

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

佳作

080404

從一子棋體驗數列之律動

學校名稱：臺中市南屯區文山國民小學

作者：	指導老師：
小六 游秋水	林睿傑
小六 吳昭霆	柯晃蕾
小六 賴威池	
小六 藍莉萍	

關 鍵 詞：數列、倍數、一子旗

摘要

從 8×6 格棋盤的一子棋遊戲開始引起我們的研究興趣，進而得出一子棋是一個不公平的遊戲，而且先下者較佔優勢，但我們也解出了所有 $M \times N$ 格一子棋棋盤後下者必勝的座標數列；在研究的過程中我們藉由將一子棋變形成蜂窩型棋盤時，察覺到其路徑數個數將呈費氏數增加。而一子棋遊戲規則像中國古老遊戲 ” 拈 ” ，所以我們發明出拈子棋，因破除了棋子走法的方位限制，也找出了後下者必勝數列而非座標數列。我們仍不滿足這樣的結果，我們知道棋手所下步數的限制會影響後下者必勝數列的生成，所以經過一連串的嘗試，我們最後把倍數的想法融入了一子棋的遊戲規則中，發明了(M,N)型棋，也找到了令人讚嘆美麗且規律生成的後下者必勝數列－泛費氏數列。

壹、 研究動機

還記得剛開學的時候，老師介紹我們一個跟座標位置有關的遊戲——「一子棋」(棋盤大小為 8×6 格)，同學們在互相較量時，很快的就發現：無論後下者如何下子，先下者都可以取得壓倒性勝利。我們心中存留著疑問：如果棋盤變形了結果還是一樣嗎？如果多加一點限制，那又會怎樣呢？爲了滿足腦袋中的疑問，我們開始了這趟漫長、艱辛的「數學之旅」。

貳、 研究目的

- 一、找出一子棋必勝策略。
- 二、將拈遊戲融入一子棋的遊戲規則，找出其必勝策略是否具規律性。
- 三、將倍數的概念融入一子棋的遊戲規則，探討棋局勝負內含的數學法則。

參、 研究設備及器材

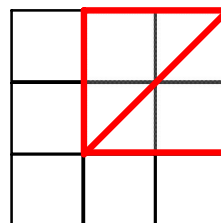
自製方格棋盤、黑子一顆、白紙、筆

肆、 研究過程或方法

一、 一子棋的遊戲規則

原型一子棋的玩法：

1. 每格正方形的邊代表一步路，對角線代表兩步路。
2. 棋子可以往下面、左邊和對角線走。
3. 不能往回走。
4. 先下者和後下者下的步數都不限制。
5. 先到達終點者勝。



二、 一子棋的遊戲分析

一子棋是有限回合的棋子遊戲。有限回合的遊戲一定有結束的一刻，因此最後會有和棋、先下勝、後下勝這三種情形；而一子棋只能有一個人將棋子下到終點，所以不會有和棋的情況，只有先下勝或後下勝的情形。棋盤遊戲中，任何一方擁有必勝方法的，則稱這種遊戲是不公平的遊戲，反之，雙方都沒有必勝方法且都有獲勝可能的，則是公平的遊戲。當我們再玩一子棋時，發現不管設計的棋盤格子總數是否不同，先下者似乎總是站著上風，讓我們不禁會懷疑這一子棋好像是個不公平的遊戲？於是我們有了三個想法：

1. 一子棋是否是個不公平的遊戲。
2. 若它是不公平的遊戲，是否如同之前玩的結果，都先下者勝，即先下者擁有必勝方法。
3. 可否找出後下者必勝策略為何。

三、 將一子棋融入拈的概念

在一子棋遊戲過程中，我們發現一子棋跟拈遊戲的概念十分相似。

第一、它們都是不會平手且有限回合的遊戲。

第二、一子棋其總步數就如同拈遊戲中的總棋子數。

第三、拈遊戲拿子的動作又像一子棋下棋者行棋的步數。

突然，我們腦中浮現一個想法，若是將拈融入一子棋，利用一子棋的棋盤、走法，加上拈的遊戲規則，是不是更加有趣呢？

拈的遊戲介紹：

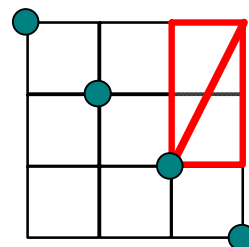
我們歸納了拈遊戲各種情況，當每次最多可拿 K 顆時，後拿者勝之總顆數的通式為：

$\{(K+1)n+(K+3)\} : n=\text{任何一個正整數}$

在每次最多可拿 K 顆時，而除了上述後拿者勝之數目外，其他的棋子數目則為先下者勝。

拈子棋的玩法：

- 1.可以往下面、左邊和對角線走，但走長方形對角線亦可。
- 2.每格正方形的邊代表一步路，對角線代表兩步路。
- 3.不能往回走。
- 4.可自行限制最多可下幾步。



規則中紅體字的部分是融入拈概念的新玩法而多出的規則，其中值得詳加說明的是，上述的規則 1 中：將只能以田字形對角線走法換成長方形對角線走法，是一種放寬限制的做法。當棋手下到第三步時，以上圖為例，有可能落在 4 個不同位置。就原型一子棋來說，在不同的位置時有可能有不同的結果。但是放寬限制後就會打破棋盤形狀的侷限，而原本這 4 個不同的位置，在遊戲勝負的意義上也就代表相同位置。

四、 一子棋新玩法

玩了兩種一子棋遊戲，我們從兩者的規則差異中發現一些蛛絲馬跡。第一、當一子棋放寬規則可走長方形對角線路徑時，它的本質上就是拈遊戲的一種玩法。第二、既然是拈遊戲的一種，那麼先下者不能直接下到終點，否則這個遊戲就沒有玩的意義。第三、拈子棋將兩個玩家每回合可下的步數加以限制，所以在放寬規則 1 時，棋勢不會完全偏向先下者，這給了我們一個想法，若我們對玩家可下的步數下其他的限制時，整個棋局是否有令人異想不到的發展？

新一子棋的遊戲規則：

1. 可以往下面、左邊和對角線走，但走長方形對角線亦可。
2. 每格正方形的邊代表一步路，對角線代表兩步路。
3. 不能往回走。
4. 先下者不能直接下到終點。
5. 後下者的步數不能超過先下者的 M 倍。

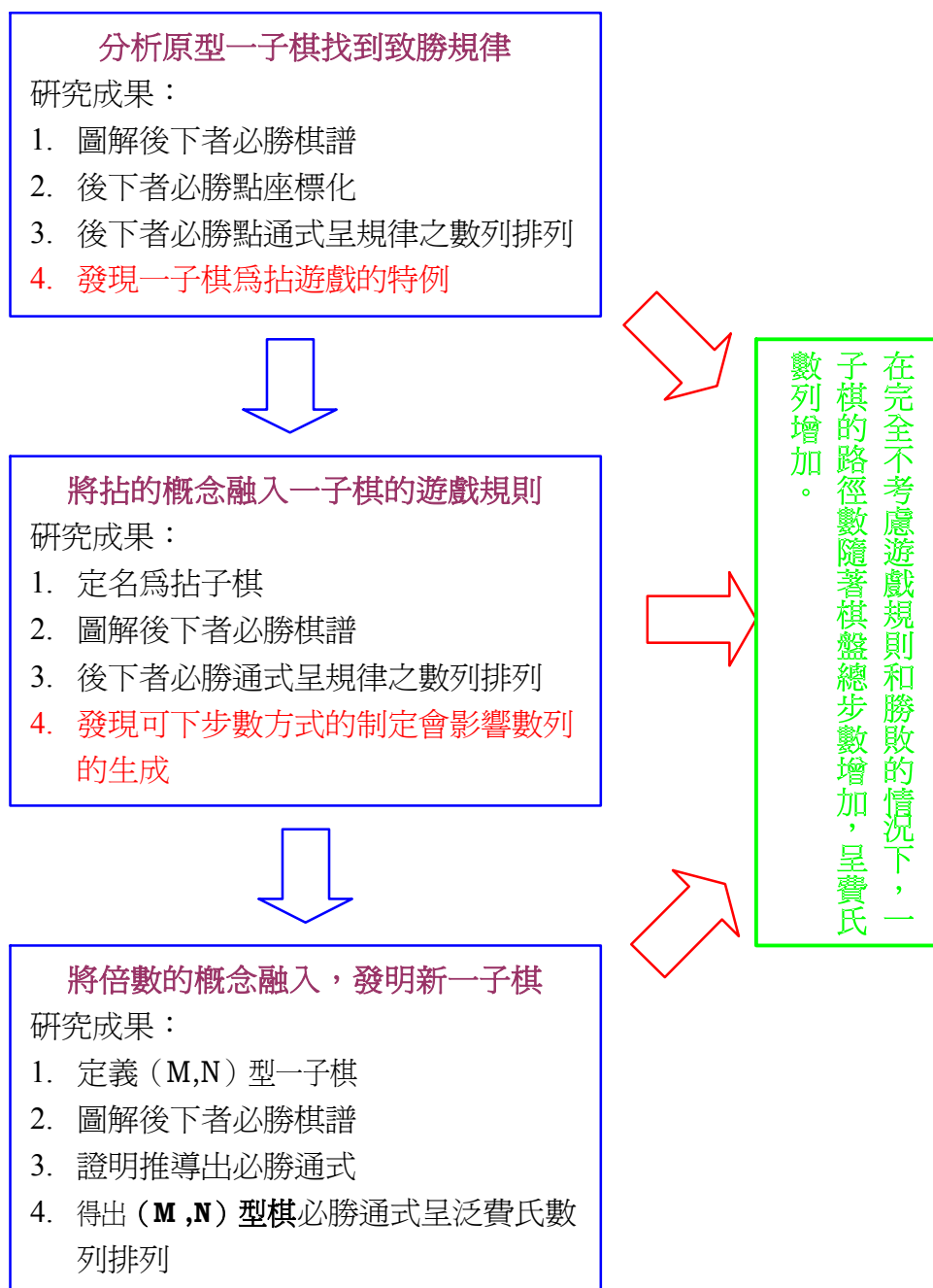
加天藍色的部分是新玩法多的規則，這樣比較好區分新一子棋和舊一子棋的差別。因為把可以走正方形的棋路改成可走長方形的棋路，這樣就算棋盤改變了，也不會影響棋路，例如 23×9 的棋盤和 12×20 的棋盤是一樣的，所以只要棋盤的總步數不變，就算棋盤改變了也關係。

伍、 研究結果

一、 一子棋研究流程

在長達一年的研究，我們不斷發現新的現象，也在不斷出現的新線索中找到令人驚奇的數學規律。我們就在這看似無底的數學深淵中，藉著每次的發現，努力的尋找那一線曙光。最後我們把整個研究以一個研究流程圖來顯示如何運思我們的思路及如何解決發現的問題。

一子棋研究流程圖



二、 試著變形一子棋，發現走法路徑數呈費氏數列增加

我發現一個六角形蜂窩的中心點就等於一子棋的一個格子點，而一個邊就是一子棋的一個邊，而將每一個六角形蜂窩的中心點連起來，就能構成一個平行四邊形，所以四個六角形可拼成一個 1x1 的棋盤；四十九個六角形可拼成一個 6x6 的棋盤。只要將平行四邊形往右扭，就能成爲一個棋盤，所以我們發現到任一個一子棋棋盤都可以看成一個形狀像平行四邊形的蜂窩，如圖 1：

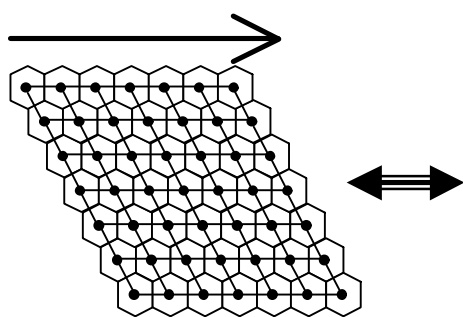


圖 1

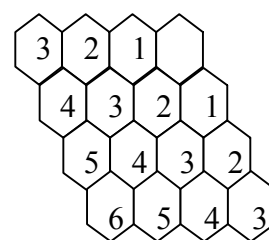


圖 2

由上述的討論我們可以把一個 3x3 的一子棋棋盤變形如上圖的蜂房，再來將圖 2 的蜂房依序標上 1、2、3、4、5……這些數字，這樣當走到 3 號蜂房就必須經過 1 號和 2 號蜂房，所以走到 1 號蜂房和 2 號蜂房的路徑數相加，就等於走到 3 號蜂房的路徑數。因此可聯想出圖 2 的 4 號蜂房，也是必須經過 2 號和 3 號蜂房，而 5 號蜂房又必須經過 3 號和 4 號蜂房……於是從圖 2，蜂窩裡的 1、2、3、4、5、6 這些數字代表蜂房編號，依據之前的討論，走到 1 號蜂房有 1 種走法，走到 2 號蜂房有 2 種走法，走到 3 號蜂房有 3 種走法，走到 4 號蜂房有 5 種走法……得知總步數為 n 的一子棋，從右上方起點到左下方的目的地路徑數可以從總步數為 $n-1$ 的一子棋及總步數為 $n-2$ 的一子棋的路徑數得知。

通式： $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ 。（ f_n ：蜜蜂到達第 n 個蜂房路徑數），跟費氏數列的規律是一樣的。

下表可顯示出若在完全不考慮其他規則和勝敗的情況下，到數字 1 會有 1 種走法，到數字 2 會有 2 種走法，到數字 3 會有 3 種走法……

到數字	走法數	方法
1	1	1
2	2	2, 12
3	3	123, 13, 23
4	5	1234, 124, 134, 24, 234
5	8	12345, 2345, 235, 245, 1245, 1345, 135, 1235

三、 原型一子棋的致勝規律

下圖的粗線是對先到者來說是必敗線，表示的是只要任何一方將棋子移動到線上，下一個人就可以直接下到必勝點。

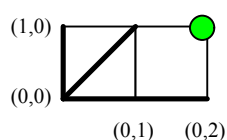
有色圓點：必勝點(先下到此點的那一方必勝)

粗線：可直接到必勝點的途徑



如何確定必勝點：

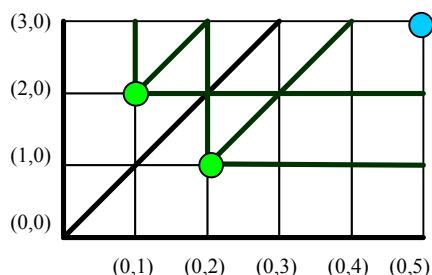
確認-1



綠點為後下者必勝點，因為總步數共 3 步，先下者無法一次到達終點，所以後下者在這位子 (2,1) 必勝。

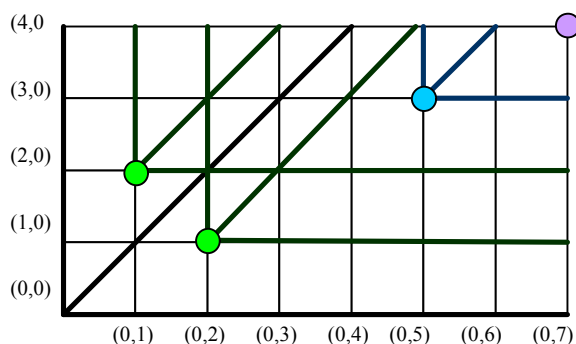
確認-2

粗線為可以直接下到終點的途徑，而綠點無論如何都會下到粗線上，因此先下者無論如何下，後下者都可以直接下到終點。



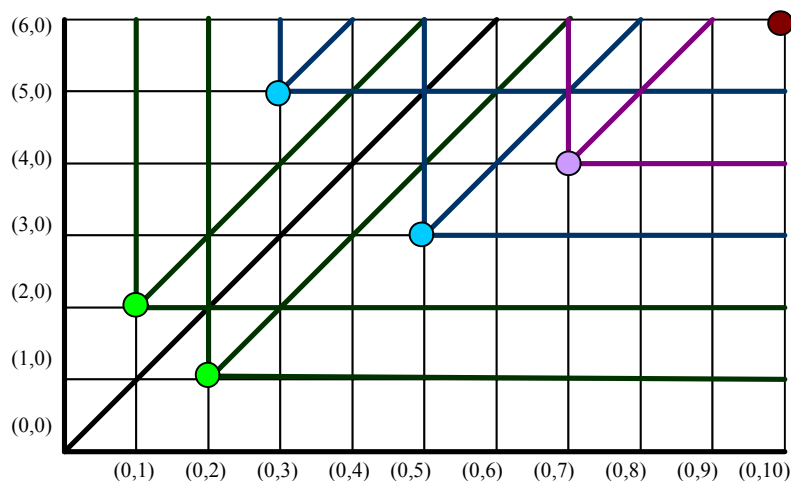
確認

藍點為後下者必勝點，因為左圖中粗線是可直接到達必勝點或終點的路徑，而藍點的位置 (5,3)，正好是先下者無論如何移動都會到粗線上的點，因此後下者可以直接下到前一個必勝點或是終點；故此後下者必勝。



確認

在紫點(7,4)上，無論先下者如何下都會下到粗線上，所以後下者就可直接到達前兩個必勝點或終點，因此後下者必勝



確認

褐點(10,6)上無論
先下者如何下皆
會碰到粗線，而後
下者就可直接抵
達終點或前三個
必勝點。



必勝點的座標位置分別是在

(2,1) (5,3) (7,4) (10,6) 【第一組】

(1,2) (3,5) (4,7) (6,10) 【第二組】

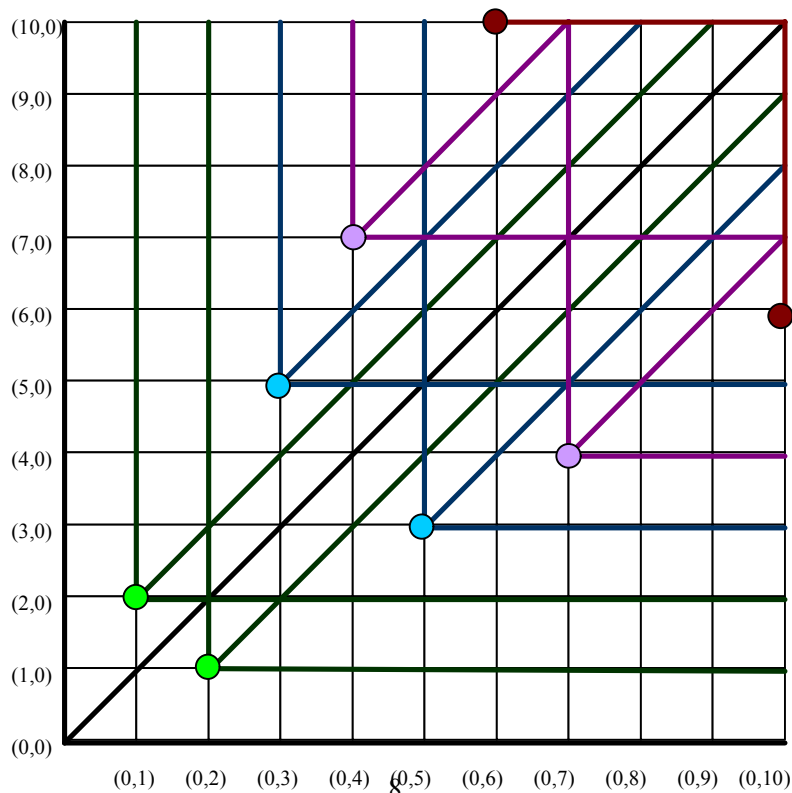
PS：【第一組】和【第二組】對稱。

第一個必勝點是由終點所慢慢推出來的，再慢慢的一個一個的延伸，最後發現必勝點的規律是

【 $(5n+2, 3n+1)$, $(5(n+1), 3(n+1))$: $n=0, 1, 2, \dots$ 】【第一組】

【 $(3n+1, 5n+2)$, $(3(n+1), 5(n+1))$: $n=0, 1, 2, \dots$ 】【第二組】

一覽表



四、 拈子棋的致勝規律

遊戲規則：

1. 可以往下面、左邊、和對角線和長方形的路徑走。
2. 不能往回走。
3. 可自行限制最多可走 k 步，但最少一定要走 1 步。

4. 先到終點的人勝。(後下者勝的通式是總步數： $\{(K+1)n : n \text{ 是任意正整數}\}$)

圖 1 是最多可以走 5 步的例子。綠色的點是起點，黃色的點是終點，先到終點的人會勝。

其它的顏色是必勝點。

4. 先到終點的人敗。(後下者勝的通式是總步數： $\{[(K+1)n+(K+3)] : n = \text{任何一個正整數}\}$)

圖 2 是最多可以走 5 步的例子。

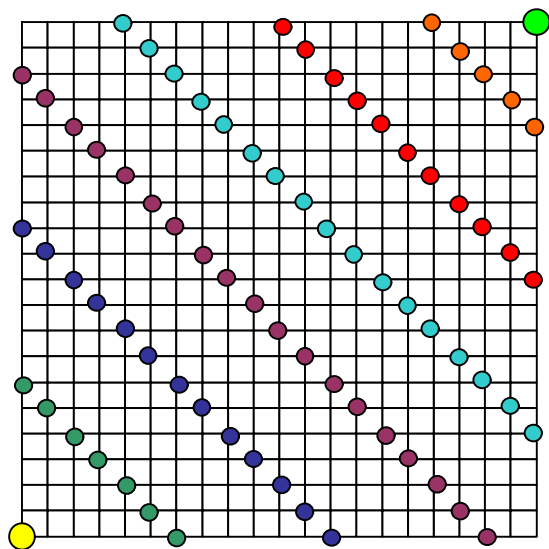


圖 1

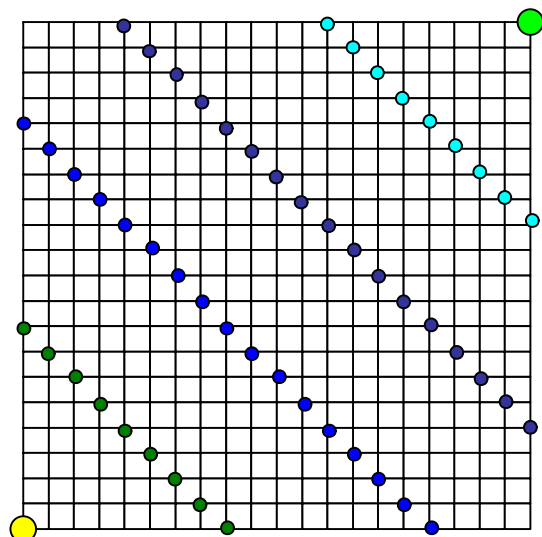


圖 2

五、 一倍棋之勝負結果

★：已到必勝點

二 步 棋			
	一	結論	
先下	1	先下者不能直接到終點，所以後下者會贏。	
後下	1		
四 步 棋			
	一	二	結論
先下	1	1	先下無法走兩步以上，走一步也為後下勝。
後下	1	1	
三 步 棋、五 步 棋、七 步 棋			
	一	結論	
先下	1	因是奇數，所以先下者只需下一步就贏了。	
後下	1		
六 步 棋			
	一	結論	
先下	2★	因為四步棋後下者會勝，所以只要先下者直接往左下，後下者就變成四步棋的先下者，但因步數限制，後下者又不能直接到終點，所以先下者會勝。	
後下			
八 步 棋			
	一	二	結論
先下	2	★	無論先下者如何下，後下者都可以在第二輪之前下到六步棋起點，使先下者成為六步棋的先下者，因為六步棋為後下者勝，所以八步棋是後下者勝。
後下	2		
九 步 棋 ~ 十 五 步 棋			
	一	結論	
先下	★	因為八步棋後下者會勝，所以只要先下者可以直接往左下，下到八步棋的起點，後下者就變成八步棋的先下者，但因步數限制，又不能直接到終點，所以先下者會勝。	
後下			
十 六 步 棋			
	一	結論	
先下	1 至 7	先下者若下 1 至 7 步，會成為十步棋至十五步棋的後下者，九步棋至十五步棋先下者會贏，為後下者勝。	
後下	★		

去除下面棋盤，六十四步以內其餘的棋盤為先下者勝

棋名	勝者	棋名	勝者
二步棋	後下	十六步棋	後下
四步棋	後下	三十二步棋	後下
八步棋	後下	六十四步棋	後下

六、 兩倍棋之勝負結果分析紀錄表

★：已到必勝點

二 步 棋				
	一	結論		
先下	1	先下者不能直接到終點，所以後下者會贏。		
後下	1			
三 步 棋				
	一	結論		
先下	1	無論先下者如何下，後下者都可以在第二輪以前下到終點。所以後下者會勝		
後下	2			
四 步 棋				
	一	二	結論	
先下	1	1	因為三步棋後下者會勝，所以只要先下者往左下一步，後下者就會變成三步棋的先下者，但又不能直接到達終點，所以先下者會勝。	
後下	2			
五 步 棋				
	一	二	結論	
先下	1	1	無論先下者怎麼下，後下者都可以直接下到終點、或下到三步棋起點，使先下者成為三步棋的後下者，因為三步棋後下者會勝，所以五步棋後下者會勝。	
後下	1	2		
六 步 棋 & 七 步 棋				
	一	結論		
先下	★	因為五步棋後下者會勝，所以只要先下者直接往左下，後下者就變成五步棋的先下者，但因步數限制，又不能直接到終點，所以先下者會勝。		
後下				
八 步 棋				
	一	二	三	結論
先下	2	1	1	無論先下者如何下，後下者都可以在第三輪之前下到五步棋起點，使先下者成為五步棋的先下者，因為五步棋為後下者勝，所以八步棋是後下者勝。
後下	1	1	2	
先下	1	1	1	
後下	2	1	2	
九 步 棋 ~ 十 一 步 棋				
	一	結論		
先下	★	因為八步棋後下者會勝，所以只要先下者可以直接往左下，下到八步棋的起點，後下者就變成八步棋的先下者，但因步數限制，又不能直接到終點，所以先下者會勝。		
後下				
十 二 步 棋				
	一	二	結論	
先下	1	1★	因為八步棋後下者會勝，但是如果十二步棋直接往左下，下到八步棋起點，那後下者可以直接到達終點；不過如果先下者只下一步，那後下者就會變成十一步棋的先下者，但是卻因步數限制，不能到八步棋起點，所以先下者會勝。	
後下	2			

十三步棋					
	一	二	結論		
先下	1	2	因為八步棋是先下者勝，可是十三步棋如果往左下，直接下到八步棋起點的話，後下者可以直接到終點；而先下者無論如何下，都會重複九步棋～十二步棋的狀況，而且因步數限制，不能到八步棋起點，也就是先下者最後會變成八步棋的先下者，所以後下者會勝。		
後下	1	1★			
先下	2				
後下	3★				
先下	3				
後下	2★				
十四步棋～十九步棋					
	一	結論			
先下	★	因為十三步棋是後下者勝，所以只要先下者往左下，下到十三步棋起點，後下者就會變成十三步棋的先下者，也就是說先下者會勝。			
後下					
二十步棋					
	一	二	三	四	結論
先下	1	1	1	2★	因為十三步棋是後下者會勝，但是如果二十步棋直接往左下，下到十三步棋起點，那後下者可以直接到達終點；不過如果先下者只下一步，那後下者就會變成十九步棋的先下者，但是卻因步數限制，不能到十三步棋起點，所以先下者會勝。
後下	1	1	1		
先下	1	3★			
後下	2				
二十一步棋					
	一	二	三	四	結論
先下	1	1	1	1	因為十三步棋是先下者勝，可是二十一步棋如果往左下，直接下到十三步棋起點的話，後下者可以直接到終點；而先下者無論如何下，都會重複十四步棋～二十步棋的狀況，而且因為步數限制的關係，無法下到十三步棋的起點，到最後先下者會變成十三步棋的先下者，所以後下者會勝。但若先下者下三步以上，後下者便可以直接下到必勝點，所以還是後下者勝。
後下	1	1	1	2★	
先下	2	1	1		
後下	1	1	2★		
先下	3				
後下	5★				

勝者統計表

棋名	勝者	棋名	勝者
二步棋	後下	八步棋	後下
三步棋	後下	九步棋	先下
四步棋	先下	十步棋	先下
五步棋	後下	十一步棋	先下
六步棋	先下	十二步棋	先下
七步棋	先下	十三步棋	後下

七、 三倍棋之勝負結果分析紀錄表

★：已到必勝點

二 ~ 四 步 棋			
	一	結論	
先下	1	先下者不能直接到終點，所以後下者會贏。	
後下	1~3		
五 步 棋			
	一	結論	
先下	1	先下走一步，後下無法走一至四步，也為先下勝。	
後下	1		
六 步 棋			
	一	結論	
先下	1	先下走一步，後下成五步棋先下者，五步棋為先下勝，為後下勝。	
後下	★		
七 步 棋			
	一	結論	
先下	1★	因為六步棋後下者會勝，所以只要先下者直接往左下，後下者就變成六步棋的先下者，但因步數限制，後下者又不能直接到終點，所以先下者會勝。	
後下			
八 步 棋			
	一	結論	
先下	1	先下最多走一步，後下者即成七步棋先下者，七步棋為先下勝，為後下勝。所以八步棋是後下者勝。	
後下	1★		
九 步 棋 ~ 十 步 棋			
	一	結論	
先下	★	因為八步棋後下者會勝，所以只要先下者可以直接往左下，下到八步棋的起點，後下者就變成八步棋的先下者，但因步數限制，又不能直接到終點，所以先下者會勝。	
後下			
十 一 步 棋			
	一	結論	
先下	2	2步成為九步棋的後下者，九步棋先下者會贏，為後下者勝。	
後下	★		
十 二 ~ 十 四 步 棋			
	一	二	結論
先下	1	1	因為十一歩棋後下者會勝，所以只要先下者可以直接往左下，下到十一歩棋的起點，後下者就變成十一歩棋的先下者，但因步數限制，又不能直接到終點，所以先下者會勝。
後下	1	1	

十 五 步 棋			
	一	結論	
先下	1	先下走 1 至 2 步，後下皆可成爲十一步棋後下者，十一步棋爲後下勝，爲後下者勝。	
後下	2★		
先下	2		
後下	1★		
先下	3 以上	3 步以上後下者即可直接走至終點，爲後下者勝。	
後下	★		
十 六 步 棋 ~ 十 九 步 棋			
	一	結論	
先下	★	因爲十五步棋是後下者勝，所以只要先下者往左下，下到十五步棋起點，後下者就會變成十五步棋的先下者，也就是說先下者會勝。	
後下			
二 十 步 棋			
	一	二	結論
先下	1	★	先下者先走一步，後下者最多只能走至 16 步棋起點，只需再走至 15 步棋起點，先下者就贏了!
後下	1~3		
二 十 一 步 棋			
	一	二	結論
先下	1	★	無論先下者如何下，後下者都可以在第三輪之前下到十五步棋起點，使先下者成爲十五步棋的先下者，因爲十五步棋爲後下者勝，所以二十一步棋是後下者勝。
後下	1~3		
先下	2~5		
後下	1~4		

勝者統計表

棋名	勝者	棋名	勝者
二步棋	後下	十二步棋	先下
三步棋	後下	十三步棋	先下
四步棋	後下	十四步棋	先下
五步棋	先下	十五步棋	後下
六步棋	後下	十六步棋	先下
七步棋	先下	十七步棋	先下
八步棋	後下	十八步棋	先下
九步棋	先下	十九步棋	先下
十步棋	先下	二十步棋	先下
十一步棋	後下	二十一步棋	後下

八、 依據上面同樣的法則我們可得出下面的雙方勝負統計表

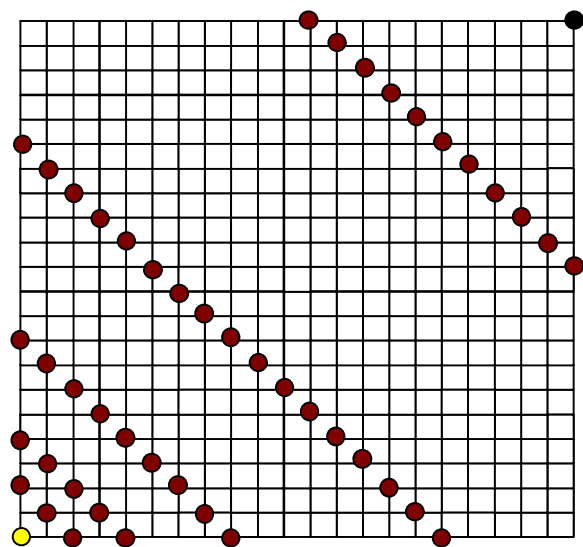
四倍棋之勝負結果

棋名	勝者	棋名	勝者
2 步棋	後下	12 步棋	後下
3 步棋	後下	15 步棋	後下
4 步棋	後下	18 步棋	後下
5 步棋	後下	22 步棋	後下
6 步棋	後下	照這樣推論	
8 步棋	後下	27 步棋	後下
10 步棋	後下	33 步棋	後下

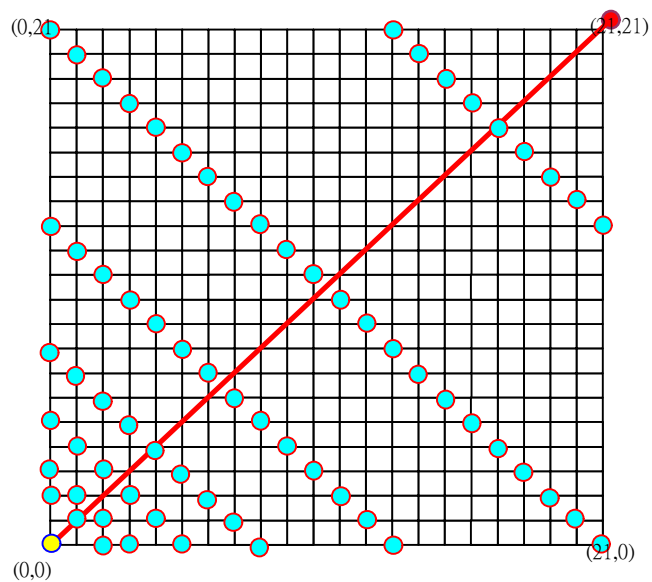
五倍棋之勝負結果

棋名	勝者	棋名	勝者
2 步棋	後下	12 步棋	後下
3 步棋	後下	15 步棋	後下
4 步棋	後下	19 步棋	後下
5 步棋	後下	24 步棋	後下
7 步棋	後下	照這樣推論	
9 步棋	後下	31 步棋	後下

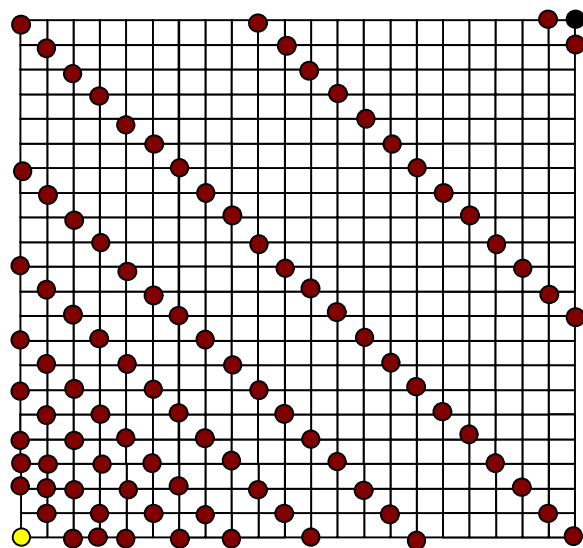
一倍棋後下者勝的必勝點分布圖



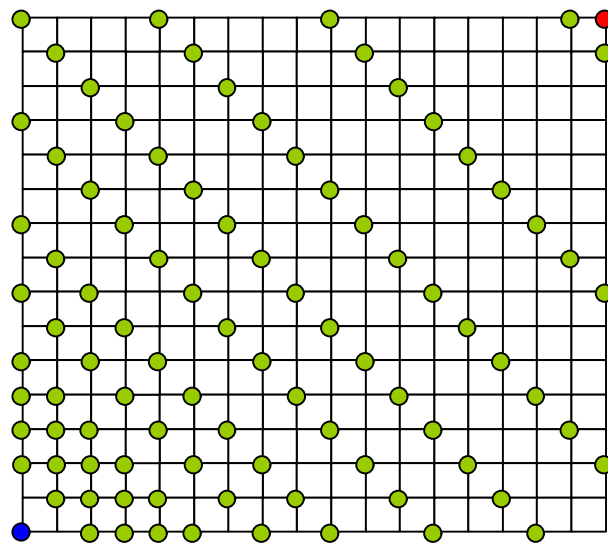
二倍棋後下者勝的必勝點分布圖



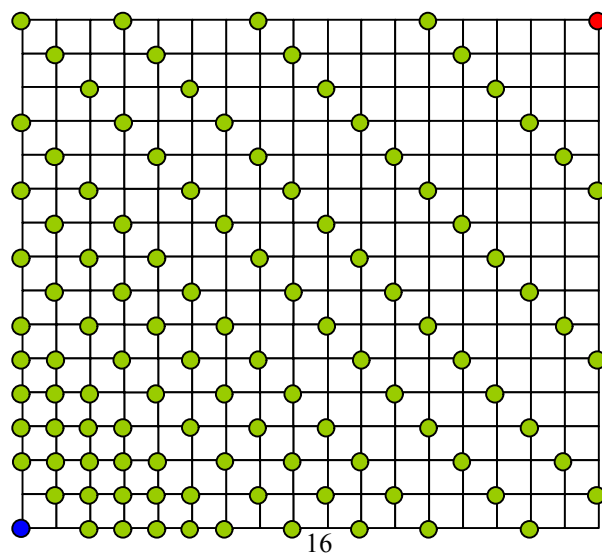
三倍棋後下者勝的必勝點分布圖



四倍棋後下者勝的必勝點分布圖



五倍棋後下者勝的必勝點分布圖



陸、 討論

一、 原型一子棋和拈子棋的探討

在完成原型一子棋和拈子棋後下者勝的圖譜及整理出必勝規律後，我們歸納出兩個後下者必勝數數列的影響因素：

1. 棋手的走法限制
2. 棋手可下步數的限制條件

原型一子棋深受影響因素 1 的作用，所以後下者往往因為起點位置及總步數的雙重影響下，以致必勝點的位置不多，雖然棋手起點所在位置可能總步數一樣，但是方位不同而使得雙方勝負關係隨之不同，但仍能以直接分析圖譜的方式，以規律的形式生成出後下者必勝數數列，並且以座標的形式紀錄。而我們從中也察覺到一子棋十分像拈遊戲，於是嚐試放寬棋手的走法限制，並融入拈遊戲的遊戲規則，在拈子棋的遊戲中我們發現隨著更改棋手可下步數的限制條件，整個拈子棋後下者勝的圖譜及必勝數數列也會依我們的想法隨著做規律的律動。由於這兩個影響因素致使我們藉由修改遊戲規則嚐試較複雜的新一子棋的遊戲，看看可否有其他不一樣的數列生成。

定義： (M,N) 型棋： M 代表後下者下的步數不能超過先下者的 M 倍； N 代表在 M 倍的條件下，總步數是 N 步的棋盤。

定義： $(M,Y(N))$ 型棋：代表是 M 倍棋之**後下者**必勝數列 Y 中第 N 個棋盤。

定義：泛費氏數列：一個數列是以數學式 $\{a_n = a_{n-1} + a_k; k = 1, 2, \dots, n-1\}$ 的方式生成稱之泛費氏數列，而 a_n 稱泛費氏數。

二、 $(2,N)$ 型棋的探討

1. 費氏數與 $(2,N)$ 型棋勝敗的關係

後下者必勝數列通式： $\{(2, a_n)$ 型棋： $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; n = 3, 4, \dots\}$

$(2,Y(N))$ 型棋棋盤都是後下者會勝！因為 $(2,Y(N))$ 型棋)無論先下者如何下，後下者都可以先到達前一個 $(2,Y(N-1))$ 型棋棋盤的起點，接著又可以再到前二個 $(2,Y(N-2))$ 型棋棋盤的起點……到最後後下者一定可以先到終點。如果先下者直接下到前一個 $(2,Y(N-1))$ 型棋棋盤的起點，因為步伐過大，後下者就可以直接下到終點，那

還是後下者勝。於是我們只要證明 $2a_{n-2} > a_{n-1}$ (即 $2a_{n-1} > a_n$) 就可以確定所有的 $(2, Y(N))$ 型棋棋盤都是後下者勝，因為先下者無法直接到終點。

算式：因為 $a_{n-1} > a_{n-2}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 2a_{n-1} - a_n \\ &= 2a_{n-1} - (a_{n-2} + a_{n-1}) \\ &= a_{n-1} - a_{n-2} > 0 \end{aligned}$$

2. 當棋盤總步數是兩個不連續的費氏數之和

如果出現這種狀況：兩個不連續的費氏數(例：13 步棋和 3 步棋)組合起來的棋盤就不是後下者勝。因為先下者可以直接下到 13 步棋起點，因為步伐不夠大，後下者又不可直接下到終點，所以先下者會勝。而我們怎麼證明這個結論一定是正確的呢？因為不是連續的兩個費氏數，較小數的 2 倍一定會小於較大數。

討論 case： $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3}$

因為 $a_{n-1} > a_{n-2} > a_{n-3}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 2a_{n-3} - a_{n-1} \\ &= 2a_{n-3} - (a_{n-2} + a_{n-3}) \\ &= a_{n-3} - a_{n-2} < 0 \end{aligned}$$

3. 非 $(2, Y(N))$ 型棋棋盤的先下者一定會勝

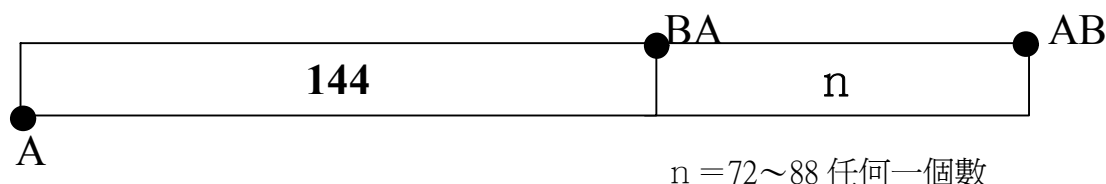
先以總步數 145~232 的棋盤為例，證明先下者會在這些棋盤上有必勝策略：
證明：

(1) 先下者可一次下至 $(2, 144(10))$ 型棋的情形

144 是費氏數，我們先假設總步數小於 144 步的棋盤在非 $(2, Y(N))$ 型棋棋盤上先下者有必勝策略，在 $(2, Y(N))$ 型棋棋盤上則是後下者有必勝策略。而 $144 \div 2 = 72$ $72 - 1 = 71$ ，所以在一個總步數大於 144 的棋盤中，我們知道 $145 (144+1) \sim 215 (144+71)$ 一定是先下者勝，因為先下者只要直接下到剩下 144 步的位置時就穩勝了，因為他踩到了費氏數的位置，而由於步數的限制，後下者並不能直接走到終點。先下者只要下超過 71 步後下者就可以直接到終點。

(2) 先下者不可一次下至 (2, 144(10)) 型棋的情形

而在總步數是 $216 (144+72) \sim 232 (144+88)$ 的棋盤上，由於總步數的增加，我們不能用上述的說法來套用，但是我們可以將此棋盤的步數分割成兩部份如下圖所示。



因為 $72 \sim 88$ 都是非費氏數，所以先下者從 AB 到 BA 的位置共走了 72 步 $\sim$ 88 步，由假設我們知道在這些非費氏數上，先下者有必勝策略，並且無須一次下到 AB 到 BA 這段長的終點（也就是 BA 的位置），所以不用擔心後下者可一次就到達 A 點。先下者先佔到 BA 點時又變成 BA $\sim$ A 這段的後下者，由先前的假設先下者會先到達 A 點，所以在總步數 $145 \sim 232$ 的棋盤中，在非 (2, Y(N)) 型棋棋盤上先下者有必勝策略。

★ 所有的非 (2, Y(N)) 型棋棋盤都可用以上的方法證明是先下者勝。

三、 (1, Y(N)) 型棋的探討

1. 後下者必勝步數的規律

(1, Y(N)) 型棋的後下者必勝數列通式： $\{(1, 2^n) : 2^n (n = \text{任何整數})\}$

任何一方都不可下單數步，否則另一方可成為單數棋之先下者(研究結果伍一五)。(1, 2^n) 型棋時先下者無論如何下，後下者皆可直接下到 ((1, 2^{n-1}) 型棋的起點，或是直接到終點。

2. (1, 2^N) 型棋和 (1, 2^n) 型棋組合成 (1, $2^N + 2^n$) 型棋時，後下者無必勝策略

雖然 (1, 2^N) 型棋和 (1, 2^n) 型棋都是後下者先到，但兩者的組合卻無相同結果，以 (1, $32 + 16$) 型棋為例即可說明。將 (1, $32 + 16$) 型棋分割成 (1, 32) 型棋和 (1, 16) 型棋。我們知道先下者可在 (1, 16) 型棋一次就到達終點，又會變成 (1, 32) 型棋的後下者，而且因為步數步不大，故不怕後下者也跟著一次到位，所以在 (1, $32 + 16$) 型棋後下者無必勝策略。

3. 非 $(1, 2^n)$ 型棋一定都是先下者勝

- (1) 若總步數為奇數：先下者下 1 步，後下者所能下的步數就被限定於 1 步，如此反覆，先下必勝。
- (2) 若總步數為偶數：因為後下者不可直接到終點，先下者可無顧慮的直接下到總步數最接近的 2^n ，即 $(1, 2^n)$ 型棋的起點。例如： $(1, 63)$ 。先下者可無顧慮的下到 $(1, 32(2^5))$ 因為只需下 31 步，後下者無法下到終點。

四、 $(3, Y(N))$ 型棋的探討

1. 後下者必勝步數的規律

後下者必勝數列通式： $\{(3, a_n) \text{ 型棋} : a_n = a_{n-1} + a_{n-4} ; n = 5, 6, \dots\}$

因為無論先下者如何下 $(3, a_n)$ 型棋，後下者皆可先至 $(3, a_{n-1})$ 型棋的起點，故後下者必勝。而如先下者直接下到 $(3, a_{n-1})$ 型棋的起點，由於步伐太大，因此後下者就可以直接到達終點。

2. $(3, a_N)$ 型棋和 $(3, a_n)$ 型棋組合成 $(3, a_N + a_n)$ 型棋時，後下者無必勝策略 ($n \neq N-4$)

- (1) 若 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k} ; k = 5, 6, \dots$:

因為 a_{n-5} 是 a_{n-k} 中最大的數，所以討論 a_{n-5} 即可。因為 a_{n-5} 和 a_{n-1} 相差 4 數，因此下面的討論改為 a_{n-4} 和 a_n ，結果是一樣的。

證明： $a_n - 3a_{n-4} > 0$

這裡使用數學歸納法證明。

◎假設 $n = 1, 2, \dots, k-2, k-1$ 項時， $a_n - 3a_{n-4}$ 都大於零。

當 $n = k$ 時；

$$\begin{aligned} & a_k - 3a_{k-4} \\ &= (a_{k-1} + a_{k-4}) - 3a_{k-4} \\ &= a_{k-1} - 2a_{k-4} \end{aligned}$$

$$> a_{k-1} - 3a_{k-5} \text{ (如果可以證得 } 3a_{k-5} > 2a_{k-4} \text{)}$$

$$> 0$$

$$\text{所以 } a_n - 3a_{n-4} > 0 \text{ (} n > 4 \text{)}$$

爲了要證明 $3a_{k-5} > 2a_{k-4}$ ，相當於需證明 $3a_{k-1} > 2a_k$ 。

所以後下者無法直接到終點。

引理： $3a_{k-1} > 2a_k$

這裡使用數學歸納法證明。

◎假設 $k=1, 2, \dots, j-2, j-1$ 項時， $3a_{k-1} > 2a_k$

當 $k=j$ 時；

$$3a_{j-1} - 2a_j$$

$$= (3a_{j-2} + 3a_{j-5}) - (2a_{j-1} + 2a_{j-4})$$

$$= (3a_{j-2} - 2a_{j-1}) + (3a_{j-5} - 2a_{j-4})$$

$$> 0 \text{ (} \because 3a_{j-2} - 2a_{j-1} > 0; 3a_{j-5} - 2a_{j-4} > 0 \text{)}$$

$$\text{所以 } 3a_{k-1} > 2a_k$$

由上述結果得知，當 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$ ； $k=5, 6, \dots$ 時，由於 $a_{n-1} > 3a_{n-5}$ 並且 $a_{n-5} > a_{n-k}$ ； $k=6, \dots$ 所以先下者可一次下到 $(3, a_{n-1})$ 型棋盤起點而 不怕步伐過大，又 $(3, a_{n-1})$ 型棋盤是後下者勝的棋盤，故 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$ ； $k=5, 6, \dots$ 的棋盤組合後下者是無必勝策略的。

(2) 若 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$ ； $k=1, 2, 3$ ：

雖然 $(3, a_{n-2})$ 型棋和 $(3, a_{n-3})$ 型棋 (或 $(3, a_{n-1})$ 型棋) 都是後下者必勝的棋盤，但是先下者可以無顧慮的直接下到 $(3, a_{n-1} + a_{n-4})$ 型棋的起點，而 不怕步伐過大，所以 $\{(3, a_{n-1} + a_{n-k}); k=1, 2, 3\}$ 型棋後下者是無必勝策略的。例如： $(3, 23(a_{8-1} + a_{8-3}))$ 先下者可以下到 $(3, 21(8))$ 因爲後下者無法直接到終點。

3. 非泛費氏數棋盤一定都是先下者勝

見 $(2, Y(N))$ 型棋的方式即可說明非泛費氏數棋盤一定都是先下者勝。

五、 (4,Y(N)) 型棋、(5,Y(N)) 型棋的探討

依據上面的討論我們可以依同樣的方式得到 (4,Y(N)) 型棋、(5,Y(N)) 型棋的結果。

1. 後下者必勝步數的規律

(4,Y(N)) 型棋後下者必勝數列通式： $\{(4, a_n) \text{ 型棋} : a_n = a_{n-1} + a_{n-6} ; n = 7, 8, \dots\}$

(5,Y(N)) 型棋後下者必勝數列通式： $\{(5, a_n) \text{ 型棋} : a_n = a_{n-1} + a_{n-8} ; n = 10, 11, \dots\}$

2. (4, a_N) 型棋和 (4, a_n) 型棋組合成 (4, a_N + a_n) 型棋時，後下者無必勝策略 (n ≠ N - 6)

原因和 (3,Y(N)) 型棋是一樣的。

3. (5, a_N) 型棋和 (5, a_n) 型棋組合成 (5, a_N + a_n) 型棋時，後下者無必勝策略 (n ≠ N - 8)

原因和 (3,Y(N)) 型棋是一樣的。

4. 非泛費氏數棋盤一定都是先下者勝

見 (2,Y(N)) 型棋的方式即可說明 (4,Y(N)) 型棋、(5,Y(N)) 型棋的非泛費氏數棋盤一定都是先下者勝。

六、 找出 (M,Y(N)) 型棋之數列生成法則

下表的黑色數字是表示 (1,Y(N)) 型棋 ~ (9,Y(N)) 型棋後下者勝的數列，藍色數字表示能以固定等差的泛費氏數組成後下者必勝數列通式的第一個數字，紅色數字表示相鄰黑色數字的差。

一倍	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32	64	64	128	128	256	256	512	512	1024	1024	2048	2048	4096	4096	8192	8192	16384	16384	(十四項)					
二倍	2	1	3	2	5	3	8	5	13	8	21	13	34	21	55	34	89	55	144	89	233	144	377	233	610	377	987	610	1597	987	2584	1597	(十六項)	
三倍	2	1	3	1	4	2	6	2	8	3	11	4	15	6	21	8	29	11	40	15	55	21	76	29	105	40	145	55	200	76	276	105	(十六項)	
四倍	2	1	3	1	4	1	5	2	7	2	9	3	12	3	15	4	19	5	24	7	31	9	40	12	52	15	67	19	86	24	110	31	141	40
五倍	2	1	3	1	4	1	5	1	6	2	8	2	10	2	12	3	15	3	18	4	22	5	27	6	33	8	41	10	51	12	63	15	78	18
六倍	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	2	9	2	11	2	13	3	16	3	19	4	23	4	27	5	32	6	38	7	45	8	53	9
七倍	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	2	10	2	12	2	14	2	16	3	19	3	22	4	26	4	30	5	35	5	40	6
八倍	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	2	11	2	13	2	15	2	17	3	20	3	23	3	26	4	30	4	34	5
九倍	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	1	10	2	12	2	14	2	16	2	18	2	20	3	23	3	26	3	29	4

一倍	32768 ₃₂₇₆₈ 65536(十六項)
二倍	4181 ₂₅₈₄ 6765 ₄₁₈₁ 9349(十九項)
三倍	381 ₁₄₅ 526 ₂₀₀ 726 ₂₇₆ 1002 ₃₈₁ 1383 ₅₂₆ 1909(二十項)
四倍	181 ₅₂ 233 ₆₇ 300 ₈₆ 386 ₁₁₀ 496 ₁₄₁ 637(二十項)
五倍	96 ₂₂ 118 ₂₇ 145 ₃₃ 178 ₄₁ 219 ₅₁ 270(二十項)
六倍	62 ₁₁ 73 ₁₃ 86 ₁₆ 102 ₁₉ 121 ₂₃ 144 ₂₇ 171 ₃₂ 203(二十二項)
七倍	46 ₇ 53 ₈ 61 ₁₀ 71 ₁₂ 83 ₁₄ 94 ₁₆ 110 ₁₉ 129 ₂₂ 151 ₂₆ 177 ₂₆ 203 ₃₀ 233 ₃₅ 268 ₄₀ 308(二十八項)
八倍	39 ₅ 44 ₆ 50 ₇ 57 ₈ 65 ₉ 74 ₁₁ 85 ₁₁ 96 ₁₃ 109 ₁₅ 124 ₁₇ 141 ₂₀ 161 ₂₃ 184 ₂₆ 210 ₃₀ 240 ₃₀ 270
九倍	33 ₄ 37 ₅ 42 ₅ 47 ₆ 53 ₆ 59 ₇ 66 ₈ 74 ₉ 83 ₁₀ 93 ₁₂ 105 ₁₂ 117 ₁₄ 131 ₁₆ 148 ₁₈ 166 ₂₀ 186

1. (M,N) 型棋的後下者必勝數列之規律

從前表可看出 (1,Y(N)) 型棋 $\sim$ (5,Y(N)) 型棋的後下者必勝數列並不是在前幾項就馬上出現規律，而每一列開始套用固定等差的通式產生規律的數字，我們以藍色數字表示。經過觀察，從藍色數字開始(包括它)，之後的泛費氏數都可以套用 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$ (k 是固定的) 的公式。以 (3,N) 型棋的後下者必勝數列 2 .1. 3 .1. 4 .2. 6 .2. ⑧ .3. 11 .4. 15 .6. 21 .8. 29... 為例說明：⑧ 是第一個可以套用必勝規律的數，在⑧ 之前的紅數 (差) 是 1.1.2.2. 是有重複的，而在⑧ 之後的紅數 (差) 是 3.4.6.8. 是沒有重複的。所以要找到這關鍵的藍色數字，可以觀察每一列的紅色數字，當出現的紅色數字不再重複時，也同時將藍色數字找出。

2. 找出 (M,N) 型棋之後下者必勝數列生成法則

透過觀察 (1,N) 型棋 $\sim$ (5,N) 型棋，我發現同一列數字，**倍數乘以紅色的數字** 一定會大於或等於前一個黑色數字，而這些**紅色數字** 一定都是曾在之前出現過的黑色數字，這些相同的性質引導我們找出 (M,N) 型棋之後下者必勝數列生成法則。

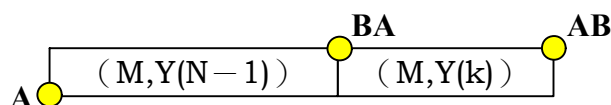
(M,Y(N)) 型棋之數列生成法則： $Y(N) = a_N = a_{N-1} + a_k$

而 a_k 的滿足條件： $a_k = \min\{a_i\}$ ， $1 \leq i < N-1$ 並且滿足 $M \times a_k \geq a_{N-1}$

條件 $M \times a_k \geq a_{N-1}$ 的產生原因是先下者無法一次走到 (M, Y(N-1)) 型棋的起點，因為當先下者一次走 a_k 步時，會因條件 $M \times a_k \geq a_{N-1}$ ，使得後下者會一次到達終點。而也因為如此， a_{k-1} 由於 $M \times a_{k-1} < a_{N-1}$ ，先下者可一次走到 (M, Y(N-1)) 型棋的起點而獲勝，所以當 $1 \leq i \leq k-1$ 時， a_i 不是我們要的紅色數字。

條件 $a_k = \min\{a_i\}$ ， $1 \leq i < N-1$ 的產生原因我們在討論：四—2—(2) 對於 (3,Y(N)) 型棋的分析即可充分說明。

如下圖，將 (M,Y(N)) 型棋拆解成 (M,Y(N-1)) 型棋及 (M,Y(k)) 型棋的組合，而 (M,Y(N-1)) 型棋及 (M,Y(k)) 型棋都是後下者勝的棋型，所以 (M,Y(N)) 型棋也會後下者勝。



3. (1,Y(N)) 型棋 ~ (5,Y(N)) 型棋可以套用通式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$; k 是固定的數

	一倍	二倍	三倍	四倍	五倍	六倍	七倍	八倍	九倍
藍色數字 出現位置	2	3	5	8	10	13	無	無	無

由上表可看出，從 (1,Y(N)) 型棋到 (6,Y(N)) 型棋，每一列的藍色數字出現並無規律可循，於是接下來的問題來了，會不會有某一個 (M,Y(N)) 型棋不會有藍色數字的出現？而這個答案是肯定的，以 (8,Y(N)) 型棋為例，紅色數列上數字雖然在某幾項停止重複，但是在第 24 項和第 32 項卻又開始有重複的項出現，即可得知並非所有 (M,Y(N)) 型棋生成的數列有固定規律的通式可套。由於 (1,Y(N)) 型棋 ~ (5,Y(N)) 型棋在討論二~討論四時，我們以繁複的證明推得 (M,Y(N)) 型棋生成的數列一定會產生藍色數字，可以套用通式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$; k 是固定的數。

柒、 結論

一、 由一子棋之變形，發現其路徑數個數呈費氏數增加

當我們觀察路徑數時，會發現費氏數列的蹤影：走到數字 1 有一種走法，走到數字 2 有 2 種走法，走到數字 3 有 3 種走法，走到數字 4 有 5 種走法……走到數字 S_n 有 $S_{n-1} + S_{n-2}$ 種走法。

二、 原型一子棋後下者必勝數列規律：

【 $(5n+2, 3n+1)$, $(5n, 3n)$: $n=0, 1, 2, \dots$ 】【第一組】

【 $(3n+1, 5n+2)$, $(3n, 5n)$: $n=0, 1, 2, \dots$ 】【第二組】

因為原型一子棋後下者必勝點的位置和座標方位有關，所以需要以座標的形式將數列呈現。我們也從研究中發覺正方形路徑的下法會會讓先下者佔優勢，若放寬為長方形路徑的下法，則和拈遊戲類似，而有創造拈子棋的想法。

三、 拈子棋後下者必勝數列規律：

先到終點的人勝：

後下者勝的數列通式是總步數： $\{(K+1)n : n \text{ 是任意正整數}\}$

先到終點的人敗：

後下者勝的數列通式是總步數： $\{[(K+1)n+(K+3)] : n=\text{任何一個正整數}\}$

從拈子棋中我們察覺到棋手所下步數的限制會影響勝負，這讓我們有了將倍數概念融入規則中的想法，看看會不會有有趣的數列產生。

四、 $(M, Y(N))$ 型棋後下者必勝數列規律：

研究過程中，我們驚訝的發現這種玩法中只要棋盤步數是泛費氏數那麼就會是後下者勝，若棋盤步數是非泛費氏數就會是先下者勝。

五、 規則：「後下者的步數不能超過先下者的 M 倍」是產生了泛費氏數列的主要原因

隨著限制倍數的增加，將原本較佔優勢的先下者的棋路限制的越多，於是後下者在棋譜上的必勝點個數也隨之增加。

六、 $(1, Y(N))$ 型棋 $\sim$ $(5, Y(N))$ 型棋所生成的數列只要藍色數字出現就可以套用通式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$ ； k 是固定的數

七、 $(M, Y(N))$ 型棋之泛費氏數列生成法則： $Y(N) = a_N = a_{N-1} + a_k$

而 a_k 的滿足條件： $a_k = \min\{a_i\}$ ， $1 \leq i < N-1$ 並且滿足 $M \times a_k \geq a_{N-1}$

八、 雖然一子棋是先下者較佔優勢的遊戲，但是我們如果藉由改變遊戲規則改變棋勢，是可以創造出許多令人意想不到的美麗數列。

捌、 參考資料及其他

一、 南一書局：國民小學數學第十一冊（六上），因數和倍數。修訂版。民國 94 年 6 月。

二、 南一書局：國民小學數學第十二冊（六下），座標。初版。民國 94 年 2 月。

三、 康軒出版：國民小學數學第九冊（五上），數列與圖形序列。修訂版。

民國 94 年 9 月。

四、 許志農。算數講義，兩則算數遊戲。取自：<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/arith.htm>

評語

080404 從一子棋體驗數列之律動

本作品是探討一子棋的變形，發現其路徑個數是費氏數增加，作者並發現拈棋、倍棋走法的規律，值得嘉勉，但作者對於符號的含意，未能說明清楚。