D	12	12	12	12	
A、B、C、D、E	18	18	18	18	
A、B、C、D、E、F	【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G	【31】	【31】	【31】	【31】	21/10

※最左邊空格數 4 個，且 4 個空格均需使用

學生 / 最少次數 / 字母個數	學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	跳/走
A、B、C、D、E、F	23	23	23	23	
A、B、C、D、E、F、G	33	33	33	33	
A、B、C、D、E、F、G、H	【36】	【36】	【36】	【36】	28/8

一、研究主題

如圖一，有六個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

		A	B	C	D

圖一

→

		D	C	B	A

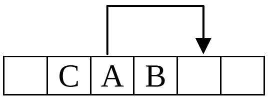
【移動規則】

(一)每個步驟只能移動一個字母。

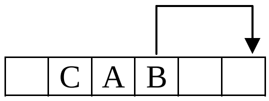
(二)可以向左或向右走一格到空的格子裡。

(三)每次也可以向左或向右跳越緊鄰的數字移動到空的格子裡。

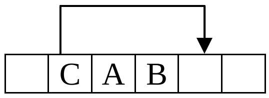
圖例：



正確跳法



錯誤跳法



錯誤跳法

延伸子題(一)：

如圖一，有五個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

	A	B	C	D

圖一

→

	D	C	B	A

【移動規則不變】

延伸子題(二)：

如圖一，有六個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

	A	B	C	D	

圖一

→

	D	C	B	A	

【移動規則不變】

延伸子題(三)：

如圖一，有七個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

			A	B	C	D

圖一

→

			D	C	B	A

【移動規則不變】

延伸子題(四)：

如圖一，有八個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

				A	B	C	D

圖一

→

				D	C	B	A

【移動規則不變】

驗證題：

如圖一，有十二個方格，其中八格按順序排上 A,B,C,D,E,F,G,H 八個字母，請依照下列移動規則，在原來的八個格子，將順序變成 H,G,F,E,D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

				A	B	C	D	E	F	G	H

圖一

→

				H	G	F	E	D	C	B	A

【移動規則不變】

二、研究過程

(一)、問題二

1. 我們從兩個字母開始討論至七個字母以獲得移動規律、遊戲技巧與最少移動次數，並定義出「跳島攻法」，以利討論空格數不同的情形。

做法：(先移動 B，共移動三次)

[ ][ ][A][B] → [ ][B][A][ ] → [ ][B][ ][A] → [ ][ ][B][A]

※當兩個空格皆須使用時

做法：(先移動 B，共移動五次)

[ ][ ][A][B] → [ ][B][A][ ] → [A][B][ ][ ] → [ ][B][A][ ]
→ [ ][B][ ][A] → [ ][ ][B][A]

2. 討論三個字母的情形

做法：(先移動 B，共移動五次)

[ ][ ][A][B][C] → [ ][B][A][ ][C] → [ ][B][A][C][ ] → [ ][B][ ][C][A]
→ [ ][B][C][ ][A] → [ ][ ][C][B][A]

※ 當兩個空格皆須使用時

做法：(先移動 B，共移動七次)

[ ][ ][A][B][C] → [ ][B][A][ ][C] → [B][ ][A][ ][C] → [B][ ][ ][A][C]
→ [B][ ][C][A][ ] → [ ][B][C][A][ ] → [ ][B][C][ ][A] → [ ][ ][C][B][A]

3. 討論四個字母數的情形，即原題意。

做法：(先移動 B，共移動十次)

		A	B	C	D
	B	A		C	D
B		A		C	D
B		A	D	C	
B	D	A		C	
B	D		A	C	
B	D			C	A
	D	B		C	A
	D	B	C		A
	D		C	B	A
		D	C	B	A

4. 討論五個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動十六次)

		A	B	C	D	E
	B	A		C	D	E
B		A		C	D	E
B		A	D	C		E
B	D	A		C		E
B	D	A	C			E
B	D		C	A		E
	D	B	C	A		E
	D	B	C	A	E	
	D	B	C		E	A
	D		C	B	E	A
	D	C		B	E	A
	D	C	E	B		A
	D	C	E		B	A
	D		E	C	B	A
	D	E		C	B	A
		E	D	C	B	A

5. 討論六個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動二十一次)

		A	B	C	D	E	F
	B	A		C	D	E	F
B		A		C	D	E	F
B		A	D	C		E	F
B	D	A		C		E	F
B	D	A		C	F	E	
B	D	A	F	C		E	
B	D	A	F	C	E		
B	D	A	F		E	C	
B	D		F	A	E	C	
	D	B	F	A	E	C	
D		B	F	A	E	C	
D	F	B		A	E	C	
D	F	B	E	A		C	
D	F	B	E	A	C		
D	F	B	E		C	A	
D	F	B	E		C		A
D	F		E	B	C		A
D	F		E		C	B	A
	F	D	E		C	B	A
	F		E	D	C	B	A
		F	E	D	C	B	A

6. 討論七個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動三十一次)

			A	B	C	D	E	F	G	→		B	A		C	D	E	F	G
→	B		A		C	D	E	F	G	→	B		A	D	C		E	F	G
→	B	D	A		C		E	F	G	→	B	D	A		C	F	E		G
→	B	D	A	F	C		E		G	→	B	D	A	F	C	E			G
→	B	D	A	F		E	C		G	→	B	D		F	A	E	C		G
→		D	B	F	A	E	C		G	→		D	B	F	A	E	C	G	
→		D	B	F	A	E		G	C	→		D	B	F		E	A	G	C
→		D		F	B	E	A	G	C	→			D	F	B	E	A	G	C
→		F	D		B	E	A	G	C	→		F	D	E	B		A	G	C
→		F	D	E	B	G	A		C	→		F	D	E	B	G	A	C	
→		F	D	E	B	G		C	A	→		F	D	E		G	B	C	A
→		F		E	D	G	B	C	A	→		F	E		D	G	B	C	A
→		F	E	G	D		B	C	A	→		F	E	G	D	C	B		A
→		F	E	G	D	C		B	A	→		F	E	G	D		C	B	A
→		F	E	G		D	C	B	A	→		F		G	E	D	C	B	A
→		F	G		E	D	C	B	A	→			G	F	E	D	C	B	A

※定義遊戲技巧「跳島攻法」以獲得最少移動次數：

一、跳的連續次數≧空格數。

二、跳的步驟數≧走的步驟數。(已知跳一格等於走兩格)

三、走的目的在於產生連續跳或移至目標位置。

四、掌握首位字母向右移，末位字母向左移的原則。

(二)、延伸子題一

1. 我們從兩個字母開始討論至七個字母，在符合「跳島攻法」的定義下獲得最少移動次數。

做法：(先移動 B，共移動三次)

	A	B	→	B	A		→	B		A	→		B	A

2. 討論三個字母的情形

做法：(先移動 B，共移動五次)

	A	B	C	→	B	A		C	→	B		A	C
→	B	C	A		→	B	C		A	→		C	B	A

3. 討論四個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動十次)

[ ][A][B][C][D] → [B][A][ ][C][D] → [B][A][D][C][ ] → [B][A][D][ ][C]

→ [B][ ][D][A][C] → [ ][B][D][A][C] → [D][B][ ][A][C] → [D][B][C][A][ ]

→ [D][B][C][ ][A] → [D][ ][C][B][A] → [ ][D][C][B][A]

4. 討論五個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動十六次)

[ ][A][B][C][D][E] → [B][A][ ][C][D][E] → [B][A][D][C][ ][E]

→ [B][A][D][C][E][ ] → [B][A][D][ ][E][C] → [B][ ][D][A][E][C]

→ [ ][B][D][A][E][C] → [D][B][ ][A][E][C] → [D][B][E][A][ ][C]

→ [D][B][E][A][C][ ] → [D][B][E][ ][C][A] → [D][ ][E][B][C][A]

→ [D][E][ ][B][C][A] → [D][E][C][B][ ][A] → [D][E][C][ ][B][A]

→ [D][E][ ][C][B][A] → [ ][E][D][C][B][A]

5. 討論六個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動二十一次)

[ ][A][B][C][D][E][F] → [B][A][ ][C][D][E][F] → [B][A][D][C][ ][E][F]

→ [B][A][D][C][F][E][ ] → [B][A][D][C][F][ ][E] → [B][A][D][ ][F][C][E]

→ [B][ ][D][A][F][C][E] → [ ][B][D][A][F][C][E] → [D][B][ ][A][F][C][E]

→ [D][B][F][A][ ][C][E] → [D][B][F][A][E][C][ ] → [D][B][F][A][E][ ][C]

→ [D][B][F][ ][E][A][C] → [D][ ][F][B][E][A][C] → [ ][D][F][B][E][A][C]

→ [F][D][ ][B][E][A][C] → [F][D][E][B][ ][A][C] → [F][D][E][B][C][A][ ]

→ [F][D][E][B][C][ ][A] → [F][D][E][ ][C][B][A] → [F][ ][E][D][C][B][A]

→ [ ][F][E][D][C][B][A]

6. 討論七個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動三十一次)

[ ][A][B][C][D][E][F][G] → [B][A][ ][C][D][E][F][G] → [B][A][D][C][ ][E][F][G]

→ [B][A][D][C][F][E][ ][G] → [B][A][D][C][F][E][G][ ] → [B][A][D][C][F][ ][G][E]

→ [B|A|D| |F|C|G|E] → [B| |D|A|F|C|G|E] → [|B|D|A|F|C|G|E]

→ [D|B| |A|F|C|G|E] → [D|B|F|A| |C|G|E] → [D|B|F|A|G|C| |E]

→ [D|B|F|A|G|C|E|] → [D|B|F|A|G| |E|C] → [D|B|F| |G|A|E|C]

→ [D| |F|B|G|A|E|C] → [|D|F|B|G|A|E|C] → [F|D| |B|G|A|E|C]

→ [F|D|G|B| |A|E|C] → [F|D|G|B|E|A| |C] → [F|D|G|B|E|A|C|]

→ [F|D|G|B|E| |C|A] → [F|D|G| |E|B|C|A] → [F| |G|D|E|B|C|A]

→ [F|G| |D|E|B|C|A] → [F|G|E|D| |B|C|A] → [F|G|E|D|C|B| |A]

→ [F|G|E|D|C| |B|A] → [F|G|E|D| |C|B|A] → [F|G|E| |D|C|B|A]

→ [F|G| |E|D|C|B|A] → [|G|F|E|D|C|B|A]

※公式推導與證明

(1).觀察移動過程的規律性

[|A|B] → [|B|A]

過程：跳 走 走

[|A|B|C] → [|C|B|A]

過程：跳 走 跳 走 跳

[|A|B|C|D] → [|D|C|B|A]

過程：跳 跳 走 跳 走 跳 跳 走 跳 走

[|A|B|C|D|E] → [|E|D|C|B|A]

過程：跳 跳 走 跳 跳 走 跳 跳 走 跳 跳 走 跳 走 走 跳

[|A|B|C|D|E|F] → [|A|B|C|D|E|F]

過程：跳 跳 跳 走 跳 跳 走 跳 跳 跳 走 跳 跳 走 跳 跳 跳 走 跳 跳 走

[|A|B|C|D|E|F|G] → [|A|B|C|D|E|F|G]

過程：跳 跳 跳 走 跳 跳 跳 走 跳 跳 跳 走 跳 跳 跳 走 跳 跳 跳 走 跳 跳 跳 走
跳 跳 走 走 走 走 跳

(2).發現奇數個字母與偶數個字母的規律性，如上所畫底線

(3).公式推導：(假設字母數為 N 個，最少移動次數為 B_N)

奇數：

$$B_N = [(\frac{N-1}{2})+1](N-1) + \frac{N-3}{2} + (N-3) + 1 = \frac{N^2+3N-8}{2}$$，當 N 為奇數($N>1$)

偶數：

$$B_N = (\frac{N}{2}+1)\times\frac{N}{2} + (\frac{N-2}{2}+1)\times\frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$，當 N 為偶數

(4).數學歸納法證明

奇數：

當 $N=3$， $B_3=5$，等式成立

假設 N= k 時， $B_k = \dfrac{k^2+3k-8}{2}$ 等式成立，

則 $B_{k+2} = B_k + (k-1) + 2(\dfrac{k+1}{2}+1) + 3 = \dfrac{k^2+3k-8}{2} + (k-1) + 2(\dfrac{k+1}{2}+1) + 3 = \dfrac{(k+2)^2+3(k+2)-8}{2}$

等式成立。

k+2 與 k 相同部分多的"跳"(綠色)

k+2 比 k 多的(綠色)

k+2 比 k 多的(黃色)

偶數：

當 $N=2$， $B_2=3$，等式成立

假設 N= k 時， $B_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ 等式成立，

則 $B_{k+2} = B_k + (\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{2}) + (\dfrac{k+2}{2}+1) + (\dfrac{k}{2}+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{2}) + (\dfrac{k+2}{2}+1) + (\dfrac{k}{2}+1) = \dfrac{(k+2)(k+3)}{2}$

等式成立。

k+2 與 k 相同部分多的"跳"(綠色+紅色)

k+2 比 k 多的(紅色)

k+2 比 k 多的(藍色)

※根據數學歸納法，等式恆成立。

(三)、延伸子題二

1. 我們從兩個字母開始討論至七個字母，在符合「跳島攻法」的定義下獲得最少移動次數。

做法：(先移動 B，共移動五次)

	A	B	

→

B	A		

→

B		A	

→

B			A

→

	B		A

→

	B	A	

2. 討論三個字母的情形。

做法：(先移動 B，共移動七次)

	A	B	C	
B	A		C	
B		A	C	
B			C	A
B		C		A
B	C			A
	C	B		A
	C	B	A	

3. 討論四個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動十次)

	A	B	C	D	
B	A		C	D	
B	A	D	C		
B	A	D		C	
B		D	A	C	
B	D		A	C	
B	D			C	A
	D	B		C	A
	D		B	C	A
	D	C	B		A
	D	C	B	A	

4. 討論五個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動十六次)

	A	B	C	D	E	
B	A		C	D	E	
B	A	D	C		E	
B	A	D	C	E		
B	A	D		E	C	
B		D	A	E	C	
	B	D	A	E	C	
D	B		A	E	C	
D	B	E	A		C	
D	B	E	A	C		
D	B	E		C	A	
D		E	B	C	A	
D	E		B	C	A	
D	E	C	B		A	
D	E	C		B	A	
D	E		C	B	A	
	E	D	C	B	A	

5. 討論六個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動二十一次)

	A	B	C	D	E	F	
B	A		C	D	E	F	
B	A	D	C		E	F	
B	A	D	C	F	E		
B	A	D	C	F		E	
B	A	D		F	C	E	
B		D	A	F	C	E	
	B	D	A	F	C	E	
D	B		A	F	C	E	
D	B	F	A		C	E	
D	B	F	A	E	C		
D	B	F	A	E		C	
D	B	F		E	A	C	
D	B	F		E		C	A
D		F	B	E		C	A
D		F		E	B	C	A
D	F			E	B	C	A
	F	D		E	B	C	A

→		F		D	E	B	C	A
→		F	E	D		B	C	A
→		F	E	D	C	B		A
→		F	E	D	C	B	A	

6. 討論七個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動三十一次)

		A	B	C	D	E	F	G		→	B	A		C	D	E	F	G	
→	B	A	D	C		E	F	G		→	B	A	D	C	F	E		G	
→	B	A	D	C	F	E	G			→	B	A	D	C	F		G	E	
→	B	A	D		F	C	G	E		→	B		D	A	F	C	G	E	
→		B	D	A	F	C	G	E		→	D	B		A	F	C	G	E	
→	D	B	F	A		C	G	E		→	D	B	F	A	G	C		E	
→	D	B	F	A	G	C	E			→	D	B	F	A	G		E	C	
→	D	B	F		G	A	E	C		→	D		F	B	G	A	E	C	
→		D	F	B	G	A	E	C		→	F	D		B	G	A	E	C	
→	F	D	G	B		A	E	C		→	F	D	G	B	E	A		C	
→	F	D	G	B	E	A	C			→	F	D	G	B	E		C	A	
→	F	D	G		E	B	C	A		→	F		G	D	E	B	C	A	
→	F	G		D	E	B	C	A		→	F	G	E	D		B	C	A	
→	F	G	E	D	C	B		A		→	F	G	E	D	C		B	A	
→	F	G	E	D		C	B	A		→	F	G	E		D	C	B	A	
→	F	G		E	D	C	B	A		→		G	F	E	D	C	B	A	

(四)、延伸子題三

1. 因發現空兩格時，字母數二個與三個已無法做出最少移動次數，所以我們從四個字母開始討論至七個字母，在符合「跳島攻法」的定義下獲得最少移動次數。

做法：(先移動 B，共移動十二次)

				A	B	C	D	→			B	A		C	D	→		B		A		C	D
→		B		A	D	C		→		B	D	A		C		→	D	B		A		C	
→	D	B		A	C			→	D	B			C	A		→	D	B			C		A
→		B	D		C		A	→			D	B	C		A	→			D		C	B	A
→				D	C	B	A																

2. 討論五個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動十八次)

			A	B	C	D	E
		B	A		C	D	E
	B		A		C	D	E
	B		A	D	C		E
	B	D	A		C		E
D	B		A		C		E
D	B		A	C			E
D	B			C	A		E
	B	D		C	A		E
	B	D		C	A	E	
	B	D		C		E	A
		D	B	C		E	A
		D		C	B	E	A
		D	C		B	E	A
		D	C	E	B		A
		D	C	E		B	A
		D		E	C	B	A
		D	E		C	B	A
			E	D	C	B	A

3. 討論六個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動二十一次)

			A	B	C	D	E	F
		B	A		C	D	E	F
	B		A		C	D	E	F
	B		A	D	C		E	F
	B	D	A		C		E	F
D	B		A		C		E	F
D	B		A		C	F	E	
D	B		A	F	C		E	
D	B	F	A		C		E	
D	B	F	A			C	E	
D	B	F	A		E	C		
D	B	F	A	E		C		
D	B	F		E	A	C		
D	B	F		E		C	A	
D	B	F		E		C		A
D		F	B	E		C		A
D		F		E	B	C		A
D		F		E		C	B	A
	D	F		E		C	B	A
		F	D	E		C	B	A
		F		E	D	C	B	A
			F	E	D	C	B	A

4. 討論七個字母數的情形

做法：(先移動 B，共移動三十一次)

			A	B	C	D	E	F	G
		B	A		C	D	E	F	G
		B		A	C	D	E	F	G
		B	C	A		D	E	F	G
	C	B		A		D	E	F	G
C		B		A		D	E	F	G

→	C		B		A	E	D		F	G	→	C		B	E	A		D		F	G
→	C	E	B		A		D		F	G	→	C	E	B		A		D	G	F	
→	C	E	B		A	G	D		F		→	C	E	B	G	A		D		F	
→	C	E	B	G		A	D		F		→	C	E	B	G			D	A	F	
→	C	E	B	G			D		F	A	→	C	E	B	G		D			F	A
→	C	E	B	G		D		F		A	→	C	E		G	B	D		F		A
→	C	E		G		D	B	F		A	→	C	E		G		D		F	B	A
→		E	C	G		D		F	B	A	→		E		G	C	D		F	B	A
→		E		G		D	C	F	B	A	→		E		G	D		C	F	B	A
→		E		G	D	F	C		B	A	→		E		G	D	F		C	B	A
→		E	G		D	F		C	B	A	→		E	G			F	D	C	B	A
→		E	G		F		D	C	B	A	→			G	E	F		D	C	B	A
→			G		F	E	D	C	B	A	→				G	F	E	D	C	B	A

(五)、延伸子題四

1. 因發現空三格時，字母數四個與五個已無法做出最少移動次數，所以我們討論六個與七個字母，在符合「跳島攻法」的定義下獲得最少移動次數。

做法：(先移動 B，共移動二十三次)

					A	B	C	D	E	F	→				B	A		C	D	E	F
→			B		A		C	D	E	F	→			B		A	D	C		E	F
→			B	D	A		C		E	F	→		D	B		A		C		E	F
→	D		B		A		C		E	F	→	D		B		A		C	F	E	
→	D		B		A	F	C		E		→	D		B	F	A		C		E	
→	D		B	F		A	C		E		→	D		B	F			C	A	E	
→	D		B	F			C		E	A	→	D		B	F				C	E	A
→	D		B	F			E	C		A	→	D		B	F		E		C		A
→	D			F	B	E		C		A	→	D			F		E	B	C		A
→		D		F		E	B	C		A	→		D		F		E		C	B	A
→			D	F		E		C	B	A	→				F	D	E		C	B	A
→				F		E	D	C	B	A	→					F	E	D	C	B	A

2. 討論七個字母的情形。

做法：(先移動 B，共移動三十三次)

					A	B	C	D	E	F	G	→				B	A		C	D	E	F	G
→				B		A	C	D	E	F	G	→				B	C	A		D	E	F	G
→			C	B		A		D	E	F	G	→		C		B		A		D	E	F	G
→		C		B		A	E	D		F	G	→		C		B	E	A		D		F	G
→		C	E	B		A		D		F	G	→	E	C		B		A		D		F	G
→	E	C		B		A		D	G	F		→	E	C		B		A	G	D		F	
→	E	C		B	G	A		D		F		→	E	C		B	G		A	D		F	
→	E	C		B	G			D	A	F		→	E	C		B	G			D		F	A
→		C	E	B	G			D		F	A	→		C	E	B	G				D	F	A
→		C	E	B	G			F	D		A	→		C	E		G	B		F	D		A
→		C	E		G	B	F		D		A	→		C	E		G		F	B	D		A
→		C	E		G		F		D	B	A	→			E	C	G		F		D	B	A
→			E		G	C	F		D	B	A	→			E		G		F	C	D	B	A
→			E		G	F		C	D	B	A	→			E		G	F	D	C		B	A
→			E		G	F	D		C	B	A	→			E		G	F		D	C	B	A
→			E	G		F		D	C	B	A	→				G	E	F		D	C	B	A
→				G		F	E	D	C	B	A	→					G	F	E	D	C	B	A

(六)、驗證題

1. 討論八個字母的情形。

做法：(先移動 B，共移動三十六次)

					A	B	C	D	E	F	G	H	→				B	A		C	D	E	F	G	H
→			B		A		C	D	E	F	G	H	→			B		A	D	C		E	F	G	H
→			B	D	A		C		E	F	G	H	→		D	B		A		C		E	F	G	H
→	D		B		A		C		E	F	G	H	→	D		B		A		C	F	E		G	H
→	D		B		A	F	C		E		G	H	→	D		B	F	A		C		E		G	H
→	D	F	B		A		C		E		G	H	→	D	F	B		A		C		E	H	G	
→	D	F	B		A		C	H	E		G		→	D	F	B		A	H	C		E		G	
→	D	F	B	H	A		C		E		G		→	D	F	B	H		A	C		E		G	
→	D	F	B	H			C	A	E		G		→	D	F	B	H			C		E	A	G	
→	D	F	B	H			C		E		G	A	→	D	F	B	H				C	E		G	A
→	D	F	B	H					E	C	G	A	→	D	F	B	H				E		C	G	A
→	D	F	B	H				E	G	C		A	→	D	F	B	H			G	E		C		A
→	D	F	B	H		G		E		C		A	→	D	F		H	B	G		E		C		A
→	D	F		H		G	B	E		C		A	→	D	F		H		G		E	B	C		A
→	D	F		H		G		E		C	B	A	→		F	D	H		G		E		C	B	A
→		F		H	D	G		E		C	B	A	→		F		H		G	D	E		C	B	A

→

	F		H		G		E	D	C	B	A

→

		F	H		G		E	D	C	B	A

→

			H	F	G		E	D	C	B	A

→

			H		G	F	E	D	C	B	A

→

				H	G	F	E	D	C	B	A

※符合公式中，N=8 時，B_8=36，爲最少移動次數。

陸、 研究結果

問題一：利用最少移動次數，推論出結果與硬幣總數之間的關係，
由以上問題一的研究過程，我們發現到完成這個遊戲的最少次數如下：

※硬幣總數為偶數，正反硬幣數相同，且交錯排列(已知總數為奇數個結果相同)

反面硬幣數	1	2	3	4	5	6	7	------	n
最少移動次數	1	3	6	10	15	21	28	------	$\frac{n(n+1)}{2}$

※硬幣總數為偶數，正反面硬幣數相同，非交錯排列

反面硬幣數	1	2	3	4	5	6	7	------	n
最少移動次數	1	4	9	16	25	36	49	------	n^2

※硬幣總數為奇數，正面硬幣數多 1 個，非交錯排列
(已知反面硬幣數多 1 個的情形為對稱，結果相同)

反面硬幣數	1	2	3	4	5	6	7	------	n
最少移動次數	2	6	12	20	30	42	56	------	$n(n+1)$

問題二(變形題)：利用最少移動次數，推論出結果與字母數之間的關係，
方法：由以上問題二的實驗討論，我們發現到完成這個遊戲的最少次數如下：

※空格數 1 個

字母數	2	3	4	5	6	7	------	N
最少移動次數	3	5	10	16	21	31	------	N 爲奇數：$\frac{N^2+3N-8}{2}$ N 爲偶數：$\frac{N(N+1)}{2}$

※空格數 2 個

字母數	2	3	4	5	6	7	------	*N*
最少移動次數	5	7	10	16	21	31	------	同上，*N*＞3

※空格數 2 個，左右各一個

字母數	2	3	4	5	6	7	------	*N*
最少移動次數	5	7	10	16	21	31	------	同上，*N*＞3

※空格數 3 個

字母數	2	3	4	5	6	7	------	*N*
最少移動次數			12	18	21	31	------	同上，*N*＞5

※空格數 4 個

字母數	2	3	4	5	6	7	8	------	*N*
最少移動次數					23	33	36	------	同上，*N*＞7

一、空格在不影響題意之下任意擺，符合（空格數/字母數）≦1/2 時，最少移動次數的結果不變。換句話說，空格數只要適當配合字母數增加減少，其最少移動次數結果是不變的。

二、老師設計的問題二挺完美的，剛好（空格數/字母數）= 1/2。

三、若爲 *N* 個字母時，可藉由表格的數據逐步推得公式：

※當符合（空格數/字母數）≦1/2 時，

奇數個字母可得最少移動次數 $\frac{N^2+3N-8}{2}$ 次；偶數個字母可得最少移動次數 $\frac{N(N+1)}{2}$ 次。

柒、 討論

本文問題一

一、從研究過程中，可以由正反面翻轉的規律性推論出解題技巧，並利用數據推導 n 個條件數的公式，最後以數學歸納法驗證公式正確性。。

二、類似歷屆全國科展曾呈現的移位遊戲內容，所幸老師有教導我們利用數學歸納法作較爲嚴謹的證明，以釐清我們的研究價值。

本文問題二

一、利用原創題目的解題過程中，嚴格定義出「跳島攻法」，以確定討論其他情形的過程亦爲最少移動次數的步驟。

二、本題的重點在於，當我們增加空格數討論時，過程中必須使用到所有空格，才有比較、討論的意義。

三、這一次只將空一格的情形用數學歸納法證明其正確性，其他較難未能證明完畢的部分或是更多元化的移位遊戲討論，可作爲未來參展時或國際科展的研究方向。

※雙主題的研究過程更增添了研究價值。

捌、 結論

我們針對本文討論的兩種移位遊戲做出以下結論：(內容請參照研究過程)

一、單一規則的移位遊戲，加上只有正反兩種硬幣，條件單純的移位遊戲比較容易找出移動過程的規律性，加上最少移動次數的數據，利用數學歸納法，可以獲得破解該遊戲的公式。

二、面對規則條件比較複雜的遊戲時，嚴格定義出遊戲的破解技巧，可確定其他情形的過程亦爲最少移動次數的步驟，以獲得正確的數據資料。

三、數學歸納法證明雖然很困難，但嚴謹的數學方法可以確保公式的正確性。

四、雙主題的研究目的在於推廣至所有移位遊戲。

玖、 參考資料

一、 陳登源(民 83)，趣味數學。台北：台視文化事業股份有限公司。

二、 建國中學四十九屆 314 班合譯。數學思考。1998.12.1 版。台北市。九章出版社(1995)

三、 國立台灣科學教育館。中華民國第 34 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。

四、 國立台灣科學教育館。中華民國第 36 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。

五、 國立台灣科學教育館。中華民國第 43 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。

六、 國立台灣科學教育館。中華民國第 45 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。

評　　語

080406 乾坤大挪移

本作品是有趣的移位遊戲，更可貴的是作者利用「跳島攻法」以獲得最少移動次數，但在說明公式的推導時，未能清楚的說明，況且本作品過去的展覽作品中，已經做了很多，不過作者能操作熟練，值得嘉勉的地方。