

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

040415

回光返照－具有光學性質的曲線和曲面

學校名稱： 國立新竹女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 林毓柔	吳原榮
高二 李孟璇	

關 鍵 詞：光學性質、極座標、微分方程

壹、摘要

光射向光滑平面會遵從反射定律，入射角等於反射角。在數學課中我們學到，圓錐曲線具有光學性質---將光從圓錐曲線的任一焦點射出，至曲線上反射，反射線或其延長線必通過另一個焦點。根據高一建立起來的邏輯觀念，我們不禁好奇，這個命題是否滿足充要條件？除了圓錐曲線外，平面上還有其他曲線具有「光學性質」嗎？推廣至空間中，具有光學性質的曲面又有哪些？再推廣至 N 維空間中，又有怎樣的結果？

本文將利用極座標、球面座標及簡單的微分討論以上的疑問，發現結論非常符合我們的預期---平面上具有「光學性質」的曲線為圓錐曲線（含圓及直線），而空間中具有「光學性質」的曲面則為旋轉圓錐曲面（含平面、球面），而這個結論在 N 維空間中亦成立。

貳、研究動機

我們學過拋物線、雙曲線、橢圓等圓錐曲線具有「光學性質」---將光從圓錐曲線的任一焦點射出，至曲線上反射，反射線或其延長線必通過另一個焦點。在高一所學的邏輯單元中，檢視一個命題是否滿足充要條件一直是老師對我們的要求，因此當我們知道圓錐曲線具有光學性質時，自然產生了一個疑問：「具有光學性質的曲線是否就是圓錐曲線呢？」有沒有可能有別的解？同理推廣至空間及 N 維空間中，什麼樣的圖形也具有「光學性質」呢？

參、研究目的

對「光學性質」下定義，並嘗試找出在平面上具有光學性質的曲線，更進一步推展至空間及 N 維空間中找尋具有光學性質的圖形。

肆、研究設備及器材

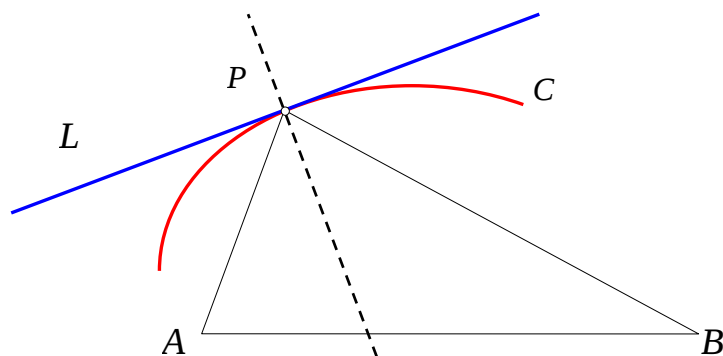
電腦（GSP、Maple 軟體）、紙、筆

伍、研究過程或方法

一、定義

（一）光學性質

如【圖一】，平面上有兩固定點 A 、 B ，一曲線 C ， P 為曲線 C 之任一點， L 為曲線 C 以 P 點為切點的切線，則 L 分別與 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 所夾的角相等。



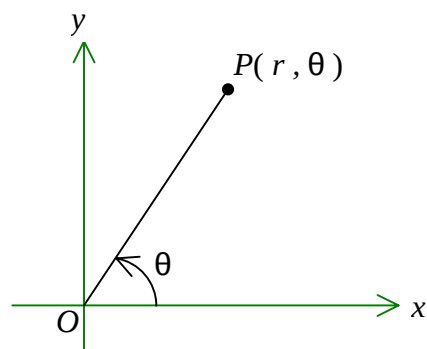
【圖一】

(二) 極座標

在平面上以有向角和長度表示一個點 $P(x,y)$ 的位置，如【圖二】

其中： $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\tan \theta = \frac{y}{x}$

稱為極坐標表示法。



【圖二】

二、用極坐標表示圓錐曲線

如【圖三】

$$\overline{AB}^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta$$

以 B 與 O 為焦點的橢圓為例

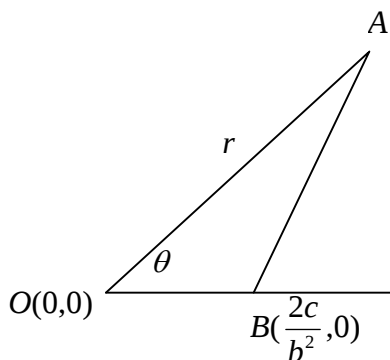
$$\overline{AB} + \overline{AO} = \frac{2a}{b^2}$$

$$\sqrt{r^2 + \frac{4c^2}{b^4} - 4\frac{2c}{b^2}r \cos \theta} = \frac{2a}{b^2} - r$$

$$r^2 + \frac{4c^2}{b^4} - 4\frac{2c}{b^2}r \cos \theta = \frac{4a^2}{b^4} - \frac{4a}{b^2}r + r^2$$

$$r \left(-\frac{c}{b^2} \cos \theta + \frac{a}{b^2} \right) = \frac{a^2 - c^2}{b^4} = \frac{1}{b^2}$$

$$r = \frac{1}{a - c \cos \theta} = \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{c}{a} \cos \theta} = \frac{pe}{1 - e \cos \theta} \dots\dots\dots(1) \quad \text{其中 } p = \frac{1}{c}, e = \frac{c}{a} < 1$$



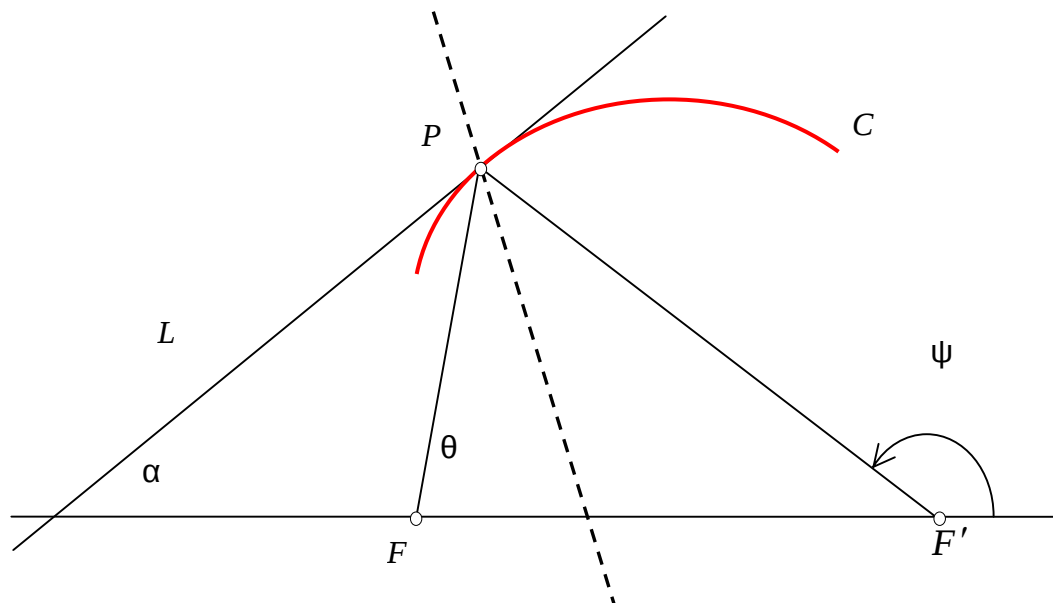
【圖三】

同理的探討可得當 $e > 1$ 時：(1)式為雙曲線。

當 $e = 1$ 時：(1)式為拋物線。

三、用極座標證明圓錐曲線的光學性質

圓錐曲線 $C: r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}$ 其中 $F(0,0)$ 與 $F'(s,0)$ 為焦點



【圖四】

$$s = \frac{2c}{b^2} = \frac{2c}{a^2 - c^2} = \frac{2 \frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2 e^2} - \frac{1}{p^2}} = \frac{2pe^2}{1 - e^2}$$

如【圖四】 $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}$ (2)

$$\tan \phi = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - s}$$
(3)

今以 $r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}$, $s = \frac{2pe^2}{1 - e^2}$ 代入(3)中得

$$\frac{\frac{pe}{1 - e \cos \theta} \sin \theta}{\frac{pe}{1 - e \cos \theta} \cos \theta - \frac{2pe^2}{1 - e^2}} = \frac{(1 - e^2) \sin \theta}{(1 + e^2) \cos \theta - 2e}$$
(4)

$$\text{又 } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

所以

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2 \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}}{1 - \left(\frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta} \right)^2} = \frac{2(r' \sin \theta + r \cos \theta)(r' \cos \theta - r \sin \theta)}{r'^2 \cos^2 \theta - 2rr' \sin 2\theta + r^2 \sin^2 \theta - r'^2 \sin^2 \theta - rr' \sin 2\theta - r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin 2\theta + 2rr' \cos 2\theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \cos 2\theta - 2rr' \sin 2\theta} \dots\dots\dots(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha - \theta) &= \frac{\frac{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin 2\theta + 2rr' \cos 2\theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \cos 2\theta - 2rr' \sin 2\theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin 2\theta + 2rr' \cos 2\theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \cos 2\theta - 2rr' \sin 2\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin 2\theta \cos \theta + 2rr' \cos 2\theta \cos \theta - \left[(r')^2 - r^2 \right] \cos 2\theta \sin \theta + 2rr' \sin 2\theta \sin \theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \cos 2\theta \cos \theta - 2rr' \sin 2\theta \cos \theta + \left[(r')^2 - r^2 \right] \sin 2\theta \sin \theta + 2rr' \cos 2\theta \sin \theta} \\ &= \frac{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \cos \theta - 2rr' \sin \theta} \dots\dots\dots(6)\end{aligned}$$

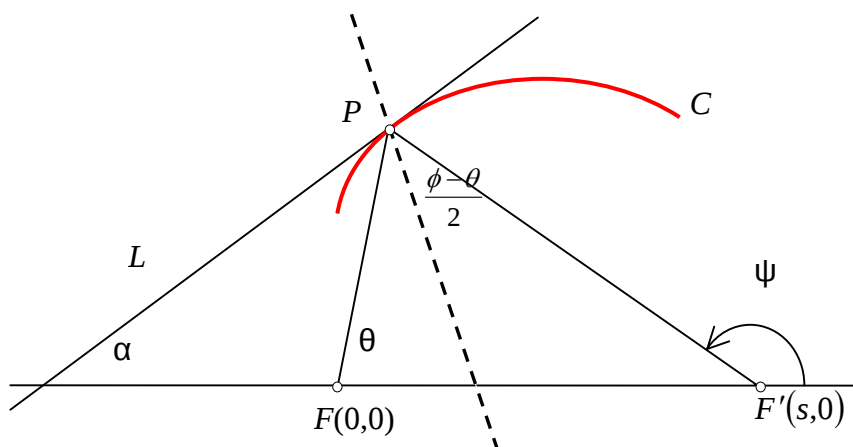
再將 $r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}$, $r' = \frac{-pe^2 \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2}$ 代入(6)中知

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha - \theta) &= \frac{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \cos \theta - 2rr' \sin \theta} \\ &= \frac{(r')^2 \sin \theta - r^2 \sin \theta + 2rr' \cos \theta}{(r')^2 \cos \theta - r^2 \cos \theta - 2rr' \sin \theta} \\ &= \frac{\frac{(-pe^2 \sin \theta)^2 \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^4} - \left[\frac{(pe)^2 \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} \right] - \frac{2p^2 e^3 \sin \theta \cos \theta}{(1 - e \cos \theta)^3}}{\frac{(-pe^2 \sin \theta)^2 \cos \theta}{(1 - e \cos \theta)^4} - \left[\frac{(pe)^2 \cos \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} \right] + \frac{2p^2 e^3 \sin^2 \theta}{(1 - e \cos \theta)^3}} \\ &= \frac{p^2 e^4 \sin^3 \theta - (p^2 e^2 \sin \theta)(1 - 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) - 2p^2 e^3 \sin \theta \cos \theta (1 - e \cos \theta)}{p^2 e^4 \sin^2 \theta \cos \theta - (p^2 e^2 \cos \theta)(1 - 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) + 2p^2 e^3 \sin^2 \theta (1 - e \cos \theta)} \\ &= \frac{-e^2 \sin \theta - e^4 \sin \theta + 2e^4 \sin \theta}{-e^2 \cos \theta + 2e^3 - e^2 \cos \theta} = \frac{\sin \theta (1 - e^2)}{\cos \theta (1 + e^2) - 2e} \dots\dots\dots(7)\end{aligned}$$

比較(4)、(7)得 $\pi + 2\alpha - \theta = \phi \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta + \phi}{2}$ 即得証光學性質。

四、找出具有光學性質的曲線

(一) 考慮兩焦點間的距離不為無窮遠



【圖五】

如【圖五】 曲線 C 具有光學性質 $\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta + \phi}{2} \Rightarrow \pi + 2\alpha - \theta = \phi \Rightarrow \tan(2\alpha - \theta) = \tan \phi$

由正弦定理知

$$\frac{s}{\sin(\phi - \theta)} = \frac{r}{\sin(\pi - \phi)} \Rightarrow \frac{r(\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta)}{\sin \phi} = r \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\tan \phi} \right) \dots\dots\dots(8)$$

將(7)式代入(8)式中得

$$\begin{aligned} s &= r \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \left[(r')^2 - r^2 \right] \cos \theta - 2rr' \sin \theta}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta} \right) \\ &= \frac{r \left\{ \left[(r')^2 - r^2 \right] \cos \theta \sin \theta + 2rr' \cos^2 \theta - \left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta \cos \theta + 2rr' \sin^2 \theta \right\}}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta} \\ &= \frac{2rr'}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta} \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

若曲線要滿足光學性質，則當 P 點在曲線上移動時，定義(一)滿足且 $\frac{ds}{d\theta} = 0$

所以我們將計算(9)式微分後的分子部分(以 s' 表示)如下：

$$\begin{aligned}
S' &= \left[4r(r')^2 + 2r^2 r'' \right] \left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta \left\{ \right. \\
&\quad \left. - 2r^2 r' \left\{ (2r'r'' - 2rr') \sin \theta + \left[(r')^2 - r^2 \right] \cos \theta + 2(r')^2 \cos \theta + 2rr'' \cos \theta - 2rr' \sin \theta \right\} \right\} \\
&= 4r(r')^2 \left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 8r^2 (r')^3 \cos \theta + 2r^2 r'' \left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 4r^3 r' r'' \cos \theta - 4r^2 (r')^2 r'' \sin \theta \\
&\quad + 4r(r')^2 r^2 \sin \theta - 2r^2 (r')^3 \cos \theta + 2r^4 r' \cos \theta - 4r^2 (r')^3 \cos \theta - 4r^3 r' r'' \cos \theta + 4r^3 (r')^2 \sin \theta \\
&= 2r \left[(r')^2 + r^2 \right] \left\{ - \left[rr'' - 2(r')^2 \right] \sin \theta + rr' \cos \theta \right\} \dots \dots \dots (10)
\end{aligned}$$

$$\text{令 } S' = 0$$

$$\Rightarrow \left[rr'' - 2(r')^2 \right] \sin \theta = rr' \cos \theta \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{作變數變換令 } r = \frac{1}{R} \Rightarrow r' = \frac{-R'}{R^2}, r'' = \frac{-RR'' + 2(R')^2}{R^3}$$

$$\Rightarrow rr' = \frac{-R'}{R^3}$$

$$rr'' - 2(r')^2 = \frac{-RR'' + 2(R')^2}{R^4} - 2 \frac{(R')^2}{R^4} = \frac{-RR''}{R^4} = \frac{-R''}{R^3} \quad \text{代入(11)得}$$

$$\Rightarrow R'' \sin \theta = R' \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{R''}{R'} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{R'}{R''} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{R'}{dR''} = \frac{\sin \theta}{d \sin \theta} \Rightarrow R' = c \sin \theta \Rightarrow R = a - c \cos \theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{a - c \cos \theta} \dots \dots \dots (12)$$

現在使用(9)及(12)式去計算 s 得

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{2r^2 r'}{\left[(r')^2 - r^2 \right] \sin \theta + 2rr' \cos \theta} \\
 &= \frac{2 \frac{1}{(a-c \cos \theta)^2} \frac{c \sin \theta}{(a-c \cos \theta)^2}}{\left(\frac{(c \sin \theta)^2 - (a-c \cos \theta)^2}{(a-c \cos \theta)^4} \right) \sin \theta + 2 \frac{a-c \sin \theta}{(a-c \cos \theta)^2} \frac{c \sin \theta \cos \theta}{(a-c \cos \theta)^2}} \\
 &= \frac{-2c}{c^2 \sin^2 \theta - a^2 + 2ac \cos \theta - c^2 \cos^2 \theta - 2ac \cos \theta + 2c^2 \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{2c}{a^2 - c^2} = \frac{2c}{b^2} \\
 &\text{(其中 } b \in \mathbb{R}^+)
 \end{aligned}$$

討論：

我們得知滿足光學性質的曲線 C 的極座標方程式為 $r = \frac{1}{a-c \cos \theta}$ ($a, c \neq 0$)

且有兩固定焦點 $F(0,0)$, $F'(s,0)$

其中 $s = \frac{2c}{a^2 - c^2} = \frac{2c}{b^2}$ $\therefore S < \infty$, $\therefore |a| \neq |c|$

若令 $e = \frac{c}{a}$, $p = \frac{1}{c} \Rightarrow r = \frac{pe}{1-e \cos \theta}$ 圖形表為(*)

1. 若 a, c 非零

(*)代表的圖形為橢圓(ellipse)或雙曲線(hyperbola)。

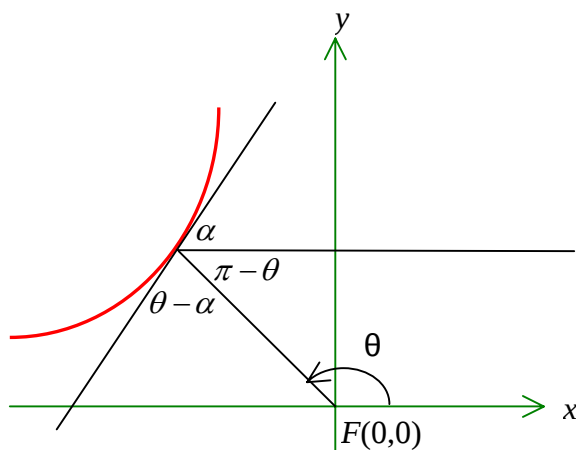
2. 若 $a \neq 0, c = 0$ 則 $s = 0$ 即 $F = F'$ $r = \frac{1}{a}$

(*)代表的圖形為圓。

3. 若 $a = 0, c \neq 0$ 則 $s = \frac{-2}{c}, r = \frac{-1}{c \cos \theta}$ ($r \cos \theta = \frac{-1}{c} \Rightarrow x = \frac{-1}{c}$)

即 $\overline{FF'}$ 的中垂線(直線)。

(二)之前考慮兩焦點間的距離不為無窮遠，現在若令兩焦點間的距離為無窮遠，則圖形如下：



【圖六】

(5)式 $\tan 2\alpha = \frac{[(r')^2 - r^2] \sin 2\theta + 2rr' \cos 2\theta}{[(r')^2 - r^2] \cos 2\theta - 2rr' \sin 2\theta}$ 仍然成立

由光學性質【圖六】知

$$\tan 2\alpha = \frac{[(r')^2 - r^2] \sin 2\theta + 2rr' \cos 2\theta}{[(r')^2 - r^2] \cos 2\theta - 2rr' \sin 2\theta} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$[(r')^2 - r^2] \sin 2\theta \cos \theta + 2rr' \cos 2\theta \cos \theta = [(r')^2 - r^2] \cos 2\theta \sin \theta - 2rr' \sin 2\theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow [(r')^2 - r^2] (\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta) = -2rr' (\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta)$$

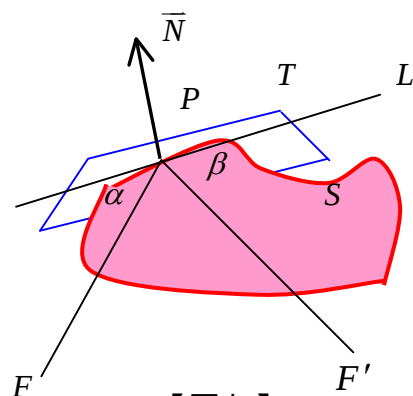
$$[(r')^2 - r^2] \sin \theta + 2rr' \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 \pm \cos \theta} \dots\dots\dots(13)$$

(*)代表的圖形為一拋物線

得証具有光學性質的平面曲線為直線、圓、橢圓、拋物線、雙曲線。

五、找出具有光學性質的曲面



【圖七】

空間中曲面 S 的光學反射性質如同平面中曲線的光學反射性質，必須滿足 N 為切平面 T 的法向量。

故必滿足：

⊙ $\overline{FP}, \overline{F'P}, \overline{N}$ 共平面

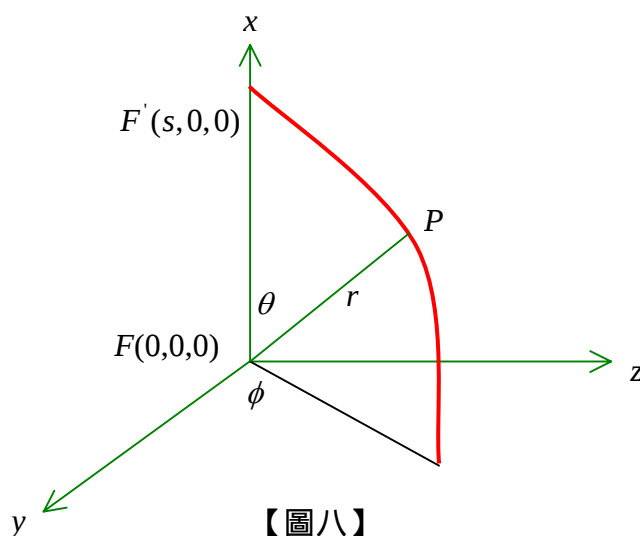
L 為與 $\overline{FP}, \overline{F'P}, \overline{N}$ 共平面且經過 P 點的切線

⊙ $\alpha = \beta$

討論：

1. 若 F 、 F' 間的距離為無窮遠，則 S 顯然是一個平面
2. 若 F 、 F' 間的距離不為無窮遠且兩焦點相異，則不妨令 $F(0,0,0)$ ， $F'(s,0,0)$

引進球面坐標，如【圖八】



【圖八】

則 $P(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi)$

$$\vec{N} = \vec{P}_\theta \times \vec{P}_\phi$$

$$\text{其中 } \vec{P}_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad \vec{P}_\phi = \frac{\partial P}{\partial \phi}$$

$$\vec{P}_\theta = (-r \sin \theta + r_\theta \cos \theta, r \cos \theta \cos \phi + r_\theta \sin \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi + r_\theta \sin \theta \sin \phi)$$

$$\vec{P}_\phi = (r_\phi \cos \theta, -r \sin \theta \sin \phi + r_\phi \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi + r_\phi \sin \theta \sin \phi)$$

$$\therefore \vec{N} = \vec{P}_\theta \times \vec{P}_\phi = (X, Y, Z)$$

$$= (rr_\theta \sin^2 \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta, rr_\phi \sin \phi + r^2 \sin^2 \cos \phi - rr_\theta \sin \theta \cos \theta \cos \phi, \\ -rr_\phi \cos \phi + r^2 \sin^2 \sin \phi - rr_\theta \sin \theta \cos \theta \sin \phi)$$

根據 $\circ \vec{FP}, \vec{F'P}, \vec{N}$ 共平面

$$\begin{vmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \cos \phi & r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta - s & r \sin \theta \cos \phi & r \sin \theta \sin \phi \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

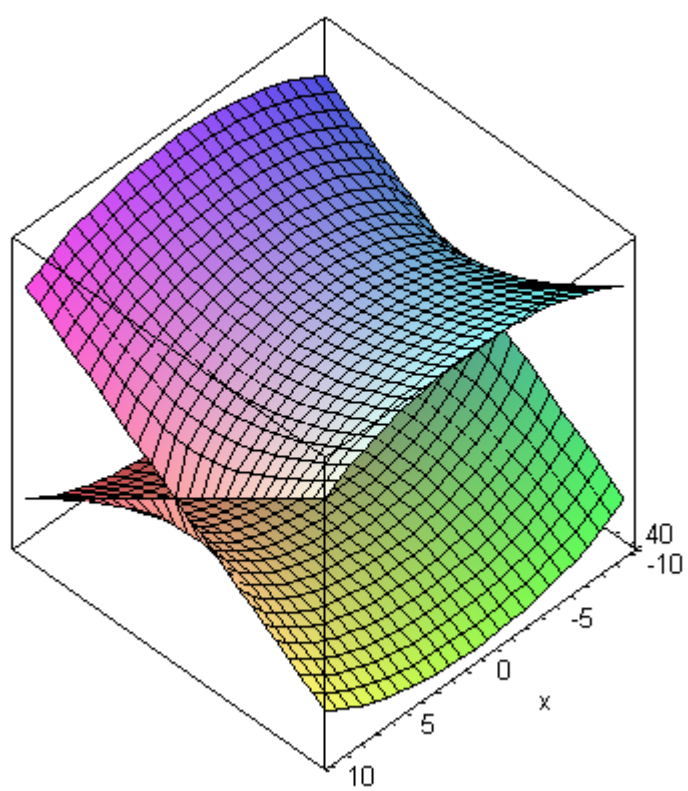
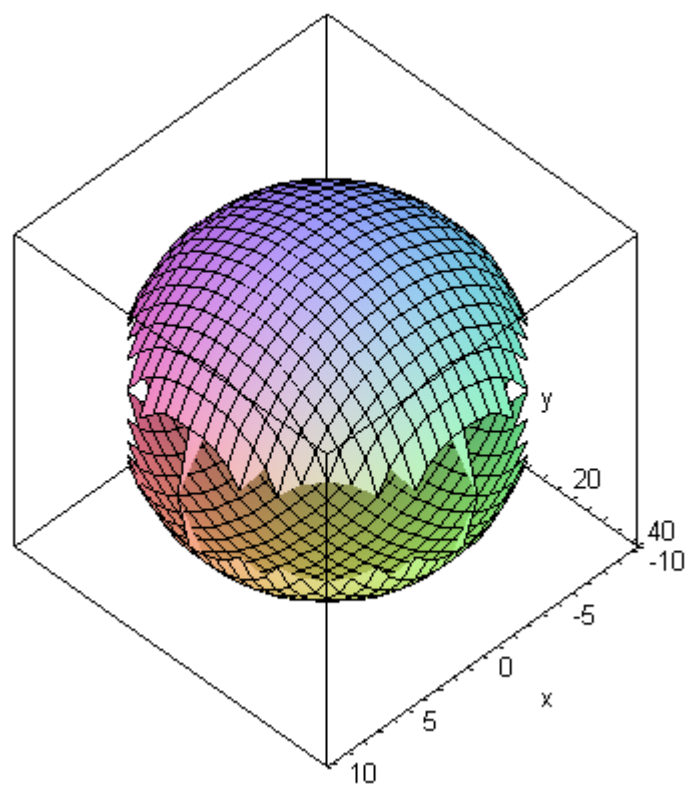
$$\Rightarrow rs \sin \theta (Z \cos \phi - Y \sin \phi) = r^2 s r_\phi \sin \theta = 0$$

$r \neq 0$, P 不在 x 軸上 , $\sin \theta \neq 0$, $s \neq 0 \Rightarrow r_\phi = 0$ — $\circ$

($r_\phi = 0$ 即當 ϕ 在變動時 , r 是一個常數 , 即為一個以 x 軸為軸的旋轉面)

再根據條件 $\circ$ 中前節已證得曲線為橢圓或雙曲線

配合 $\circ$ 得 S 為**旋轉橢圓曲面**【圖九】或**旋轉雙曲面**【圖十】



【圖十】

3.若 $F = F'$, 則 $\overrightarrow{FP} // \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{FP} \times \vec{N} = \vec{0}$

$$\text{即}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi) \times (X, Y, Z) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -r^2 r_\phi \sin \theta = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$r^2 r_\phi \cos \theta \cos \phi + r^2 r_\theta \sin \theta \sin \phi = 0 \dots\dots\dots(15)$$

$$r^2 r_\phi \cos \theta \sin \phi - r^2 r_\theta \sin \theta \cos \phi = 0 \dots\dots\dots(16)$$

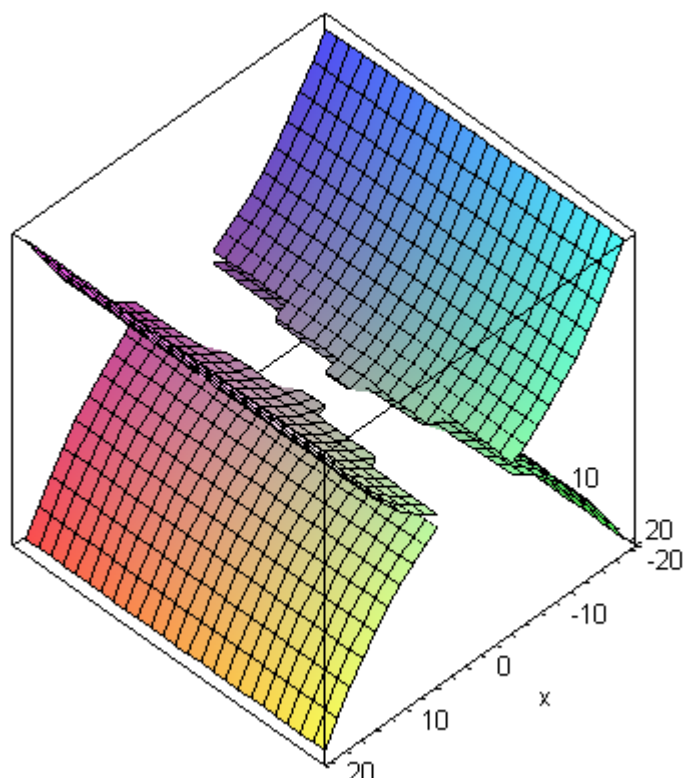
由(14)式得 $r_\phi = 0$, 由(15)(16)式得 $r_\theta = 0$

$\Rightarrow$ 則 S 為一球面

4.若 F' 為無窮遠點, 不失一般性, 令 $\overrightarrow{F'P} = (1, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \cos \phi & r \sin \theta \sin \phi \\ 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -r \sin \theta (Z \cos \phi - Y \sin \phi) = r^2 r_\phi \sin \theta$$

一樣可得 $r_\phi = 0$ 且根據條件 $\circ$ 及前節的證明可知 S 為一旋轉拋物曲面【圖十一】



【圖十一】

得証具有光學性質的曲面為平面、球面、旋轉橢圓面、旋轉拋物面、旋轉雙曲面。

陸、研究結果與結論

檢視一個命題是否滿足充要條件一直是老師在數學課堂上對我們的要求，圓錐曲線具有光學反射性質是我們熟知的問題，但具有光學反射性質的曲線是否只有圓錐曲線？我們利用極座標表示法證明了圓錐曲線的光學性質，並且用極座標表示法順利解決了這個問題，得到完美的充要條件。

- 1、平面坐標上具有光學性質的曲線即為圓錐曲線(含直線、圓、橢圓、拋物線、雙曲線)。
- 2、而我們嘗試把這個問題推廣到空間中，也獲得了預期中的結果，空間中具有「光學性質」的曲面為旋轉圓錐曲面（含平面、球面、旋轉橢圓面、旋轉拋物面、旋轉雙曲面）。
- 3、此結果推廣至 N 維空間中亦成立。

柒、參考資料及其他

- 1.高中數學第四冊，康熙出版社。
- 2.趙文敏著，“微積分”，九章出版社。
- 3.林義雄著，“行列式”，九章出版社。
- 4.孫文先著，“微積分初學”，九章出版社。
- 5.丁同仁、李承治著，“常微分方程教程”，凡異出版社。

評語

040415 回光返照－具有光學性質的曲線和曲面

本研究包含很好的數學論證，但是並不適合當作科展作品。