中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

# 高中組　數學科

# 最佳團隊合作獎

040419

# 長方體中切割正立方體之研究

學校名稱： 國立嘉義高級中學



| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 林正倫 | 馮蘋 |
| 高二 吳培綸 | |



關 鍵 詞：矩形分割、長方體分割、四角分割

# ON THE STUDY OF DISSECTION OF CUBES FROM CUBOIDS


## Abstract:

In 1940's, Bouwkamp proposed the study of dissecting squares from rectangles. Among the study, the problem of the least number of dissected squares has been open for decades.

In this project, we first propose a corner dissection method, associated with the famous Euclidean algorithm. By reducing nearly three fourths of the number dissected by the primitive Euclidian algorithm, our method indeed establish a suitable upper bound of the minimal number of dissected squares from the given rectangles

Meanwhile, the Euclidean algorithm has also been considered to dissect the cubes from cuboids. We analyze the fundamental properties of the method and establish a prototype of upper bound function for the minimal number of dissected cubes. Moreover, the method of corner dissection has also been implemented for some cuboids, which also exhibits the acceptable improvement being a suitable upper bound.



**Keywords:** **Corner dissection, Rectangles dissection, Cuboids dissection.**



## 摘要：

在 1940 年代，Bouwkamp 提出一系列有關如何將矩形切割成若干個正方形的研究報告，但是如何找出正方形個數最少的方法仍是長久以來懸而未決的問題。

在本研究報告中，首先引進「四角切割」的方法，並結合輾轉相除法的概念，來研究矩形的切割問題。我們的方法能大幅度降低正方形的個數，也適合做爲此問題的上界函數。

有關如何在長方體中切割出正立方體的組合，我們也將輾轉相除法的概念延伸到三維空間，進而建立所切割出最少個正立體數的一個上界模式。此外，藉由四角切割概念的延伸，我們也發現這個上界亦可再予修正。



**關鍵詞：** 四角分割、矩形分割、長方體分割

# 壹、研究動機

在九十一年第一次國中學力測驗的題目中，有一道題目如下：

***『<u>小方</u>拿了一張長 80 公分、寬 50 公分的紙張，剛好剪出 n 個正方形（其面積大小可以不相同）。請問 n 的<u>最小值</u>是多少？(A) 3 (B) 5(C) 10(D) 40。』***

當初老師將這個題目交給我們時，覺得非常有趣，認為可以深入研究。這個題目的內容在於尋找平面圖形中，如何每次切割出邊長為最大的正方形，且正方形個數是最少的方法。於是我們找了幾個同學，想共同討論出這個問題的解法。除此之外，我們覺得這個題目很有發展性，能否更深入研究呢？我們當場想到幾個方向，例如：

（一）對於邊長為任意整數的矩形，能否找出切割正方形個數最少的方法，但每次切割的正方形都是最大的？

（二）對於二維空間這些切割後的結果，是否能用數學的方法說明？

（三）對於邊長為任意正整數的長方體，能否找出切割正方體個數最少的方法？

（四）對於長方體切割後的結果，能否用數學的方法說明之？

（五）對於二維空間和三維空間中圖形之間，是否有相關的性質可以加以討論?

想到這幾點，難度似乎頗高，但更激發出我們的鬥志和挑戰心，在老師的大力支持下，我們決定用『**長方體中切割正立方體之研究**』來做為我們的研究主題。

在 1940 年代，Bouwkamp 提出一系列有關如何將矩形切割成若干個正方形的研究報告[1]-[3]。在這些文獻中，Bouwkamp 討論了能切割出的正方形的個數，以及是否能切割出大小不同的正方形等問題。

若$(m, n)$以表示二邊分別為 $m$ 和 $n$ 的矩形，其中 $m$、$n$ 為自然數，並且以 $f(m,n)$ 表示所切割出正方形的最少個數，那麼 $f(m, n)$確實構成一個函數，並且滿足下列幾個性質[4]：

**f-1.** $f(m, n) = f(n, m)$；

**f-2.** $f(mk, nk) \le f(m, n)$；

**f-3.** $f(1, n) = n$，$f(2, 2n+1) = n+2$， $f(2,2n) = n$， $f(n, n) = 1$；

**f-4.** $f(a+b, n) \le f(a, n) + f(b, n)$；

**f-5.** $f(kn, k) = n$。

然而，除了少數的情形下，例如性質 f-3、f-5 等，如何以代數式來表示 $f(m, n)$，或找出 $f(m, n)$ 的適當上界函數仍是長久以來懸而未決的問題。

Bouwkamp 也曾提出每次所切割出的正方形應為矩形中面積最大的方法，這使得每次的

切割都能在矩形上進行。若以$F(m,n)$表示這種切割法所得到正方形的個數，$F(m,n)$也有下列的性質：

**F-1.** $F(m,n)=F(n,m)$。

**F-2.** $F(n,1)=n$，$F(2n+1,2)=n+2$，$F(n,n)=1$。

**F-3.** $F(km,k)=m$，$F(km,kn)=F(m,n)$。

**F-4.** $F(m+1,m)=m+1$。

**F-5.** $F(m,km+1)=F(m,km)+F(m,1)=k+m$。

**F-6.** $F(m,n)=F(m,m-n)$，其中$m>n$。

事實上，$F(m,n)$的值就是利用輾轉相除法求$m$和 $n$的最大公因數的過程中，所有商數的總和。雖然目前尚無法完全以代數式來表示$F(m,n)$這個函數，但這仍是一種具有系統化的切割方法。例如：

**F-7** $F(m,km+\ell)=F(m,km)+F(m,\ell)=k+F(m,\ell)$，其中$1\le\ell\le m-1$。

此外，我們也可以將$F(m,n)$看成是$f(m,n)$的一個上界函數，其中$f(m,n)$和$F(m,n)$之間有下列的關係[6]：

**C-1** $f(m,n)\le F(m,n)\le mn$。

**C-2** $f(m,n)=F(m,n)$，其中 $\min\{m,n\}\le 4$。

**C-3** $f(m,m+1)<F(m,m+1)$，其中 $m\ge 5$。

**C-4** $f(m,m+2)<F(m,m+2)$，其中 $m\ge 10$。

**C-5** $f(m,km\pm 1)<F(m,km\pm 1)$，其中 $m\ge 6, k\ge 2$。

**C-6** $f(m,km\pm 2)<F(m,km\pm 2)$，其中 $m\ge 12, k\ge 2$。

對$m$和 $n$較小的矩形而言，由性質 C-2，我們看到$F(m,n)$和$f(m,n)$相等，或者相當接近，例如: $F(5,6)=6$，$f(5,6)\le 5$。然而對$m$和 $n$較大的矩形而言，$F(m,n)$和$f(m,n)$之間可能就有較大的差距，例如:

$$F(155,156)=F(155,155)+F(155,1)=1+155=156，$$

而$f(155,156)\le 44$。在這個例子中，我們觀察到，第一次切割後所留下的是一個 155×1 細長的矩形。也就是說，對兩邊長相近的矩形而言，第一次切割後所留下的通常是細長的矩形，導致所能切割出的僅是較小的正方形，也因此大幅增加正方形的個數。就應用的層面而言，如積體電路的布局、晶圓切割[5]等，所留下是細長的矩形可能無法被充份的使用，這引發了我們對矩形切割進行再探討的想法，希望能尋找出$f(m,n)$的另一個較合理的上界。

此外，如果將矩形的切割延伸到三維空間，那麼如何在一個長方體的空間中切割出若干

個正立方體的組合，更是倉儲、立體的積體電路布局等方面值得探討的問題。相較於在矩形上進行切割，在長方體中進行的複雜度顯然來的更高。雖然在應用的層面中，如何切出最少個正立方體或許不是最主要的想法，我們仍以儘可能切割出較少個正立方體爲研究的架構。也就是說，若以$(m,n,\ell)$表示三邊分別爲 $m$、$n$ 和$\ell$的長方體，並且以 $f(m,n,\ell)$表示在這個長方體所切出的最少個正立方體的個數，我們希望先將矩形的輾轉相除切割的概念延伸到長方體，來構造出一個函數$F(m,n,\ell)$，使其滿足

$$f(m,n,\ell)\le F(m,n,\ell)\le mn\ell ，$$

並研究相關的性質。

# 貳、研究方法

## 2.1. 矩形切割的再探討

由前面的性質 F-3 和 F-5，我們觀察到：對 $m$ 和 $n$ 差距大或呈倍數關係的矩形而言，$F(m,n)$遠小於 $mn$，例如：

$$F(100,100a)=a<10000\times a；$$

$$F(a,100a+1)=F(a,100a)+F(1,a)=100+a<(100a+1)\,a。\tag{1}$$

因此，輾轉相除切割法確實能有效的降低正方形的個數。然而在(1)式中，我們也觀察到$F(1,a)$所對應的通常是一個細長的矩形。若想降低正方形的個數，就應儘量減少邊長較小的正方形，以 $m$=13，$n$=14 的矩形爲例，

$$F(13,14)=F(13,13)+F(1,13)=1+13=14 ，$$

然而，如下圖：

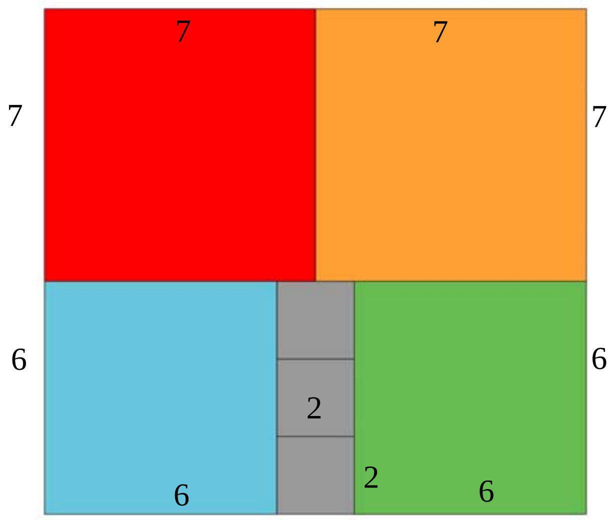


圖 2-1

所切割出的正方形只有 7 個，其中邊長爲 2 的只有 3 個，而且無邊長爲 1 的正方形。換句話說，對兩邊長較爲接近的矩形而言，倘若能先在矩形的四個角落切割出 4 個適當的大正方形，就有可能降低小正方形(邊長爲 1 或 2 等)的個數，其中這四個大正方形的大小相當接近，我們稱這樣的方法爲**四角切割法(Corner dissection)**。

對於兩邊長皆爲奇數的矩形而言，當在各角落分別切割出一個正方形後，所剩下的可能是一個 L 形區域。以 $m$=11，$n$=13 的矩形爲例，如圖 2-2，在四個角落分別切割出邊長分別爲 7、6、5 和 4 的正方形後，剩下的 L 型區域的邊長依序(逆時針方向)爲 1、1、5、4、4 和 3。如果切割出邊長爲 1 的黃色正方形區域後，剩下的就是(4, 4)這個正方形。

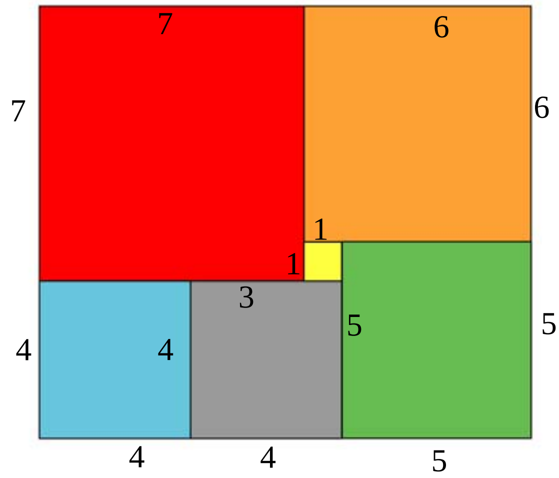


圖 2-2

爲方便起見，我們以$(1,1,5,4,4,3)$來表示形如圖 2-4 的 L 型區域。因此，如何在這種 L 形區域進行切割，將是四角切割法的另一個重要課題。

再者，對細長型的矩形來說，若先對四個角落切割後，所剩下可能是個十字形的區域，很顯然的，我們應先將十字型區域分割成若干個矩形後，才能再進行切割，這將大幅增加切割的複雜度。因此，如何克服此類的困擾，亦將是四角切割法的重要課題。

## 2.2. 長方體的切割

至於長方體的切割方法，我們將輾轉相除的概念擴展到三維，也就是從長方體$(m,n,\ell)$中切割出其所包含的最大的正立方體，並以$F(m,n,\ell)$表示所切出正立方體的個數。以$(m,m,\ell)$爲例，其中$m<\ell$，第一次切割出的正立方體其邊長爲 $m$，而留下的是$(m,m,\ell-m)$這個長方體，因此，我們觀察到：

$$F(m,m,\ell)=F(m,m,m)+F(m,m,\ell-m)\text{。}$$

例如：(5, 5, 6)可以分割成一個邊長爲 5 的正立方體和一個(5, 5, 1)的長方體。

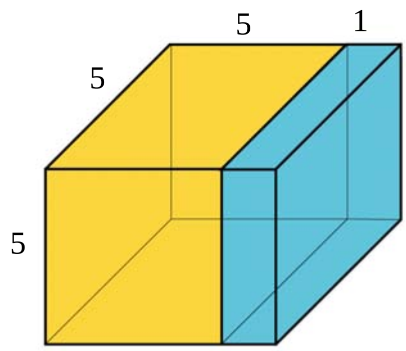


圖 2-3

也就是說，$F(5,5,6)=F(5,5,5)+F(5,5,1)$。

但是當$m<n<\ell$時，先切出一個$(m,m,m)$這個正立方體後，所留下的通常是一個如下圖的 L 型立方體：

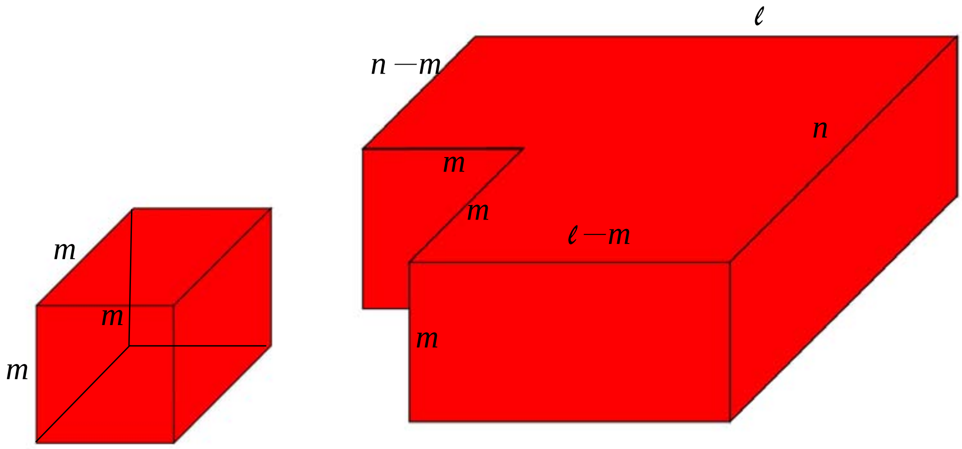


圖 2-4

爲方便起見，我們以$(m,n-m,n,\ell,\ell-m,m;m)$來表示形如圖 2-4 的 L 型立方體。由於這個 L 型立方體可看成是

(1) $(m,\ell-m,n)$和$(m,n-m,m)$兩個長方體的組合；

(2) $(m,\ell-m,m)$和$(m,n-m,\ell)$兩個長方體的組合；或

(3) $(m,\ell-m,m)$、$(m,n-m,\ell-m)$和$(m,n-m,m)$三個長方體的組合。

這使得切割方法顯得更複雜。基於降低所能切割出正立方體個數的考量，我們必須在上述三種組合尋找出切出的個數最少的方法，並且以$L(m,\ell-m,n,\ell,n-m,m;m)$表示這種 L 型柱體所切割出正立方體的個數，也就是說，

$$F(m,n,\ell)=F(m,m,m)+L\left(m,\ell-m,n,\ell,n-m,m;m\right)。$$

以(3,2,4,5,1,3;3)這個 L 型柱體爲例，我們只有下列兩種分割的組合：

(1)

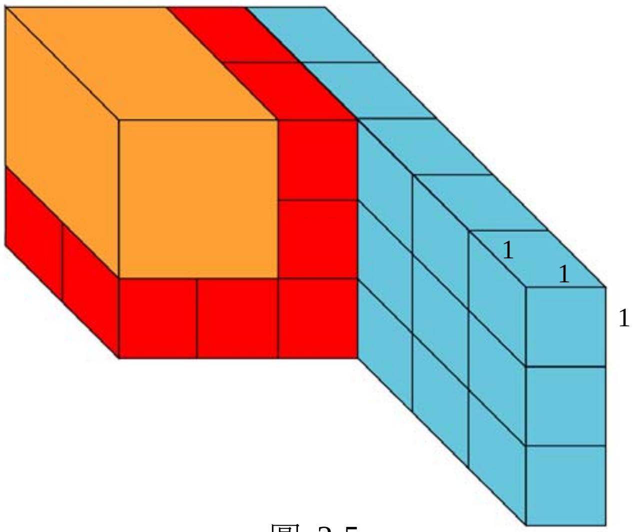


圖 2-5

(2)

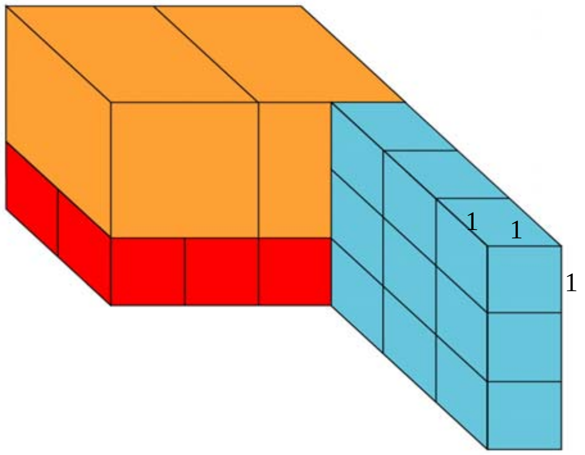


圖 2-6

其中，組合(1)、(2)所切出的正方體個數分別爲 26 和 19。爲了降低正方體的個數，我們取組合(2)，所以定義

$$L(3, 2, 4, 5, 1, 3; 3) = F(3, 2, 4)+F(3, 3, 1)$$
$$= F(2, 2, 4)+F(1, 2, 4)+ F(3, 3, 1)=17。$$

因此，如何依 L 型立方體邊長的特性定義出$L\left(m,\ell-m,n,\ell,n-m,m;m\right)$將是長方體切割法的重要工作。

此外，如同矩形的切割，$F(m,n,\ell)$顯然將是$f(m,n,\ell)$的一個上界函數，然而兩者之間的差距，或者是否存在一個類似於矩形四角切割的$G(m,n,\ell)$等，將是值得繼續探討的問題。

# 叁、研究結果

## 3.1. 矩形切割的再探討

對形如$(m, mk+\ell)$細長的矩形而言，其中$k \geq 2$，$1<\ell<m-1$，四角切割法未必能有效的降低正方形的個數，而且可能產生十字型區域。所以對此類的矩形，我們擬依輾轉相除切割法先切出$(k-1)$個或$k$個邊長為$m$的正方形，使得剩餘的矩形$(m, m+\ell)$或$(m, \ell)$的兩邊長較接近，再以四角切割法或輾轉相除切割法來對這些矩形進行切割。

接下來，我們只需要討論如何在形如$(m, n)$，$m<\ell \leq 2m-1$，的矩形上做四角切割。首先，在切割的過程中，為避免出現十字型區域，我們依序由四個角分別切割出邊長分別為$a$、$b$、$m$-$b$和$m$-$a$的正方形，其中$a+b$=$n$、$a \geq b$。此時，當$2a \geq n$、$2b \geq m$時，剩餘的區域是一個較小的矩形$(2n-2m, m-a)$或L型的六邊形區域。，為方便起見，當$n>m$、$a>b$、$2a>m$且$2b>n$時，我們以($a$-$b$,2$b$-$m$,$m$-$b$,2$n$-2$m$,$m$-$a$,2$a$-$m$)來表示這個L型區域：

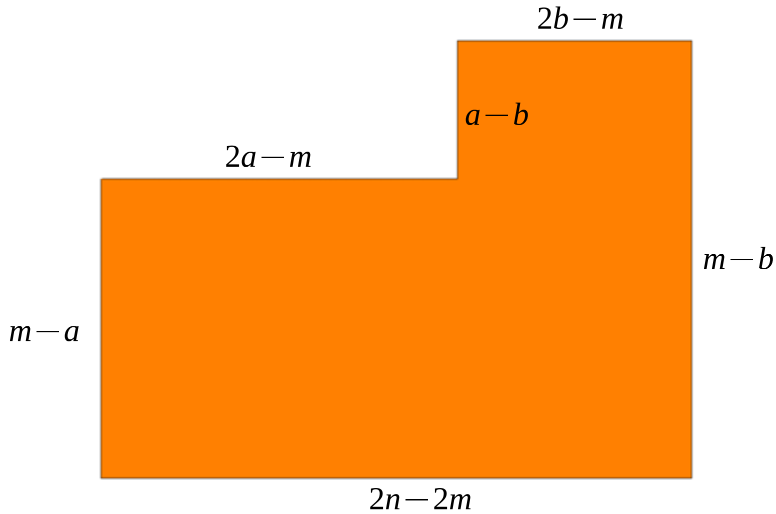


圖 3-1

因此，如何在這個L型區域內切割出較少個正方形則是四角切割法的重要問題。

在3.1.1~3.1.4節中，我們將分別討論兩邊邊長較接近的矩形$(m, m+\ell)$，$1 \leq \ell \leq 4$，如何分割，並在3.1.5節中說明一般矩形四角切割的策略。

### 3.1.1. (*m*, *m*+1)

對這類型的矩形而言，兩邊的邊長必為一奇一偶成對出現，所以我們都能將偶數邊長平分而切割出二個全等的正方形。以(13, 14)為例，在圖2-1中，我們經由四角切割後，所剩餘的是一個矩形(2, 6)。所以，可再利用輾轉相除切出3個邊長為2的正方形，因此，在(13, 14)中切出的正方形個數為7。

為方便起見，我們以$G(m, n)$表示在矩形$(m, n)$中結合四角與輾轉相除的切割後所得到正

方形個數。例如：

$G(13, 14) = 4 + F(6,2) = 4 + 3 = 7$，而 $F(13, 14) = 1+F(1,13) = 1+13 = 14$，

也就是說，$G(13, 14) < F(13, 14)$。

由附錄 1-1 的討論，可以得到下表的各式：

| **m** | **G** | **m** | **G** | **F** |
|---|---|---|---|---|
| $4k$ | $m/4+5$ | $4k+2$ | $(m+2)/4+2$ | $m+1$ |
| $4k+1$ | $(m+3)/4+3$ | $4k+3$ | $(m+1)/4+5$ | |

我們觀察到：

對任意 $m \geq 5$，$G(m,m+1) < F(m,m+1)$；

當邊長 $m$ 充份大時，$G(m,m+1) \approx \frac{1}{4}F(m,m+1)$。

### 3.1.2. (*m*, *m*+2)

對這類型的矩形而言，兩邊長必定皆爲奇數或偶數。如果邊長皆爲奇數，以(11, 13)爲例，經由四角切割後，在圖 2-2 中，剩下一個$(1,1,5,4,4,3)$的 L 型區域。若先在這個 L 型區域中，切出一個正方形(1, 1)後，就可得到一個正方形(4, 4)，也就是說，

$L(1,1,5,4,4,3) = F(1, 1)+F(4, 4)=2$，

即，　$G(11, 13) = 4+L(4,3,1,1,5,4) = 4+ F(1, 1)+F(4, 4) = 6$。

事實上，　$F(11, 13) = 1+F(2,11) =1+F(2,10) +F(1,2)=1+5+2 = 8$，

也就是說，　$G(11, 13) < F(11, 13)$。

由附錄 1-2 的討論，可以得到下表的各式：

| **m** | **G** | **m** | **G** | **m** | **F** |
|---|---|---|---|---|---|
| $8k$ | $m/8+7$ | $8k+4$ | $(m+4)/8+7$ | $2k$ | $m/2$ |
| $8k+1$ | $(m+7)/8+7$ | $8k+5$ | $(m+3)/8+8$ | | |
| $8k+2$ | $(m+6)/8+3$ | $8k+6$ | $(m+2)/8+5$ | $2k+1$ | $(m+5)/2$ |
| $8k+3$ | $(m+5)/8+4$ | $8k+7$ | $(m+1)/8+6$ | | |

我們觀察到：

對任意 $m \geq 10$ 且 $m \neq 13$，$G(m,m+2) < F(m,m+2)$；

當邊長 $m$ 充份大時，$G(m,m+2) \approx \frac{1}{4}F(m,m+2)$。

然而在矩形(13, 15)中，如下圖，

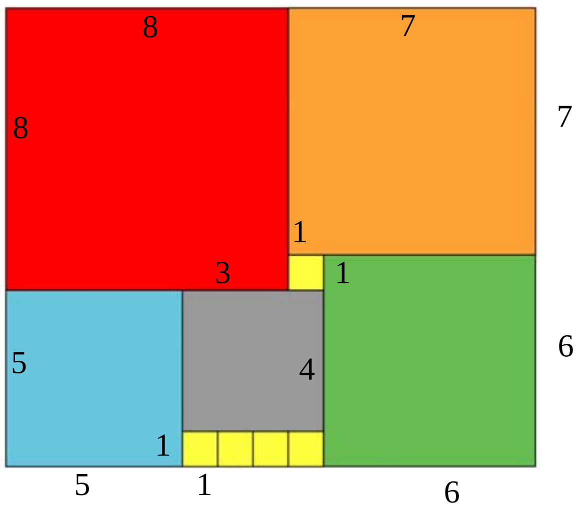


圖 3-2

我們發現，　　$G(13, 15)=4+L(5,3,1,1,6,4)=4+F(1,1)+F(4,5)=10$，

而　　$F(13, 15)=F(13,13)+F(2, 13)=1+6+2=9$。

事實上，對(13, 15)，我們有個數較少的切割法，如圖 3-3。

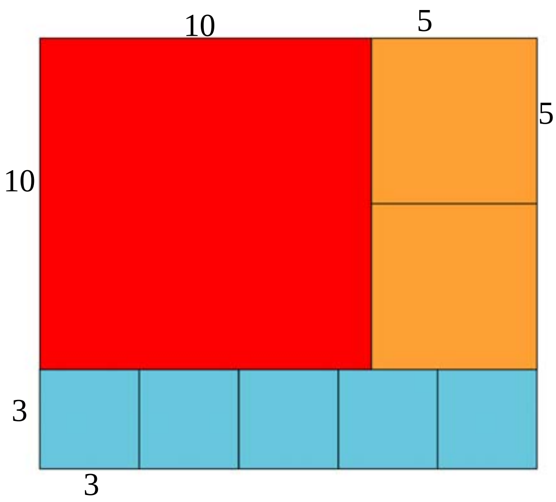


圖 3-3

也就是說，$f(13,15) \le 8 < F(13,15) < G(13,15)$。

### 3.1.3.　(*m*, *m*+3)

由前面兩種情形的討論中，我們發現在偶數邊長的一邊進行平分時較不易產生 L 型區域。以(14, 17)爲例，我們在邊長爲 14 的一邊切出 2 個邊長爲 7 的正方形，如圖 3-4，

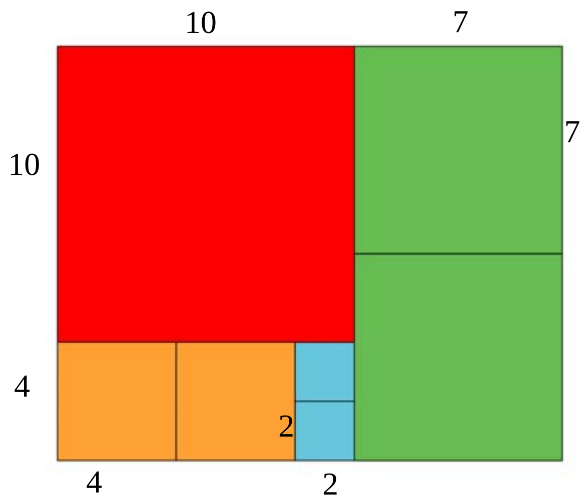


圖 3-4

我們發現 $G(14,17)=4+F(6,4)=4+3=7$，而 $F(14,17)=F(14,14)+F(3,14)=1+4+3=8$。

然而以(17,20)爲例，若在邊長爲 20 的一邊切出 2 個邊長爲 10 的正方形，那麼 $G(17,20)=4+G(6,7)=4+5=9$，而 $F(17,20)=1+F(3,17)=9$。若在邊長爲 20 的一邊分別切出邊長爲 11 和 9 的正方形，雖然產生一個(2,1,8,6,6,5)的 L 型區域，如圖 3-5,但是切出 2 個邊長爲 1 的正方形後，剩下的是一個邊長爲 6 的正方形，也就是說，$G(17,20)=4+F(2,1)+F(6,6)=7<9$。

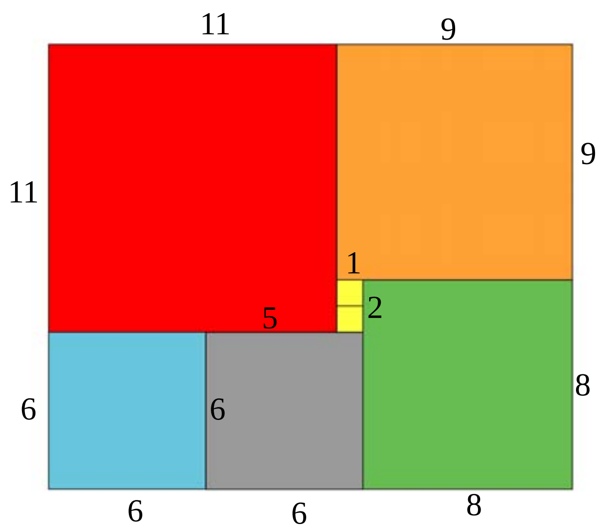


圖 3-5

由附錄 1-3 的討論，可以得到下表的各式：

| $m$ | $G$ | $m$ | $G$ | $m$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $12k$ | $m/12+5$ | $12k+6$ | $(m+6)/12+3$ | $3k$ | $(m+3)/3$ |
| $12k+1$ | $(m+11)/12+7$ | $12k+7$ | $(m+5)/12+6$ | | |
| $12k+2$ | $(m+10)/12+5$ | $12k+8$ | $(m+4)/12+8$ | $3k+1$ | $(m+11)/3$ |
| $12k+3$ | $(m+9)/12+3$ | $12k+9$ | $(m+3)/12+5$ | | |
| $12k+4$ | $(m+8)/12+5$ | $12k+10$ | $(m+2)/12+6$ | $3k+2$ | $(m+10)/3$ |
| $12k+5$ | $(m+7)/12+5$ | $12k+11$ | $(m+1)/12+6$ | | |

我們觀察到：

對任意 $m \geq 14$，$G(m,m+3) < F(m,m+3)$；

當邊長 $m$ 充份大時，$G(m,m+3) \approx \frac{1}{4}F(m,m+3)$。

### 3.1.4. (*m*, *m*+4)

沿用前面三種情形的切割模式，由附錄 1-4 的討論，可以得到下表的各式：

| $m$ | $G$ | $m$ | $G$ | $m$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $16k$ | $m+5$ | $16k+8$ | $(m+8)/16+3$ | $4k$ | $m/4+1$ |
| $16k+1$ | $(m+15)/16+9$ | $16k+9$ | $(m+7)/16+8$ | | |
| $16k+2$ | $(m+14)/16+7$ | $16k+10$ | $(m+6)/16+8$ | $4k+1$ | $(m+3)/4+4$ |
| $16k+3$ | $(m+13)/16+12$ | $16k+11$ | $(m+5)/16+8$ | | |
| $16k+4$ | $(m+12)/16+3$ | $16k+12$ | $(m+4)/16+5$ | $4k+2$ | $(m+2)/4+4$ |
| $16k+5$ | $(m+11)/16+6$ | $16k+13$ | $(m+3)/16+8$ | | |
| $16k+6$ | $(m+10)/16+9$ | $16k+14$ | $(m+2)/16+6$ | $4k+3$ | $(m+1)/4+4$ |
| $16k+7$ | $(m+9)/16+6$ | $16k+15$ | $(m+1)/16+6$ | | |

我們發現：

對任意 $m \geq 20$ 且 $m \neq 25, 27$，$G(m,m+4) < F(m,m+4)$；

當邊長 $m$ 充份大時，$G(m,m+4) \approx \frac{1}{4}F(m,m+4)$。

然而在矩形(25, 29)中，經四角切割後得到(1,3,12,8,11,5)這個 L 型區域。若先在 L 型區域

切出 3 個邊長為 1 的正方形後，就得到一個(8,10)的矩形，也就是說，

$$G(25, 29) = 4+F(1,3)+F(8,10)=4+3+5=12，而 F(25, 29) = 11。$$

事實上，如圖 3-6 所示，若改變 L 型區域中的切割方法，我們發現 $f(25,29) \le 10$ 。

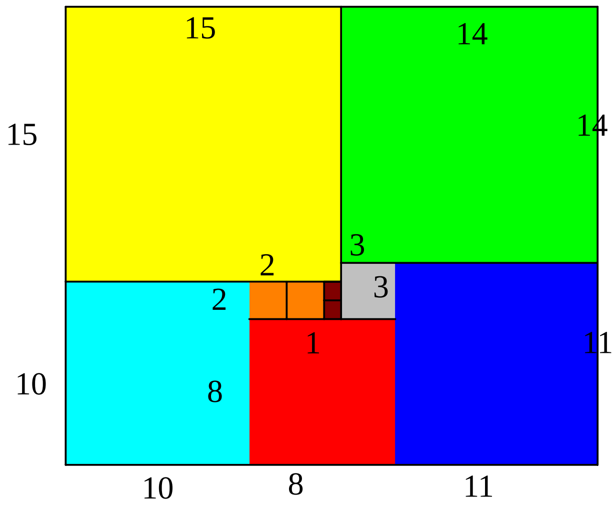


圖 3-6

再以(27, 31)為例，四角切割後得到(1,3,12,8,11,5)這個 L 型區域。若先在 L 型區域中切出 3 個邊長為 1 的正方形後，就得到一個(8,10)的矩形，也就是說，

$$G(27, 31) = 4+F(1,3)+F(8,11)=4+3+6=13，而 F(27, 31) = 11。$$

事實上，如圖 3-7 所示， $f(27,31) \le 10$ ，所以 $f(27,31) \le 10 < F(27, 31) < G(27, 31)$ 。

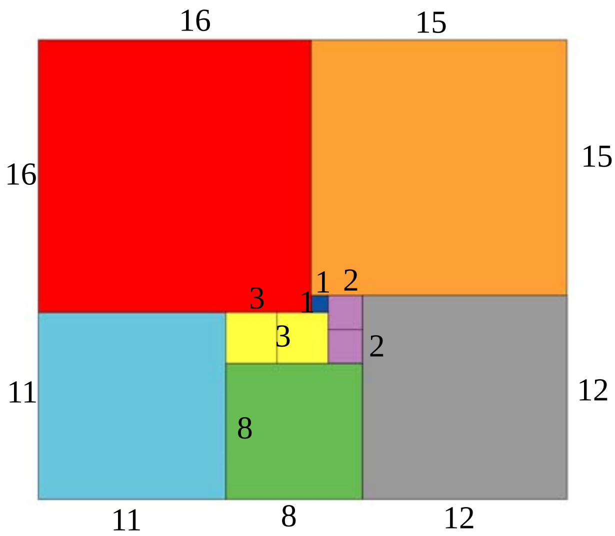


圖 3-7

除了前面幾個特殊的情形外，我們也發現，如下圖， $f(26,30) \le 8$ 。

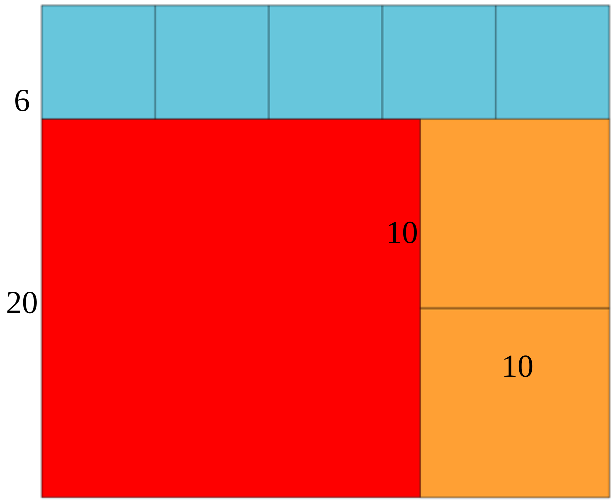


圖 3-8

### 3.1.5. 矩形四角切割的策略

綜合 3.1.1~3.1.4 的討論，對矩形$(m, m+\ell)$，$1 \le \ell \le m-1$，我們有下列的猜測：

**G-1** 當 $m \ge 5\ell$ 時，除了某些 $m$ 之外，$G(m, m+\ell) < F(m, m+\ell)$。

**G-2** 當邊長 $m$ 充份大時，$G(m,m+\ell) \approx \frac{1}{4} F(m,m+\ell)$。

雖是如此，$(m, m+\ell)$，$5 \le \ell \le m-1$，的分割方法將更加複雜，因此我們建議採用下列的策略:

**【S-1】** 對矩形$(m, \ell)$，$1 \le \ell \le m-1$，我們可以採用下列的方法：

(1) 當 $m-4 \le \ell \le m-1$時，由$G(m,\ell) = G(\ell, m)$，我們可以將其看成$(k, k+\alpha)$，$1 \le \alpha \le 4$。因此，我們可以利用附錄一的方法進行切割。

(2) 當$1 \le \ell \le m-4$時，我們可以先利用輾轉相除法將這個矩形切割出正方形$(\ell, \ell)$ 和矩形$(m-\ell, \ell)$，即$F(m,\ell) = F(\ell,\ell) + F(m-\ell,\ell)$。例如：由

$$F(33,21) = F(21,21) + F(12,21) = F(21,21) + F(12,12) + F(9,12)$$
$$> F(21,21) + F(12,12) + G(9,12) ，$$

我們可以定義：$G(33,21) = F(21,21) + F(12,12) + G(9,12) = 2 + G(9,12)$。

**【S-2】** 對矩形$(m, \ell)$，$\ell \ge 2m+1$，只要利用有限次輾轉相除的切割方式，所剩餘的區域$(a,b)$，其中兩邊長 $a$、$b$ 一定能滿足$0 \le b-a \le 4$。此時，就可以利用 3.1.1~3.1.4 的方法繼續做切割。

綜合上面的討論，我們發現將四角切割和輾轉相除的概念相互結合就能有效的降低正方形的個數。相較於輾轉相除法，對於兩邊長相近的大矩形而言，我們的方法能將正方形的個數降低接近四分之三，而且使得小正方形的個數大幅減少，並增加切割的樣式。這樣的切割方式將使可利用的空間以及正方形排列的靈活度相對提高，使其能應用在倉儲、晶圓切割的產業上。

## 3.2. 長方體的切割

### 3.2.1. 輾轉相除切割法

仿照矩形的輾轉相除切割法，我們在長方體$(m, n, \ell)$中進行切割時，每次所得到的正立方體都是擬切割的空間中體積最大的，並以$F(m, n, \ell)$表示所切出正立方體的個數。顯然的，$F(1,1,1)=1$，而且在長方體中所切出正立方體的個數不多於$mn\ell$，即$F(m, n, \ell) \le mn\ell$。

此外，$F(m, n, \ell)$有下列的性質：

(1) 當長方體$(m, n, \ell)$的三邊長排列順序改變時，所得的正立方體個數不變，即
$F(m,n,\ell)=F(n,\ell,m)=F(\ell,m,n)=F(m,\ell,n)=F(n,m,\ell)=F(\ell,n,m)$。

(2) 當三邊長都爲 $m$ 時，$(m, m, m)$是一個正立方體，所以$F(m, m, m)=1$。

(3) 當其中一邊爲 1 時，所能切割出的正立方體的邊長都是 1，即 $F(1,1,m)=m$；
且三邊同時放大 $k$ 倍時，所切割出的正立方體的邊長都是 $k$，如圖 3-9、3-10，

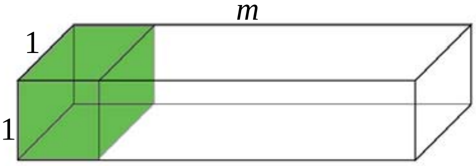


圖 3-9

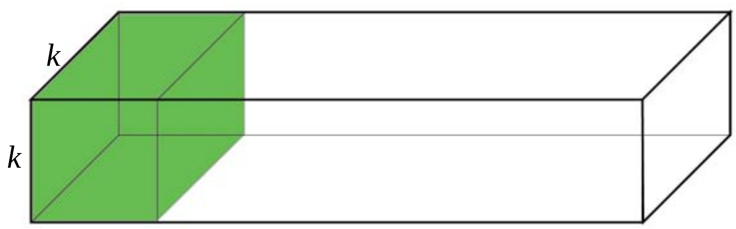


圖 3-10

所以，$$F(k,k,km)=F(1,1,m)=m$$。

(4) 當其中一邊爲 1 時，所能切割出的正立方體的邊長都是 1，所以$F(1,m,n)=mn$；當三邊同時放大 $k$ 倍時，所能切割出的正立方體的最大邊長都是 $k$，所以

$$F(k, km, kn) = F(1, m, n) = mn \text{ 。}$$

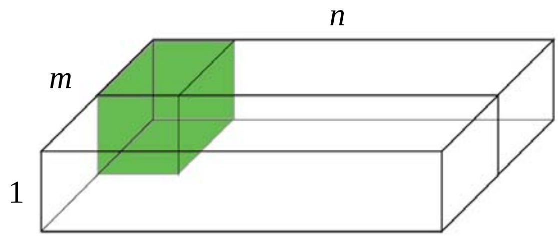


圖 3-11

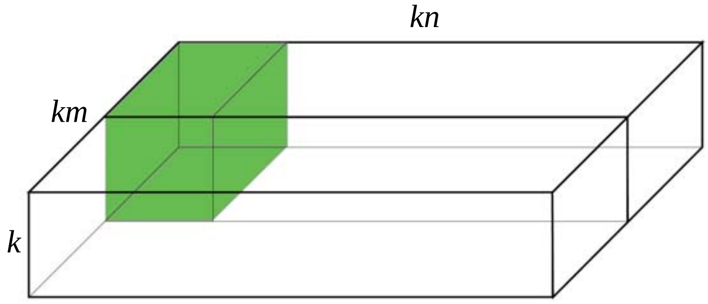


圖 3-12

(5) 對$(m, m, m+1)$，我們將其切割出正立方體$(m, m, m)$，以及長方體$(m, m, 1)$，即

$$F(m, m, m+1) = F(m, m, m) + F(m, m, 1) = 1 + m^2 \text{ 。}$$

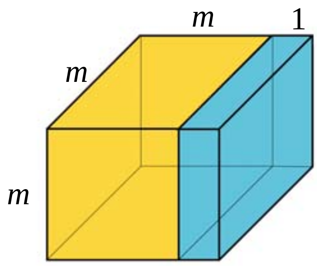


圖 3-13

(6) 對$(m, m, m+i)$，$a \geq i$，我們將其切割出正立方體$(m, m, m)$，以及長方體$(m, m, i)$，即

$$F(m, m, m+i) = F(m, m, m) + F(i, m, m) = 1 + F(i, m, m) \text{ 。}$$

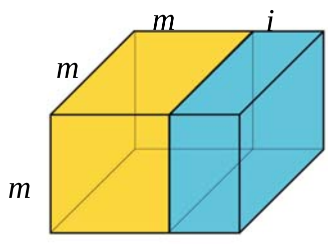


圖 3-14

(7) 對$\left(m,m,km+1\right)$，我們將其切割出長方體$\left(km,m,m\right)$和$\left(m,m,1\right)$，即

$$F\left(m,m,km+1\right)=F(m,m,km)+F(m,m,1)=k+m^2$$。

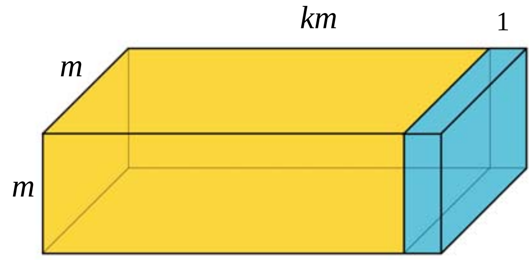


圖 3-15

(8) 對$\left(m,hm,km+1\right)$，我們將其切割出長方體$\left(m,hm,km\right)$和$\left(m,hm,1\right)$，即

$$F\left(m,hm,km+1\right)=F\left(m,hm,km\right)+F(m,hm,1)=kh+hm^2$$。

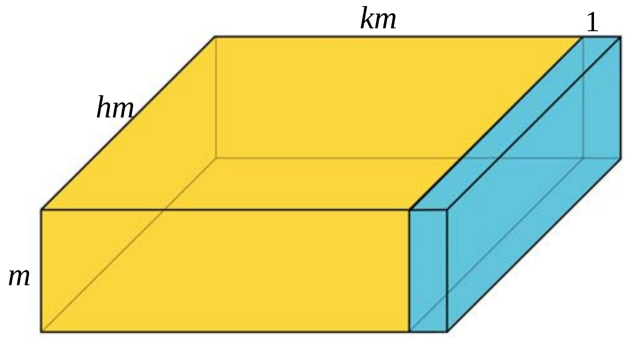


圖 3-16

(9) 對$\left(m,m,km+i\right)$，$1<i<m$，我們將其切割出長方體$\left(m,m,km\right)$和$\left(m,m,i\right)$，即

$$F\left(m,m,km+i\right)=F\left(m,m,km\right)+F\left(m,m,i\right)=k+F(m,m,i)$$。

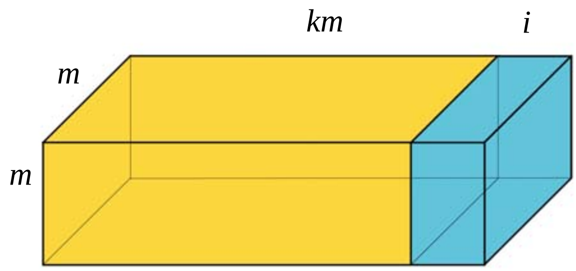


圖 3-17

(10) 對$(m, hm, km+i)$，$1<i<m$，我們將其切割出長方體$(m, hm, km)$和$(m, hm, i)$，即

$$F(m, hm, km+i)=F(m, hm, km)+F(m, hm, i)=hk+F(m, hm, i)$$ 。

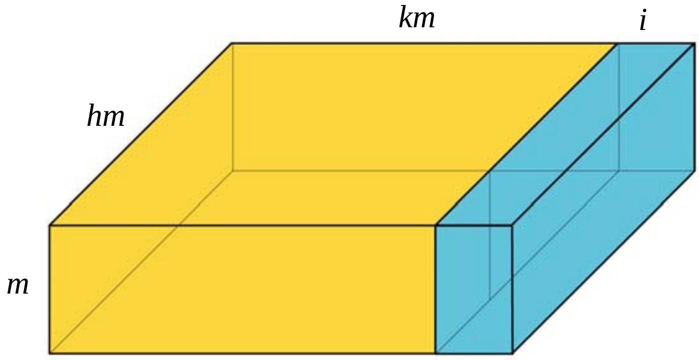


圖 3-18

在(9)、(10)中，長方體$(m, m, i)$、$(m, hm, i)$可再利用輾轉相除的概念繼續進行切割。接下來，我們來討論 L 型柱體的情形。

(11) 在長方體$(m, m+1, m+1)$中，經切割出正立方體$(m, m, m)$後，所得到 L 型柱體為$(m, 1, m+1, m+1, 1, m; m)$。顯然的，在 L 中所能切割出的正立方體邊長都為 1，所以，將其分成$(m, 1, m)$、$(m, m+1, 1)$兩個長方體再進行切割。因此，如下圖，

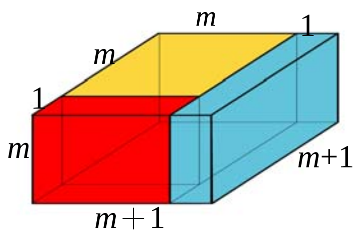


圖 3-19

我們得到：

$$F(m, m+1, m+1)=F(m, m, m)+F(m, m+1, 1)+F(m, 1, m)=1+m+2m^2$$

(12) 對長方體$(m, m+1, km+1)$而言，經切割出長方體$(m, m, km)$後，我們可以得到$(m, 1, m+1, km+1, 1, km; m)$這個 L 型柱體。顯然的，在 L 中所能切割出的正立方體邊長都為 1，所以，如圖 3-20，將其分成$(m, 1, km)$、$(m, m+1, 1)$兩個長方體再進行切割。因此，

$$\begin{aligned} F(m, m+1, km+1) &= F(m, m, km)+F(m, 1, km)+F(m, m+1, 1) \\ &= k+m+m^2+km^2 \end{aligned}$$

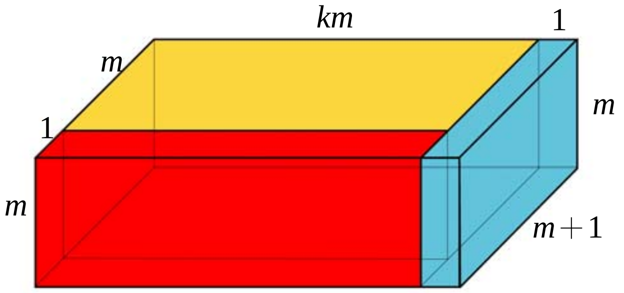


圖 3-20

(13) 對長方體$(m, m+1, km+i)$，其中$1<i<m$而言，經切割出長方體$(m, m, km)$後，得到$(m, 1, m+1, km+i, 1, km; m)$這個 L 型柱體。顯然的，在 L 中所能切割出的正立方體中邊長最大為 $i$，所以，依附錄二的討論，我們將其分成$(m,1,km)$、$(m, m+1, i)$兩個長方體，如圖 3-21，再進行切割。因此，

$$F(km+i, m+1, m) = F(m, m, km) + F(m, 1, km) + F(m, m+1, i)$$
$$= k + km^2 + F(m, m+1, i)，1<i<m 。$$

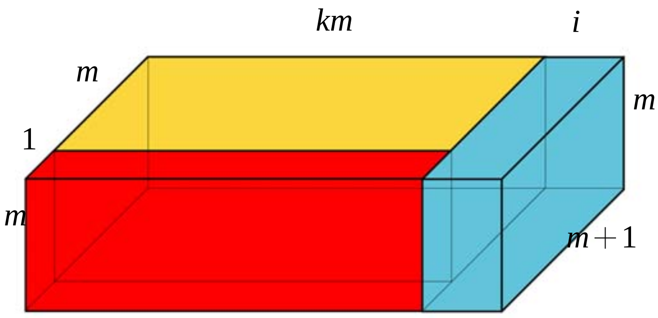


圖 3-21

(14) 對長方體$(m, hm+1, km+1)$來說，經切割出長方體$(m, hm, km)$後，我們可以得到$(m, 1, hm+1, km+1, 1, km; m)$這個 L 型柱體，如圖 3-22。顯然的，在 L 中所能切割出的正立方體中邊長最大為 1，所以，依附錄二的討論，我們將其分成$(m,1,km)$、$(m, hm+1, 1)$兩個長方體再進行切割。

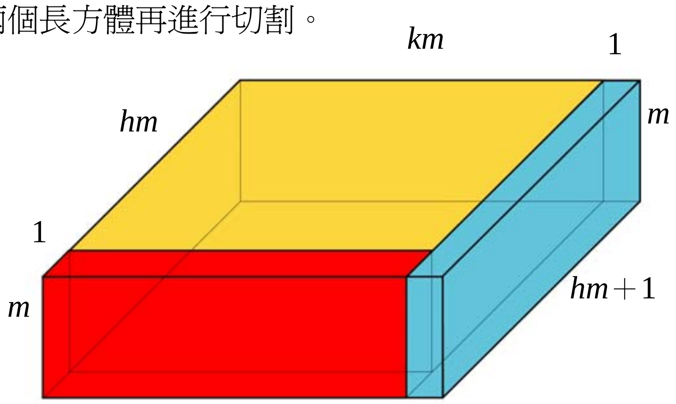


圖 3-22

因此，$F(m, hm+1, km+1) = F(m, hm, km)+L(hm,1, hm+1, km+1,1, km; m)$

$= F(m, hm, km)+F(m, 1, km)+F(m, hm+1, 1)$

$= hk+km^2+m+hm^2$ 。

(15) 至於長方體$(m, hm+1, km+i)$，經切割出長方體$(m, hm, km)$後，我們可以得到$(hm, i, hm+1, km+i, 1, km; m)$ L 型柱體，如圖 3-23。當$1<i<m$時，顯然在 L 中所能切割出的正立方體中邊長最大為 $i$，所以，依附錄二的討論，我們將其分成$(m,hm+1,i)$、$(m,1,km)$兩個長方體後再分別進行切割。因此，

$$F(m, hm+1, km+i) = F(m, hm, km)+F(m, 1, km)+F(m, hm+1, i)$$
$$= hk+km^2+F(m, hm+1, i)\text{。}$$

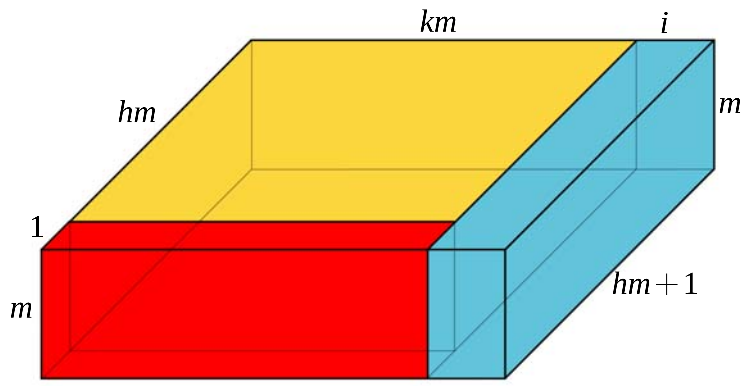


圖 3-23

(16) 至於長方體$(m, m+j, m+i)$，經切割出長方體$(m, m, m)$後，我們可以得到 L 型柱體$(m, i, m+j, m+i, j, m; m)$，如圖 3-24。當$1<j\le i<m$時，在 L 中所能切割出的正立方體中邊長最大為 $i$，所以，我們將其分成$(m, j, m)$、$(m, m+j, i)$兩個長方體再進行切割。

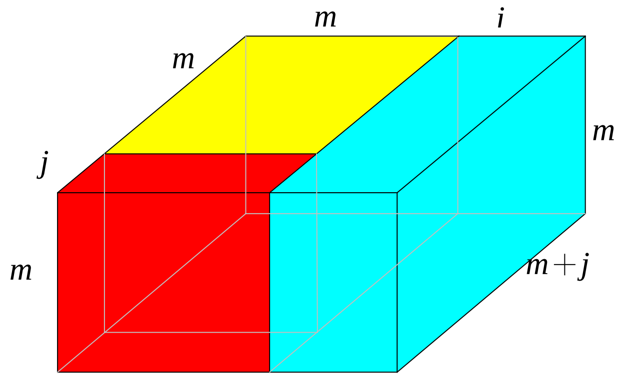


圖 3-24

因此，　　$F(m, m+j, m+i)=F(m, m, m)+F(m, j, m)+F(m, m+j, i)$
$$=1+F(m, j, m)+F(m, m+j, i)\text{。}$$

(17)　至於長方體$(m, m+j, km+i)$，經切割出長方體$(m, m, km)$後，所得到的 L 型柱體爲$(m, i, m+j, km+i, j, km; m)$，如圖 3-25。當$1<j\le i<m$時，顯然在 L 中所能切割出的正立方體中邊長最大爲 $i$，所以，我們將其分成$(m, j, km)$、$(m, m+j, i)$ 兩個長方體後再進行切割。因此，

$$F(m, m+j, km+i)=F(m, m ,km)+F(m, j, km)+F(m, m+j, i)$$
$$=k+F(m, j, km)+\,+F(m, m+j, i)\text{。}$$

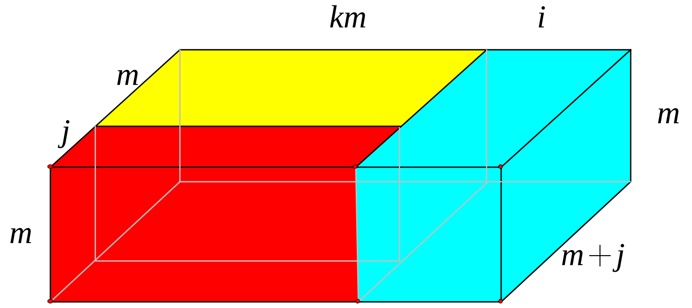


圖 3-25

(18)　至於長方體$(m,\ hm+j,\ km+i)$，經切割出長方體$(m, hm, km)$後，我們可以得到$(hm, i, hm+j, km+i, j, km; m)$這個 L 型柱體，如圖 3-26。當$1<j\le i<m$時，顯然在 L 中所能切割出的正立方體中邊長最大爲 $i$，所以，我們將其分成$(m, j, km)$、$(m, hm+j, i)$ 兩個長方體再進行切割。因此，

$$F(m, hm+j, km+i)=F(m, hm, km)+F(m, j, km)\ +F(m, hm+j, i)$$
$$=hk+F(m, j, km)\ +F(m, hm+j, i)\text{。}$$

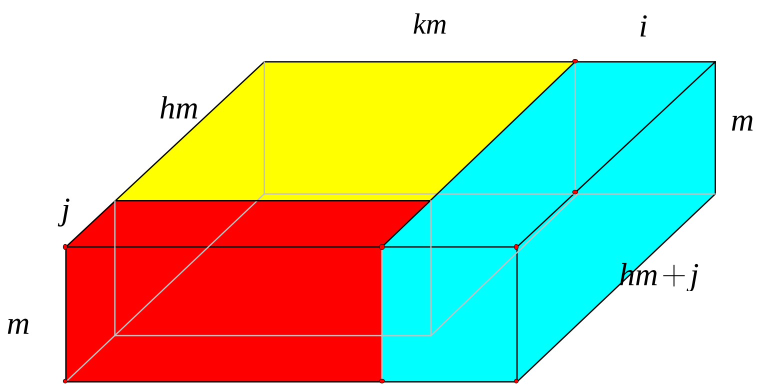


圖 3-26

### 3.2.2. 四角切割法

如同矩形的分割問題，我們以 $f(m,n,\ell)$ 表示在長方體 $(m,n,\ell)$ 中，所能切割出最少個正立方體的個數。顯然的， $f(m,n,\ell)$ 也應滿足下列的性質：

$f$-1　$f(m,n,\ell) \le mn\ell$ ；

$f$-2　$f(1,1,1)=1$ ， $f(k,k,k)=1$ ；

$f$-3　$f(1,n,\ell)=n\ell$ ， $f(2,2n,2\ell)=n\ell$ ；

$f$-4　$f(k,km,k\ell) \le f(1,m,\ell)=m\ell$ ，其中 $k \ge 3$ 。

因此，如同矩形的切割，我們知道除了

$$F(1,n,\ell)=f(1,n,\ell) \text{ ， } F(2,2n,2\ell)=f(2,2n,2\ell)$$

之外， $f(m,n,\ell)<F(m,n,\ell)$ 也應成之。事實上，對於三邊長相當接近的長方體而言，輾轉相除法容易切割出大量邊長為 1 的立方體。例如，

$$F(m,m+1,m+1)=F(m,m,m)+F(m,m+1,1)+F(m,1,m)=1+m+2m^2 \text{ ；}$$

$$F(m+1,m,m)=F(m,m,m)+F(1,m,m)=1+m^2 \text{ 。}$$

我們觀察到 $m^2$ 個邊長為 1 的正立方體來自(1, $m$, $m$)的長方體。然而在矩形中，四角切割法確實能大幅度降低邊長為 1 的正方形，所以我們嘗試引用四角切割的概念，來降低其中一邊長為 1 的長方體的數量。

在這個研究中，我們僅討論如何引用四角切割的概念來切割($m$,$m$+1,$m$+1)及($m$+1,$m$,$m$)這兩種長方體。

#### 3.2.2.1. 長方體($m$, $m$+1, $m$+1)

承繼矩形分割問題的經驗，我們將分 $m$ 為奇數或偶數的情形來討論。

##### 3.2.2.1.1. $(2k-1,2k,2k)$ ， $k \ge 2$

我們知道四角切割法將矩形 $(2k-1,2k)$ 切割成兩個正方形 $(k,k)$ 、兩個正方形 $(k-1,k-1)$ 和長方形 $(2,k-1)$ 。對長方體 $(2k-1,2k,2k)$ 而言，我們可以將其旋轉成 $(2k,2k-1,2k)$ ，再將旋轉後的長方體其切出兩個 $(2k,k,k)$ ，兩個 $(2k,k-1,k-1)$ 和一個 $(2k,2,k-1)$ ，如圖 3-27。

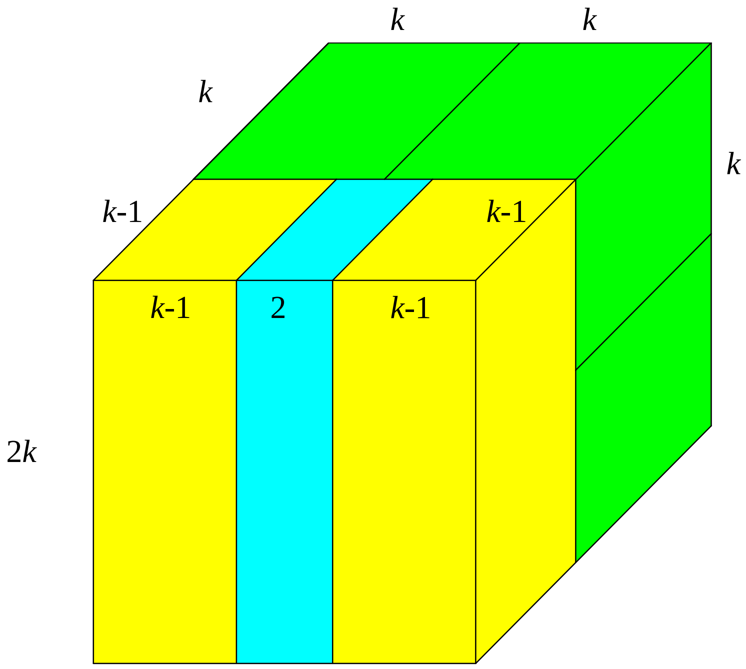


圖 3-27

因此，我們可以引用輾轉相除法來切割這些長方體，並且定義

$$G(2k-1,2k,2k)=G(2k,2k-1,2k)$$
$$=2F(2k,k,k)+2F(2k,k-1,k-1)+F(2k,2,k-1) \text{ 。}$$

事實上，長方體 $(2k,k-1,k-1)$ ， $(2k,2,k-1)$ 的切割方式也將依 $k$ 爲奇數或偶數有所不同。

(1) 當 $k$ 爲奇數時，我們可以在 $(2k,k-1,k-1)$ 中切割出 $(2k-2,k-1,k-1)$ 和 $(2,k-1,k-1)$ 兩種長方體。又因爲 $k$-1 爲偶數，所以可將 $(2,k-1,k-1)$ 和 $(2k,2,k-1)$ 完全切成邊長爲 2 的正方體，因此

$$G(2k-1,2k,2k)=2F(2k,k,k)+2F(2k,k-1,k-1)+F(2k,2,k-1)$$
$$=4+2\{F(2k-2,k-1,k-1)+F(2,k-1,k-1)\}+\frac{k(k-1)}{2}$$
$$=4+4+\frac{(k-1)^2}{2}+\frac{k(k-1)}{2}$$
$$=k^2-\frac{3}{2}k+\frac{17}{2} \text{ ，}$$

而 $F(2k-1,2k,2k)=1+(2k-1)+2(2k-1)^2=8k^2+6k+2$ 。我們發現，

當 $m$ =5，9，13，…時，$G<F$；當 $m$ 充份大時，$G\approx\frac{1}{8}F$ 。

(2) 當 $k$ 爲偶數時，$k$-1 爲奇數，所以無法 $(2,k-1,k-1)$ 和 $(2k,2,k-1)$ 完全切成邊長爲 2 的正方體。爲了優先切出邊長皆爲偶數的長方體，可先將 $(2,k-1,k-1)$ 切成

$(2,k-2,k-1)$和$(2,1,k-1)$，再將$(2,k-2,k-1)$切成$(2,k-2,k-2)$和$(2,k-2,1)$。同樣的，可將$(2k,2,k-1)$切成$(2k,2,k-2)$和$(2k,2,1)$，因此

$$\begin{aligned}G(2k-1,2k,2k) &= 2F(2k,k,k)+2F(2k,k-1,k-1)+F(2k,2,k-1)\\ &= 2+2\{2+F(2,k-2,k-2)+F(2,k-2,1)+F(2,1,k-1)\}\\ &\quad +\{F(2k,2,k-2)+F(2k,2,1)\}\\ &= k^2+9k-6\end{aligned}$$
。

我們發現，當 $m$ =3，7，11，…時，$G<F$；同樣的，當 $m$ 充份大時，$G\approx\frac{1}{8}F$ 。

## 3.2.2.1.2. $(2\boldsymbol{k},2\boldsymbol{k}+1,2\boldsymbol{k}+1)$ ，$\boldsymbol{k}\geq 1$

我們若先將長方體$(2k,2k+1,2k+1)$切成$(2k,2k,2k+1)$和$(2k,1,2k+1)$，就可用四角切割法來對長方體$(2k,2k,2k+1)$進行切割，如下圖。

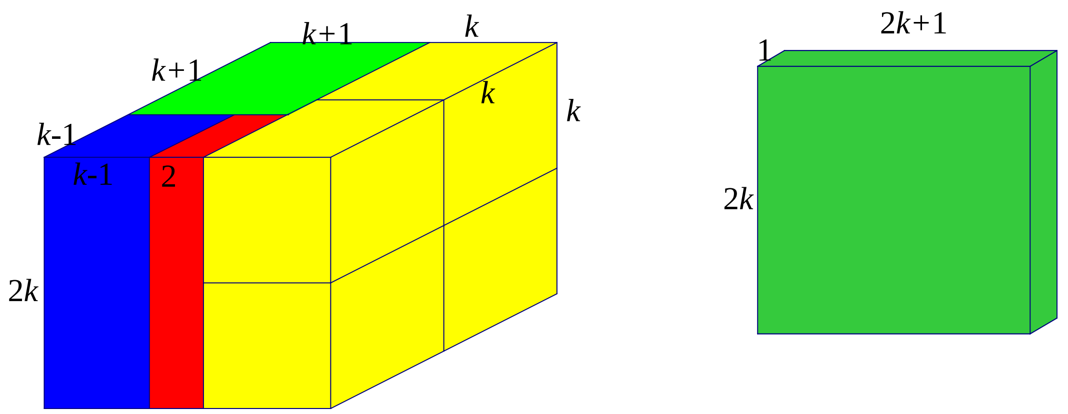


圖 3-28

因此，

$$\begin{aligned}G(2k,2k+1,2k+1) &= G(2k,2k,2k+1)+F(2k,1,2k+1)\\ &= F(2k,k+1,k+1)+2F(2k,k,k)+F(2k,k-1,k-1)+F(2k,2,k-1)\\ &\quad +F(2k,1,2k+1)\end{aligned}$$
。

同樣的，$(2k,2k,2k+1)$將因 $k$ 爲奇數或偶數而有不同的切割方式。

(1) 當 $k$ 爲奇數時，$k\pm1$ 爲偶數，所以

$$\begin{aligned}F(2k,k+1,k+1) &= F(k+1,k+1,k+1)+F(k-1,k+1,k+1)\\ &= 1+F(k-1,k-1,k+1)+F(k-1,2,k+1)\\ &= 1+F(k-1,k-1,k-1)+F(k-1,k-1,2)+F(k-1,2,k+1)\\ &= \frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}+2\end{aligned}$$
；

$$F(2k,k-1,k-1)=F(2k-2,k-1,k-1)+F(2,k-1,k-1)$$

$$= 2 + \frac{(k-1)^2}{4}$$ 。

因此，$G(2k, 2k+1, 2k+1) = \frac{21}{4}k^2 + \frac{5}{2}k + \frac{33}{4}$。由 $F(2k, 2k+1, 2k+1) = 8k^2 + 2k + 1$，我們發現當 $m$ =6，10，14，⋯時，$G < F$；當 $m$ 充份大時，$G \approx \frac{21}{32}F$ 。

(2) 當 $k$ 爲偶數時，$k\pm1$ 爲奇數，所以

$$\begin{aligned} F(2k, k+1, k+1) &= 1 + F(k-1, k+1, k+1) \\ &= 1 + F(k-1, k-1, k+1) + F(k-1, 2, k+1) \\ &= 1 + 1 + F(k-1, k-1, 2) + F(k-2, 2, k+1) + F(1, 2, k+1) \\ &= \frac{k^2}{4} + \frac{15}{2}k - 6 \text{；} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(2k, k-1, k-1) &= F(2k-2, k-1, k-1) + F(2, k-1, k-1) \\ &= 2 + F(2, k-2, k-1) + F(2, 1, k-1) \\ &= 2 + F(2, k-2, k-2) + F(2, k-2, 1) + F(2, 1, k-2) + F(2, 1, 1) \\ &= \frac{k^2}{4} - 3k - 3 \text{；} \end{aligned}$$

$$F(2k, 2, k-1) = F(2k, 2, k-2) + F(2k, 2, 1) = \frac{1}{2}k^2 + 3k \text{。}$$

因此，$G(2k, 2k+1, 2k+1) = \frac{21}{4}k^2 + \frac{17}{2}k - 4$。我們發現當 $m$ = 4，8，12，⋯，$G < F$；同樣的，當 $m$ 充份大時，$G \approx \frac{21}{32}F$ 。

對長方體($m$, $m$+1, $m$+1)而言，綜合上面的討論，我們發現當 $m \geq 3$ 時，四角切割確實可切割出較少的正立方體，而當 $m$ 充分大時，$G$ 不多於 $21F/32$，其中 $m$ 爲奇數時，$G$ 可減少至 $F/8$。

### 3.2.2.2. 長方體(*m*, *m*-1, *m*-1)

同樣的，我們將分 $m$ 爲奇數或偶數的情形來討論。

#### 3.2.2.2.1. $(2k+1, 2k, 2k)$，$k \geq 1$

在 2.1.2 節中，我們得到 $G(2k, 2k+1, 2k+1) = G(2k, 2k, 2k+1) + F(2k, 1, 2k+1)$，又因爲 $G(2k+1, 2k, 2k) = G(2k, 2k, 2k+1)$，因此可知

(1) 當 $k$ 爲奇數時，$G(2k+1, 2k, 2k) = \frac{5}{4}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{33}{4}$；

(2) 當 $k$ 爲偶數時，$G(2k+1,2k,2k)=\frac{5}{4}k^2+\frac{13}{2}k-4$ 。

又由 $F(2k+1,2k,2k)=1+4k^2$ ，我們發現：

當 $m$ 爲奇數且 $m\geq 3$ 時，$G<F$，且當 $m$ 充份大時，$G\approx\frac{5}{16}F$ 。

### 3.2.2.2.2. $(2\boldsymbol{k},2\boldsymbol{k}-1,2\boldsymbol{k}-1)$ ，$\boldsymbol{k}\geq 1$

我們可以在 $(2k,2k-1,2k-1)$ 中切割出一個長方體 $(2k,k,k)$ 後，所剩餘的爲一個 L 型的柱體 $(k,k-1,2k-1,2k-1,k-1,k;2k)$ 。如果先在這個 L 型柱體切割出長方體 $(2k,k-1,k-1)$，所剩餘的爲 $(2k,k,k-1)$ 和 $(2k,k-1,k)$ 兩個長方體，如圖 3-29。

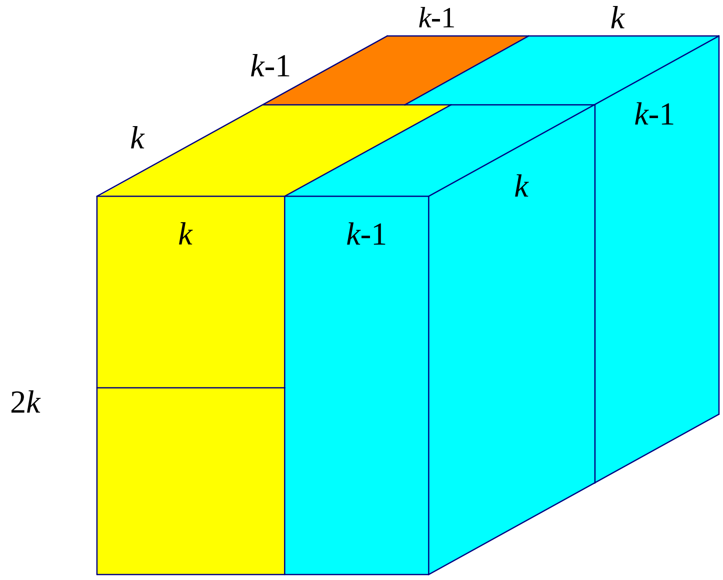


圖 3-29

事實上，經旋轉後， $(2k,k,k-1)$ 和 $(2k,k-1,k)$ 可視爲相同的長方體，所以

$$(2k,2k-1,2k-1)=(2k,k-1,k-1)+2\,(2k,k-1,k)\ 。$$

再者，$(2k,k,k-1)$ 可被切成 $(2k-2,k-1,k-1)$ 和 $(2,k-1,k-1)$ ，而 $(2k,k-1,k)$ 可用四角切割法來切割。因此，我們可以定義

$$G(2k,2k-1,2k-1)=F(2k,k,k)+F(2k,k-1,k-1)+2G(2k,k-1,k)\ 。$$

如同前面的討論，$F(2k,k-1,k-1)$ 和 $G(2k,k-1,k)$ 均需依 $k$ 爲奇數或偶數來討論。以 $k$=8 爲例，

$$F(16,7,7)=F(14,7,7)+F(2,7,7)=2+F(2,6,7)+F(2,1,7)$$
$$=2+F(2,6,6)+F(2,6,1)+14=37\ ;$$

$$G(16,7,8)=2F(16,4,4)+2F(16,3,3)+F(16,2,3)$$
$$=8+2\{F(12,3,3)+F(4,3,3)\}+\{F(16,2,2)+F(16,1,1)\}$$
$$=8+2\{4+1+3^2\}+24=74$$

所以$G(16,15,15)=187$，而$F(16,15,15)=1+15^2=226$。

在附錄三中，我們以 $k$ 除以 8 的餘數爲分類，分別討論$G(2k,2k-1,2k-1)$的數學式，因此得出下表中的各式：

| ***k*** | ***G*** | ***F*** |
|---|---|---|
| $8\ell$ | $52\ell^2+224\ell-89$ | $256\ell^2-32\ell+2$ |
| $8\ell+1$ | $90\ell^2+188\ell-28$ | $256\ell^2+32\ell+2$ |
| $8\ell+2$ | $52\ell^2+40\ell+38$ | $256\ell^2+96\ell+10$ |
| $8\ell+3$ | $90\ell^2+88\ell+29$ | $256\ell^2+160\ell+26$ |
| $8\ell+4$ | $52\ell^2+248\ell+50$ | $256\ell^2+224\ell+50$ |
| $8\ell+5$ | $90\ell^2+280\ell+116$ | $256\ell^2+288\ell+82$ |
| $8\ell+6$ | $52\ell^2+120\ell+70$ | $256\ell^2+352\ell+122$ |
| $8\ell+7$ | $90\ell^2+188\ell+119$ | $256\ell^2+416\ell+170$ |

我們發現：當$m\geq 12$時，$G<F$；

當 $m$ 充份大時，若 $k$ 爲偶數，$G\approx 13F/64$，

若 $k$ 爲奇數，$G\approx 45F/128$。

當實際進行四角切割時，所得的正立方體個數有可能低於上表中數學式所得的結果。以 $k$=9 爲例，由上表中所得 $G$ 爲 250，而實際分割時可得

$$F(18,8,8)=F(16,8,8)+F(2,8,8)=2+16=18\text{；}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}(18,8,9)&=F(18,5,5)+2F(18,4,4)+F(18,3,3)+F(18,2,3)\\&=F(15,5,5)+F(3,5,5)+2\{F(16,4,4)+F(2,4,4)\}\\&\quad+6+F(18,2,2)+F(18,2,1)\\&=3+\{F(3,3,5)+F(3,2,5)\}+51\\&=3+\{F(3,3,3)+F(3,3,2)+F(3,2,4)+F(3,2,1)\}+51\\&=3+\{1+F(3,2,2)+F(3,1,2)+F(3,2,4)+6\}+51\\&=4+F(2,2,2)+F(1,2,2)+F(3,1,2)+F(2,2,4)+F(1,2,4)+6+51\\&=82\text{，}\end{aligned}$$

所以$G(18,17,17)=F(18,9,9)+F(18,8,8)+2\tilde{G}(18,8,9)=184$。事實上，在附錄三歸納的過程中得到

$$\begin{aligned}G(16\ell+2,8\ell,8\ell+1)&=F(16\ell+2,4\ell+1,4\ell+1)+2F(16\ell+2,4\ell,4\ell)\\&\quad+F(16\ell+2,4\ell-1,4\ell-1)+F(16\ell+2,2,4\ell-1)\text{，}\end{aligned}$$

而我們並未就長方體$(16\ell+2,4\ell+1,4\ell+1)$、$(16\ell+2,4\ell-1,4\ell-1)$各邊長是否互質的情形再予以分類討論。例如，我們直接定義

$$F(16\ell+2,4\ell-1,4\ell-1)=F(16\ell-4,4\ell-1,4\ell-1)+F(6,4\ell-1,4\ell-1)$$
$$=4+F(4,4\ell-1,4\ell-1)+F(2,4\ell-1,4\ell-1)\text{。}$$

然而當 $k$=9 時，$(16\ell+2,4\ell-1,4\ell-1)=(18,3,3)$ 可以切成 6 個邊長爲 3 的正立方體。

對長方體 $(m,m-1,m-1)$ 而言，綜合上面的討論，我們發現當 $m\geq 12$ 時，四角切割法確實可切割出較少的正立方體，而當 $m$ 充分大時，$G$ 不多於 $45F/128$，其中 $m$ 爲奇數時，$G$ 約爲 $5F/16$；$m$/2 爲偶數時，$G$ 約爲 $13F/64$。

### 3.2.3. 其它的切割方法

在矩形切割中，四角切割所得到的個數約爲輾轉相除法的 1/4，其中 1/4=$(1/2)^2$，而在 $m$ 爲奇數的長方體 $(m,m+1,m+1)$ 中，四角切割則約爲輾轉相除法的 1/8，其中 1/8=$(1/2)^3$，而指數恰爲空間的維度。由於四角切割的概念來自盡可能平分各邊的邊長，所以 1/8 可能爲四角切割法與輾轉相除法之間的最佳比值。因此，對 $(m,m+1,m+1)$，$m$ 爲偶數，以及 $(m,m-1,m-1)$，我們希望探討進一步降低切割出正立方體個數的可能性。

#### 3.2.3.1. 長方體(*m*, *m*+1, *m*+1)

我們先以長方體(9,10,10)爲例來說明。如圖 3-30，我們可以在 (9,10,10)的底部切出長方體(5,10,10)，再以四角切割的概念自上半部(4,10,10)的每個角落各切出一個邊長爲 4 的正立方體。這時候，所留下的是一個十字架型的柱體，而這個柱體的所有邊長的最大公因數爲 2，也就是說，我們可以再切出 1 個(4,2,10)和 2 個(4,4,2)的長方體。換句話說，我們可以引用輾轉相除的概念由這個十字架中切出 1×10+2×4=18 個邊長爲 2 的正立方體。事實上，將(5,10,10)切割後，我們也可以用輾轉相除的概念將剩下來的長方體(4,10,10)切成(4,8,8)和 L 型柱體(8,2,10,10,2,8;4)，也就是說，圖 3-30 的十字架可以看成是一個 L 型柱體。

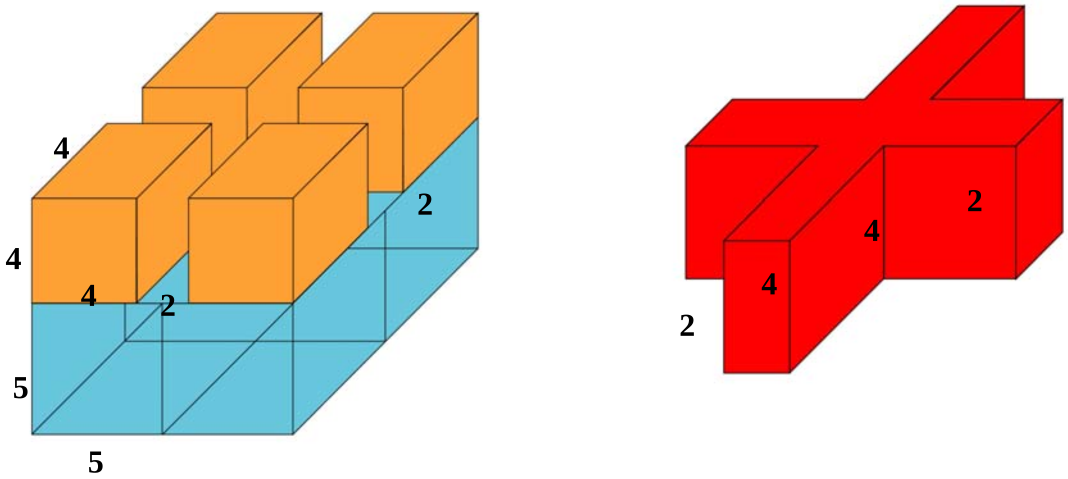


圖 3-30

如果以$S(m,n,\ell)$表示這種切割法所得到正立方體的個數，那麼，我們可以定義：

$$S(9,10,10)=F(5,10,10)+F(4,8,8)+L(8,2,10,10,2,8;4)$$
$$=F(5,10,10)+F(4,8,8)+F(4,2,10)+F(4,8,2)$$

所以，$S(9,10,10)= 26<172$，而$G(9,10,10)$也為 26。

事實上，對長方體$(2k-1,2k,2k)$，$k\ge 2$而言，若將其旋轉成$(2k,2k-1,2k)$後，我們發現這種切割方法與 3.2.2 節的四角切割法的概念是相同的。因為 $m$ 為奇數時，四角切割法與輾轉相除法之間所得正方形個數的比值已接近 1/8，所以我們僅討論 $m$ 為偶數的情形。

對長方體$(2k,2k+1,2k+1)$，$k\ge 2$而言，我們可以先由兩組對角分別切出一對長方體$(2k,k,k)$和$(2k,k-1,k-1)$，並且在中央留下一個不對稱且高為 $2k$ 的十字形柱體，再依 $k$ 為奇數或偶數來做不同的切割：

(1) 當 $k$ 為奇數時，先以(10,11,11)為例來說明。我們可以先由兩組對角分別切出一對$(10,5,5)$、$(10,4,4)$的長方體，並且在中央留下一個不對稱且高為 10 的十字形柱體，我們可以將這個十字形柱體分成 4 個(10,2,4)、1 個(10,2,2)以及 1 個 L 型柱體(1,1,2,2,1,1;10)， 如圖 3-31。

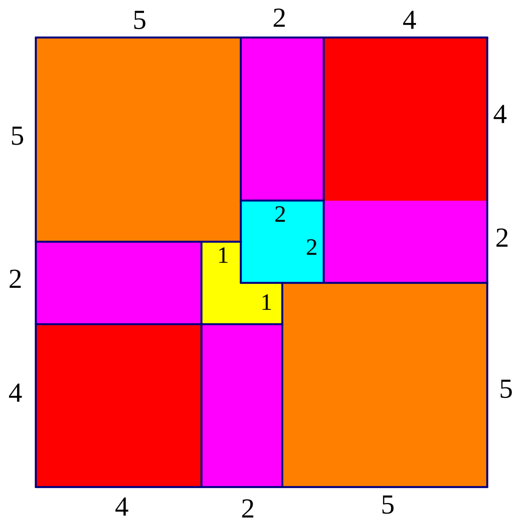


圖 3-31

所以，我們可以定義：

$$S(10,11,11)=2F(10,5,5)+2F(10,4,4)+4F(10,2,4)+F(10,2,2)+L(1,1,2,2,1,1;10)$$
$$=2\times 2+2(2+4)+4\times 10+5+F(10,1,2)+F(10,1,1)$$
$$=4+12+40+5+20+10=91，$$

而$G(10,11,11)=140$。因此，當 $k$ 為奇數，且$k\ge 3$時，我們可以定義：

$$S(2k,2k+1,2k+1)=2F(2k,k,k)+2F(2k,k-1,k-1)$$
$$+4F(2k,2,k-1)+F(2k,2,2)+F(2k,1,2)+F(2k,1,1)$$

$$= \frac{5k^2 + 8k + 17}{2} \text{。}$$

例如: $S(6,7,7) = 46$ ，而 $F(6,7,7) = 79$ ， $G(6,7,7) = G(6,6,7) + F(6,1,7) = 57$ ；

$S(14,15,15) = 166$ ，而 $F(14,15,15) = 407$ ， $G(14,15,15) = 263$ 。

所以，由我們觀察到：

當 $k \geq 3$ 時，即 $m = 6$ ，10，⋯， $S < G < F$ ；

當 $k$ 充份大時， $S \approx \frac{5}{16}F$ ，而 $G \approx \frac{21}{32}F$ 。

也就是說，這個方法確實改進了四角切割法切多割出 $(2k,1,2k+1)$ 的缺點，進而較其更減少約 1/2 個正立方體。

(2) 當 $k$ 為偶數時，我們先以(12,13,13)來說明。如圖 3-32，我們可將十字架型的柱體分成 2 個(12,2,6)、2 個(12,2,5)以及 1 個(12,1,3)的長方體：

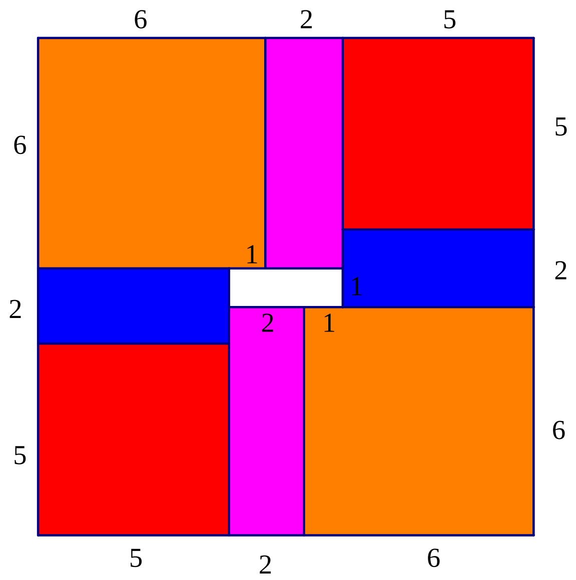


圖 3-32

所以

$$S(12,13,13) = 2F(12,6,6) + 2F(12,5,5) + 2F(12,2,6) + 2F(12,2,5) + F(12,1,3)$$
$$= 228 \text{，}$$

而 $F(12,13,13) = 301$ ， $G(12,13,13) = 229$ 。此外， $F(8,9,9) = 133$ ， $G(8,9,9) = 114$ ，而 $S(8,9,9) = 80$ 。所以，當 $k$ 為偶數時，我們可以定義：

$$S(2k,2k+1,2k+1) = 2F(2k,k,k) + 2F(2k,k-1,k-1)$$
$$+2F(2k,2,k) + 2F(2k,2,k-1) + F(2k,1,3)$$

$$=\frac{7}{2}k^2+18k-6\ 。$$

然而，$S(4,5,5)=44>F(4,5,5)=37$ 。因此，我們觀察到：

當 $k\geq 4$ 時，即 $m=8$ ，12，⋯， $S<G<F$ ；

當 $k$ 充份大時， $S\approx\frac{7}{16}F$ ，而 $G\approx\frac{21}{32}F$ 。

同樣的，這個方法較四角切割法減少約 1/3 個正立方體。

### 3.2.3.2. 長方體(*m*+1, *m*, *m*)

以(11,10,10)爲例，我們可以將這個長方體分成(2,10,10)和(9,10,10)兩個長方體，所以先從(2,10,10)中切出 25 個邊長爲 2 的正立方體，如圖 3-33：

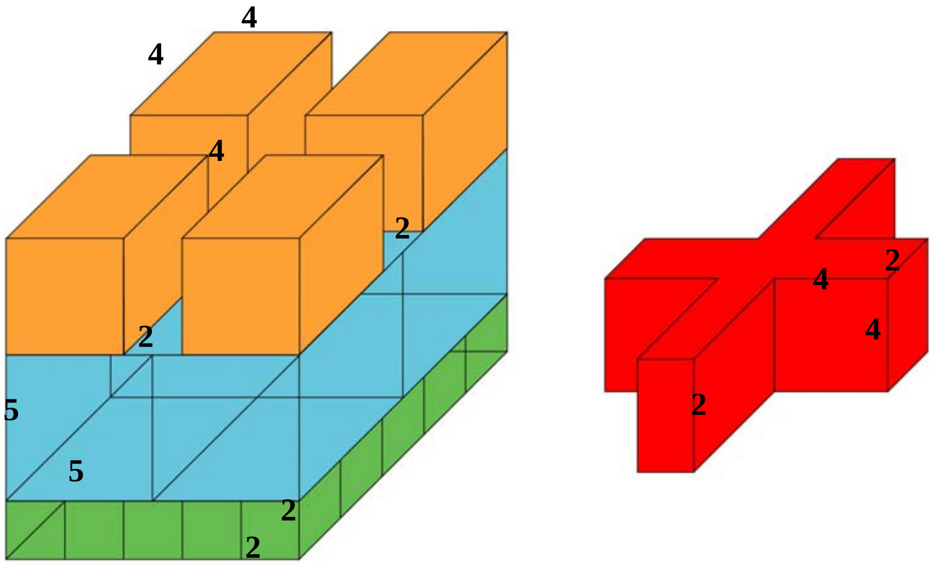


圖 3-33

也就是說， $S(11,10,10)=F(2,10,10)+S(9,10,10)=25+26=51$ ，然而，$F(11,10,10)=101$ ，$G(11,10,10)=32$ 。這似乎導引這種方法的成效優於輾轉相除法，卻劣於四角切割。如同前面的說明，我們將分 $m$ 爲奇數或偶數的情形來討論。

#### 3.2.3.2.1. $(2k+1,2k,2k)$ ， $k\geq 1$

對長方體 $(2k+1,2k,2k)$ 而言，我們可以先由底部切出 4 個邊長爲 $k$ 的正立方體，那麼剩下的長方體 $(k+1,2k,2k)$ 就可以用上面的概念來做四角切割，也就是說，

$$S(2k+1,2k,2k)=F(k,2k,2k)+S(k+1,2k,2k)\ ，$$

其中 $S(k+1,2k,2k)=F(k+1,k+1,k+1)+L(k+1,k-1,2k,2k,k-1,k+1;k-1)$

$$+L(k+1,k-1,2k,2k,k-1,k+1;2)\ ，$$

我們再將 $(k+1,k-1,2k,2k,k-1,k+1;k-1)$ 分成 3 個邊長爲 $k$-1 的正立方體和 2 個長方體

$(k-1,2,k-1)$ ，也將 $(k+1,k-1,2k,2k,k-1,k+1;2)$ 分成 $(2,k-1,k+1)$ 和 $(2,2k,k-1)$ ，所以定義

$$S(2k+1,2k,2k)=4+2F(k-1,2,k-1)+F(2,k-1,k+1)+F(2,2k,k-1) \text{ 。}$$

再依 $k$ 爲奇數或偶數來做不同的切割時：

(1) 當 $k$ 爲奇數，我們可以得到

$$S(k+1,2k,2k)=\frac{1}{2}(5k^2-4k+19) \text{ 。}$$

所以，也就是說，當 $k$ 充份大時，$S\approx\frac{5}{8}F$ ，而 $G\approx\frac{5}{16}F$ 。這確實驗証了這種方法的成效優於輾轉相除法，卻劣於四角切割的猜測。

(2) 當 $k$ 爲偶數，我們可將長方體 $(k-1,2,k-1)$ 分成長方體 $(k-2,2,k-2)$ 和Ｌ型柱體 $(k-2,1,k-1,k-1,1,k-2;2)$ ，也將長方體 $(2,k-1,k+1)$ 分成長方體 $(2,k-2,k)$ 和Ｌ型柱體 $(k,1,2k,k-1,1,k-2;2)$ 後，再將另一個長方體 $(2,2k,k-1)$ 分成 $(k-2,2,2k)$ 和 $(1,2,2k)$ ，因此得到

$$S(2k+1,2k,2k)=k^2+\frac{19}{2}k-1 \text{ 。}$$

我們觀察到：

當 $k$ 爲偶數且 $k\geq 2$ 時，即 $m=5$ ，9，⋯， $S<F$ ；

當 $k\geq 10$ 時， $S<G<F$ ；

當 $k$ 充份大時， $S\approx\frac{1}{4}F$ ，而 $G\approx\frac{5}{16}F$ 。

事實上，這種切割方法僅較四角切割法的個數約減少 20%。

### 3.2.3.2.2. $(2\boldsymbol{k},2\boldsymbol{k}-1,2\boldsymbol{k}-1)$ ， $\boldsymbol{k}\geq 1$

至於長方體 $(2k,2k-1,2k-1)$ ，如果仿照前面的方法，先切出長方體 $(2,2k-1,2k-1)$ 和 $(2k-2,2k-1,2k-1)$ ，並且定義

$$S(2k,2k-1,2k-1)=F(2,2k-1,2k-1)+S(2k-2,2k-1,2k-1) \text{ 。}$$

我們發現 $F(2,2k-1,2k-1)=(k-1)^2+(2k-1)(2k-2)\approx 5k^2$ ，所以無論 $k$ 爲奇數或偶數，可知 $S(2k,2k-1,2k-1) > F(2k,2k-1,2k-1)=4k^2-4k+2$ 。

顯然的，對長方體 $(2k,2k-1,2k-1)$ ，尋找適當的方法來減低正立方體的個數將是未來研究的方向。

# 肆、結論

如何在矩形中切割出最少個正方形是長久以來懸而未決的問題，由文獻的探討中，我們知道引用輾轉相除概念的切割法提供了最少個數的一個上界。雖然，輾轉相除切割法提供了個數計算方法的理論基礎，然而對兩邊近乎相的等大矩形而言，$m \approx n \gg 1$，$F(m,n)$ 卻與 $f(m,n)$ 有著頗大的差距。

我們提出了四角切割的構想，來減低小正方形的個數，並且充份結合四角切割和輾轉相除的優點，來定義出 $G(m,n)$ 以構造出 $f(m,n)$ 的另一個上界。綜合 3.1 節的討論，我們知道：

(1) 當 $m \ge 5$ 時，$G(m,m+1) < F(m,m+1)$；

(2) 當 $m \ge 10$ 且 $m \ne 13$ 時，$G(m,m+2) < F(m,m+2)$；

(3) 當 $m \ge 14$ 時，$G(m,m+3) < F(m,m+3)$；

(4) 當 $m \ge 20$ 且 $m \ne 25, 27$ 時，$G(m,m+3) < F(m,m+3)$。

此外，我們也對一般的矩形，提出結合輾轉相除和四角切割特質的切割策略。

在這個探討中，我們發現除了少數的矩形之外，$G(m,n) < F(m,n)$；況且對大型的矩形來說，$G(m,n)$ 大約為 $F(m,n)$ 的 1/4。因此，對 $f(m,n)$ 來說，$G(m,n)$ 應是目前最好的上界。此外，四角切割法也能大幅減少小正方形的個數，相信這種切割方法也可對業界在空間分割技巧上提供助益。

我們也將輾轉相除和四角切割的概念延伸到長方體的切割。除了對長方體 $(m,n,\ell)$ 依序定義 $f(m,n,\ell)$ 和 $F(m,n,\ell)$ 之外，也對 $(m,m\pm1,m\pm1)$ 的類型定義四角切割法 $G(m,n,\ell)$，並深入探討 $F$ 和 $G$ 之間的關係。綜合 3.2 和 3.3 節的討論，我們知道：

(1) 對 $(1,m,n)$ 而言，因為所能切割出的正立方體的邊長都為 1，因此

$$f(1,m,n) = F(1,m,n)\text{。}$$

(2) 對 $(m,m+1,m+1)$，當 $m \ge 3$ 時，

$$f(m,m+1,m+1) \le G(m,m+1,m+1) < F(m,m+1,m+1)\text{，}$$

其中當 $m$ 充分大時，若 $m$ 為奇數，$G/F \approx 1/8$；當 $m$ 為偶數，$G/F \approx 21/32$。此外，當 $m$ 為偶數時，我們也提出改進的方法使得所切出正立方體的個數較四角切割法至少再減少 1/3。

(3) 對長方體 $(m,m-1,m-1)$ 而言，當 $m$ 為奇數且 $m \ge 5$，或 $m$ 為偶數且 $m \ge 12$ 時，

$$f(m,m-1,m-1) \le G(m,m-1,m-1) < F(m,m-1,m-1)\text{，}$$

其中當 $m$ 充分大時，若 $m$ 為奇數，$G/F \approx 5/16$；若當 $m/2$ 為偶數，$G/F \approx 13/64$；

當 $m/2$ 爲奇數，$G/F \approx 45/128$。此外，當 $m$ 爲奇數且大於 21 時，我們也提出改進的方法使得所切出正立方體的個數較四角切割法至少再減少 1/5。

事實上，當 $m$ 充分大時，對 $(m, m\pm1, m\pm1)$ 而言，$G$ 遠比 $F$ 小的性質與矩形 $(m, m+1)$ 上的性質相同。此外，在 $(m, m+\ell)$ 的矩形中，我們觀察到當 $m \geq 5\ell$ 時，$G$ 也比 $F$ 小，也相信在長方體中應有類似的性質，這將是我們未來的探討方向。

## 參考文獻


1. Bouwkamp, C. J. “On the dissection of rectangles into squares, I.” *Indag*. *Math*. 8, 727-736, 1946.
2. Bouwkamp, C. J. “On the dissection of rectangles into squares, II.” *Indag*. *Math*. 9, 43-56, 1947.
3. Bouwkamp, C. J. “On the dissection of rectangles into squares, III.” *Indag*. *Math*. 9, 57-63, 1947.
4. Tutte, W. “Squaring the squares”, *Canadian J*. *Math*., 197-209, 1950.
5. Kleinhans, J. M., Sigal, G. and Jonannes, “GORDIAN: A new global optimization /rectangle dissection methods for cell placement, “ *ICCAD*, 506-509, 1988.
6. 黃文達,輾轉相除法的連結, http://math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me7/me/me7004.doc.
7. 李永貞,正方形切割和輾轉相除法, http://home.lsjh.tp.edu.tw/claret22/.
8. Honsberger, R, Squaring the sqaures, http://www.math.uwaterloo.ca/navigation /ideas/articles/honsberger2/index.shtml.

評　　語

040419　長方體中切割正立方體之研究

1. 參考資料引用 8 篇重要文獻。

2. 問題明確，實驗探索過程交代得清楚。

3. 牽涉到數學計算法的重要基本法則：輾轉相除法。

4. 作者未能說明使用何種計算機語言來進行計算。