

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

040414

四邊形上的『等角分點』

學校名稱： 國立科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳張祺	莊添丁
高二 林昱劭	李文靖

關 鍵 詞：尺規作圖、雙曲線

摘 要

我們的問題是：給一任意四邊形 $ABCD$ ，要在 BC 上找出一點 P 使得 $\angle PAB = \angle PDC$ ，而我們證明可用尺規作圖找出此點 P 。從此題目我們延伸出其他子題：

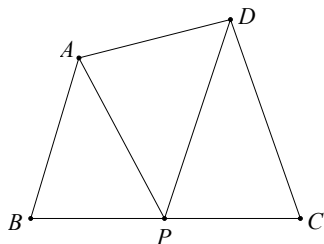
- (i) 將在平面上滿足 $\angle PAB = \angle PDC$ 的所有 P 點找出來，並且探討出於此條件下之 P 點軌跡為一雙曲線。
- (ii) 將在平面之上使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$) 的 P 點找出來，我們亦研究出此圖形以極坐標表示之方程式。

然而，於此時我們改以方向角重新探討原先的問題。原來二角以 AB 和 CD 作為始邊，此二角 $\angle PAB$ ， $\angle PDC$ 為「反向」。我們改以「同向」作為探討之目標，亦找出 P 點的尺規作圖方法與軌跡方程式。

一、研究動機

有一次，老師給我們這個問題進行討論：

「給一個任意四邊形 $ABCD$ ，試以尺規在 BC 上找出一點 P ，使得 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 相等。」



一開始覺得似乎不難，沒想到後來發現頗為複雜，還必須依各種不同的情況分開討論，所以就開始我們的研究。

二、研究目的

- 1、將在 BC 上滿足 $\angle PAB = \angle PDC$ 的 P 點找出來。
- 2、將在平面上滿足 $\angle PAB = \angle PDC$ 的所有 P 點找出來。
- 3、將在 BC 上使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$) 的 P 點找出來。
- 4、將在平面上使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$) 的 P 點找出來。
- 5、探討上述 P 點軌跡圖形的漸近線。

三、研究器材

紙，筆，電腦，GSP 軟體。

四、研究過程

(一) 給一個任意四邊形 $ABCD$ ，可以用尺規在 BC 上找出一點 P ，使得 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 相等。

定義：我們將上述的 P 點，稱為四邊形 $ABCD$ 在 BC 上的「等角分點」。

作法：

(1) 首先假設 $ABCD$ 為一梯形，且 BC 垂直於 AB 與 CD 。如圖 (一) 所示。

設 AB 長為 m ， CD 長為 n ，則

(i) 若 BC 上存在等角分點 P 的話，因為 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 相等，而 $\angle PBA$ 和 $\angle PCB$ 相等(皆為直角)，則 $\triangle PDC$ 和 $\triangle PAB$ 相似。

(ii) 從 (i) 得知 $CP : PB = n : m$ 。因此，可用尺規的方法求出點 P 。

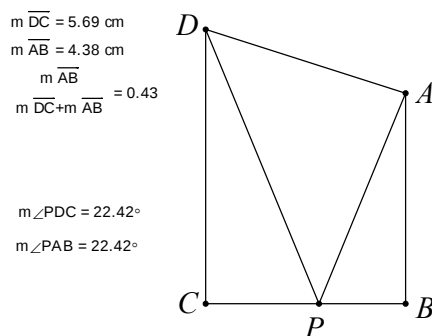


圖 (一)

(2) 設 $ABCD$ 為任意梯形，其中 AB 平行 CD ，則

- (i) 先作 CQ 與 BE 二線垂直 AB ，且 Q 在直線 AB 上， E 在直線 CD 上。若 BC 上存在等角分點 P ，則作一過 P 點且垂直於 AB 的直線 MN ，其中 N 在 CD 上， M 在 AB 上。如圖 (二) 所示。

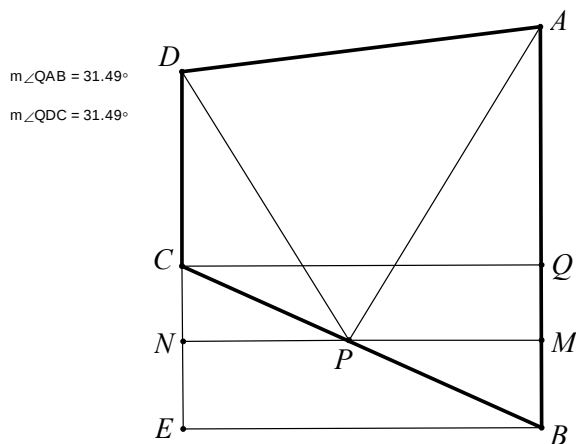


圖 (二)

- (ii) 因 Q 與 B 不重合，設 $AQ=m$ ， $CD=n$ ， $CQ=h$ ， $BQ=r$ ， $CN=QM=x$ 。那麼由 (1)，可知 $NP:PM = (n+x):(m+x)$ 。

- (iii) 因為 CD 平行 AB ，故 $\angle NCP = \angle MBP$ ， $\angle CNP = \angle BMP = \frac{\pi}{2}$ ，得知

$\triangle CNP$ 相似 $\triangle BMP$ ，所以， $NP:PM = x:(r-x)$ 。

- (iv) 由 (ii)，(iii)，可得 $(n+x):(m+x) = x:(r-x)$ ，解得

$$x = \frac{[(n+m-r)^2 + 8nr]^{\frac{1}{2}} - (n+m-r)}{4}。$$

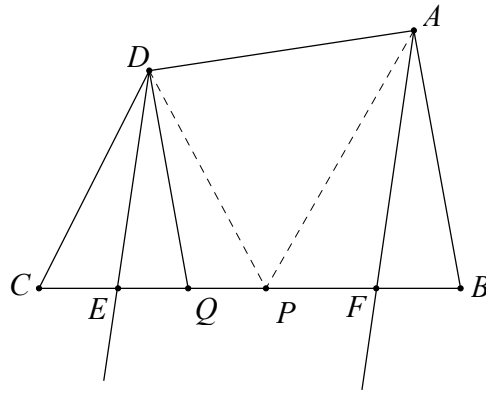
- (v) 其中長度 $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ ($a>0$ ， $b>0$) 可用畢氏定理畫出； $(ab)^{\frac{1}{2}}$ 可由子母相似定理畫出；倍數關係可由相似形畫出。由上述這些方法，即可畫出 x 的長度，所以，此長度可由尺規作圖畫出。

(3) 當 $ABCD$ 為任意四邊形，則

- (i) 考慮 AB 與 CD 不平行的情況。如圖 (三) 所示。首先過 D 點作一平行 AB 的直線並交 BC 於 Q 點，再作 $\angle CDQ$ 的角平分線，並交 CB 於 E 點。接下來，過 A 點作平行 DE 的直線，交 BC 於 F 。

利用 (2) 中之方法，即可在 $AFED$ 上找出在 EF 上的等角分點 P ，即 $\angle PDE = \angle PAF$ 。

- (ii) 因 AB 平行 DQ ， AF 平行 DE ，故 $\angle QDE = \angle BAF$ 。又 $\angle QDE = \angle CDE$ ，因此 $\angle PDE + \angle CDE = \angle PAF + \angle BAF$ ，即 $\angle PAB = \angle PDC$ 。



圖（三）

（二）給一個任意四邊形 $ABCD$ ，則平面上關於某一邊上所有的「等角分點」 P 點所形成的圖形為一雙曲線。

證明：

（1）由於 P 點不必一定在 BC 上，所以 P 點的軌跡不需要考慮到 BC 。另外，若 AB 和 CD 不平行，也可以用（一）中（3）的方法將之調成平行。因此，只要考慮 AB 和 CD 平行的情形。

（2）設 AD 投影到 AB 線上長為 a ，而 AB 和 CD 平行且距離 b 。如圖（四）所示。

假設點 P 使得 $\angle PAB = \angle PDC$ ，設 P 到 AB 上的垂足為 F ，而 P 到 CD 上的垂足為 E ，則 $PF : FA = PE : ED$ 。

（3）假設 D 在原點上，直線 CD 在 x 軸上且 P 為 (x, y) ，那麼由（2）可知

$$y : x = (b - y) : (x - a)$$

化簡後得

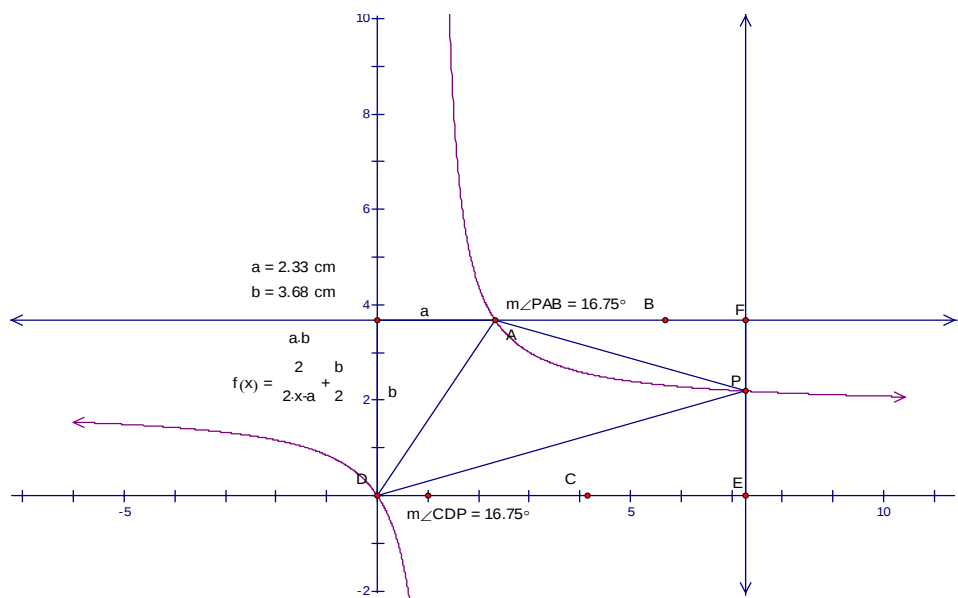
$$2xy - bx - ay = 0。$$

此方程式可整理成

$$(x - \frac{a}{2})(y - \frac{b}{2}) = \frac{ab}{4}$$

這個方程式是雙曲線方程式，其漸近線為 $x - \frac{a}{2} = 0$ ， $y - \frac{b}{2} = 0$ ，而 P 點到兩漸近線的

距離乘積為 $\frac{ab}{4}$ 。



圖（四）

（三）將在平面上使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$) 的所有 P 點找出來。

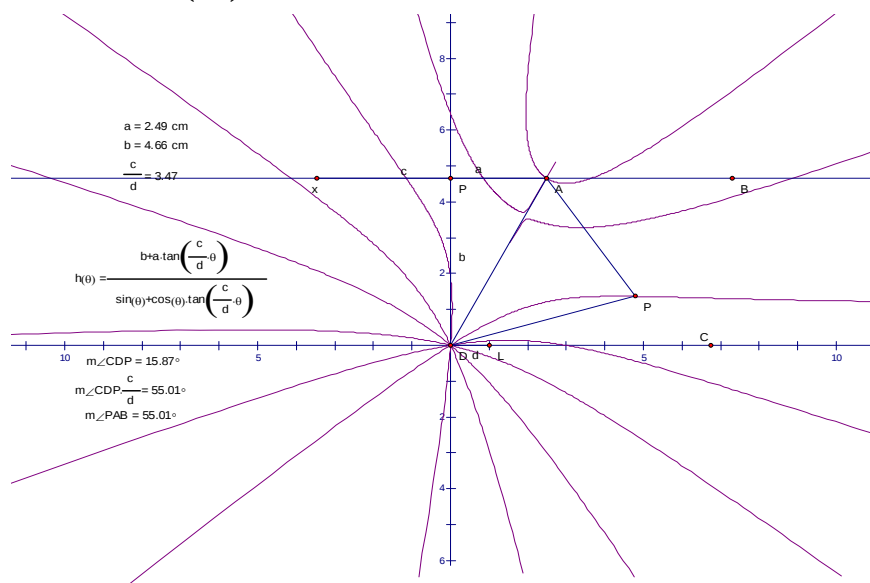
作法：

- （1）由於 P 點不必一定在 BC 上，所以 P 點的軌跡不需要考慮到 BC 。另外，若 AB 和 CD 不平行，也可以用類似（一）中（3）的方法將之調成平行的，不過其中 $\angle BAF$ 為 $\angle CDE$ 的 k 倍。因此，只要考慮 AB 和 CD 平行的情形。
- （2）設 AD 投影到 AB 線上長為 a ， AB 和 CD 平行且距離 $=b$ 。
假設平面上有一點 P ，使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$)，設此平面為極坐標系並設 D 點在極點 O 上， CD 在極軸上。
- （3）若 P 點的極坐標為 (r, θ) ， PA 長度 $=l$ ，則

$$l \times \cos(k\theta) = r \times \cos \theta - a, \quad l \times \sin(k\theta) = b - r \times \sin \theta。$$

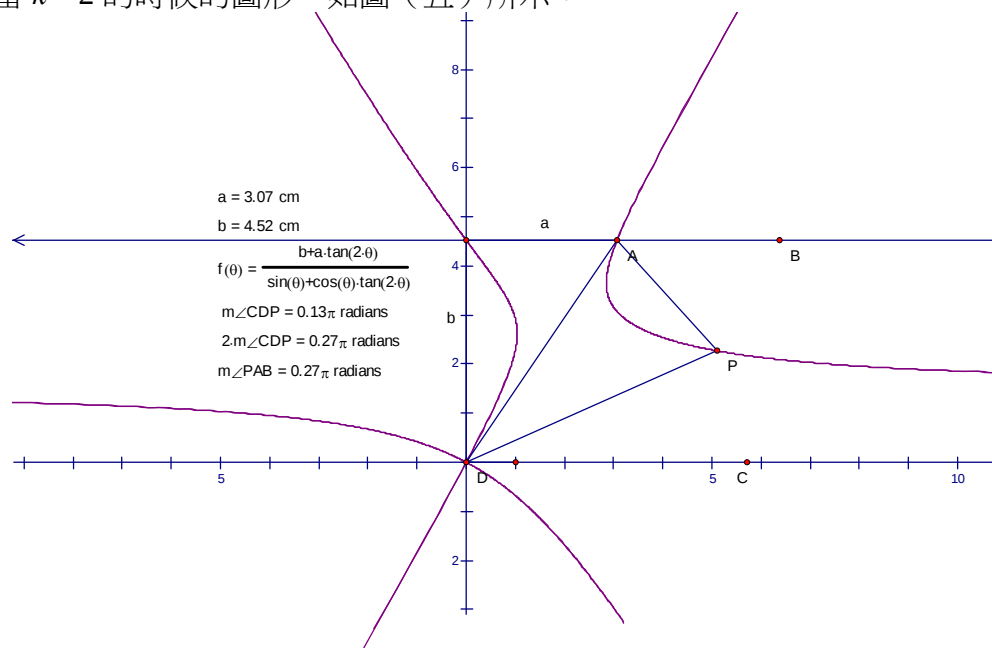
將這兩個公式相除，並化簡後，得

$$r = \frac{a \times \tan(k\theta) + b}{\sin \theta + \cos \theta \times \tan(k\theta)}, \quad \text{利用此公式可描出其軌跡圖形。如圖（四）所示。}$$



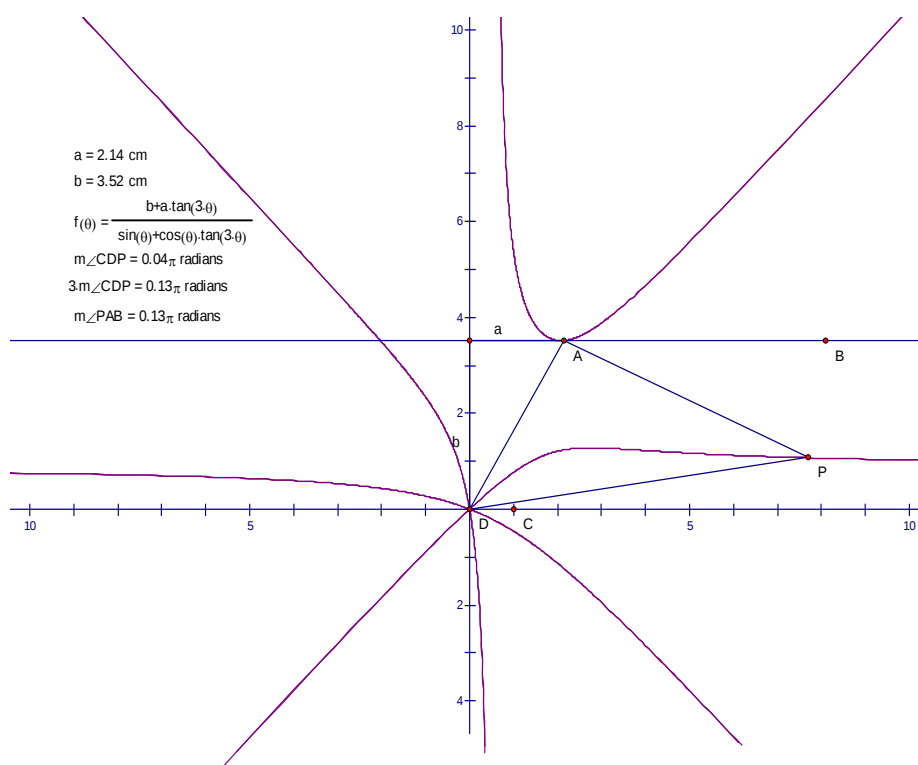
圖（四） 此處 k 不是整數(其中 $\frac{c}{d}$ 為 k 倍的意思)

(4) 當 $k=2$ 的時候的圖形，如圖（五）所示：



圖（五）

(5) 當 $k=3$ 的時候的圖形，如圖（六）所示：



圖（六）

(四) 將在平面上使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=1, 2, 3, 4, \dots$) 的所有 P 點找出來。

但是， PA 在 $ABCD$ 的外側， P 為直線 PA 與 PD 的交點。如圖（七）所示。

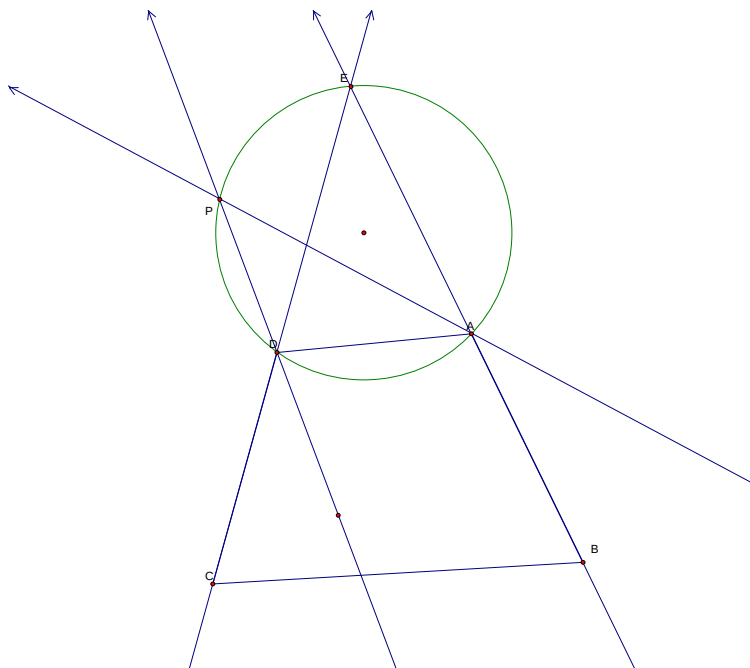
作法：

(1) 如果 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 相等的話，且 AB 和 CD 不平行，則此軌跡為圓。

先延長 AB 與 DC 並與之交於一點 E ，此處 AB 與 CD 不平行。假設 PA 與 AB 夾 θ 角，則 $\angle PAD = \angle EAD - \theta$ ，而 $\angle PDA = \angle EDA + \theta$ 。

由此可得 $\angle DPA = \angle DEA$ 。

不論 PA 與 AB 夾多少角度， $\angle DPA$ 可為圓周角，也就是說，此 P 點會在一圓上。而此圓之圓心為 $\triangle DPA$ 之外心。



圖（七）

(2) 如果 $\angle PAB = k \angle PDC$ ，則 P 的極坐標方程式為 $r = \frac{b - a \tan k\theta}{\sin \theta - \cos \theta \tan k\theta}$ 。

若 AB 和 CD 不平行，可以用類似（一）中（3）的方法將之調成平行，只不過其中 $\angle BAF = k \angle CDE$ 。因此，只要考慮 AB 和 CD 平行即可。

設 AD 投影到 AB 線上的長為 a ，而 AB 和 CD 為平行且距離 $= b$ 。

假設平面上有一點 P ，使得 $\angle PAB = k \angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$)，設此平面為極坐標系並設 D 點在極點 O 上， CD 在極軸上。

若 P 點的座標為 (r, θ) ， PA 長度 $= l$ ，則可以知道

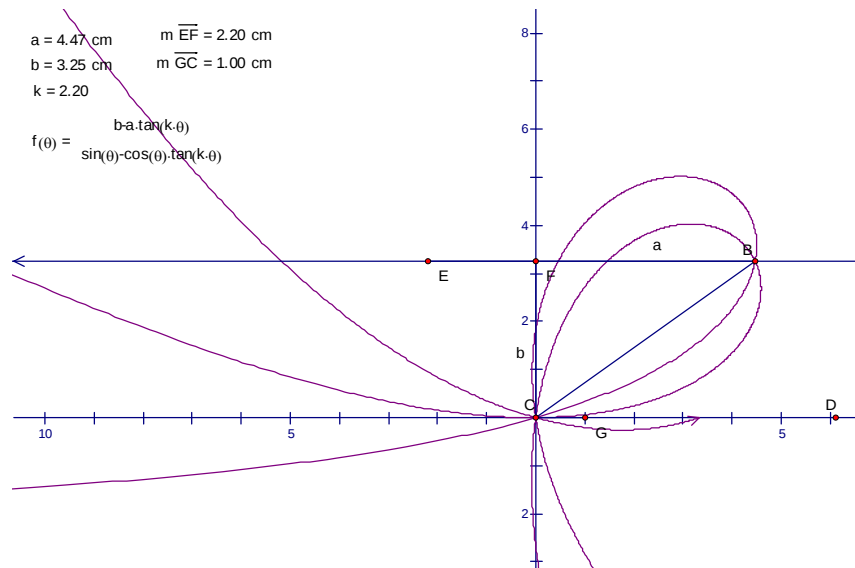
$$l \times \cos(k\theta) = r \times \cos \theta - a,$$

$$l \times \sin(k\theta) = r \times \sin \theta - b,$$

將這兩個公式相除，得

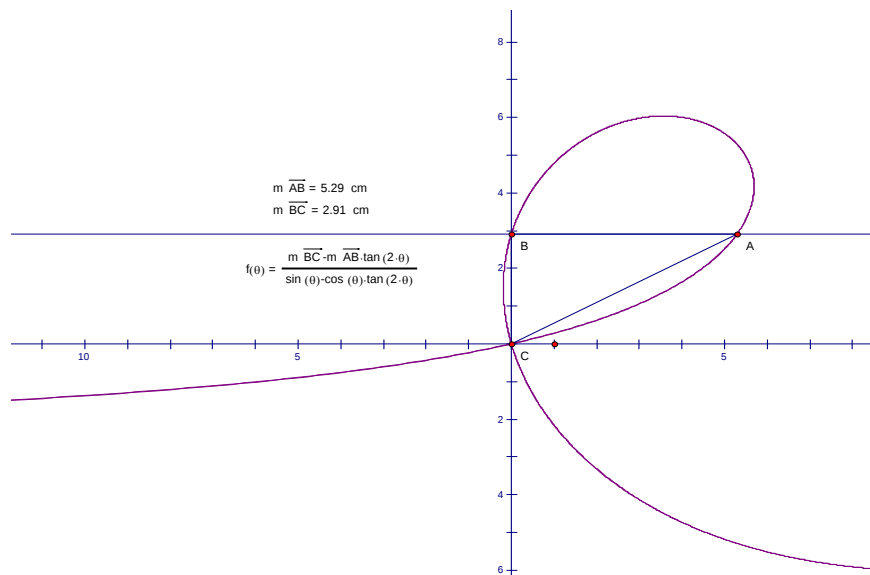
$$r = \frac{b - a \times \tan(k\theta)}{\sin \theta - \cos \theta \times \tan(k\theta)}.$$

利用此公式，可描出其軌跡圖形，如圖（八）所示。



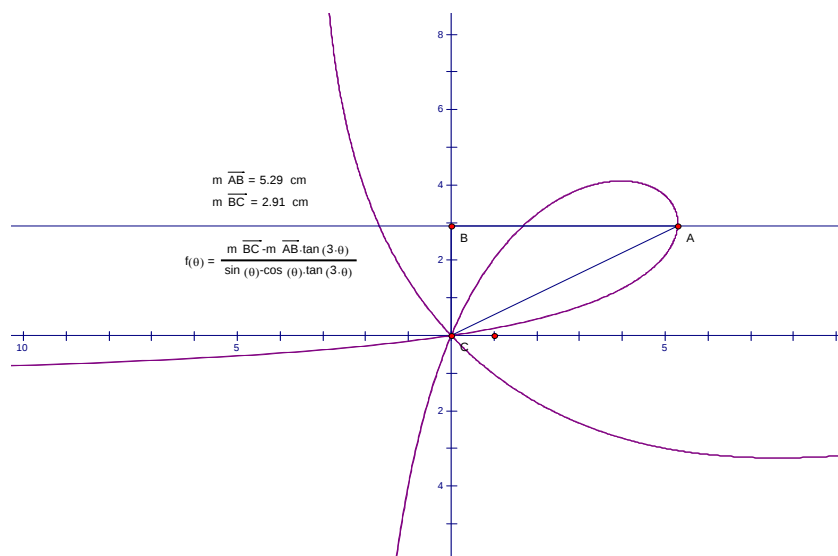
圖(八) 此處 k 不是整數

(3) 當 $k=2$ 的圖形，如圖(九)所示：



圖(九)

(4) 當 $k=3$ 的圖形，如圖(十)所示：



圖(十)

(五) 以上各個曲線之漸進線的性質討論。

(1) 探討 (三) 中圖形的漸近線，也就是 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 為向內的情形。

假設所有的條件都與 (三) 相同，則圖形的方程式為

$$r = \frac{a \tan k\theta + b}{\sin \theta + \cos \theta \tan k\theta}, \text{ (其中 } k \text{ 為正整數),}$$

由於漸近線為圖形最遠的點趨近的直線，所以就必須考慮 r 趨近無限大。

若要 r 趨近於無限大，則 $\sin \theta + \cos \theta \tan k\theta \rightarrow 0$ 。

考慮 $\sin \theta + \cos \theta \tan k\theta = 0$ ，

此式化簡後，解得

$$\theta + n\pi = \pi - k\theta, \text{ (其中 } n \text{ 是整數),}$$

令 $m = 1 - n$ ，可得 $\theta = \frac{m\pi}{k+1}$ ，(其中 m 為整數，為了方便，設 $(k+1) > m \geq 0$)。

首先，過 A, D 兩點作兩條斜率與漸近線 L 一樣的直線 L_1, L_2 ，其中分別與 PA ，

PD 所夾的角度 θ 與 $k\theta$ 由於越來越小，我們知道 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan k\theta}{\theta} = k$ 。因此 $\frac{d(P, L_2)}{d(P, L_1)} \rightarrow k$ 。

因此，符合 $\frac{d(L, L_2)}{d(L, L_1)} = k$ ，所以 L 會通 AD 線段的 $\frac{1}{k+1}$ 的分點處。(所有漸近線都會通過這一點)

如下圖 (十一) 所示，為 $k=2$ 的情形(舉 $\theta=0$ 為例)：

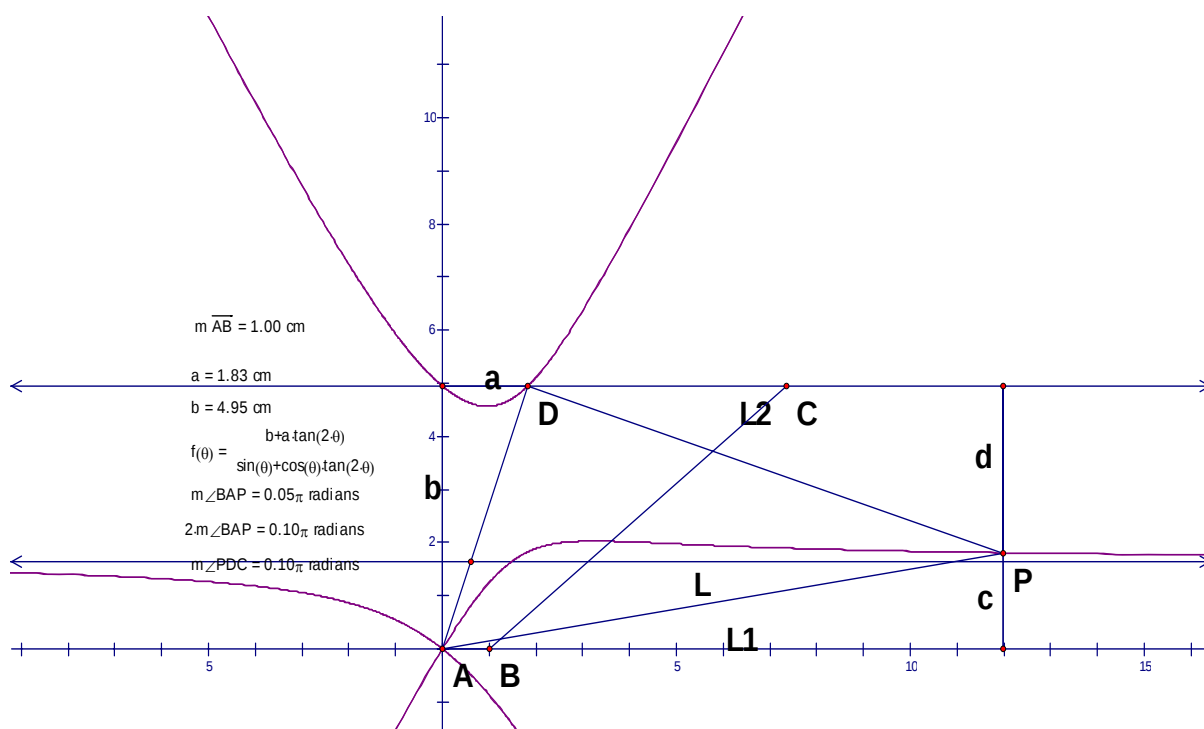
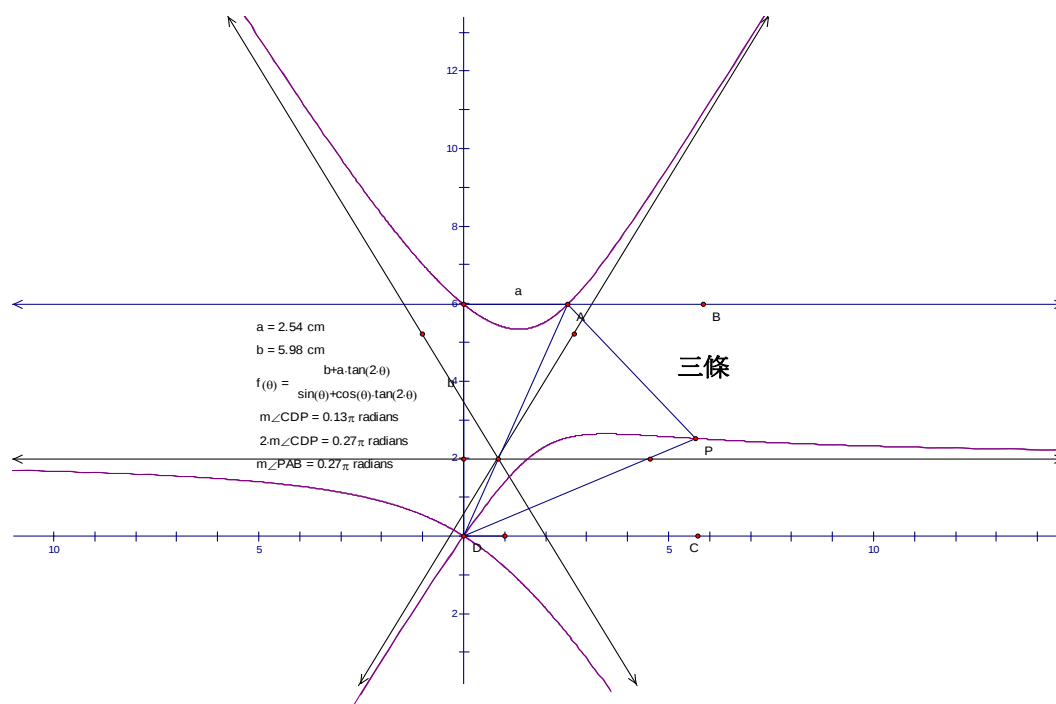


圖 (十一)

又 $\theta = \frac{m\pi}{k+1}$ ，且 $0 \leq \theta < \pi$ ，所以 $m = 0, 1, 2, \dots, k$ ，因此，最多有 $k+1$ 條漸近線。

又一條漸近線(雙向)就會有一條曲線，故此圖形曲線最多的情況是 $k+1$ 條。

如下圖(十二)中，為 $k=2$ 的情形，可看出有三條漸近線。



圖(十二)

如果 $r = \frac{a \tan k\theta + b}{\sin \theta + \cos \theta \tan k\theta}$ 中的 a 和 b 分別為 $C \times \cos \theta'$ 和 $C \times \sin \theta'$ (其中 C 為常數

， $\theta' = \frac{m\pi}{k+1}$ ， $(k+1) > m \geq 0$)，則當 $\theta \rightarrow \frac{m\pi}{k+1}$ 時， r 就不會趨近無窮大，而是趨近

定值 C 。由於少掉一條漸近線，因此曲線就會少一條。如下圖(十三)所示。

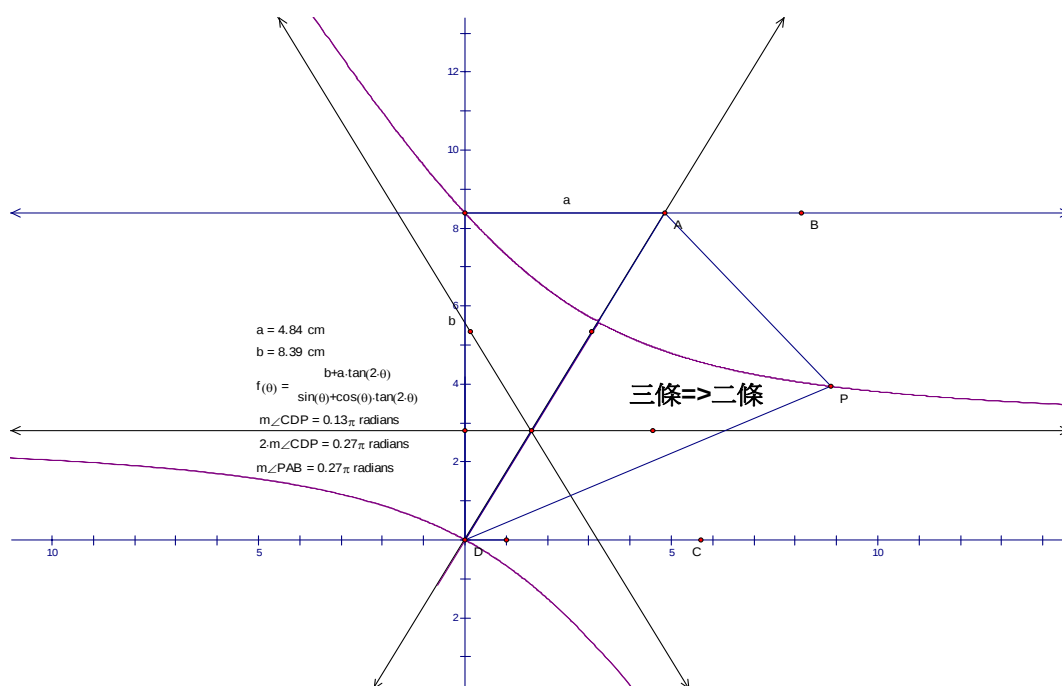


圖10十三)

(2) 探討 (四) 中圖形的漸近線(不包括圓的情況)，也就是當 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 為向外的情形。

假設所有的條件都與 (四) 相同，則圖形的方程式為

$$r = \frac{b - a \tan k\theta}{\sin \theta - \cos \theta \tan k\theta}, \quad (\text{其中 } k \text{ 為整數}),$$

由於漸近線為圖形最遠的點趨近的直線，所以就必須考慮 r 趨近無限大。

若要 r 趨近於無限大，則 $\sin \theta - \cos \theta \tan k\theta \rightarrow 0$ 。

考慮 $\sin \theta - \cos \theta \tan k\theta = 0$ ，

此式化簡後，得 $\theta + n\pi = \pi + k\theta$ ，(其中 n 是整數)，

令 $m = n - 1$ ，可得 $\theta = \frac{m\pi}{k-1}$ ，(其中 m 為整數，為了方便，設 $(k-1) > m \geq 0$)。

首先，過 A, D 兩點作兩條斜率與漸近線 L 一樣的直線 L_1, L_2 ，其中分別與 PA ，

PD 所夾的角度 θ 與 $k\theta$ 由於越來越小，我們知道 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan k\theta}{\theta} = k$ 。因此 $\frac{d(P, L_2)}{d(P, L_1)} \rightarrow k$ 。

因此，符合 $\frac{d(L, L_2)}{d(L, L_1)} = k$ ，所以 L 會通 AD 線段的 $\frac{1}{k-1}$ 的外分點處(靠近 D 點的外分

點)。(所有漸近線都會通過這一點)

如下圖 (十一) 所示，為 $k=2$ 的情形(舉 $\theta=0$ 為例)：

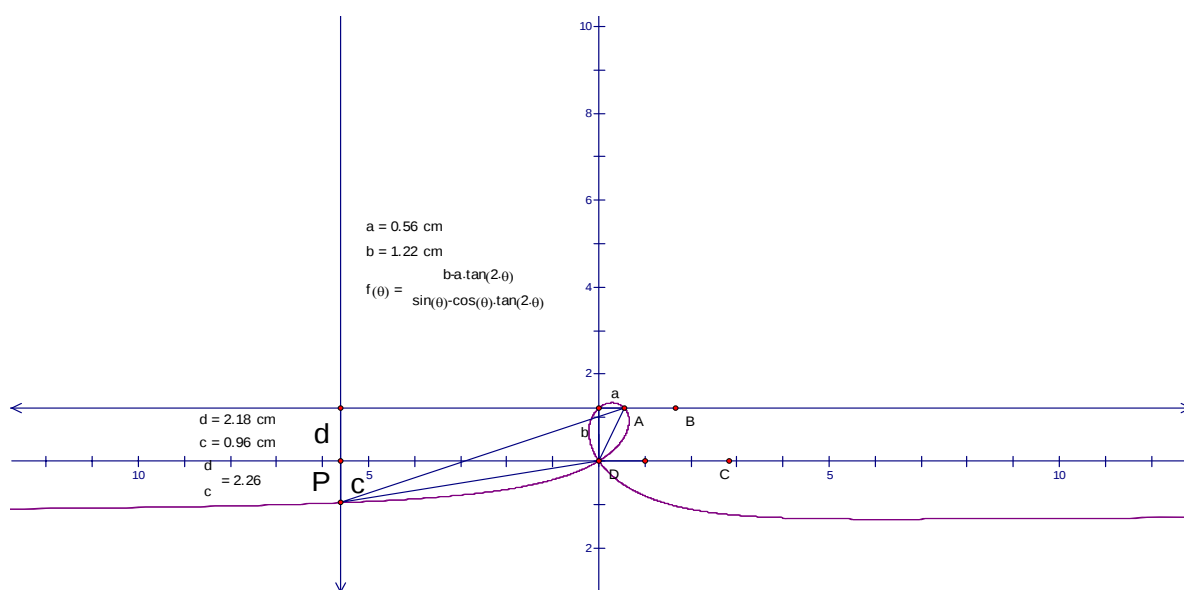


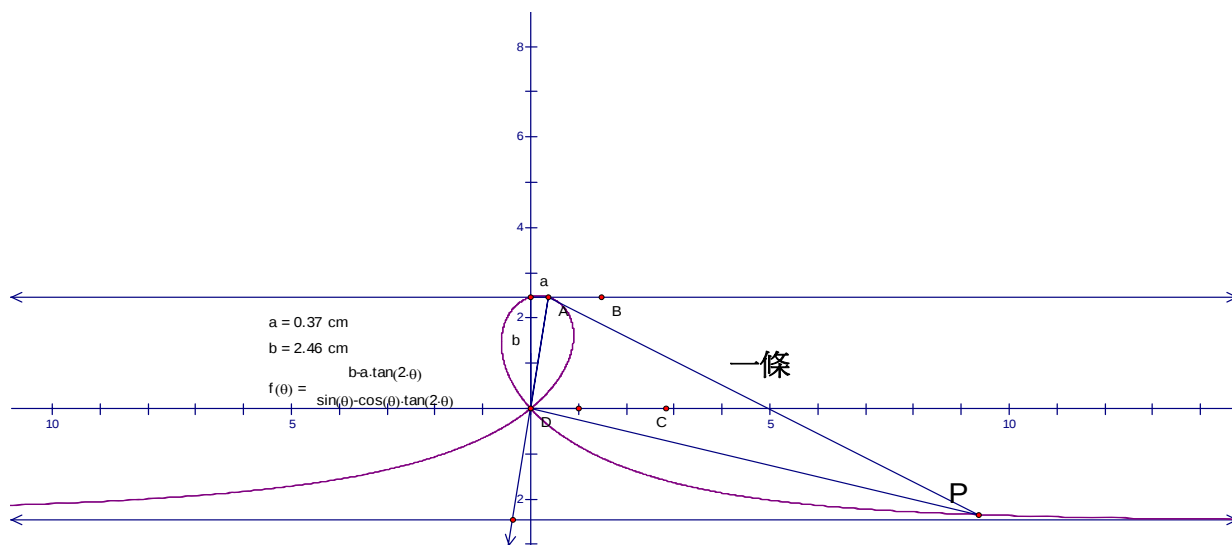
圖 (十四)

又 $\theta = \frac{m\pi}{k-1}$ ，且 $0 \leq \theta < \pi$ ，所以 $m = 0, 1, 2, \dots, k-2$ ，因此，最多有 $k-1$ 條漸近線。

線。

又一條漸近線(雙向)就會有一條曲線，故此圖形曲線最多的情況是 $k-1$ 條。

如下圖(十五)中，為 $k=2$ 的情形，可看出有一條漸近線。

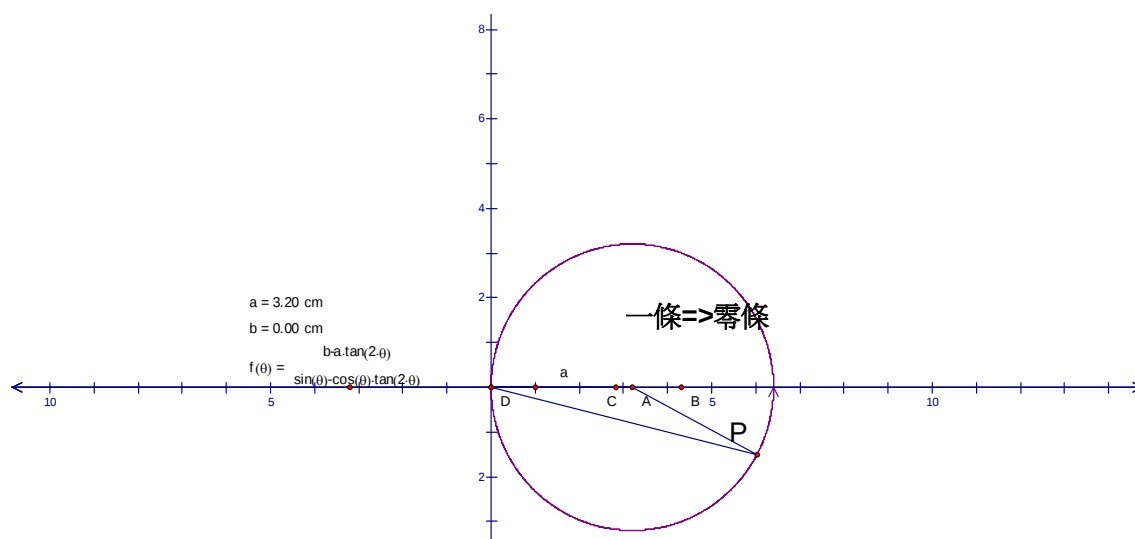


圖(十五)

如果 $r = \frac{b - a \tan k\theta}{\sin \theta - \cos \theta \tan k\theta}$ 中的 a 和 b 分別為 $C \times \cos \theta$ 和 $C \times \sin \theta$ (其中 C 為常數，

$\theta = \frac{m\pi}{k-1}$ ， $(k-1) > m \geq 0$)，則當 $\theta \rightarrow \frac{m\pi}{k-1}$ 時， r 就不會趨近無窮大，而是趨近

定值 C 。由於少掉一條漸近線，因此曲線就會少一條。如下圖(十六)所示。



圖(十六)

五、研究結果

- (1) 對於任意四邊形 $ABCD$ ，可以用尺規在 BC 上找出一點 P ，使得 $\angle PAB = \angle PDC$ 。
- (2) 給一個任意四邊形 $ABCD$ ，則平面上關於某一邊上所有的「等角分點」 P 點所形成的圖形為一雙曲線。
- (3) 將在平面上使得 $\angle PAB = k\angle PDC$ ($k=2, 3, 4, \dots$) 的所有 P 點軌跡方程式找出來。

(i) 當 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 為向內的情形，滿足 $P(r, \theta)$ 的方程式為

$$r = \frac{a \times \tan(k\theta) + b}{\sin \theta + \cos \theta \times \tan(k\theta)}。$$

此時，其軌跡圖形最多有 $k+1$ 條漸近線。

(ii) 當 $\angle PAB$ 和 $\angle PDC$ 為向外的情形，滿足 $P(r, \theta)$ 的方程式為

$$r = \frac{b - a \tan k\theta}{\sin \theta - \cos \theta \tan k\theta}。$$

此時，其軌跡圖形最多有 $k-1$ 條漸近線。

六、參考資料

- (1) 高中數學 第二冊，第四冊 林福來等編著 南一書局出版。
- (2) 高中數學 幾何學（上） 林福來等編著 南一書局出版。

評語

040414 四邊形上的『等角分點』

1. 參考資料只包兩本 XX 書局的書本。在搜查資料如此快速的今天，可以不必閉門造車，應該多多上網查詢別人是否進行過類似的研究。
2. 本作品給出嚴謹的代數證明。如果能夠找到綜合幾何的論證，則會更為理想。