

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080401

月曆密碼大作戰

學校名稱： 澎湖縣馬公市東衛國民小學

作者：	指導老師：
小五 董仁和	呂聖景
小五 王文新	
小五 呂培誌	
小五 呂哲勳	

關 鍵 詞：等差數列、幾何圖形

月曆密碼大作戰

摘要

月曆上的數字會隨時間流逝，我們試圖觀察並展現出月曆中等差數列數字間的規律，並在月曆上畫出二維平面對稱幾何圖形找出變化規則，讓大家了解日曆數字的變化的規律過程，也讓學習的過程更為生動、多元有趣。

壹、研究動機

去年老師在教我們五年級上學期康軒數學「數列與圖形序列」這個單元時，老師爲了提高我們的學習興趣，補充課程談到日曆上的數字也是有規律的，他隨便舉了一個例子，引起我們的注意，我們都覺得很神奇，下課後我們跑去請教老師，當時老師雖然沒有告訴我們答案，可是他卻鼓勵我們自己去找其中的規律性，還提醒我們，除了這個方法之外，是不是還有其他的規律？因此，我們幾個好朋友便決定以這個月曆密碼作爲這次科展的研究主題。

貳、研究目的

- 一、在月曆中直行數列與橫行數列是否有規律存在？
- 二、在月曆中直行數列的總和是否有規律存在？
- 三、在月曆中框出一個 2×2 、 3×3 、 4×4 的方陣，在數字及其總和關係爲何？
- 四、在月曆中框出一個 2×2 、 3×3 、 4×4 的方陣，兩對角線有何規律？
- 五、改變排列形狀，在月曆中框出一個十字型與 H 型的圖形，在數字及其總和關係爲何？
- 六、在月曆中框出一個 2×2 、 3×3 、 4×4 的方陣，是否與去年科展結論（魔方陣）有關係？

參、研究設備及器材

- 一、95 年月曆一份。
- 二、利用電腦教室電腦軟體記錄與計算。
- 三、計算機。



圖一 實驗者正利用電腦紀錄與觀察



圖二 觀察不同的排列方式

肆、研究過程

一、直行數列與橫行數列是否有規律存在？

一月							二月							三月						
S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S
		1	2	3	4	5						1	2						1	2
6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	8	9	3	4	5	6	7	8	9
13	14	15	16	17	18	19	10	11	12	13	14	15	16	10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26	17	18	19	20	21	22	23	17	18	19	20	21	22	23
27	28	29	30	31			24	25	26	27	28			24	25	26	27	28	29	30
														31						
四月							五月							六月						
S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6				1	2	3	4							1
7	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	2	3	4	5	6	7	8
14	15	16	17	18	19	20	12	13	14	15	16	17	18	9	10	11	12	13	14	15
21	22	23	24	25	26	27	19	20	21	22	23	24	25	16	17	18	19	20	21	22
28	29	30					26	27	28	29	30	31		23	24	25	26	27	28	29
														30						
七月							八月							九月						
S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6					1	2	3	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21
21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	28
28	29	30	31				25	26	27	28	29	30	31	29	30					
十月							十一月							十二月						
S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S
		1	2	3	4	5						1	2	1	2	3	4	5	6	7
6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	8	9	8	9	10	11	12	13	14
13	14	15	16	17	18	19	10	11	12	13	14	15	16	15	16	17	18	19	20	21
20	21	22	23	24	25	26	17	18	19	20	21	22	23	22	23	24	25	26	27	28
27	28	29	30	31			24	25	26	27	28	29	30	29	30	31				

(一)「直行數列」的觀察:

數列: 1、8、15、22、29	總和: 75
數列: 2、9、16、23、30	總和: 80
數列: 3、10、17、24、31	總和: 85
數列: 4、11、18、25	總和: 58
數列: 5、12、19、26	總和: 62
數列: 6、13、20、27	總和: 66
數列: 7、14、21、28	總和: 70

規納上述觀察發現:

1. 每個數列的數字均相差 7，且數列中最大的數是 31。

2. 只有 1 或 2 或 3 開頭的數列才有可能擁有五個數字。

數列: 1、8、15、22、29

數列: 2、9、16、23、30

數列: 3、10、17、24、31

3. 而 4 或 5 或 6 或 7 開頭數列永遠只有擁有四的數字。

數列: 4、11、18、25 $25+7=32$ —> 不可能

數列: 5、12、19、26 $26+7=33$ —> 不可能

數列: 6、13、20、27 $27+7=34$ —> 不可能

數列: 7、14、21、28 $28+7=35$ —> 不可能

32.33.34.35 均大於每月最多 31 天

4. 五個數字的總和數列 75、80、85

數字遞增 5

數列: 1、8、15、22、29

總和: 75

數列: 2、9、16、23、30

總和: 80

數列: 3、10、17、24、31

總和: 85

四個數字的總和數列 46、50、54、58、62、66、70

數字遞增 4

數列: 1、8、15、22

總和: 46

數列: 2、9、16、23

總和: 50

數列: 3、10、17、24

總和: 54

數列: 4、11、18、25

總和: 58

數列: 5、12、19、26

總和: 62

數列: 6、13、20、27

總和: 66

數列: 7、14、21、28

總和: 70

(二)「橫行數列」的觀察：

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

規納上述觀察發現：

1. 數列中相鄰的數字均相差 1，且數列中最大的數是 31。

二、在月曆中框出一個 2x2、3x3、4x4 的方陣，在數字及其總和關係為何？

(一) 2x2 方陣之總和規律

S	M	T	W	T	F	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

1.

7	8
14	15

總和： $7+8+14+15=44$

7	$7+1$
$7+7$	$7+8$

總和： $7 \times 4 + (1+7+8)$
 $= 7 \times 4 + 16$
 $= 28 + 16$
 $= 44$

2.

18	19
25	26

總和： $18+19+25+26=88$

18	$18+1$
$18+7$	$18+8$

總和： $18 \times 4 + (1+7+8)$
 $= 18 \times 4 + 16$
 $= 72 + 16$
 $= 88$

4. 根據上例製表觀察

2x2 方陣數字	累加	四則運算	總合	關係
1、2 8、9	$1+2+8+9$	$1 \times 4 + (1+7+8)$	20	
2、3 9、10	$2+3+9+10$	$2 \times 4 + (1+7+8)$	24	總和差 4
3、4 10、11	$3+4+10+11$	$3 \times 4 + (1+7+8)$	28	總和差 4
4、5 11、12	$4+5+11+12$	$4 \times 4 + (1+7+8)$	32	總和差 4
5、6 12、13	$5+6+12+13$	$5 \times 4 + (1+7+8)$	36	總和差 4
6、7 13、14	$6+7+13+14$	$6 \times 4 + (1+7+8)$	40	總和差 4
7、8 14、15	$7+8+14+15$	$7 \times 4 + (1+7+8)$	44	總和差 4
8、9 15、16	$8+9+15+16$	$8 \times 4 + (1+7+8)$	48	總和差 4
9、10 16、17	$9+10+16+17$	$9 \times 4 + (1+7+8)$	52	總和差 4
10、11 17、18	$10+11+17+18$	$10 \times 4 + (1+7+8)$	56	總和差 4
11、12 18、19	$11+12+18+19$	$11 \times 4 + (1+7+8)$	60	總和差 4
12、13 19、20	$12+13+19+20$	$12 \times 4 + (1+7+8)$	64	總和差 4
13、14 20、21	$13+14+20+21$	$13 \times 4 + (1+7+8)$	68	總和差 4
14、15 21、22	$14+15+21+22$	$14 \times 4 + (1+7+8)$	72	總和差 4
15、16 22、23	$15+16+22+23$	$15 \times 4 + (1+7+8)$	76	總和差 4
16、17 23、24	$16+17+23+24$	$16 \times 4 + (1+7+8)$	80	總和差 4
17、18 24、25	$17+18+24+25$	$17 \times 4 + (1+7+8)$	84	總和差 4
18、19 25、26	$18+19+25+26$	$18 \times 4 + (1+7+8)$	88	總和差 4

19、20 26、27	$19+20+26+27$	$19 \times 4 + (1+7+8)$	92	總和差 4
20、21 27、28	$20+21+27+28$	$20 \times 4 + (1+7+8)$	96	總和差 4
21、22 28、29	$21+22+28+29$	$21 \times 4 + (1+7+8)$	100	總和差 4
22、23 29、30	$22+23+29+30$	$22 \times 4 + (1+7+8)$	104	總和差 4
23、24 30、31	$23+24+30+31$	$23 \times 4 + (1+7+8)$	108	總和差 4

歸納以上實驗：

- (1) 每一個 2×2 方陣為總和= 最小日期 $\times 4 + 16$
(2) 上一個方陣與下一個方陣總和之差為 4



(二) 3×3 方陣之總和規律

S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

1. 第一次觀察實驗

1	2	3
8	9	10
15	16	17

1	$1+1$	$1+2$
$1+7$	$1+8$	$1+9$
$1+14$	$1+15$	$1+16$

$$\begin{aligned} \text{總和：} & 1+2+3+8+9+10+15+16+17 \\ & = 81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{總和：} & 1 \times 9 + (1+2+7+8+9+14+15+16) \\ & = 81 \end{aligned}$$

2. 根據上例製表觀察

3x3 方陣數字	累加	四則運算 (對角線數列和 $\times n$)	總合	總和 差	關係
1 、 2 、 3 8 、 9 、 10 15 、 16 、 17	1+2+3+8+9+10+15+16+17	27 $\times$ 3	81	總和 差 9	9 $\times$ 9
2 、 3 、 4 9 、 10 、 11 16 、 17 、 18	2+3+4+9+10+11+16+17+18	30 $\times$ 3	90	總和 差 9	10 $\times$ 9
3 、 4 、 5 10 、 11 、 12 17 、 18 、 19	3+4+5+10+11+12+17+18+19	33 $\times$ 3	99	總和 差 9	11 $\times$ 9
4 、 5 、 6 11 、 12 、 13 18 、 19 、 20	4+5+6+11+12+13+18+19+20	36 $\times$ 3	108	總和 差 9	12 $\times$ 9
5 、 6 、 7 12 、 13 、 14 19 、 20 、 21	5+6+7+12+13+14+19+20+21	39 $\times$ 3	117	總和 差 9	13 $\times$ 9
6 、 7 、 8 13 、 14 、 15 20 、 21 、 22	6+7+8+13+14+15+20+21+22	42 $\times$ 3	126	總和 差 9	14 $\times$ 9
7 、 8 、 9 14 、 15 、 16 21 、 22 、 23	7+8+9+14+15+16+21+22+23	45 $\times$ 3	135	總和 差 9	15 $\times$ 9
8 、 9 、 10 15 、 16 、 17 22 、 23 、 24	8+9+10+15+16+17+22+23+24	48 $\times$ 3	144	總和 差 9	16 $\times$ 9
9 、 10 、 11 16 、 17 、 18 23 、 24 、 25	9+10+11+16+17+18+23+24+25	51 $\times$ 3	153	總和 差 9	17 $\times$ 9
10 、 11 、 12 17 、 18 、 19 24 、 25 、 26	10+11+12+17+18+19+24+25+26	54 $\times$ 3	162	總和 差 9	18 $\times$ 9

11、12、13 18、19、20 25、26、27	11+12+13+18+19+20+ 25+26+27	57×3	171	總和 差 9	19×9
12、13、14 19、20、21 26、27、28	12+13+14+19+20+21+ 26+27+28	60×3	180	總和 差 9	20×9
13、14、15 20、21、22 27、28、29	13+14+15+20+21+22+ 27+28+29	63×3	189	總和 差 9	21×9
14、15、16 21、22、23 28、29、30	14+15+16+21+22+23+ 28+29+30	66×3	198	總和 差 9	22×9
15、16、17 22、23、24 29、30、31	14+15+16+21+22+23+ 28+29+30+31	69×3	207	總和 差 9	23×9

歸納以上實驗：

(1) 每一個 3x3 方陣數字的總和差 9，剛好是 $3 \times 3 = 9$ 。經過我們仔細比較兩個相鄰的 3x3 方陣數字，發現兩 3x3 方陣同樣的一格數字均差 1，總共九格，故差 9。

1 (a)	2 (b)	3 (c)
8 (d)	9 (e)	10 (f)
15 (g)	16 (h)	17 (i)

2 (a)	3 (b)	4 (c)
9 (d)	10 (e)	11 (f)
16 (g)	17 (h)	18 (i)

- (a) 格 差 = $2 - 1 = 1$ (e) 格 差 = $10 - 9 = 1$ (i) 格 差 = $18 - 17 = 1$
(b) 格 差 = $3 - 2 = 1$ (g) 格 差 = $16 - 15 = 1$
(c) 格 差 = $4 - 3 = 1$ (h) 格 差 = $17 - 16 = 1$
(d) 格 差 = $9 - 8 = 1$ (f) 格 差 = $11 - 10 = 1$

(2) 「總和」剛好是「3x3 方陣」的「中間數」的九倍，故經過與老師的討論後我們發現可以改寫四則運算的寫法，更為簡便。

4	5	6
11	12	13
18	19	20

$$\begin{aligned} \text{總和} &: 4 + 5 + 6 + 11 + 12 + 13 + 18 + 19 + 20 \\ &= 108 \end{aligned}$$

12-8	12-7	12-6
12-1	12	12+1
12+6	12+7	12+8

$$\begin{aligned} \text{總和} &: 12 \times 9 + (1+6+7+8-8-7-6-1) \\ &= 108 + 0 \\ &= 108 \end{aligned}$$

(3) $\xrightarrow{\quad n \quad}$

$\downarrow n$

k	$K+1$	$K+2$
$K+7$	$K+8$	$K+9$
$K+14$	$K+15$	$K+16$

$n=3$

每一行：等差數列，差值是 1。

每一列：等差數列，差值是 1。

對角線：等差數列，差值為 8。(左上又下)。

等差數列，差值是 6。(右上左下)。

$$\begin{aligned}
 \text{總和} &: k + (K+1) + (K+2) + (K+7) + (K+8) \\
 &\quad + (K+9) + (K+14) + (K+15) + (K+16) \\
 &= 9k + 72 \\
 &= 3 \times (3k + 24) \\
 &= 3 \times 3 \times (k + 8)
 \end{aligned}$$

※ $(3k + 24)$ 即為 【陣列內對角線數字和】

※ $(k + 8)$ 即為 【陣列內的中間數】

※ 當為奇數方陣其總和 = (對角線的數列和) $\times n$ (方陣數) 或 $n \times n \times$ 中間數

(三) 4x4 方陣之總和規律

1. 第一次觀察實驗

S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

$$\text{總和} : 1 + 2 + 3 + 8 + 9 + 10 + 15 + 16 + 17 + 18 + 22 + 23 + 24 + 25 = 208$$

小結：我們發現在 4x4 方陣用這樣累加的算法實在太累人了，決定思考是否有更好的解決方案。經過兩天的討論與觀察，我們發現了比較好的算的方式。每一個 4x4 的方陣都包括 4 個 3x3 的方陣，所以可以利用 3x3 的方陣的結論（總和=中間數 $\times 9$ ）幫助我們把總和算出來。

2. 第二次觀察實驗

<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr></table>	1	2	3	4	8	9	10	11	15	16	17	18	22	23	24	25	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr></table>	1	2	3	4	8	9	10	11	15	16	17	18	22	23	24	25
1	2	3	4																														
8	9	10	11																														
15	16	17	18																														
22	23	24	25																														
1	2	3	4																														
8	9	10	11																														
15	16	17	18																														
22	23	24	25																														
總和： $9 \times 9 + (4 + 11 + 18 + 22 + 23 + 24 + 25) = 208$	總和： $10 \times 9 + (1 + 8 + 15 + 22 + 23 + 24 + 25) = 208$																																

<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr></table>	1	2	3	4	8	9	10	11	15	16	17	18	22	23	24	25	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr><tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr></table>	1	2	3	4	8	9	10	11	15	16	17	18	22	23	24	25
1	2	3	4																														
8	9	10	11																														
15	16	17	18																														
22	23	24	25																														
1	2	3	4																														
8	9	10	11																														
15	16	17	18																														
22	23	24	25																														
總和： 16x9 + (4 + 11 + 18 + 25 + 1 + 2 + 3) =208	總和： 17x9 + (1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 15 + 22) =208																																

小結：每一個 4x4 的方陣都包括 4 個 3x3 的方陣，其中以右下角的 3x3 的方陣的中間數最大，且所需加法的數字最小，所以我們選用此右下角的 3x3 的方陣來幫助我們計算總和。

3.第三次觀察實驗

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

總和： $(9+17) + (1+25) + (10+16) + (4+22) + (3+23) + (2+24) + (18+8) + (11+15)$
 $=26+26+26+26+26+26+26+26$
 $=26 \times 8$
 $=208$

小結：最後我們發現最簡單方法是：每一個 4x4 的方陣都可以使用上述第三次觀察實驗的方式找出成對的數字，共八組。最後 **總和 = 成對的數字和 × 八組**。

4.第四次觀察實驗

→ n

k	K+1	K+2	K+3
K+7	K+8	K+9	K+10
K+14	K+15	K+16	K+17
K+21	K+22	K+23	K+24

↓ n

n=4

每一行：等差數列，差值是 1。

每一列：等差數列，差值是 1。

對角線：等差數列，差值為 8。(左上又下)。

等差數列，差值是 6。(右上左下)。

$$\begin{aligned}
 \text{總和：} & k + (K+1) + (K+2) + (K+3) + (K+7) + (K+8) + (K+9) \\
 & + (K+10) + (K+14) + (K+15) + (K+16) + (K+17) + (K+21) \\
 & + (K+22) + (K+23) + (K+24) \\
 & = 16k + 192 \\
 & = 4 \times (4k + 48)
 \end{aligned}$$

方陣數

【陣列內對角線數字和】；

小結： 當為偶數方陣其總和 = (對角線的數字和) × n (方陣數)

4x4 方陣數字	4x4 方陣中 成對的數字	四則運算 成對的數字和 $\times 8$	四則運算 對角線數列和 $\times$ 方陣數	總合	關係
1、2、3、4 8、9、10、11 15、16、17、18 22、23、24、25	9+17=26	26 $\times$ 8	52 $\times$ 4	208	
2、3、4、5 9、10、11、12 16、17、18、19 23、24、25、26	10+18=28	28 $\times$ 8	56 $\times$ 4	224	總合 差 16
3、4、5、6 10、11、12、13 17、18、19、20 24、25、26、27	11+19=30	30 $\times$ 8	60 $\times$ 4	240	總合 差 16
4、5、6、7 11、12、13、14 18、19、20、21 25、26、27、28	12+20=32	32 $\times$ 8	64 $\times$ 4	256	總合 差 16
5、6、7、8 12、13、14、15 19、20、21、22 26、27、28、29	13+21=34	34 $\times$ 8	68 $\times$ 4	272	總合 差 16
6、7、8、9 13、14、15、16 20、21、22、23 27、28、29、30	14+22=36	36 $\times$ 8	72 $\times$ 4	288	總合 差 16
7、8、9、10 14、15、16、17 21、22、23、24 28、29、30、31	15+23=38	38 $\times$ 8	76 $\times$ 4	304	總合 差 16

歸納以上實驗：

- (1) 每一個 4x4 方陣數字的總和差 16，剛好是 $4 \times 4 = 16$ 。經過我們仔細比較兩個相鄰的 4x4 方陣數字，發現兩 4x4 方陣同樣的一格數字均差 1，總共十六格，故差 16。

(2) 每一個 4x4 的方陣都可以使用上述第三次觀察實驗的方式找出成對的數字，共八組。最後的總和 = 成對的數字和 × 八組。

(3) 當為偶數方陣其總和 = (對角線的數字和) × n (方陣數)

三、在月曆中框出一個 2x2、3x3、4x4 的方陣，兩對角線有何規律？

1. 2x2 方陣對角線的規律

2x2 方陣數字 A、B C、D	右上左下 (A+D)	左上右下 (B+C)	右上左下 (BxC)	左上右下 (AxD)	AxD + BxC	乘積和 規律 (上下差)	BxC - AxD	乘積差 規律 (上下差)
1、2 8、9	10	10	16	9	25		7	
2、3 9、10	12	12	27	20	47	22	7	0
3、4 10、11	14	14	40	33	73	26	7	0
4、5 11、12	16	16	55	48	103	30	7	0
5、6 12、13	18	18	72	65	137	34	7	0
6、7 13、14	20	20	91	84	175	38	7	0
7、8 14、15	22	22	112	105	217	42	7	0
8、9 15、16	24	24	135	128	263	46	7	0
9、10 16、17	26	26	160	153	313	50	7	0
10、11 17、18	28	28	187	180	367	54	7	0
11、12 18、19	30	30	216	209	425	58	7	0
12、13 19、20	32	32	247	240	487	62	7	0

13、14 20、21	34	34	280	273	553	66	7	0
14、15 21、22	36	36	315	308	623	70	7	0
15、16 22、23	38	38	352	345	697	74	7	0
16、17 23、24	40	40	391	384	775	78	7	0
17、18 24、25	42	42	432	425	857	82	7	0
18、19 25、26	44	44	475	468	943	86	7	0
19、20 26、27	46	46	520	513	1033	90	7	0
20、21 27、28	48	48	567	560	1127	94	7	0
21、22 28、29	50	50	616	609	1225	98	7	0
22、23 29、30	52	52	667	660	1327	102	7	0
23、24 30、31	54	54	720	713	1433	106	7	0

小結歸納：在觀察 2x2 方陣對角線的紀錄表中，我們可以發現

- (1) 右上左下對角線數字和【等於】(A+D) 左上右下對角線數字和 (B+C)。
- (2) 右上左下對角線－左上右下對角線的答案 ($A \times D - B \times C$) 永遠都是『7』。
- (3) 上一個方陣與下一個方陣其對角線乘積之差 ($A \times D + B \times C$) 以每次增加「4」的規律增加。

2. 3x3 方陣對角線的規律

3x3 方陣數字 A、B、C D、E、F G、H、I	右上左下 (C+E+G)	左上右下 (A+E+I)	右上左下 (C×E×G)	左上右下 (A×E×I)	C×E×G + A×E×I	乘積和 規律 (上下差)	C×E×G － A×E×I	乘積差 規律 (上下差)
1、2、3 8、9、10 15、16、17	27	27	405	153	558		252	

2 、 3 、 4 9 、 10 、 11 16 、 17 、 18	30	30	640	360	1000	442	280	28
3 、 4 、 5 10 、 11 、 12 17 、 18 、 19	33	33	935	627	1562	562	308	28
4 、 5 、 6 11 、 12 、 13 18 、 19 、 20	36	36	1296	960	2256	694	336	28
5 、 6 、 7 12 、 13 、 14 19 、 20 、 21	39	39	1729	1365	3094	838	364	28
6 、 7 、 8 13 、 14 、 15 20 、 21 、 22	42	42	2240	1848	4088	994	392	28
7 、 8 、 9 14 、 15 、 16 21 、 22 、 23	45	45	2835	2415	5250	1162	420	28
8 、 9 、 10 15 、 16 、 17 22 、 23 、 24	48	48	3520	3072	6592	1342	448	28
9 、 10 、 11 16 、 17 、 18 23 、 24 、 25	51	51	4301	3825	8126	1534	476	28
10 、 11 、 12 17 、 18 、 19 24 、 25 、 26	54	54	5184	4680	9864	1738	504	28
11 、 12 、 13 18 、 19 、 20 25 、 26 、 27	57	57	6175	5643	11818	1954	532	28
12 、 13 、 14 19 、 20 、 21 26 、 27 、 28	60	60	7280	6720	14000	2182	560	28
13 、 14 、 15 20 、 21 、 22 27 、 28 、 29	63	63	8505	7917	16422	2422	588	28
14 、 15 、 16 21 、 22 、 23 28 、 29 、 30	66	66	9856	9240	19096	2674	616	28

15、16、17 22、23、24 29、30、31	69	69	11339	10695	22034	2938	644	28
----------------------------------	----	----	-------	-------	-------	------	-----	----

小結：在觀察 3×3 方陣對角線的紀錄表中，我們可以發現

- (1) 右上左下對角線數字和 (C+E+G) **【等於】** 左上右下對角線數字和 (A+E+I)。
- (2) 右上左下對角線－左上右下對角線的答案 (C×E×G－A×E×I) 以**每次增加「28」**呈現規律。
- (3) 上一個方陣與下一個方陣其對角線**乘積和差** (C×E×G+A×E×I) 以**每次增加「120+12 的倍數」**的規律增加。

3. 4×4 方陣對角線的規律

4×4 方陣數字 A、B、C、D E、F、G、H I、J、K、L M、N、O、P	右上 左下 D+G+J+M	左上 右下 A+F+K+P	右上 左下 D×G×J×M	左上 右下 A×F×K×P	D×G×J×M + A×F×K×P	乘積和 規律 (上下 差)	D×G×J×M － A×F×K×P	乘積差 規律 (上下差)
1、2、3、4 8、9、10、11 15、16、17、18 22、23、24、25	52	52	14080	3825	17905		10255	
2、3、4、5 9、10、11、12 16、17、18、19 23、24、25、26	56	56	21505	9360	30865	12960	12145	1890
3、4、5、6 10、11、12、13 17、18、19、20 24、25、26、27	60	60	31104	16929	48033	17168	14175	2030
4、5、6、7 11、12、13、14 18、19、20、21 25、26、27、28	64	64	43225	26880	70105	22072	16345	2170
5、6、7、8 12、13、14、15 19、20、21、22 26、27、28、29	68	68	58240	39585	97825	27720	18655	2310

6、7、8、9 13、14、15、16 20、21、22、23 27、28、29、30	72	72	76545	55440	131985	34160	21105	2450
7、8、9、10 14、15、16、17 21、22、23、24 28、29、30、31	76	76	98560	74865	173425	41440	23695	2590

小結：在觀察 4x4 方陣對角線的紀錄表中，我們可以發現

- (1) 右上左下對角線數字和(D+G+J+M)【等於】左上右下對角線數字和(A+F+K+P)。
- (2) 計算上一個方陣與下一個方陣的差值($D \times G \times J \times M - A \times F \times K \times P$)發現兩者固定相差 140。
- (3) 計算上一個方陣與下一個方陣其對角線乘積和差($D \times G \times J \times M + A \times F \times K \times P$)沒有發現明顯的規律。

四、改變排列形狀，在月曆中框出一個十字型與 H 型的圖形，在數字及其總和關係為何？

經過兩三週的計算與紀錄，我們開始幻想要是每個圖型都有像 3x3 方陣如此有規律，總和是中間數的九倍，那該有多好！又簡單，又輕鬆。正當我們在碎碎念的時候，老師走進來，我們馬上跟老師提出我們的看法。沒想到老師竟然說也許有可能喔，我們一起找找看。於是我們又開啓了另一扇數學之門。

1.

12-8	12-7	12-6
12-1	12	12+1
12+6	12+7	12+8

觀察原來的 3x3 方陣，我們發現除了中間數以外，其他數字的變化是有規律的。上下左右是對稱的，跟我們最近學的對稱圖形很像。例如上方減七，下方就加七，這樣一來一往，就互相抵消了。最後，老師建議我們，把握這 3x3 方陣的規律，試試看在月曆上是否可以畫出具相同規律的圖形。經過討論後，我們畫出十字型、雙十字型、H 型。

S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

1.第一次觀察實驗

	8-7	
8-1	8	8+1
	8+7	

$$\begin{aligned}
 & 8 + (8-7) + (8+7) + (8-1) + (8+1) \\
 = & 8 + 8 - 7 + 8 + 7 + 8 - 1 + 8 + 1 \\
 = & 8 + 8 + 8 + 8 + 8 \\
 = & 8 \times 5 \\
 = & 40
 \end{aligned}$$

※ 十字型 總和 = 中間數 × 五倍

2.第二次觀察實驗

12-8		12-6
12-1	12	12+1
12+6		12+8

$$\begin{aligned}
 & 12 + (12-8) + (12+8) + (12-6) + (12+6) + (12-1) + (12+1) \\
 = & 12 + 12 - 8 + 12 + 8 + 12 - 6 + 12 + 6 + 12 - 1 + 12 + 1 \\
 = & 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 \\
 = & 12 \times 7 \\
 = & 84
 \end{aligned}$$

※ H型 總和 = 中間數 × 七倍

3.第三次觀察實驗

	17-8		17-6	
17-2	17-1	17	17+1	17+2
	17+6		17+8	

$$\begin{aligned}
 & 17 + (17-8) + (17+8) + (17-6) + (17+6) + (17+1) + (17-1) + (17+2) + (17-2) \\
 = & 17 + 17 - 8 + 17 + 8 + 17 - 6 + 17 + 6 + 17 + 1 + 17 - 1 + 17 + 2 + 17 - 2 \\
 = & 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17 \\
 = & 17 \times 9 \\
 = & 153
 \end{aligned}$$

※ 雙十字型 總和 = 中間數 × 九倍

五、在月曆中框出一個 3x3、4x4 的方陣，是否與去年科展結論（魔方陣）有關係？

（一）根據去年學長姐的科學展覽（魔術方陣）結論，我們知道構成魔術方陣有些必要的規律如下：

1. 是一個正方形的方陣。
2. 方陣內的數字一定是連續的數字。
4. 方陣內有固定的中間數。
3. 方陣內每一行、每一列及對角線有固定的數字和。

以中間數算出和數的舉例

矩陣	奇數矩陣		偶數矩陣	
	3 乘 3 矩陣 (1 到 9)	5 乘 5 矩陣 (1 到 25)	4 乘 4 矩陣 (1 到 16)	6 乘 6 矩陣 (1 到 36)
中間數	5	13	8、9	18、19
和數的 算式	$5 \times 3 = 15$	$13 \times 5 = 65$	$(8 + 9) \times 2 = 34$	$(18 + 19) \times 3 = 111$
說明	中間數乘以邊長		中間數相加，2 乘 2 矩陣中乘以 1，4 乘 4 矩陣中乘以 2，6 乘 6 矩陣中乘以 3，以此類推。	

（二）現在我們來比對月曆中的 3x3、4x4 的方陣：

1. 3x3 的方陣：

1	2	3
8	9	10
15	16	17

月曆中第一個 3x3 的方陣

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3x3 魔術方陣

- （1）方陣內的數字不符合魔術方陣是連續的數字
- （2）3x3 (1-9) 的魔術方陣中間數為 5，但月曆的第一個 3x3 的方陣的中間數是 9。
- （3）3x3 (1-9) 的魔術方陣每一行、每一列及對角線的和數均為 15，可是月曆中方陣每一行、每一列及對角線的和數沒有全部一樣。

小結: 如此看來，月曆中 3x3 的方陣並不是 3x3 魔術方陣的一種。

2. 4x4 的方陣：

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

月曆中第一個 4x4 的方陣

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4x4 魔術方陣

- (1) 方陣內的數字不符合魔術方陣是連續的數字
- (2) 4x4 (1-16) 的魔術方陣中間數為 8、9，但月曆的第一個 4x4 的方陣的中間數卻沒有。
- (3) 4x4 (1-16) 的魔術方陣每一行、每一列及對角線的和數均為 34，可是月曆中方陣每一行、每一列及對角線的和數沒有全部一樣。

小結: 如此看來，月曆中 4x4 的方陣也不是 4x4 魔術方陣的一種。

伍、研究結果

一、月曆中「直行數列」的規律：

- (一) 每個數列的數字均相差 7，且數列中最大的數是 31。
- (二) 只有 1 或 2 或 3 開頭的數列才有可能擁有五個數字，而 4 或 5 或 6 或 7 開頭數列永遠只有擁有四的數字。
- (三) 五個數字的總和數列 75、80、85 數字遞增 5 ；
四個數字的總和數列 46、50、54、58、62、66、70 數字遞增 4。

二、月曆中「橫行數列」的規律：數列的數字均相差 1，且數列中最大的數是 31。

三、每一個 2x2、3x3、4x4 的方陣，在數字及其總和關係如下：

- (一) 2x2 方陣總和 = 最小日期 $\times 4 + 16$ ；此外上一個方陣與下一個方陣總和之差為 4。
- (二) 3x3 方陣總和 = 中間數 $\times 9$ ；此外上一個方陣與下一個方陣總和之差為 9。
- (三) 4x4 方陣總和 = 成對的數字和 $\times 8$ 組；此外上一個方陣與下一個方陣總和之差為 16。

四、在月曆中框出一個 2x2、3x3、4x4 的方陣，兩對角線的規律如下：

- (一) 2x2、3x3、4x4 方陣兩條對角線總和相等
- (二)
 - 1. 2x2 方陣右上左下對角線－左上右下對角線的答案永遠都是『7』。
 - 2. 3x3 方陣右上左下對角線－左上右下對角線的答案每次增加「28」呈現

規律。

3. 4x4 方陣右上左下對角線－左上右下對角線的答案每次增加「140」的規律增加。

(三)

1. 2x2 方陣兩條對角線乘積之和之差以每次增加「4」的規律增加。

2. 3x3 方陣兩條對角線乘積之和之差以每次增加「120+12 的倍數」的規律增加。

3. 4x4 方陣兩條對角線乘積之和之差沒有發現明顯的規律

五、改變排列形狀，在月曆中框出一個十字型與 H 型的圖形，在數字及其總和關係如下：

(一) 十字型 總和 = 中間數 × 五倍

(二) H 型 總和 = 中間數 × 七倍

(三) 雙十字型 總和 = 中間數 × 九倍

六、在月曆中框出一個 3x3、4x4 的方陣，是否與去年科展結論（魔方陣）的關係

(一) 月曆中 3x3 的方陣並不是 3x3 魔方陣的一種

(二) 月曆中 4x4 的方陣並不是 3x3 魔方陣的一種

陸、討論與結論

一、月曆中的方陣每一行、每一列以及對角線都是等差數列。這樣的方陣其總和有固定的規律。『總和 = (對角線數列和) × n (方陣數)』；其中 n 是奇數的話，其總和更為精簡為『中間數 × n × n』。

二、找出圖形的規律公式此現象可與應用兩個下列兩種情形

(一) 請別人告訴我們總和，而我們可以說出日期來

(二) 別人告訴我最小日期、中間數、或最大日期其中之一，我們可以說出總和來。

三、如要改變形狀，而且可以具有規律的找出總和，此圖形在設計時最好有中間數且為對稱圖形。

四、月曆中的方陣並不是魔方陣的一種，此外去年學長姐的科學展中結論並沒有討論到 2x2 的魔方陣，經過我們的研究後發現並沒有 2 × 2 的魔方陣。因為魔方陣最少要滿足兩個條件一個是連續的數字；一個是每行、每列以及對角線的總和都一樣。我們發現假若滿足連續的數字，就沒辦法滿足總和都一樣；假若滿足總和都一樣，那只有一種可能就是四個數字都一樣，但此方陣卻不是連續的數字。所以沒有 2 × 2 的魔方陣。

五、在研究的過程中我們思考到一個問題日期與星期是不是有規律呢？再詢問老師後，老師告訴我們那是屬於萬年曆的研究範圍，我們想下次我們就可以研究這個主題。

柒、參考資料及其他

- (1) Brian Bolt 編著 林傑斌 譯 (民 85)。數學遊樂園之趣味盎然。台北：牛頓。
- (2) 李國賢 編著 (民 92)。趣味數學魔方陣。台北：林鬱文化
- (3) 呂明錚 蔡玖玖 編著 (民 94)。鐵口直斷，神機妙算。澎湖東衛國小：94 科展

評語

080401 月曆密碼大作戰

本件作品是探討在月曆上找到的一些規律性，作者能回答數字間的倍數關係。但在參考資料方面卻告知老師所搜集到的，也無法說明該資料的內容，實很可惜。