中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040418

費老先生有群蛇，咿呀咿呀喲

學校名稱： 高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高二 張正義	鍾玉才
高二 徐子翔	
高二 楊育宗	
高二 李政興	

關 鍵 詞：蛇填充數、費氏(Fibonacci)數列、數學歸納法

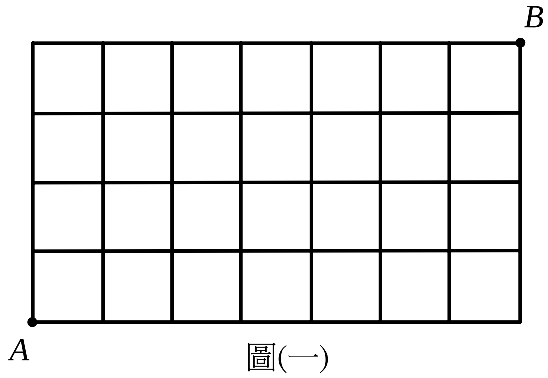
費老先生有群蛇，咿呀咿呀喲

摘要：

於高二下學期排列組合的課程中，一道有關棋盤形街道走捷徑的問題，改變遊戲規則來延伸探討不同狀況。首先，設計電腦程式來確定答案的正確性，以及用數學歸納法找尋其中的規則。最後，在解題的過程中發現其解竟然與費氏($Fibonacci$)數列有著密切的關係，並且從中發現解題策略，進而試圖推測空間狀況是否仍有如此奇妙的結果。

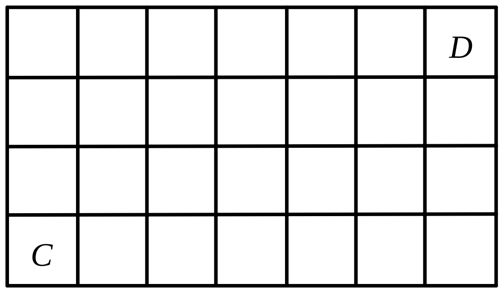
壹、 研究動機：

一、在高二下課程中，有一道走捷徑問題：
如圖(一)，有隻蛇走一4×7棋盤形的街道，試求此蛇由A到B的捷徑走法。



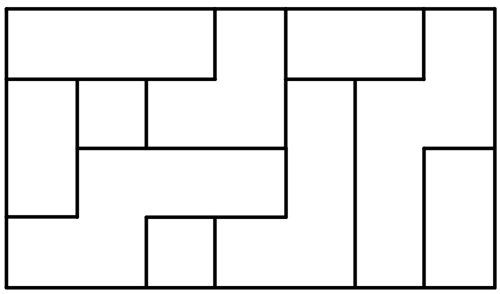
圖(一)

二、若將此題的遊戲規則改成：
此蛇不走街道，改走格子，
即由左下角C格到右上角D格的捷徑走法。
如圖(二)



圖(二)

三、再將上題的遊戲規則改成：
蛇由C格出發，但蛇的走法只能往右→，往上↑，甚至可以停住。若此蛇已停住，將由另一條蛇來走，且不同蛇之間走過之格子不可重疊，換句話來說，此棋盤形格子將由〝一群〞蛇來覆蓋，例如右圖就是其中一種，試求有多少種能將此棋盤形格子覆蓋完畢的方法數。如圖(三)



圖(三)

貳、 研究目的：

一、從最簡單的1×1、1×2、1×3等棋盤形格子〝蛇填充數〞，進而推演至3×1、3×2、3×3 等棋盤形格子〝蛇填充數〞，並利用數學歸納法得到$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$等棋盤形格子〝蛇填充數〞的規律。

二、歸納出$m\times n$、$m\times n+k$等棋盤形格子〝蛇填充數〞的規律，並試著導出與費氏($Fibonacci$)數列的關係。

參、 研究設備：

一、電腦，筆跟紙。

二、*Visual　Basic* (程式設計軟體)。

肆、 研究過程：

一、問題一：

此蛇由 A 到 B 走捷徑，必須走過 7 個橫線及 4 個直線，其方法數即爲此 7 個橫線及 4 個直線的排列數，所以方法數爲 $\dfrac{11!}{7!4!}$ 。

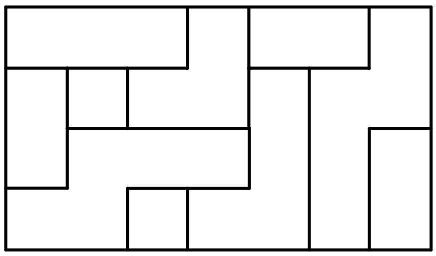
二、問題二：

此蛇由左下角 C 格到右上角 D 格走捷徑，必須向右走過 7 個方格及向上走過 4 個方格，其方法數即爲 $\dfrac{9!}{6!3!}$ 。

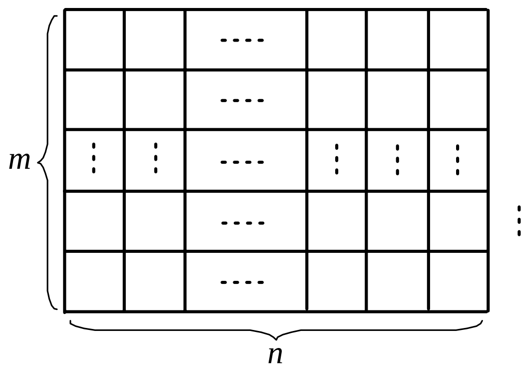
三、問題三：

(一) 名詞解釋：

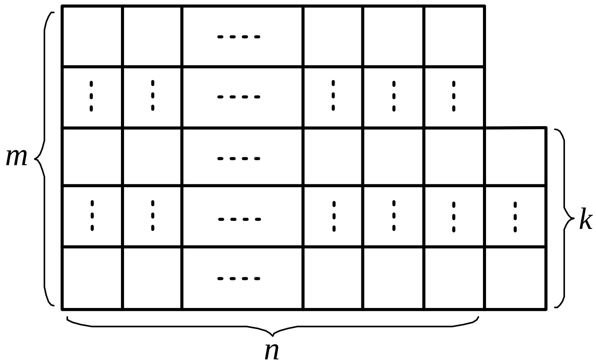
1. 蛇填充數：第一隻蛇由左下角第一格出發，但蛇的走法只能往右 $\rightarrow$，往上 $\uparrow$，甚至可以停住。若此蛇已停住，將由另一隻蛇來走，且不同蛇之間走過之格子不可重疊，換句話來說，此棋盤形的格子將由〝一群〞蛇來覆蓋，例如下圖就是其中一種，而〝蛇填充數〞定義爲將此棋盤形格子覆蓋完畢的所有不同的方法數。



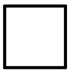
2. $T_{m\times n}$ ：$T_{m\times n}$ 表示將 $m\times n$ 棋盤形格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞，而所謂 $m\times n$ 棋盤形格子爲：

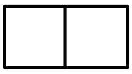
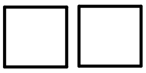
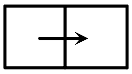


3.$T_{m\times n+k}$ ：$T_{m\times n+k}$ 表示將 $m\times n+k$ 棋盤形格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞，而所謂 $m\times n+k$ 棋盤形格子為：

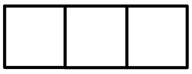
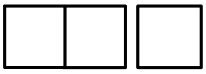
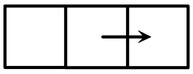


(二) $T_{1\times n}$ ：

1. $T_{1\times 1}$ ：  $T_{1\times 1}=1$

2. $T_{1\times 2}$ ：  $T_{1\times 2}=$  $+$  $=2T_{1\times 1}=2$

3. $T_{1\times 3}$ ：

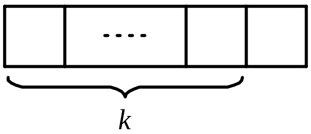
 $T_{1\times 3}=$  $+$  $=2T_{1\times 2}=4$

4. $T_{1\times n}$ ：由 1. 2. 3.推測 $T_{1\times n}=2^{n-1}$ ，$n\geq 1$

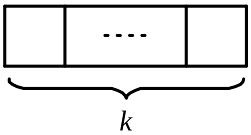
證明：當 $n=1$ 時，左式 $=T_{1\times 1}=1=2^{1-1}=$ 右式，$\therefore n=1$ 成立

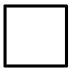
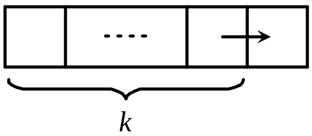
假設 $n=k$ 時成立，即 $T_{1\times k}=2^{k-1}$

則 $n=k+1$ 時，左式 $=T_{1\times(k+1)}$



$T_{1\times(k+1)}$

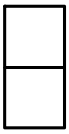
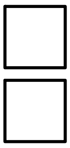
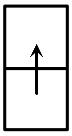
$=$ 

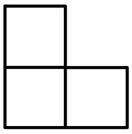
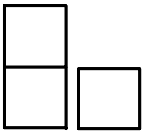
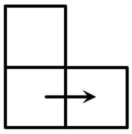
 $+$ 

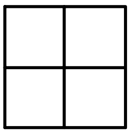
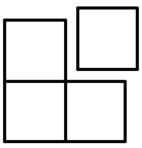
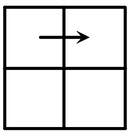
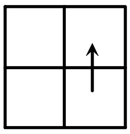
$=2T_{1\times k}=2\times 2^{k-1}=2^{k}=$ 右式

$\therefore$ 由數學歸納法得知 $T_{1\times n}=2^{n-1}$ ，$n\geq 1$ 成立

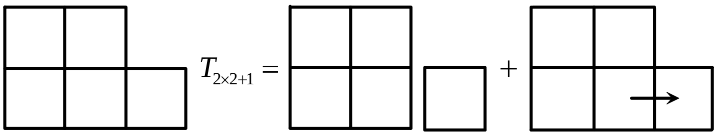
(三) $T_{2\times n}$ ：

1. $T_{2\times 1}$ ：  $T_{2\times 1}=$  $+$  $=2T_{1\times 1}=2\times 1=2$

2. $T_{2\times 1+1}$ ：  $T_{2\times 1+1}=$  $+$  $=T_{2\times 1}+T_{1\times 1}=2+1=3$

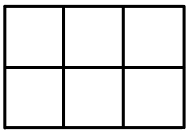
3. $T_{2\times 2}$ ：  $T_{2\times 2}=$  $+$  $+$  $=3T_{2\times 1+1}=9$

4. $T_{2\times2+1}$：



$=T_{2\times2}+2T_{2\times1+1}=9+2\times3=15=5T_{2\times1+1}$

5. $T_{2\times3}$：



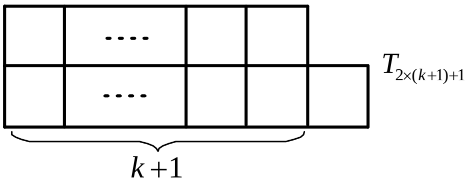
$T_{2\times3}=3T_{2\times2+1}=45=5T_{2\times2}$

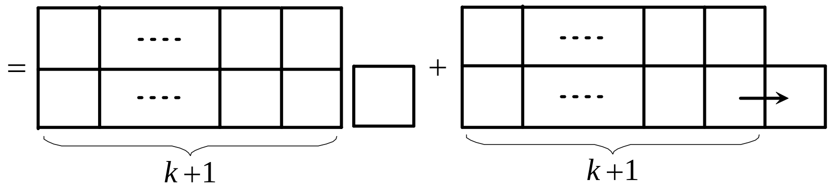
6. $T_{2\times n+1}$：由 2. 4.推測$T_{2\times n+1}=5T_{2\times(n-1)+1}$，$n\geq2$

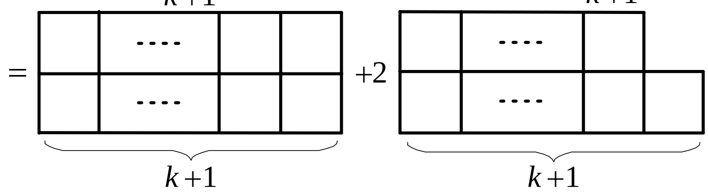
證明：當$n=2$時，左式$=T_{2\times2+1}=5T_{2\times1+1}=$右式，$\therefore n=2$成立

假設$n=k$時成立，即$T_{2\times k+1}=5T_{2\times(k-1)+1}$

則$n=k+1$時，左式$=T_{2\times(k+1)+1}$







$=3T_{2\times k+1}+2T_{2\times k+1}=5T_{2\times k+1}$

$\therefore$由數學歸納法得知$T_{2\times n+1}=5T_{2\times(n-1)+1}$，$n\geq2$成立

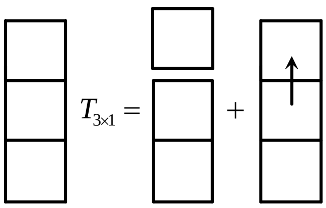
7. $T_{2\times n}$：由 6.推測$T_{2\times n}=5T_{2\times(n-1)}$，$n\geq2$

$\because T_{2\times n}=3T_{2\times(n-1)+1}=3\times5T_{2\times(n-2)+1}=5\times3T_{2\times(n-2)+1}=5T_{2\times(n-1)}$，$\forall n\geq2$

$\therefore T_{2\times n}=5T_{2\times(n-1)}$，$\forall n\geq2$

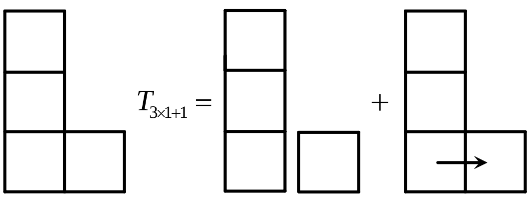
(四) $T_{3\times n}$：

1. $T_{3\times1}$：



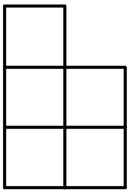
$=2T_{2\times1}=2\times2=4$

2. $T_{3\times1+1}$：

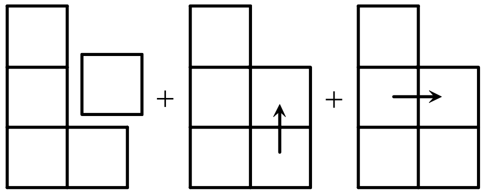


$=T_{3\times1}+T_{2\times1}=2+4=6$

3. $T_{3\times1+2}$ ：

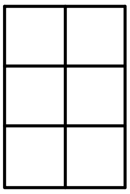


$T_{3\times1+1} =$



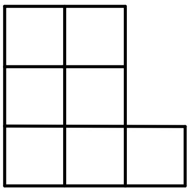
$$=T_{3\times1+1}+T_{3\times1+1}+(T_{1\times2}+T_{1\times1})=6+6+3=15$$

4. $T_{3\times2}$ ：

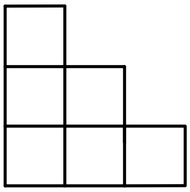


$$T_{3\times2}=3T_{3\times1}=45$$

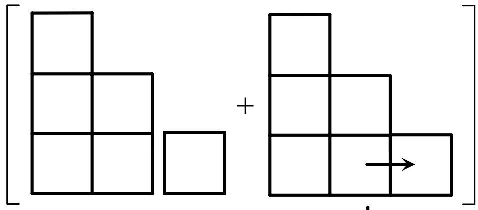
5. $T_{3\times2+1}$ ：



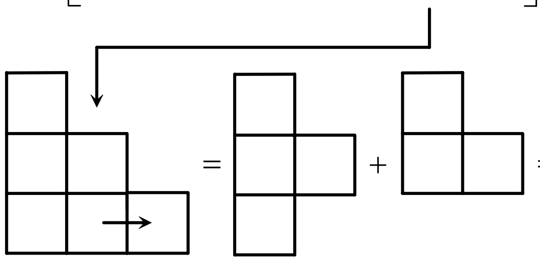
$T_{3\times2+1}=3$



$=3$

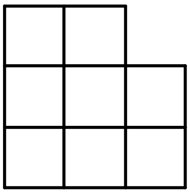


$=3(T_{3\times1+2}+9)=72$



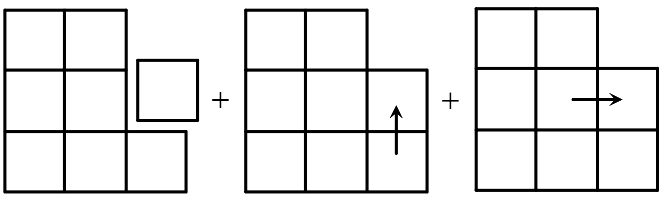
$=6+3=9$

6. $T_{3\times2+2}$ ：

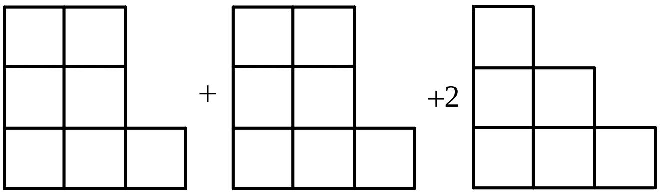


$T_{3\times2+2}$

$=$

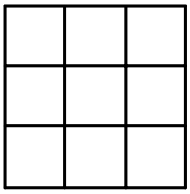


$=$



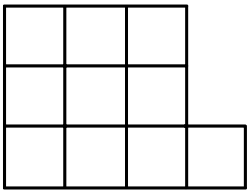
$$=T_{3\times2+1}+T_{3\times2+1}+2\times\frac{1}{3}T_{3\times2+1}=\frac{8}{3}T_{3\times2+1}=\frac{8}{3}\times72=192$$

7. $T_{3\times3}$ ：

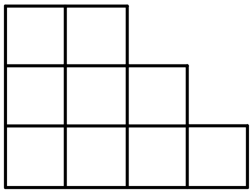


$T_{3\times3}=3T_{3\times2+2}=576$

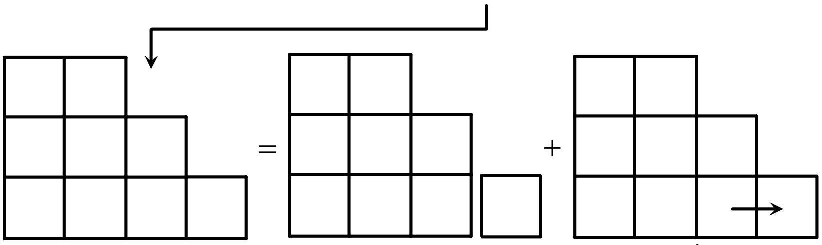
8. $T_{3\times3+1}$ ：



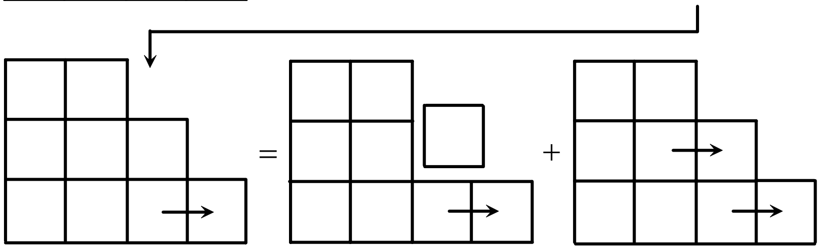
$T_{3\times3+1}=3$



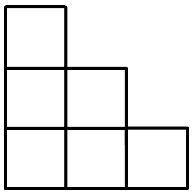
$=3\times312=936$



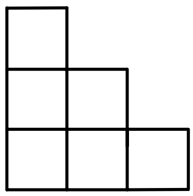
$=192+120=312$



$=3$



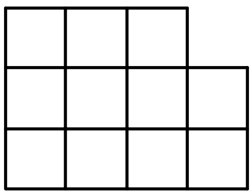
$+2$



$=5\times24=120$

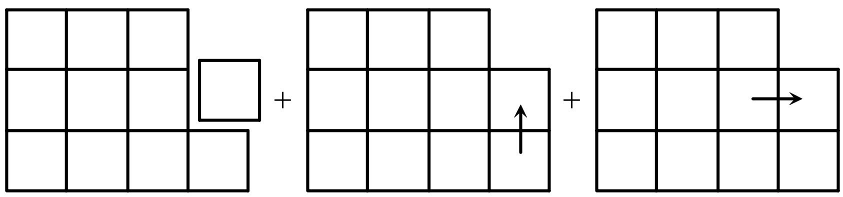
發現$T_{3\times3+1}=13T_{3\times2+1}$

9. $T_{3\times3+2}$ ：

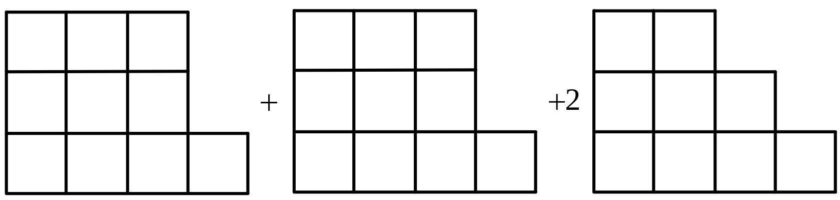


$T_{3\times3+2}$

$=$



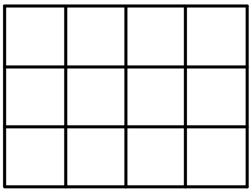
$=$



$$=T_{3\times3+1}+T_{3\times3+1}+2\times\frac{1}{3}T_{3\times3+1}=\frac{8}{3}T_{3\times3+1}=\frac{8}{3}\times936=2496$$

發現$T_{3\times3+2}=13T_{3\times2+2}$

10. $T_{3\times4}$：



$T_{3\times4}=3T_{3\times3+2}=7488$

發現$T_{3\times4}=13T_{3\times3}$

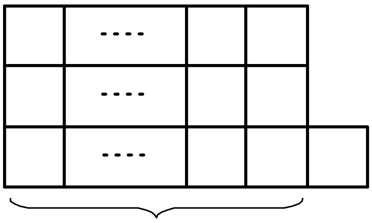
11. $T_{3\times n+1}$：

由 5. 8.推測$T_{3\times n+1}=13T_{3\times(n-1)+1}$，$n\geq3$

證明：當$n=3$時，左式$=T_{3\times3+1}=13T_{3\times2+1}=$右式，$\therefore n=3$成立

假設$n=k$時成立，即$T_{3\times k+1}=13T_{3\times(k-1)+1}$

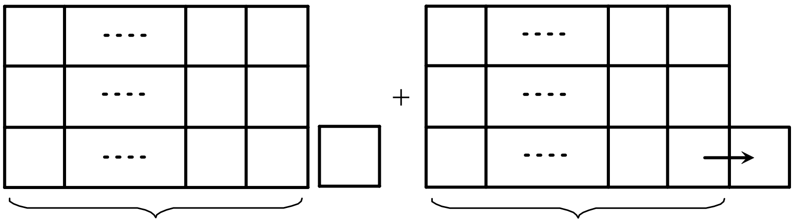
則$n=k+1$時，左式$=T_{3\times(k+1)+1}$



$T_{3\times(k+1)+1}$

$k+1$

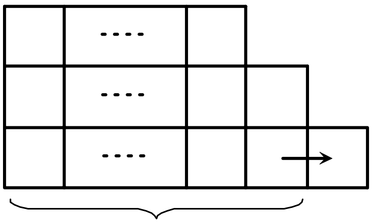
$=$



$+$

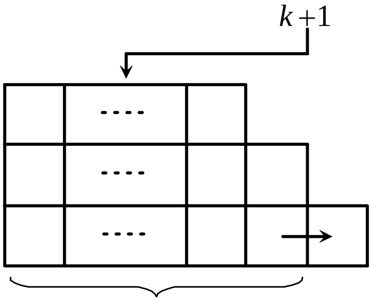
$k+1$　　$k+1$

$=T_{3\times(k+1)}+3$



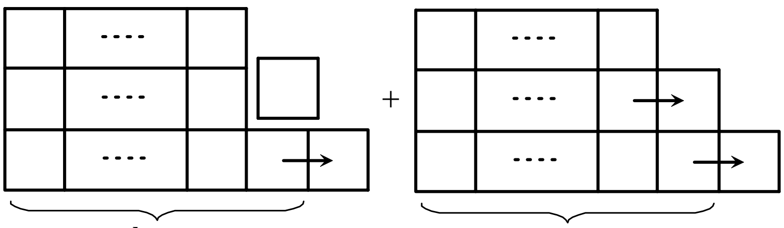
$=8T_{3\times k+1}+3\times\dfrac{5}{3}T_{3\times k+1}=13T_{3\times k+1}$

$k+1$



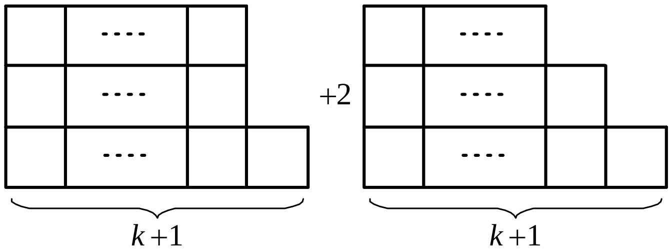
$k+1$

$=$



$+$

$k+1$　　$k+1$

$=$ 

$$=(1+2\times\frac{1}{3})T_{3\times k+1}=\frac{5}{3}T_{3\times k+1}$$

$\therefore$由數學歸納法得知$T_{3\times n+1}=13T_{3\times(n-1)+1}$，$n\geq 3$成立

12. $T_{3\times n+2}$：

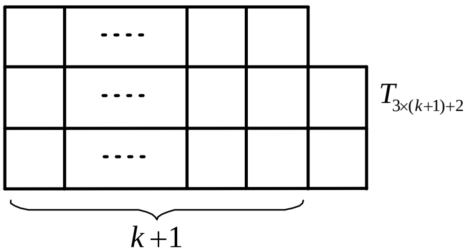
由 6. 9.推測$T_{3\times n+2}=13T_{3\times(n-1)+2}$，$n\geq 3$

證明：當$n=3$時，左式$=T_{3\times3+2}=13T_{3\times2+2}=$右式，$\therefore n=3$成立

假設$n=k$時成立，即$T_{3\times k+2}=13T_{3\times(k-1)+2}$

則$n=k+1$時，

左式$=T_{3\times(k+1)+2}$



$$=\frac{8}{3}T_{3\times(k+1)+1}=\frac{8}{3}\times13T_{3\times k+1}=13\times\frac{8}{3}T_{3\times k+1}=13T_{3\times k+2}$$

$\therefore$由數學歸納法得知$T_{3\times n+2}=13T_{3\times(n-1)+2}$，$n\geq 3$成立

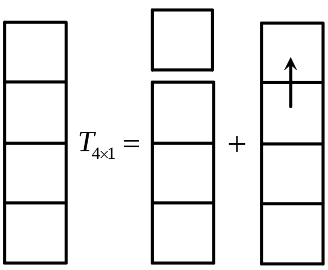
13. $T_{3\times n}$：

$\because T_{3\times(n+1)}=3T_{3\times n+2}=3\times13T_{3\times(n-1)+2}=13\times3T_{3\times(n-1)+2}=13T_{3\times n}$，$\forall n\geq 3$

$\therefore T_{3\times(n+1)}=13T_{3\times n}$，$\forall n\geq 3$

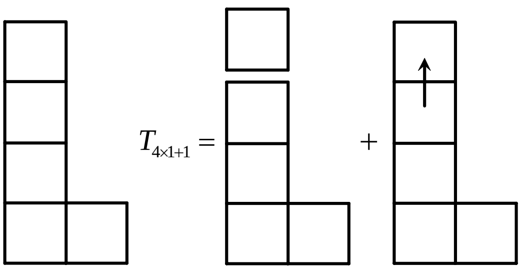
(五) $T_{4\times n}$：

1. $T_{4\times1}$：



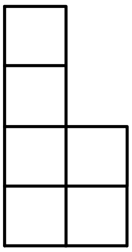
$=2T_{3\times1}=2\times4=8$

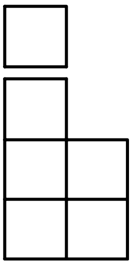
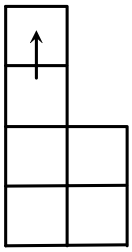
2. $T_{4\times1+1}$：



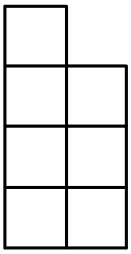
$=2T_{3\times1+1}=12$

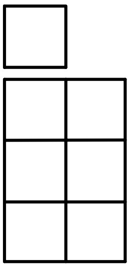
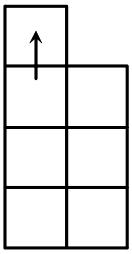
3. $T_{4\times1+2}$:



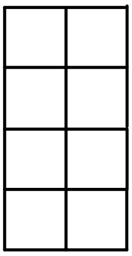
$T_{4\times1+2}=$  $+$  $=2T_{3\times1+2}=30$

4. $T_{4\times1+3}$:



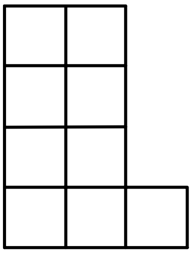
$T_{4\times1+3}=$  $+$  $=T_{3\times2}+2T_{3\times1+2}=45+2\times15=75$

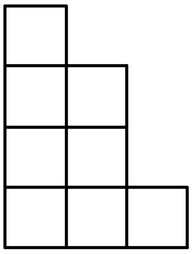
5. $T_{4\times2}$:

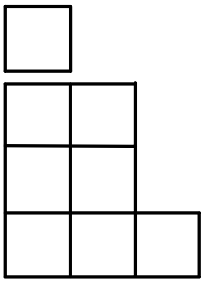
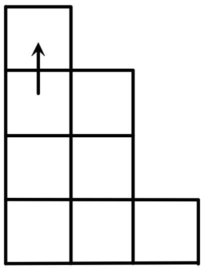


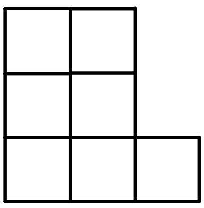
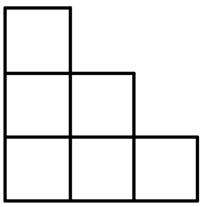
$T_{4\times2}=3T_{4\times1+3}=3\times75=225$

6. $T_{4\times2+1}$:



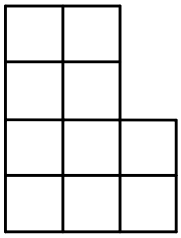
$T_{4\times2+1}=3$ 

$=3\Big[$  $+$  $\Big]$

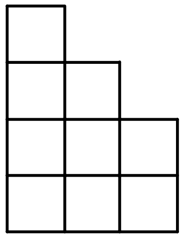
$=3\Big[$  $+2$  $\Big]$

$=3(72+2\times24)=360$

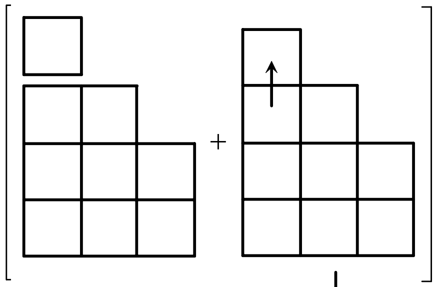
7. $T_{4\times2+2}$:



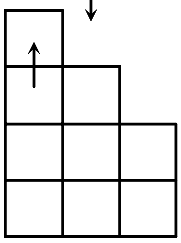
$T_{4\times2+2}=3$



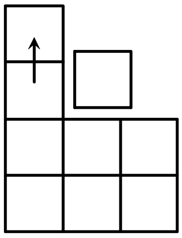
$=3$



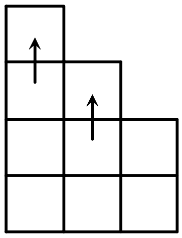
$=3(192+120)=936$



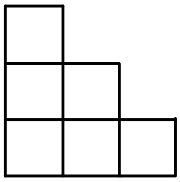
$=$



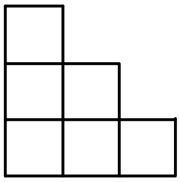
$+$



$=3$

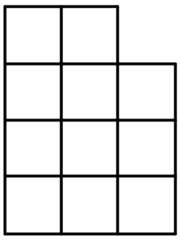


$+2$



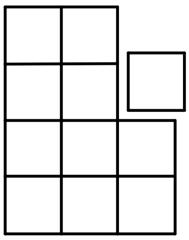
$=72+2\times24=120$

8. $T_{4\times2+3}$:

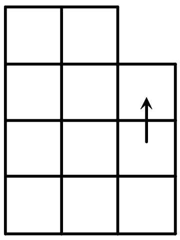


$T_{4\times2+3}$

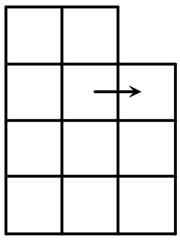
$=$



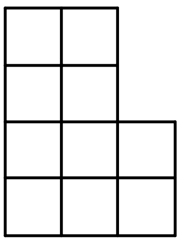
$+$



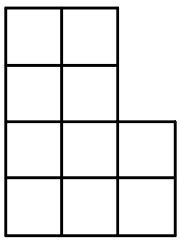
$+$



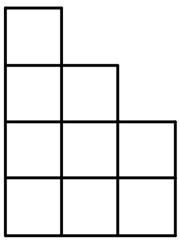
$=$



$+$

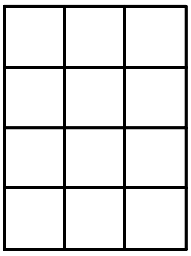


$+2$



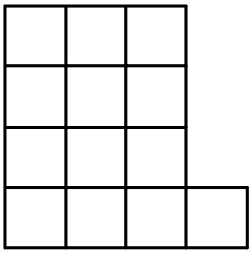
$$=T_{4\times2+2}+T_{4\times2+2}+2\times\frac{1}{3}T_{4\times2+2}=\frac{8}{3}T_{4\times2+2}=\frac{8}{3}\times936=2496$$

9. $T_{4\times 3}$:

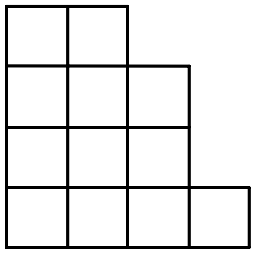


$T_{4\times 3}=3T_{4\times 2+3}=3\times 2496=7488$

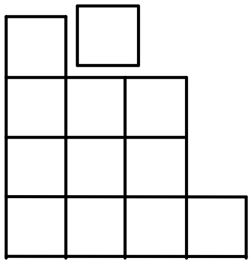
10. $T_{4\times 3+1}$:



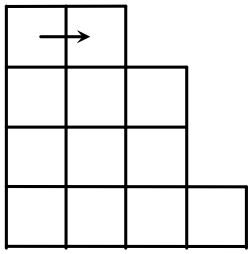
$T_{4\times 3+1}=3$



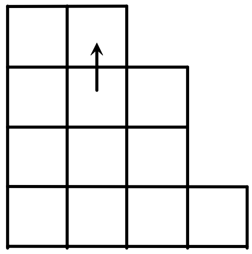
$=3\Big[$



$+$

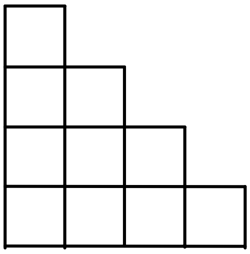


$+$

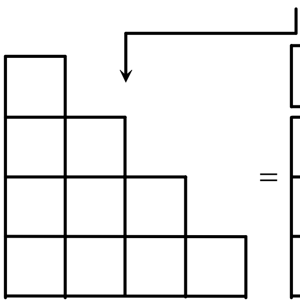


$\Big]$

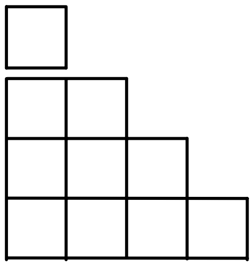
$=3(3+3+2)$



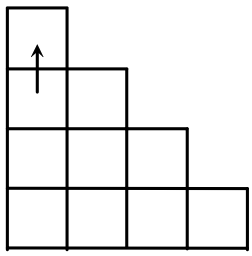
$=3\times 8\times 504=12096$



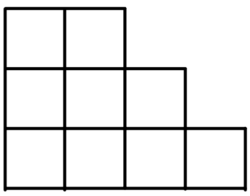
$=$



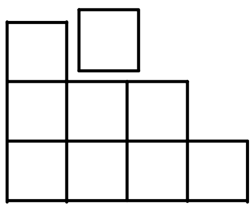
$+$



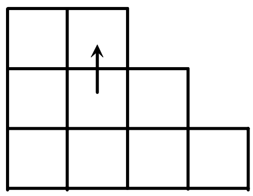
$=$



$+\Big[$

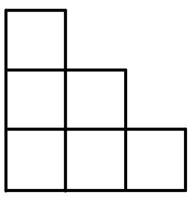


$+$

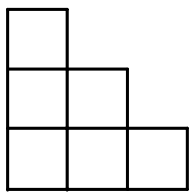


$\Big]$

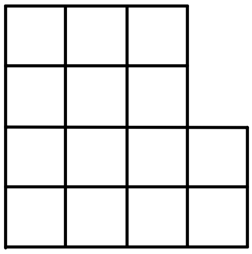
$=\frac{1}{3}T_{4\times 2+2}+\Big[5$

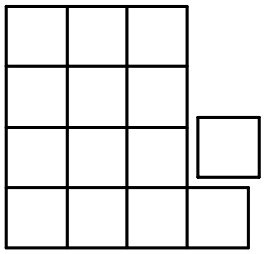
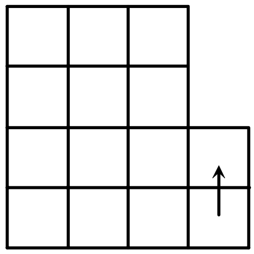
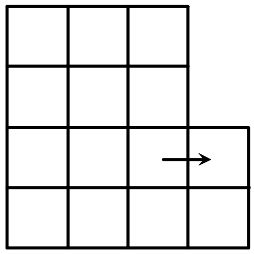


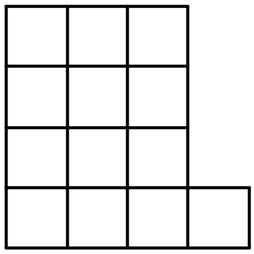
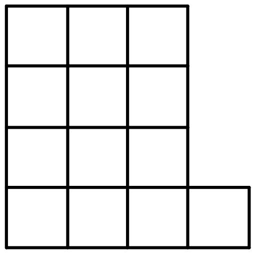
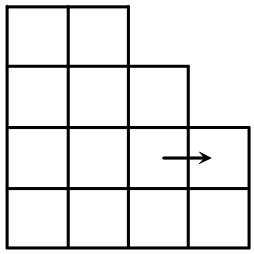
$+3$

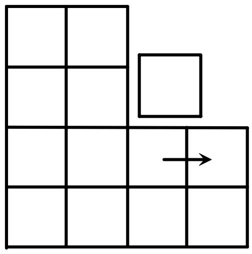
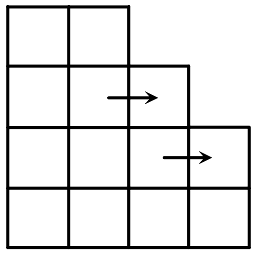


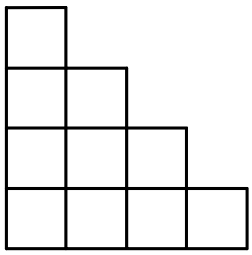
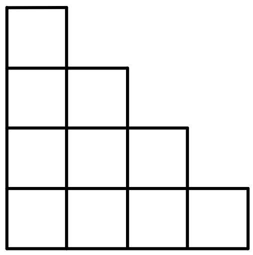
$\Big]=\frac{1}{3}\times 936+8\times 24=504$

11. $T_{4\times3+2}$:  $T_{4\times3+2}$

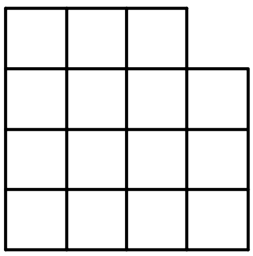
$=$  $+$  $+$ 

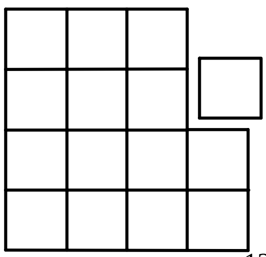
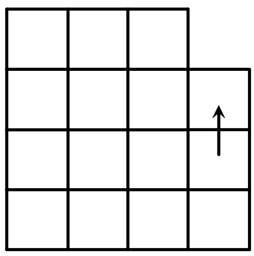
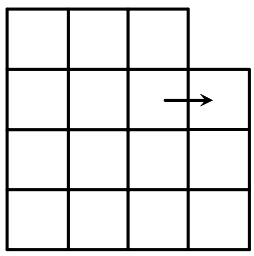
$=$  $+$  $+3$ 

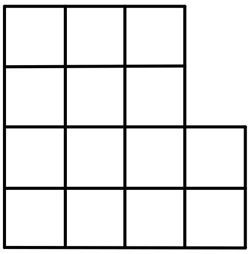
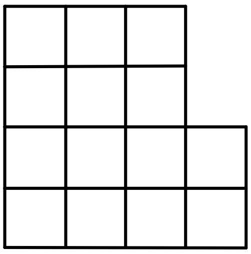
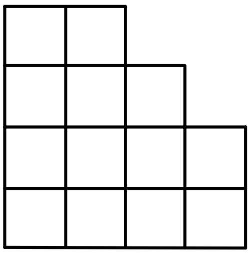
$=T_{4\times3+1}+T_{4\times3+1}+3$ [ $+$ ]

$=2T_{4\times3+1}+3$ [3  $+2$ ]

$=2\times12096+3\times5\times504=31752$

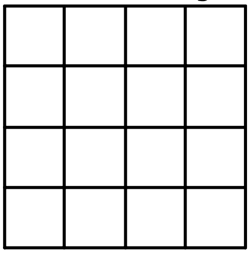
12. $T_{4\times3+3}$:  $T_{4\times3+3}$

$=$  $+$  $+$ 

$=$  $+$  $+2$ 

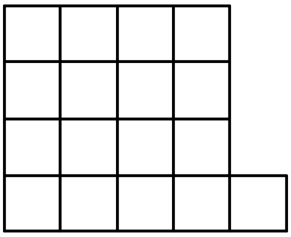
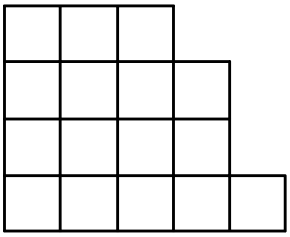
$$=T_{4\times3+2}+T_{4\times3+2}+2\times\frac{1}{3}T_{4\times3+2}=\frac{8}{3}T_{4\times3+2}=84672$$

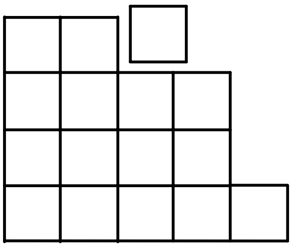
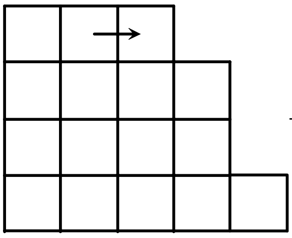
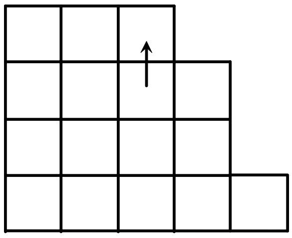
13. $T_{4\times4}$ ：

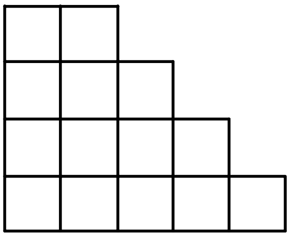
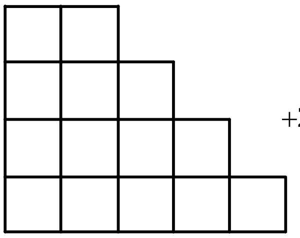
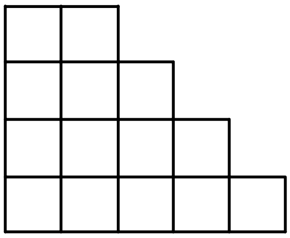


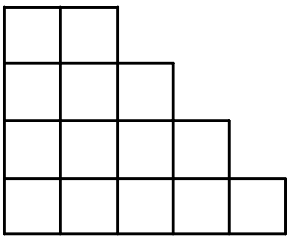
$$T_{4\times4}=3T_{4\times3+3}=3\times84672=254016$$

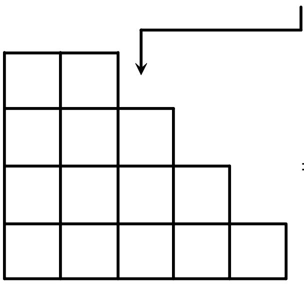
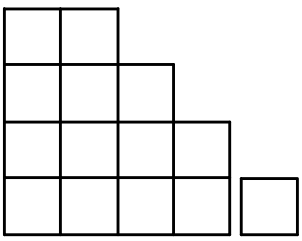
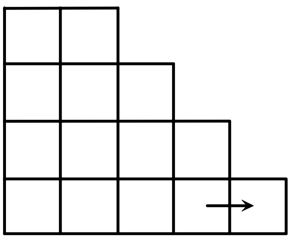
14. $T_{4\times4+1}$ ：

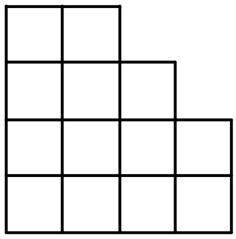
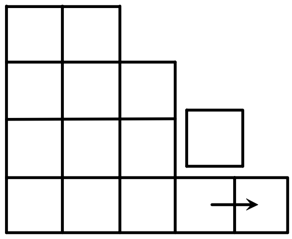
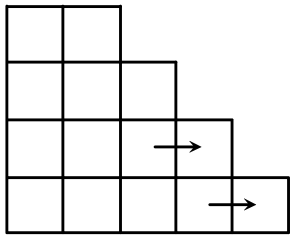
 $T_{4\times4+1}=3$ 

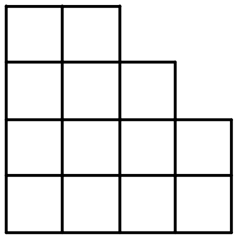
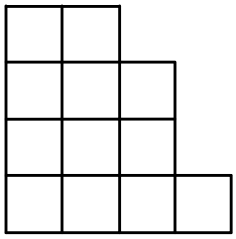
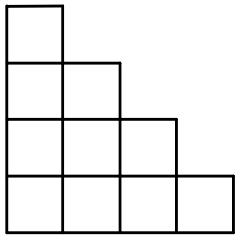
$=3\Big[$  $+$  $+$  $\Big]$

$=3\Big[3$  $+3$  $+2$  $\Big]$

$=3(3+3+2)$  $=3\times8\times17136=411264$

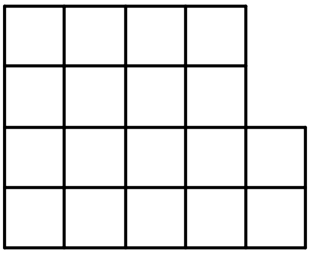
 $=$  $+$ 

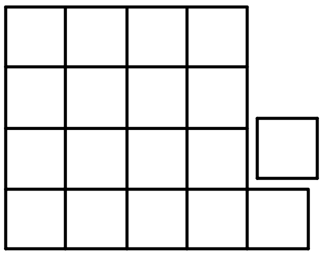
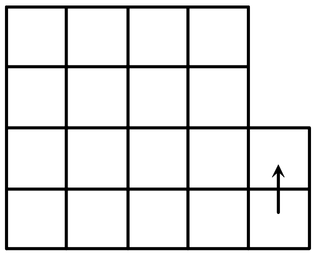
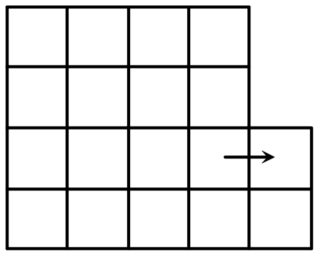
=  +  + 

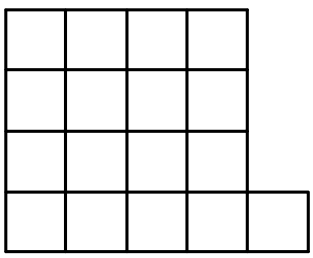
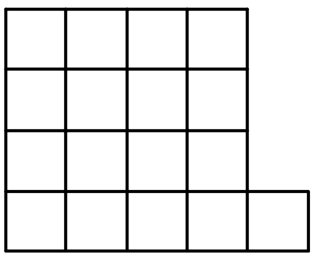
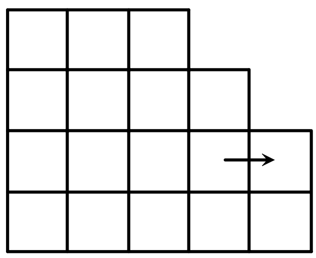
=  +  $+5$ 

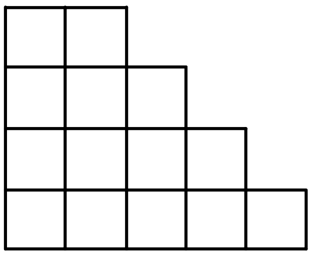
$=\frac{1}{3}T_{4\times3+2}+\frac{1}{3}T_{4\times3+1}+5\times504=\frac{1}{3}\times31752+\frac{1}{3}\times12096+2520=17136$

15. $T_{4\times4+2}$:

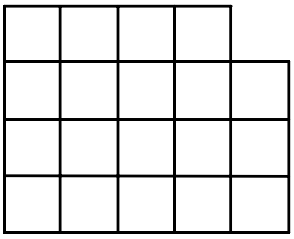
 $T_{4\times4+2}$

=  +  + 

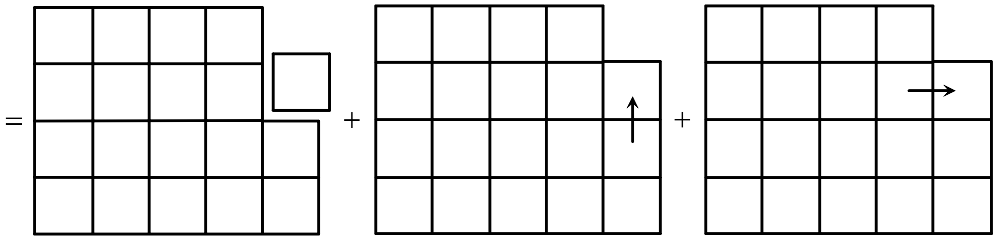
=  +  $+3$ 

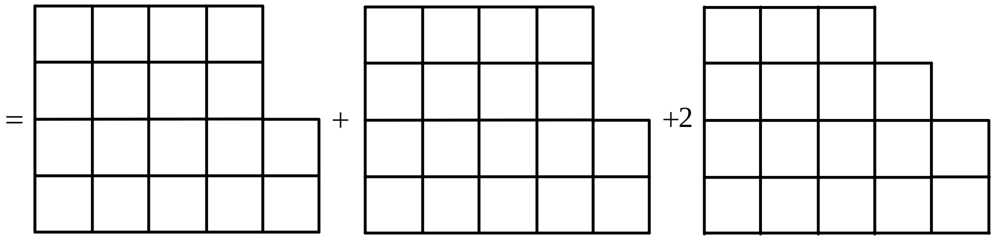
$=T_{4\times4+1}+T_{4\times4+1}+3\times5$  $=2\times411264+3\times5\times17136=1079568$

16. $T_{4\times4+3}$：



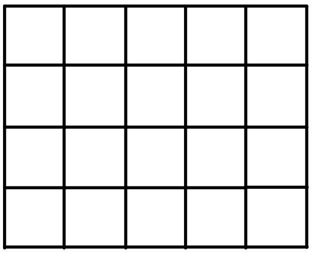
$T_{4\times4+3}$





$$=T_{4\times4+2}+T_{4\times4+2}+2\times\frac{1}{3}T_{4\times4+2}=\frac{8}{3}T_{4\times4+2}=\frac{8}{3}\times1079568=2878848$$

17. $T_{4\times5}$：



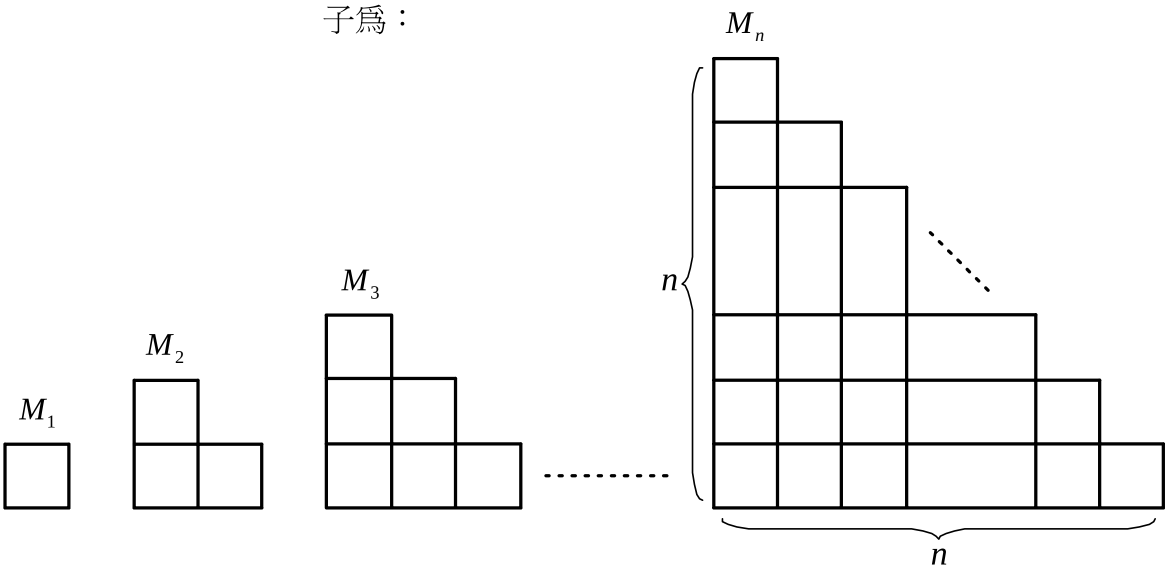
$T_{4\times5}=3T_{4\times4+3}=3\times2878848=8636544$

(六)　由(二)~(五)的演繹過程中，逐步發現其中的規律，以下就是研究過程：

1. M_n：

(1) 名詞解釋：

(a) M_n：將 n 層階梯格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞，而所謂 n 層階梯格子為：

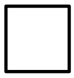


(b) a_{xy}：由左至右數來第 x 行，由下至上第 y 列之格子

(c) 費氏 $(Fibonacci)$ 數列 $<F_n>$：1，1，2，3，5，…，它的遞迴關係爲：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n\geq 1$

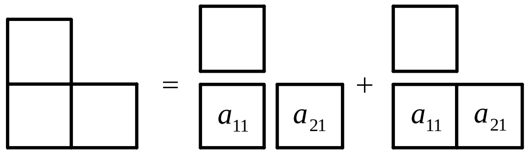
(2) 證明：$M_n=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n}$ ，$n\geq 1$

證明： M_1：



$M_1=1=F_2$

M_2：



M_2 可由 M_1 加上 a_{12} 與 a_{21} 而得：

狀況甲：當 a_{11} 與 a_{21} 不相連時，a_{12} 可與 a_{11} 相連或不連

$\therefore$ 有 $(1+1)=2=F_3$ 種情形

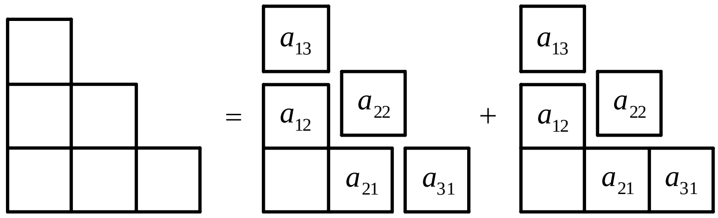
狀況乙：當 a_{11} 與 a_{21} 相連時，a_{12} 只可與 a_{11} 不相連

$\therefore$ 有 $1=F_2$ 種情形

又每一種情形之蛇塡充數爲 M_1

$\therefore M_2=(F_2+F_3)M_1=F_4M_1=F_2\times F_4$

M_3：



M_3 可由 M_2 加上 a_{13} 與 a_{22} 與 a_{31} 而得：

狀況甲：當 a_{21} 與 a_{31} 不相連時：

(a) a_{22} 與 a_{21} 相連，即 a_{12} 與 a_{22} 不相連即可視爲與 M_2 之狀況甲相同

$\therefore$ 有 F_3 種情形

(b) a_{22} 與 a_{21} 不相連，則可視爲由 a_{12} 加上 a_{13} 與 a_{22} ，亦即與由 M_1 推得 M_2 之狀況相同

$\therefore$ 有 F_2+F_3 兩種情形

狀況乙：當 a_{21} 與 a_{31} 相連時，即 a_{22} 與 a_{21} 不相連，則可視爲由 a_{12} 加上 a_{13} 與 a_{22} ，亦即與 M_1 推得 M_2 之狀況相同

$\therefore$ 有 F_2+F_3 兩種情形

又每種情形之蛇塡充數爲 M_2

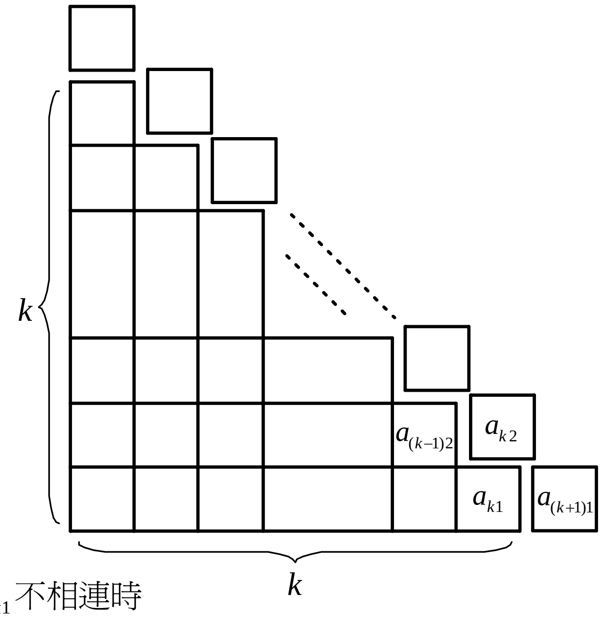
$$\therefore M_3=\left[F_3+(F_2+F_3)\right]M_2+(F_2+F_3)M_2$$
$$=(F_3+F_4)M_2+F_4M_2=(F_5+F_4)M_2=F_2\times F_4\times F_6$$

用數學歸納法證明其一般式($M_n=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n}$ ，$n\geq 1$)

當 $n=1$ 時，$M_1=F_2$

假設 $\forall n\leq k$ 成立，即

$$M_k=F_{2k-1}M_{k-1}+F_{2k-2}M_{k-1}=F_{2k}M_{k-1}=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2k}$$



則當$n=k+1$時

左式$=M_{k+1}$

狀況甲：當$a_{(k+1)1}$與a_{k1}不相連時

(*a*) a_{k2}與a_{k1}相連，即$a_{(k-1)2}$與a_{k2}不相連，可視為與M_{k-1}之狀況甲相同

$\therefore$有F_{2k-1}種情形

(*b*) a_{k2}與a_{k1}不相連，則與由M_{k-1}推得M_k之狀況相同

$\therefore$有$(F_{2k-1}+F_{2k-2})$種情形

狀況乙：當$a_{(k+1)1}$與a_{k1}相連時，即a_{k2}與a_{k1}不相連，則與由M_{k-1}推得M_k之狀況相同

$\therefore$有$(F_{2k-1}+F_{2k-2})$種情形

又每種情形之蛇填充數為M_k

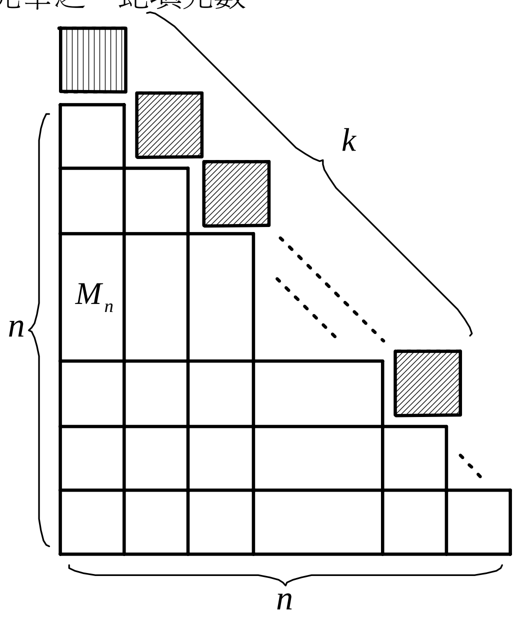
$$\begin{aligned}M_{k+1} &= \left[F_{2k-1}+(F_{2k-2}+F_{2k-1})\right]M_k+(F_{2k-2}+F_{2k-1})M_k \\ &= (F_{2k-1}+F_{2k})M_k+F_{2k}M_k=(F_{2k+1}+F_{2k})M_k \\ &= F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2k}\times F_{2k+2}\end{aligned}$$

$\therefore$由數學歸納法得證$M_n=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n}$

2. A_k：

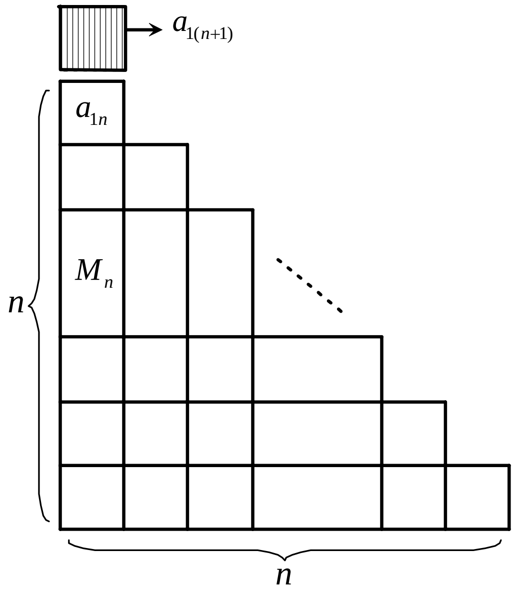
(1) 名詞解釋：

A_k：在n層階梯格子上從第一列上方往右下增添k個方格數(如圖)，且將此棋盤形格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞。



(2) 證明： $A_k = F_{2k+1}M_n$ ， $n \ge k \ge 1$

證明：當 $k=1$ 時，左式 $= A_1$



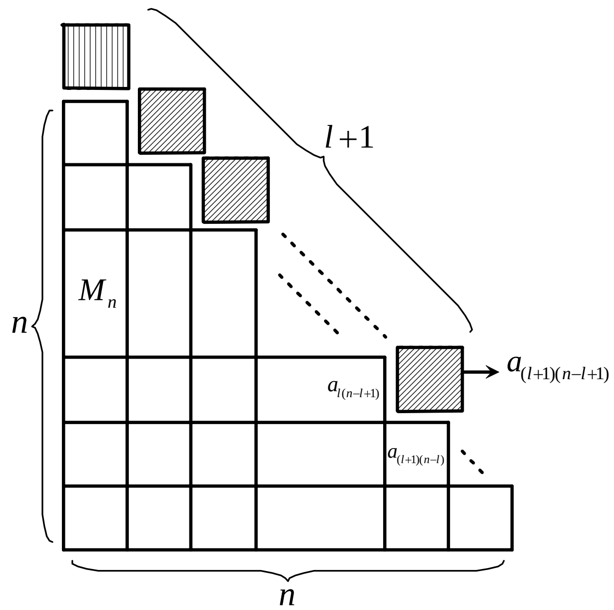
$A_1 = 2M_n = F_3M_n$

$\therefore k=1$ 時成立

假設 $k=l$ 時成立，即 $A_l = F_{2l+1}M_n$

則當 $k=l+1$ 時

左式 $= A_{l+1}$



狀況甲： $a_{(l+1)(n-l)}$ 與 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 相連時，情況與 A_l 同，有 F_{2l+1} 種情形

狀況乙：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 完全不與其他相連時，則情況與 A_l 同，有 F_{2l+1} 種情形

狀況丙：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 與 $a_{l(n-l+1)}$ 相連時，則爲 A_l 扣掉 $a_{l(n-l+1)}$ 與 $a_{l(n-l+2)}$ 相連，有 $(F_{2l+1} - F_{2l-1})$ 種情形

又每種情形之蛇填充數爲 M_n

$$
\begin{aligned}
A_{l+1} &= (3F_{2l+1}-F_{2l-1})M_n = (F_{2l+3}-F_{2l+3}+3F_{2l+1}-F_{2l-1})M_n \\
&= \left[F_{2l+3}-(F_{2l+2}+F_{2l+1})+3F_{2l+1}-F_{2l-1}\right]M_n \\
&= \left[F_{2l+3}-(F_{2l+1}+F_{2l})+2F_{2l+1}-F_{2l-1}\right]M_n \\
&= \left[F_{2l+3}-(F_{2l-1}+F_{2l})+F_{2l+1}\right]M_n = F_{2l+3}M_n
\end{aligned}
$$

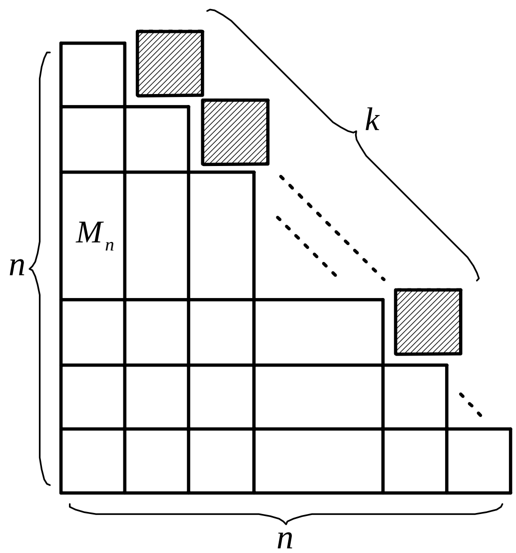
$\therefore$由數學歸納法得證 $A_k = F_{2k+1}M_n$ ， $n \ge k \ge 1$

(3) 令a_k表示在n層階梯格子斜向增加k個格子($n \ge k \ge 1$)〔其中若$k=1$，表示此格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)；若$k \ge 2$ ，表示左上方第一個格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)，其他$k-1$個格子與其他格子的關係則無限制。〕,將其完全覆蓋完畢之蛇填充數與原來n層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由**(2)**可得$a_k = F_{2k+1}$。

3. B_k ：

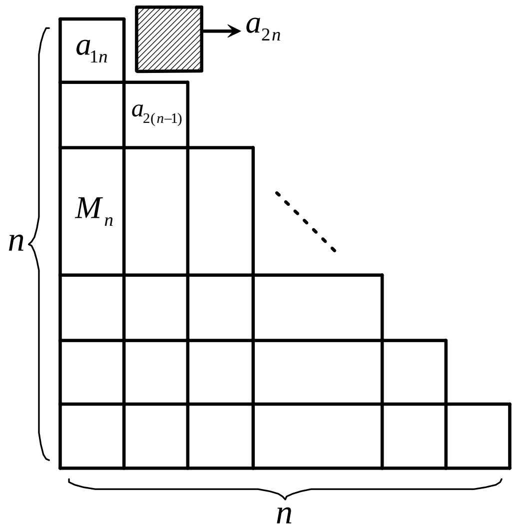
(1) 名詞解釋：

B_k ：在n層階梯格子上從第二列上方往右下增添k個方格數(如圖)，且將此棋盤形格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞。



(2) 證明： $B_k = F_{2k+2}M_n$ ， $n > k \ge 1$

證明：當$k=1$時，左式$= B_1$



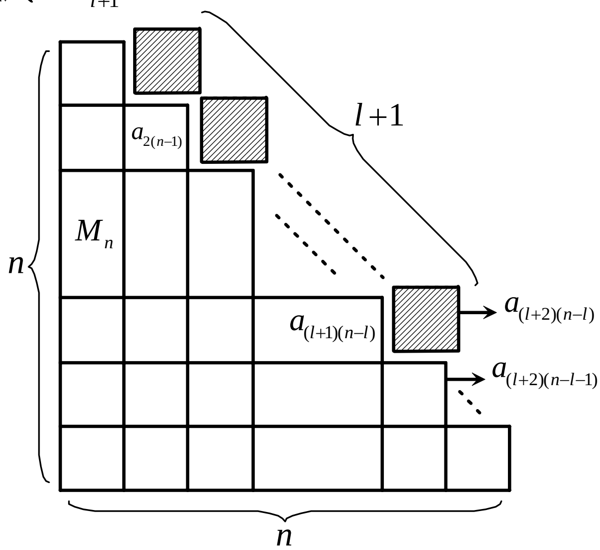
$B_1 = 3M_n = F_4 M_n$

$\therefore k = 1$時成立

假設$k = l$時成立，即$B_l = F_{2l+2} M_n$

則當$k = l + 1$時

左式$= B_{l+1}$



狀況甲：$a_{(l+2)(n-l-1)}$與$a_{(l+2)(n-l)}$相連時，情況與B_l同，有F_{2l+2}種情形

狀況乙：當$a_{(l+2)(n-l)}$完全不與其他相連時，情況與B_l同，有F_{2l+2}種情形

狀況丙：當$a_{(l+2)(n-l)}$與$a_{(l+1)(n-l)}$相連時，則為B_l扣掉$a_{(l+1)(n-l)}$與$a_{(l+1)(n-l+1)}$相連，有($F_{2l+2} - F_{2l}$)種情形

又每種情形之蛇填充數為M_n

$\therefore\ B_{l+1} = (3F_{2l+2} - F_{2l})M_n = F_{2l+4} M_n$

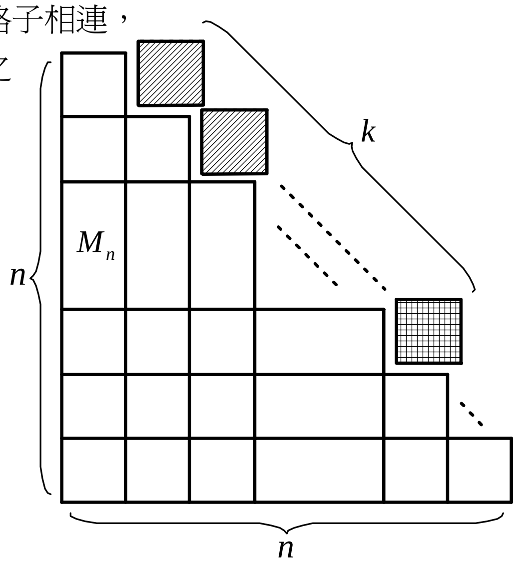
$\therefore$由數學歸納法得證$B_k = F_{2k+2} M_n$，$n > k \ge 1$

(3) 令b_k表示在n層階梯格子斜向增加k個格子($n > k \ge 1$)〔其中此k個格子與其他格子的關係並無限制〕，將其完全覆蓋完畢之蛇填充數與原來n層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由**(2)**可得$b_k = F_{2k+2}$。

4. C_k：

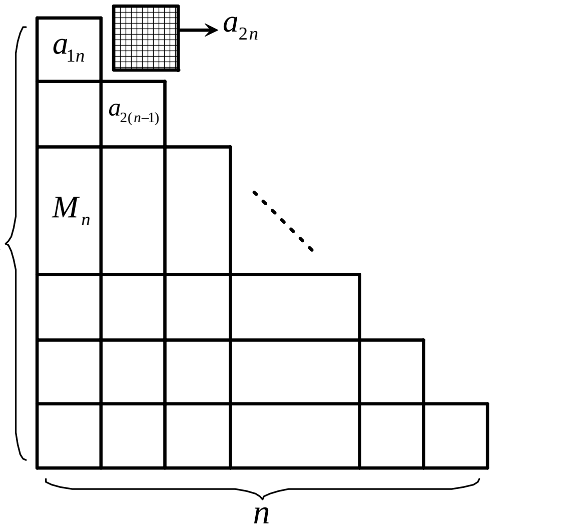
(1) 名詞解釋：

C_k：在n層階梯格子上從第二列上方往右下增添k個方格數，但於右下最後增添的方格子不可與下方格子相連，如此將此棋盤形格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞稱之為C_k。



(2)證明：$C_k = F_{2k+1}M_n$ ， $n \ge k \ge 1$

證明：當$k=1$時，左式$=C_1$



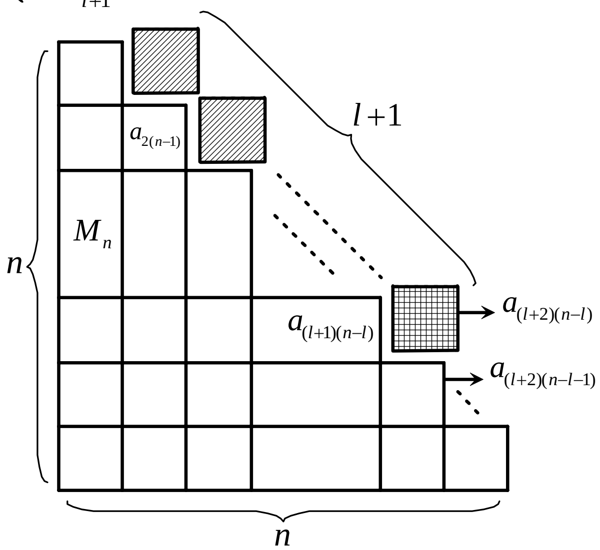
$C_1 = 2M_n = F_3 M_n$

$\therefore k=1$時成立

假設$k=l$時成立，即$C_l = F_{2l+1}M_n$

則當$k=l+1$時

左式$=C_{l+1}$



狀況甲：當$a_{(l+2)(n-l)}$完全不與其他相連時，情況與B_l同，有F_{2l+2}種情形

狀況乙：當$a_{(l+2)(n-l)}$與$a_{(l+1)(n-l)}$相連時，情況與C_l同，有F_{2l+1}種情形又每種情形之蛇填充數爲M_n

$\therefore C_{l+1} = (F_{2l+2}+F_{2l+1})M_n = F_{2l+3}M_n$

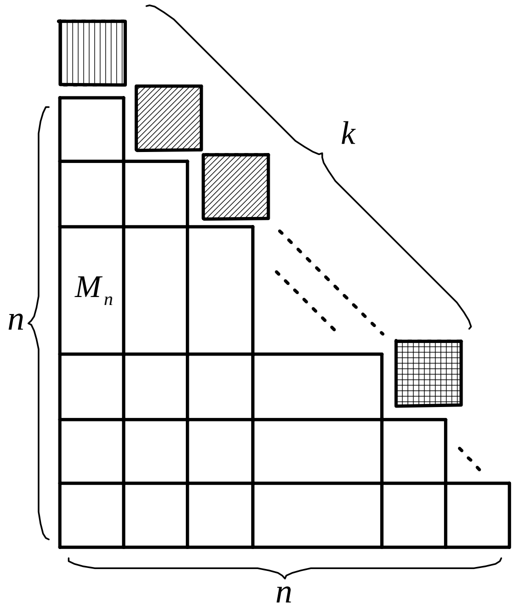
$\therefore$由數學歸納法得證$C_k = F_{2k+1}M_n$ ， $n \ge k \ge 1$

(3) 令c_k表示在n層階梯格子斜向增加k個格子($n \ge k \ge 1$)〔其中若$k=1$，表示此格子不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)；若$k \ge 2$，表示右下方最後一個格子不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)，其他$k-1$個格子與其他格子的關係則無限制。〕，將其完全覆蓋完畢之蛇填充數與原來n層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由**(2)**可得$c_k = F_{2k+1}$。

5. D_k ：

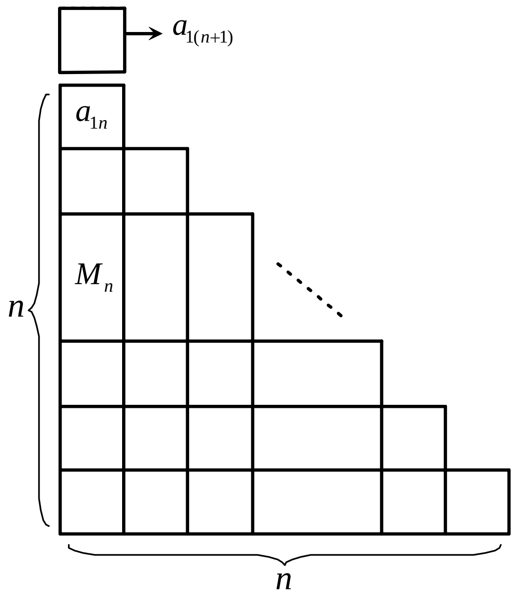
(1) 名詞解釋：

D_k ：在 n 層階梯格子上從第一列上方往右下增添 k 個方格數(如圖)，但於右下最後增添的方格子不可與下方格子相連，如此將此棋盤形格子覆蓋完畢之〝蛇填充數〞稱之為 D_k 。



(2) 證明： $D_k = F_{2k} M_n$ ， $n+1 \geq k \geq 1$

證明：當 $k=1$ 時，左式 $= D_1$



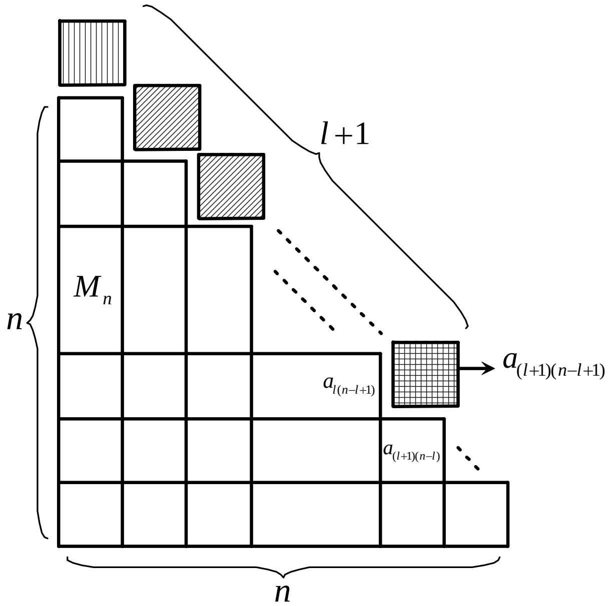
$D_1 = M_n = F_2 M_n$

$\therefore k=1$ 時成立

假設 $k=l$ 時成立，即 $D_l = F_{2l} M_n$

則當 $k=l+1$ 時

左式 $= D_{l+1}$



狀況甲：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 完全不與其他相連時，則情況與 A_l 同，有 F_{2l+1} 種情形

狀況乙：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 與 $a_{l(n-l+1)}$ 相連時，則情況與 D_l 同，有 F_{2l} 種情形

又每種情形之蛇填充數為 M_n

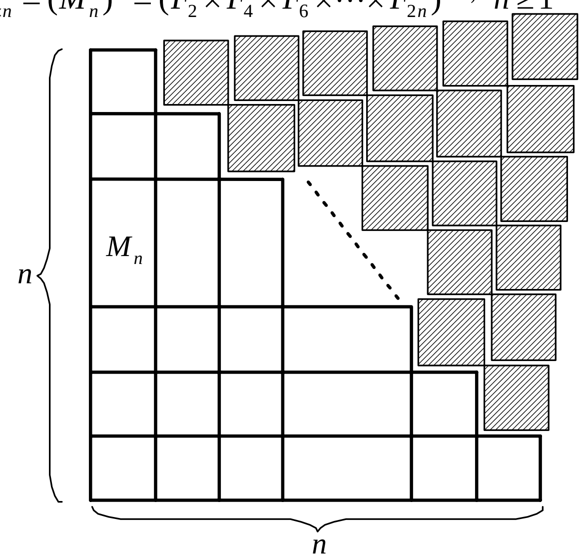
$\therefore D_l = (F_{2l+1} + F_{2l})M_n = F_{2l+2}M_n$

$\therefore$ 由數學歸納法得證 $D_k = F_{2k}M_n$ ，$n+1 \geq k \geq 1$

(3) 令 d_k 表示在 n 層階梯格子斜向增加 k 個格子($n+1 \geq k \geq 1$)〔其中若 $k=1$，表示此格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)且不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)；若 $k \geq 2$，表示左上方第一個格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)，右下方最後一個格子不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)，其他 $k-2$ 個格子與其他格子的關係則無限制。〕，將其完全覆蓋完畢之蛇填充數與原來 n 層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由**(2)**可得 $d_k = F_{2k}$ 。

6. 證明：$T_{n\times n} = (M_n)^2 = (F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2n})^2$ ，$n \geq 1$

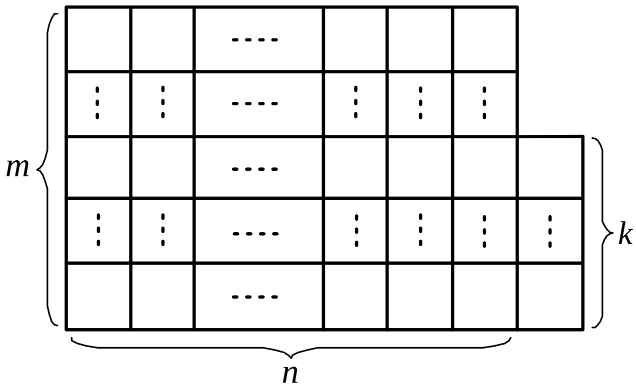
證明：



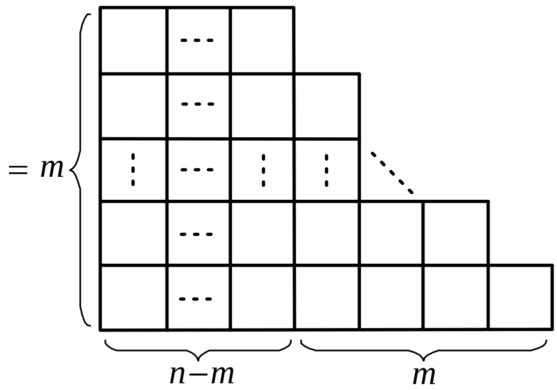
$$
\begin{aligned}
T_{n\times n} &= M_n(b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}\times\cdots\times b_1)\\
&= M_n(F_{2n}F_{2n-2}F_{2n-4}\times\cdots\times F_4)\\
&=(M_n)^2=(F_2F_4F_6\times\cdots\times F_{2n})^2
\end{aligned}
$$

7. 證明：$T_{m\times n+k}=c_mT_{m\times(n-1)+k}=F_{2k+1}T_{m\times(n-1)+k}$ ，$n>m>k\geq 1$

證明：**(1)** $T_{m\times n+k}=c_mT_{m\times(n-1)+k}=F_{2k+1}T_{m\times(n-1)+k}$ ，$n>m>k+1\geq 2$



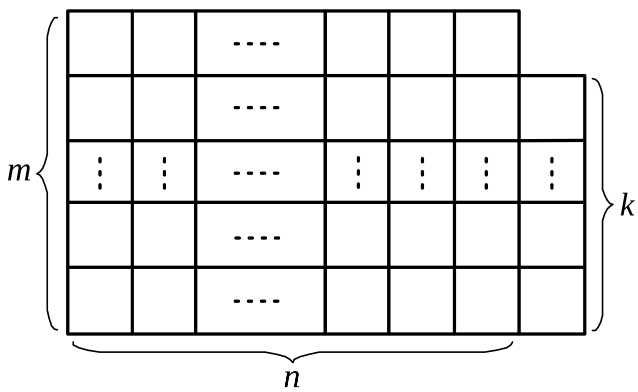
$T_{m\times n+k}$



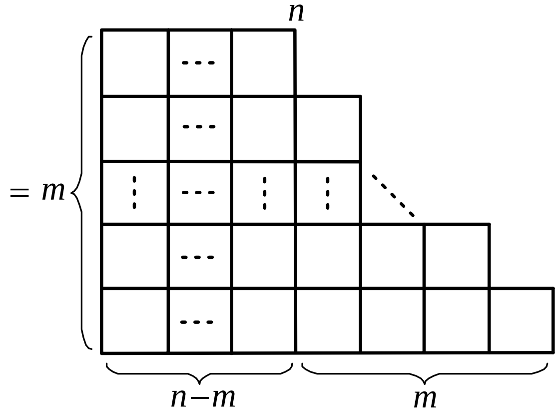
$\times c_mb_{m-1}b_{m-2}\cdots b_{m-k+2}b_{m-k+1}\times b_{m-k-1}b_{m-k-2}\cdots b_3b_2$

$=c_mT_{m\times(n-1)+k}$

(2) $T_{m\times n+k}=c_mT_{m\times(n-1)+k}=F_{2k+1}T_{m\times(n-1)+k}$ ，$n>m=k+1\geq 2$



$T_{m\times n+k}$



$\times c_mb_{m-1}b_{m-2}\cdots b_{m-k+2}b_{m-k+1}\times b_{m-k-1}b_{m-k-2}\cdots b_3b_2$

$=c_mT_{m\times(n-1)+k}$

綜合**(1)(2)**可得$T_{m\times n+k}=c_mT_{m\times(n-1)+k}=F_{2k+1}T_{m\times(n-1)+k}$ ，$n>m>k\ge 1$

8. 證明：$T_{m\times(m+1)}=c_mT_{m\times m}=F_{2m+1}T_{m\times m}$ ，$m\ge 1$

證明：$T_{m\times(m+1)}=M_m(c_mb_{m-1}b_{m-2}b_{m-3}\times\cdots\times b_1)$

$$=c_m\times M_m(b_{m-1}b_{m-2}b_{m-3}\times\cdots\times b_1)$$

$$=c_mT_{m\times m}=F_{2m+1}T_{m\times m}$$

9.證明：$T_{m\times n}=(c_m)^{n-m}T_{m\times m}=(F_{2m+1})^{n-m}T_{m\times m}$ ，$n>m\ge 1$

證明：$\because T_{m\times(m+1)}=c_mT_{m\times m}=F_{2m+1}T_{m\times m}$

$$\therefore T_{m\times n}=c_mT_{m\times(n-1)}=c_m\times c_mT_{m\times(n-2)}=c_m\times c_m\times c_mT_{m\times(n-3)}$$

$$=\cdots=(c_m)^{n-m}T_{m\times m}=(F_{2m+1})^{n-m}T_{m\times m}$$

10.同理欲證明：$T_{(m+1)\times m}=c_mT_{m\times m}=F_{2m+1}T_{m\times m}$ ，$m\ge 1$，或

$T_{m\times n}=(c_n)^{m-n}T_{n\times n}=(F_{2n+1})^{m-n}T_{n\times n}$ ，$m>n\ge 1$

可以利用圖形與 8.9.情況對稱直線 $y=x$ 得證。

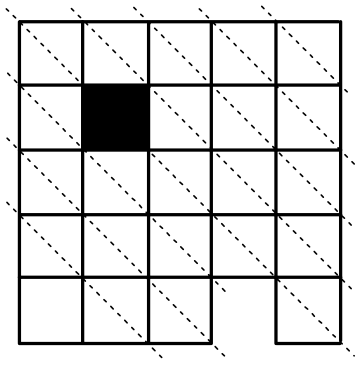
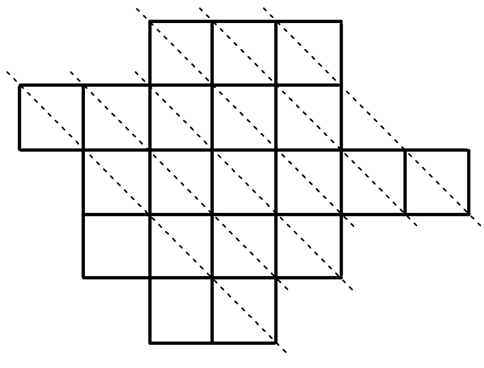
伍、 研究結果：

一、一開始欲用遞迴關係以及利用*Visual Basic* 軟體(如附件)來驗證答案，算到 $T_{5\times 6}=68387457600$ 時，發覺欲以電腦程式來驗證答案結果，需花很長的時間 (備註：限於篇幅關係，將$T_{5\times 1}\sim T_{5\times 6}$ 做法省略)。我們改變一開始利用一個一個格子向上堆疊求取蛇填充數的方法，使用了一次斜向增加一至數個格子的方法(a_k ，b_k ，c_k ，d_k)，來求出蛇填充數。

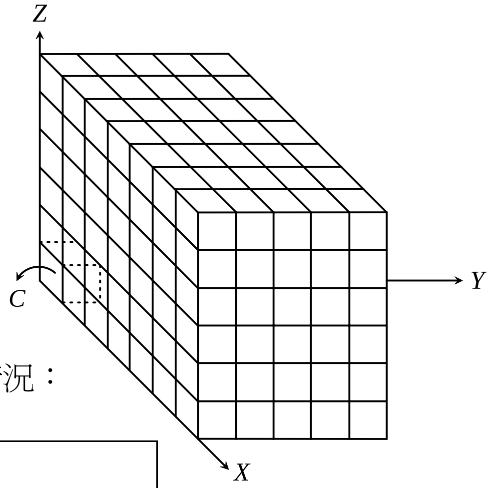
二、棋盤格子形如：$T_{m\times n}$ ，$T_{m\times n+k}$ ，M_n ，A_k ，B_k ，C_k ，D_k 的蛇填充數均可表爲費氏(*Fibonacci*) 數列中某些項的乘積。

陸、 討論：

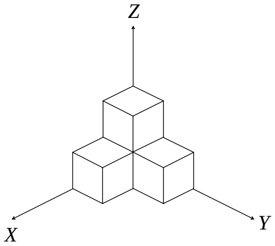
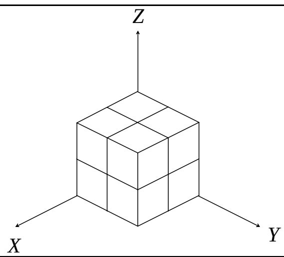
一、若是棋盤不規則或有挖洞，亦可用 a_k ，b_k ，c_k ，d_k 的方法找尋答案。例如：

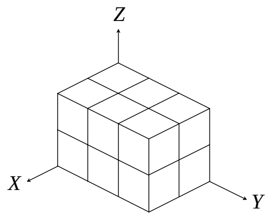
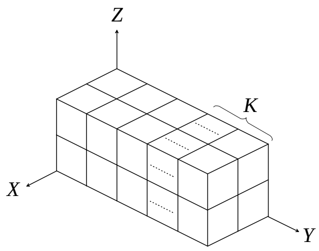
	
蛇填充數 $=1\times d_2\times d_3\times a_3\times(a_1c_2d_1)\times(c_1a_3)\times b_3\times b_2\times b_1$ $=F_4F_6F_7F_3F_5F_2F_3F_7F_8F_6F_4$ $=40884480$	蛇填充數 $=1\times(d_1d_3)\times b_3\times c_3\times a_3\times c_3\times(b_1c_1)$ $=F_2F_6F_8F_7F_7F_7F_4F_3$ $=2214576$

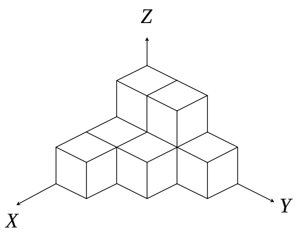
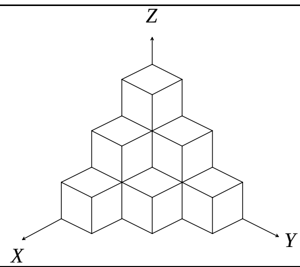
二、若遊戲由平面棋盤形格子轉換成空間空格，如右圖，規則爲蛇由 C 格出發，但蛇的走法只能往 X 軸正向，Y 軸正向，以及 Z 軸正向，甚至可以停住。若此蛇已停住，將由另一條蛇來走，且不同蛇之間走過之格子不可重疊，亦既此空間空格由〝一群〞蛇來覆蓋。



(一)仿照平面棋盤形格子的做法，我們發現下列情況：

	
1.蛇填充數爲 $4=2^2$	2.蛇填充數爲 $288=2^5\times 3^2$

	
3.蛇填充數爲 $10816=2^6\times 13^2$	4.蛇填充數爲 $2^6\times 13^2\times(2\times 19)^K$，於此〝不爲〞費氏 (*Fibonacci*) 數列中某幾項的乘積

	
5.蛇填充數爲 $76=2^2\times 19$，於此〝不爲〞費氏 (*Fibonacci*) 數列中某幾項的乘積	6.蛇填充數爲 $208=2^4\times 13$

(二)於上的討論可知，空間中的蛇填充數並不像平面棋盤形格子般與費氏 (*Fibonacci*) 數列中某項的乘積有關，但由(一)中之 3.4.卻又發現彼此間的關聯，而這正是我們未來研究的方向：

1.能否找到數學模式來呈現彼此的關係。

2.能否限制某些條件後，就與費氏 (*Fibonacci*) 數列有關。

柒、 結論：

棋盤格子形如：$T_{m\times n}$ ，$T_{m\times n+k}$ ，M_n ，A_k ，B_k ，C_k ，D_k 的蛇填充數均可表爲費氏 $(Fibonacci)$ 數列中某幾項的乘積。

一、棋盤格子 $M_n = F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2n}$ ，$n \ge 1$ 。

二、棋盤格子 $T_{n\times n} = (F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2n})^2$ ，$n \ge 1$ 。

三、棋盤格子 $B_k = b_k M_n = F_{2k+2} M_n$ ，$n > k \ge 1$ 。

四、棋盤格子 $C_k = c_k M_n = F_{2k+1} M_n$ ，$n \ge k \ge 1$ 。

五、棋盤格子 $D_k = d_k M_n = F_{2k} M_n$ ，$n+1 \ge k \ge 1$ 。

六、棋盤格子 $T_{n\times n} = (M_n)^2 = (F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2n})^2$ ，$n \ge 1$ 。

七、棋盤格子 $T_{m\times n+k} = c_m T_{m\times(n-1)+k} = F_{2m+1} T_{m\times(n-1)+k}$ ，$n > m > k \ge 1$ 。

八、棋盤格子 $T_{m\times(m+1)} = T_{(m+1)\times m} = c_m T_{m\times m} = F_{2m+1} T_{m\times m}$ ，$m \ge 1$ 。

九、棋盤格子 $T_{m\times n} = T_{n\times m} = (c_m)^{n-m} T_{m\times m} = (F_{2m+1})^{n-m} (F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2m})^2$ ，$n > m \ge 1$ 。

捌、 參考資料：

一、高級中學數學課本第一、四冊。

玖、 附件（*Visual Basic*程式碼）:

一、平面棋盤形格子（*Visual Basic*程式碼）

```
Dim box(100), dir(100), locus(1000), m, n, a As
Integer
Dim b, s, c, l, k(100) As Integer
Dim sum As Long
Private Sub Command1_Click()
Command1.Enabled = False
m = Val(Text1.Text)
n = Val(Text2.Text)
a = 0 '變數初始化
b = 0
c = 0
l = 0
sum = 0
For s = 0 To m * n - 1
box(s) = 0
dir(s) = 0
locus(s) = 0
k(s) = 0
Next s
For s = 0 To 8
If Text4(s).Text <> "" And Val(Text4(s).Text) > 0
And Val(Text4(s).Text) <= m * n - 1 Then
box(Val(Text4(s).Text)) = 2
Next s
Call arrow
Text3.Text = sum
Command1.Enabled = True
End Sub
Sub arrow()
step1:
dir(a) = dir(a) + 1
Select Case dir(a)
Case 1 '停留
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    l = l + 1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
step2:
    b = b + 1
    If b = m * n Then
        sum = sum + 1
        c = c - 1
        b = locus(c)
        a = b
        GoTo step1
    End If
    If box(b) <> 0 Then GoTo step2
    a = b
    GoTo step1
Case 2 '向上走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If a >= m * n - n Then GoTo step1
    If box(a + n) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + n
    GoTo step1
Case 3 '向右走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If (a + 1) Mod n = 0 Then GoTo step1
    If box(a + 1) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + 1
    GoTo step1
Case 4 '無路可走，回到上一格
    If a = 0 Then Exit Sub
    c = c - 1
    l = l - 1
    b = k(l)
    box(a) = 0
    dir(a) = 0
    a = locus(c)
    GoTo step1
End Select
End Sub
```

A:當下執行動作的格子。

B:檢查格子是否空白，當循環到最後一格不空白，代表此方法結束。

C:用來當執行到第幾步驟，當此步驟的格子執行完動作則回到上一步驟。

K:代表格子連成的線的第一格。

Box:格子所成的陣列。

Dir:下一格的方向，有停留、往上、往右三種。

Locus:格子連線所成的軌跡。

二、空間狀況（*Visual　Basic*程式碼）

```
Dim box(100), dir(100), locus(1000), m, n, a As
Integer
Dim b, s, c, l, k(100), space(30), z, i As Integer
Dim sum As Currency
Private Sub Command1_Click()
Command1.Enabled = False
m = Val(Text1.Text)
n = Val(Text2.Text)
z = Val(Text7.Text)
a = 0 '變數初始化
b = 0
c = 0
l = 0
sum = 0
For s = 0 To m * n * z - 1
box(s) = 0
dir(s) = 0
locus(s) = 0
k(s) = 0
Next s
Text6.Text = ""
For s = 0 To i
If space(s) > 1 And space(s) <= m * n * z - 1 Then
    box(space(s)) = 2
    Text6.Text = Text6.Text & space(s) & " "
End If
Next s
Call arrow
Text3.Text = sum
Command1.Enabled = True
Call Form_Load
End Sub
Sub arrow()
step1:
dir(a) = dir(a) + 1
Select Case dir(a)
Case 1 '停留
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    l = l + 1
    box(a) = 1
locus(c) = a
    c = c + 1
step2:
    b = b + 1
    If b = m * n * z Then
        sum = sum + 1
        c = c - 1
        b = locus(c)
        a = b
        GoTo step1
    End If
    If box(b) <> 0 Then GoTo step2
    a = b
    GoTo step1
Case 2 '向前走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    s = a \ (m * n) + 1
    If a >= m * n * s - n Then GoTo step1
    If box(a + n) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + n
    GoTo step1
Case 3 '向右走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If (a + 1) Mod n = 0 Then GoTo step1
    If box(a + 1) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + 1
GoTo step1
Case 4 '向上走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If a >= m * n * (z - 1) Then GoTo step1
    If box(a + m * n) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + m * n
    GoTo step1
Case 5 '無路可走，回到上一格
    If a = 0 Then Exit Sub
    c = c - 1
    l = l - 1
    b = k(l)
    box(a) = 0
    dir(a) = 0
    a = locus(c)
    GoTo step1
End Select
End Sub

Private Sub Command2_Click()
If Val(Text4.Text) <= 0 Then Exit Sub
space(i) = Val(Text4.Text)
i = i + 1
End Sub

Private Sub Form_Load()
i = 0
For s = 0 To 30
space(s) = 0
Next s
End Sub
```

評　　語

040418　費老先生有群蛇，咿呀咿呀喲

1. 問題有趣，實驗探索過程交代得清楚。

2. 牽涉到與古典的 Fibonacci Numbers 的關係，令人感到驚喜。

3. 參考資料只包含一本無名氏教科書。在搜查資料如此快速的今天，可以不必閉門造車，應該多多上網查詢別人是否進行過類似的研究。