中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040413

根與係數關係—有符號的 Lucas 三角錐

學校名稱： 國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 馬伯倫	顏祥益 連崇馨

關 鍵 詞：Pascal、Lucas、Fibonacci

摘　要

本篇文章從”將$\beta^{m}{}_{1}+\beta^{m}{}_{2}+\beta^{m}{}_{3}$ 分解成$\beta_1+\beta_2+\beta_3$，$\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3$，$\beta_1\beta_2\beta_3$的非線性組合出發，令 $f_m(a_1,a_2,a_3)=\beta_1^m+\beta_2^m+\beta_3^m$ ，$m=0,1,2,\cdots$，我們發現 $f_m(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{i+2j+3k=m}\underset{i,j,k}{S}a_1{}^{i}a_2{}^{j}a_3{}^{k}$，$i,j,k\in N\cup\{0\}$，$\underset{i,j,k}{S}$代表 $a_1{}^{i}a_2{}^{j}a_3{}^{k}$且 $i+2j+3k=m$ 這一項的係數，$\underset{i,j,k}{S}$在空間座標中，標記在(i,j,k)點上，結果得到許多類似**巴斯卡三角錐**圖形的相關性質。而$\underset{i,j,k}{S}$的絕對值在 $k=0$ 時的圖形，是一個 Lucas 三角形 ，因此我們稱$\underset{i,j,k}{S}$的圖形為”**有符號的 Lucas 三角錐**”。

在探討**巴斯卡三角錐** 和”**有符號的 Lucas 三角錐**”在 X-Y 平面上的奇偶性圖形時，結果竟然發現只要把**巴斯卡三角錐**的奇偶性圖形往 X 軸正向移動 1 單位就能和”**有符號的 Lucas 三角錐**”的奇偶性圖形全等，這使我們更想知道**巴斯卡三角錐**與”**有符號的 Lucas 三角錐**”在空間中的奇偶性圖形之間的關係。

最後我們將$\underset{i,j,k}{S}$的相關性質推廣到四維的情形。

壹、研究動機：

在[5]嚴鎮軍(2002) “高中數學競賽教程”p382 有一道題目：$f(m)=x^m+y^m+z^m$，且

$f(m)=m$ 對 m =1，2， 3 均成立。求 $f(4),f(5),f(6)$ 之值。而且剛好高一上學期數學課程的第 4 章提到有關二次方程式及三次方程式的根與係數關係， 以及上網看到一篇科展[1]”擬-Lucas 多項式”，我們將其係數用不同的表示法從二次方程式推廣到三次方程式。

設 $g(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，β_1, β_2, β_3為此多項式的根，則 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=-a_1$，

$\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3=a_2$，$\beta_1\beta_2\beta_3=-a_3$，我們希望 $\beta^m{}_1+\beta^m{}_2+\beta^m{}_3$能夠分解成$a_1$, a_2 , a_3的非線性組合。因此令 $f_m(a_1,a_2,a_3)=\beta_1^m+\beta_2^m+\beta_3^m$ ，m = 0 , 1 , 2 ,… 。又為以後的探討及性質的推演 ，我們令 $\underset{i,j,k}{S}$ 代表 $a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k$ 且 i+2j+3k=m 這一項的係數，故 $f_m(a_1,a_2,a_3)$ 可表示為

$\sum\limits_{i+2j+3k=m}\underset{i,j,k}{S}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k$，$i,j,k\in N\cup\{0\}$。由定理 1. 得到 $\underset{i,j,k}{S}=-(\underset{i-1,j,k}{S}+\underset{i,j-1,k}{S}+\underset{i,j,k-1}{S})$ 的一個遞迴式，而此遞迴式與**巴斯卡三角錐**的遞迴式$\underset{i,j,k}{P}=\underset{i-1,j,k}{P}+\underset{i,j-1,k}{P}+\underset{i,j,k-1}{P}$ 類似，因此我們去考慮 $\underset{i,j,k}{P}$ 與 $\underset{i,j,k}{S}$ 在 X-Y 平面上的奇偶性圖形，結果竟然發現只要把 $\underset{i,j,k}{P}$ 的奇偶性圖形往 X 軸正向移動 1 單位就能和 $\underset{i,j,k}{S}$ 的奇偶性圖形全等，這使我們更想知道 $\underset{i,j,k}{P}$ 與 $\underset{i,j,k}{S}$ 在空間中的奇偶性圖形是否也只是平移就能全等了。

貳、研究目的：

我們模仿[6] John F. Putz The Pascal Polytope : An Extension of Pascal’s Triangle to N Dimensions **巴斯卡三角錐** 中 $\underset{i,j,k}{P}$ 的擺置法，發現 $\underset{i,j,k}{S}$ 的絕對值在 k=0 時的圖形，是一個 Lucas 三角形 ，因此我們稱 $\underset{i,j,k}{S}$ 的圖形為”**有符號的** Lucas **三角錐**”。本篇文章的目的是研究”**有符號的** Lucas **三角錐**” 的相關性質，以及**巴斯卡三角錐** 和 ”**有符號的** Lucas **三角錐**”奇偶性圖形的比較。

參、研究器材：

Maple 6 及 Mathematica 4。

肆、研究過程及結果：

一、$\beta^m{}_1+\beta^m{}_2+\beta^m{}_3$的分解

設 $g(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，β_1，β_2，β_3爲此多項式的根，則

$\beta_1+\beta_2+\beta_3=-a_1$，$\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3=a_2$，$\beta_1\beta_2\beta_3=-a_3$

現在要去求：$\beta^2{}_1+\beta^2{}_2+\beta^2{}_3$，$\beta^3{}_1+\beta^3{}_2+\beta^3{}_3$，$\cdots$，$\beta^m{}_1+\beta^m{}_2+\beta^m{}_3$，令 $f_m(a_1,a_2,a_3)=\beta^m{}_1+\beta^m{}_2+\beta^m{}_3$，首先觀察：

$f_0(a_1,a_2,a_3)=3$，$f_1(a_1,a_2,a_3)=\beta_1+\beta_2+\beta_3=-a_1$，

$f_2(a_1,a_2,a_3)=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2-2(\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3)=a_1^2-2a_2$

$f_3(a_1,a_2,a_3)=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^3-3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)(\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3)+3\beta_1\beta_2\beta_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3$

因而導出

引理 1：

$f_m(a_1,a_2,a_3)=-[a_1f_{m-1}(a_1,a_2,a_3)+a_2f_{m-2}(a_1,a_2,a_3)+a_3f_{m-3}(a_1,a_2,a_3)]$ $\quad m\geq 3$成立。

$f_0(a_1,a_2,a_3)=3$，$f_1(a_1,a_2,a_3)=-a_1$，$f_2(a_1,a_2,a_3)=a_1^2-2a_2$

證明：

$g(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，β_1，β_2，β_3爲此多項式的根，

$\beta_1^3=-(a_1\beta_1^2+a_2\beta_1+a_3)$，$\beta_2^3=-(a_1\beta_2^2+a_2\beta_2+a_3)$，$\beta_3^3=-(a_1\beta_3^2+a_2\beta_3+a_3)$，$m\geq 3$

$$\beta_1^m=\beta_1^3\bullet\beta_1^{m-3}=-(a_1\beta_1^{m-1}+a_2\beta_1^{m-2}+a_3\beta_1^{m-3})\cdots\cdots(1)$$

$$\beta_2^m=\beta_2^3\bullet\beta_2^{m-3}=-(a_1\beta_2^{m-1}+a_2\beta_2^{m-2}+a_3\beta_2^{m-3})\cdots\cdots(2)$$

$$\beta_3^m=\beta_3^3\bullet\beta_3^{m-3}=-(a_1\beta_3^{m-1}+a_2\beta_3^{m-2}+a_3\beta_3^{m-3})\cdots\cdots(3)$$

(1)(2)(3)相加等於

$$\beta_1^m+\beta_2^m+\beta_3^m=-[a_1(\beta_1^{m-1}+\beta_2^{m-1}+\beta_3^{m-1})+a_2(\beta_1^{m-2}+\beta_2^{m-2}+\beta_3^{m-2})$$
$$+a_3(\beta_1^{m-3}+\beta_2^{m-3}+\beta_3^{m-3})]$$

$$f_m(a_1,a_2,a_3)=-[a_1f_{m-1}(a_1,a_2,a_3)+a_2f_{m-2}(a_1,a_2,a_3)+a_3f_{m-3}(a_1,a_2,a_3)]$$

由引理 1 去推導,我們得到更多的式子：

$f_0(a_1,a_2,a_3)=3$ ， $f_1(a_1,a_2,a_3)=-a_1$ ， $f_2(a_1,a_2,a_3)=a_1^2-2a_2$ ， $f_3(a_1,a_2,a_3)=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3$ ，

$f_4(a_1,a_2,a_3)=a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3+2a_2^2$ ， $f_5(a_1,a_2,a_3)=-a_1^5+5a_1^3a_2-5a_1^2a_3-5a_1a_2^2+5a_2a_3$ ，

$f_6(a_1,a_2,a_3)=a_1^6-6a_1^4a_2+6a_1^3a_3+9a_1^2a_2^2-12a_1a_2a_3-2a_2^3+3a_3^2$

我們發現了每一項都有 a_1,a_2,a_3 上面的次方乘上其下標的數字剛好等於 m 的性質，

舉例：

$f_4(a_1,a_2,a_3)$ 中每一項 a_1^4 , $a_1^2a_2$, a_1a_3 , a_2^2 分別依序由次方乘上下標的數字去相加而得到 4

如下: 4×1 ，$2\times1+1\times2$ ，$1\times1+1\times3$ ，2×2 均等於 4。

為了方便下面的探討及性質的推演，我們令 $\underset{i,j,k}{S}$ 代表 $a_1^ia_2^ja_3^k$ 這一項的係數，例如：我們

將 $f_6(a_1,a_2,a_3)=a_1^6-6a_1^4a_2+6a_1^3a_3+9a_1^2a_2^2-12a_1a_2a_3-2a_2^3+3a_3^2$ 改寫為

$$f_6(a_1,a_2,a_3)=\underset{6,0,0}{S}a_1^6+\underset{4,1,0}{S}a_1^4a_2+\underset{3,0,1}{S}a_1^3a_3+\underset{2,2,0}{S}a_1^2a_2^2+\underset{1,1,1}{S}a_1a_2a_3+\underset{0,3,0}{S}a_2^3+\underset{0,0,2}{S}a_3^2$$

其中 $\underset{6,0,0}{S}$ 代表 a_1^6 的係數， $\underset{4,1,0}{S}$ 代表 $a_1^4a_2$ 的係數， $\underset{3,0,1}{S}$ 代表 $a^3{}_1a_3$ 的係數， $\underset{2,2,0}{S}$ 代表 $a_1^2a_2^2$ 的係數，

， $\underset{1,1,1}{S}$ 代表 $a_1a_2a_3$ 的係數， $\underset{0,3,0}{S}$ 代表 a_2^3 的係數， $\underset{0,0,2}{S}$ 代表 a_3^2 的係數。

同時也發現 $f_6(a_1,a_2,a_3)$ 的項數 $\underset{i,j,k}{S}$ 和 $i+2j+3k=6$ 的非負整數解的個數有 1-1 對應的關係，

因此我們令 $f_m(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i+2j+3k=m}\underset{i,j,k}{S}a_1^ia_2^ja_3^k$ ，$i,j,k\in N\cup\{0\}$ 。

在觀察 $f_m(a_1,a_2,a_3)$ ，m=0，1，2，3，4，5，6 … 的係數及利用引理 1.，發現了 $\underset{i,j,k}{S}$ 也有下列遞迴式：

定理 1：

$\underset{i,j,k}{S}=-(\underset{i-1,j,k}{S}+\underset{i,j-1,k}{S}+\underset{i,j,k-1}{S})$, $i\ge0,j\ge0,k\ge0$ 且 $i+j+k\ge2$ 時成立，

令 $\underset{i,j,k}{S}=0$ 當 $i<0$ 或 $j<0$ 或 $k<0$ 時， $\underset{0,0,0}{S}=3$ ， $\underset{1,0,0}{S}=-1$ ， $\underset{0,1,0}{S}=-2$ ， $\underset{0,0,1}{S}=-3$

證明：

$$f_m(a_1,a_2,a_3)=\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{3}]} \underset{m-2j-3k,j,k}{S} a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j}a_3^{\,k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$a_1 f_{m-1}(a_1,a_2,a_3)=a_1(\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{3}]} \underset{m-2j-3k-1,j,k}{S} a_1^{m-2j-3k-1}a_2^{\,j}a_3^{\,k})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$=\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{3}]} \underset{m-2j-3k-1,j,k}{S} a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j}a_3^{\,k}$$

$$a_2 f_{m-2}(a_1,a_2,a_3)=a_2(\sum_{j=0}^{1+[\frac{m-3k-2}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-2}{3}]} \underset{m-2j-3k,j-1,k}{S} a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j-1}a_3^{\,k})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$=\sum_{j=0}^{1+[\frac{m-3k-2}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-2}{3}]} \underset{m-2j-3k,j-1,k}{S} a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j}a_3^{\,k}$$

$$a_3 f_{m-3}(a_1,a_2,a_3)=a_3(\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-3}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-3}{3}]+1} \underset{m-2j-3k,j,k-1}{S} a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j}a_3^{\,k-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

$$=\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-3}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-3}{3}]+1} \underset{m-2j-3k,j,k-1}{S} a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j}a_3^{\,k}$$

根據引理 1.

$f_m(a_1,a_2,a_3)=-[a_1 f_{m-1}(a_1,a_2,a_3)+a_2 f_{m-2}(a_1,a_2,a_3)+a_3 f_{m-3}(a_1,a_2,a_3)]$ ，$m\geq 3$成立。

可知 (1)= － [(2)+(3)+(4)] 去觀察 $a_1^{m-2j-3k}a_2^{\,j}a_3^{\,k}$的係數

所以 $\underset{m-2j-3k,j,k}{S}=-(\underset{m-2j-3k-1,j,k}{S}+\underset{m-2j-3k,j-1,k}{S}+\underset{m-2j-3k,j,k-1}{S})$ ，又 $i+2j+3k=m$，

即 $\underset{i,j,k}{S}=-(\underset{i-1,j,k}{S}+\underset{i,j-1,k}{S}+\underset{i,j,k-1}{S})$

二、從 $\underset{i,j,k}{S}$ 圖形去觀察幾何意義

由於 $i+2j+3k=m$，這令我們想到 $x+2y+3z=m$ 在空間座標中代表一平面,因此將 $\underset{i,j,k}{S}$ 標記在 (i,j,k)點上，所以我們令座標$(x,y,z)=(i,j,k)$。

可得到下列的圖 1：

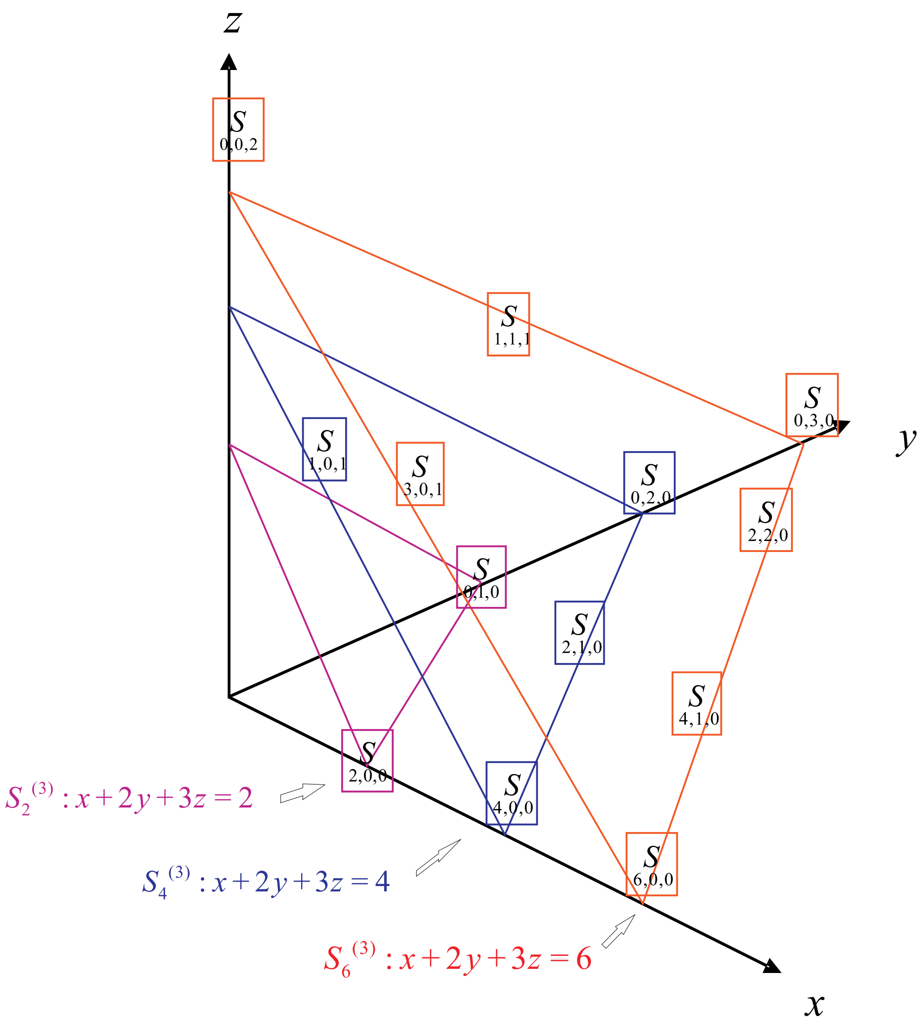


圖 1.

從圖 1，我們發現： $f_2(a_1,a_2,a_3)=S_{2,0,0}a_1^2+S_{0,1,0}a_2$ 的係數， $S_{2,0,0}, S_{0,1,0}$ 在平面 x+2y+3z=2 上，

$f_4(a_1,a_2,a_3)=S_{4,0,0}a_1^4+S_{2,1,0}a_1^2a_2+S_{1,0,1}a_1a_3+S_{0,2,0}a_2^2$ 的係數， $S_{4,0,0}$ ， $S_{2,1,0}$ ， $S_{1,0,1}$ ， $S_{0,2,0}$ 在平面 x+2y+3z=4 上，同理 $f_6(a_1,a_2,a_3)=S_{6,0,0}a_1^6+S_{4,1,0}a_1^4a_2+S_{3,0,1}a_1^3a_3+S_{2,2,0}a_1^2a_2^2+S_{1,1,1}a_1a_2a_3+S_{0,3,0}a_2^3+S_{0,0,2}a_3^2$ 的係數，

$S_{6,0,0}$ ， $S_{4,1,0}$ ， $S_{3,0,1}$ ， $S_{2,2,0}$ ， $S_{1,1,1}$ ， $S_{0,3,0}$ ， $S_{0,0,2}$ ，在平面 x+2y+3z=6 上。

觀察發現每一個不在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的點都有這個性質，請看圖 2.：

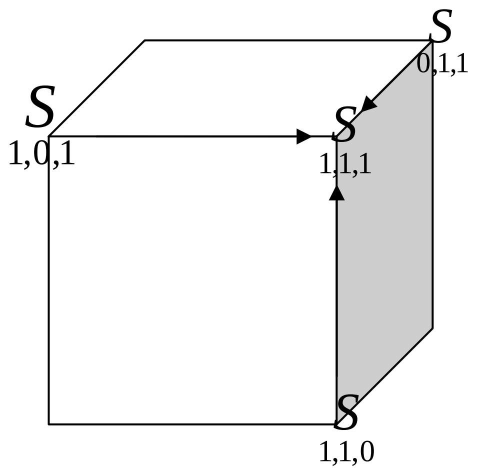


圖 2.

我們發現坐標點(1,1,1)上的值(即 $S_{1,1,1}$ =－12)恰好等於坐標點(0,1,1)上的值與坐標點(1,0,1)上的值與坐標點(1,1,0)上的值(即 $S_{0,1,1}$ =5， $S_{1,0,1}$ =4， $S_{1,1,0}$ =3)的總和再乘於(－1)，這剛好等於定理 1 中的 $S_{1,1,1} = -(S_{0,1,1} + S_{1,0,1} + S_{1,1,0})$ 。

三、求 $f_m\left(a_1, a_2, a_3\right)$ 的一般式 $\sum_{i+2j+3k=m} S_{i,j,k} a_1^{\,i} a_2^{\,j} a_3^{\,k}$

由定理 1, $f_m\left(a_1, a_2, a_3\right)$ 的係數有這個遞迴式: $S_{i,j,k} = -(S_{i-1,j,k} + S_{i,j-1,k} + S_{i,j,k-1})$

因此可用生成函數將係數的一般式求出來：

引理 2：

$$F\left(a_1, a_2, a_3\right) = \sum_{i\ge 0, j\ge 0, k\ge 0} S_{i,j,k} a_1^{\,i} a_2^{\,j} a_3^{\,k} = 3 + \left(-\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{1 + a_1 + a_2 + a_3}\right)$$

證明：

已知 $S_{0,0,0}$ =3，

$$F\left(a_1\right) = \sum_{i\ge 0,} S_{i,0,0} a_1^{\,i} = \sum_{i\ge 1} (-1)^i a_1^{\,i} = 3 + \left(-\frac{a_1}{1 + a_1}\right) \qquad \text{X 軸}$$

$$F\left(a_2\right) = \sum_{j\ge 0,} S_{0,j,0} a_2^{\,j} = \sum_{j\ge 1} (-1)^j \cdot 2 \cdot a_2^{\,j} = 3 + \left(-\frac{2a_2}{1 + a_2}\right) \qquad \text{Y 軸}$$

$$F\left(a_3\right) = \sum_{k\ge 0,} S_{0,0,k} a_3^{\,k} = \sum_{k\ge 1} (-1)^k \cdot 3 \cdot a_3^{\,k} = 3 + \left(-\frac{3a_3}{1 + a_3}\right) \qquad \text{Z 軸}$$

令 $F(a_1,a_2)=\sum_{i\ge0,\,j\ge0} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}$ X-Y 平面

$F(a_2,a_3)=\sum_{j\ge0,k\ge0} S_{0,j,k}\,a_2^{\,j}a_3^{\,k}$ Y-Z 平面

$F(a_1,a_3)=\sum_{i\ge0,k\ge0} S_{i,0,k}\,a_1^{\,i}a_3^{\,k}$ X-Z 平面

$F(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i\ge0,\,j\ge0,k\ge0} S_{i,j,k}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}$

由定理 1 $S_{i,j,0}=-(S_{i-1,j,0}+S_{i,j-1,0})$

$$\Rightarrow \sum_{i\ge1,\,j\ge1} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}=-\sum_{i\ge1,\,j\ge1}(S_{i-1,j,0}+S_{i,j-1,0})a_1^{\,i}a_2^{\,j}\ \cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{i\ge1,\,j\ge1} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}=\sum_{i\ge0,\,j\ge0} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}-\sum_{i\ge0,} S_{i,0,0}\,a_1^{\,i}-\sum_{j\ge0,} S_{0,j,0}\,a_2^{\,j}+S_{0,0,0}$$

$$=F(a_1,a_2)-F(a_1)-F(a_2)+3\cdots\cdots(2)$$

$$\sum_{i\ge1,\,j\ge1} S_{i-1,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}=a_1(\sum_{i\ge1,\,j\ge1} S_{i-1,j,0}\,a_1^{\,i-1}a_2^{\,j})=a_1(\sum_{i\ge0,\,j\ge1} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j})=a_1(\sum_{i\ge0,\,j\ge0} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}-\sum_{i\ge0,} S_{i,0,0}\,a_1^{\,i})$$

$$=a_1(F(a_1,a_2)-F(a_1))\cdots\cdots(3)$$

同理可證 $\sum_{i\ge1,\,j\ge1} S_{i,j-1,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}=a_2(F(a_1,a_2)-F(a_2))\cdots\cdots(4)$

由(1) (2) (3) (4)得到

$$F(a_1,a_2)-F(a_1)-F(a_2)+3=-[a_1(F(a_1,a_2)-F(a_1))+a_2(F(a_1,a_2)-F(a_2))]$$

$$\Rightarrow F(a_1,a_2)=3+(-\frac{a_1+2a_2}{1+a_1+a_2})$$

同理可證 $F(a_1,a_3)=3+(-\frac{a_1+3a_3}{1+a_1+a_3})$

$F(a_2,a_3)=3+(-\frac{2a_2+3a_3}{1+a_2+a_3})$

由定理 1 可得到

$$\sum_{i\ge1,\,j\ge1,k\ge1} S_{i,j,k}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}=-\sum_{i\ge1,\,j\ge1,k\ge1}(S_{i-1,j,k}+S_{i,j-1,k}+S_{i,j,k-1})a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}\cdots\cdots(5)$$

$$\sum_{i\ge1,\,j\ge1,k\ge1} S_{i,j,k}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}=\sum_{i\ge0,\,j\ge0,k\ge0} S_{i,j,k}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}-\sum_{i\ge0,\,j\ge0} S_{i,j,0}\,a_1^{\,i}a_2^{\,j}-\sum_{j\ge0,k\ge0} S_{0,j,k}\,a_2^{\,j}a_3^{\,k}-\sum_{i\ge0,k\ge0} S_{i,0,k}\,a_1^{\,i}a_3^{\,k}$$

$$+\sum_{i\ge0} S_{i,0,0}\,a_1^{\,i}+\sum_{j\ge0} S_{0,j,0}\,a_2^{\,j}+\sum_{k\ge0} S_{0,0,k}\,a_3^{\,k}-S_{0,0,0}$$

$$=F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2)-F(a_2,a_3)-F(a_1,a_3)+F(a_1)+F(a_2)+F(a_3)-3\cdots\cdots(6)$$

$$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1}\underset{i-1,j,k}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}=a_1\Big(\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1}\underset{i-1,j,k}{S}a_1^{\,i-1}a_2^{\,j}a_3^{\,k}\Big)=a_1\Big(\sum_{i\ge0,j\ge1,k\ge1}\underset{i,j,k}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}\Big)$$

$$=a_1\Big(\sum_{i\ge0,j\ge0,k\ge0}\underset{i,j,k}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}-\sum_{i\ge0,j\ge0}\underset{i,j,0}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}-\sum_{i\ge0,k\ge0}\underset{i,0,k}{S}a_1^{\,i}a_3^{\,k}+\sum_{i\ge0}\underset{i,0,0}{S}a_1^{\,i}\Big)$$

$$=a_1[F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2)-F(a_1,a_3)+F(a_1)]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

同理可證 $$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1}\underset{i,j-1,k}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}=a_2[F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2)-F(a_2,a_3)+F(a_2)]\cdots\cdots(8)$$

$$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1}\underset{i,j,k-1}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}=a_3[F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_3)-F(a_2,a_3)+F(a_3)]\cdots\cdots(9)$$

由(5) (6) (7) (8) (9)得到

$$F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2)-F(a_2,a_3)-F(a_1,a_3)+F(a_1)+F(a_2)+F(a_3)-3$$

$$=-\{a_1[F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2)-F(a_1,a_3)+F(a_1)]+a_2[F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2)-F(a_2,a_3)+F(a_2)]$$

$$+a_3[F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_3)-F(a_2,a_3)+F(a_3)]\}$$

$$\Rightarrow\quad F(a_1,a_2,a_3)=3+\Big(-\frac{a_1+2a_2+3a_3}{1+a_1+a_2+a_3}\Big)$$

利用引理 2 得到本節主要定理

定理 2：

$$f_m(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i+2j+3k=m}\underset{i,j,k}{S}a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}$$ ，m ≥ 1。其中

$$\underset{i,j,k}{S}=(-1)^{i+j+k}\cdot\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}\cdot\frac{i+2j+3k}{i+j+k}$$ ，而 $f_0(a_1,a_2,a_3)=3$。

證明：

由 $F(a_1,a_2,a_3)=3+\Big(-\frac{a_1+2a_2+3a_3}{1+a_1+a_2+a_3}\Big)$ 去推出 $f_m(a_1,a_2,a_3)$，$m\ge1$的一般式

根據[4]中 $\frac{1}{(1+x)^n}=1-C_1^{n+1-1}x^1+C_2^{n+2-1}x^2+\cdots+C_k^{n+k-1}x^k+\cdots\qquad(|x|<1)$

因此由 $$-\frac{a_1+2a_2+3a_3}{1+a_1+a_2+a_3}=-\frac{a_1+2a_2+3a_3}{1+a_1+a_2}\Bigg(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1+a_2}a_3}\Bigg)$$

以a_3去展開得到一般項爲

$$(-1)^k\cdot\frac{3+2a_1+a_2}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}a_3{}^k=(-1)^k\left(\frac{1+a_1+a_2}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}+\frac{1+a_1}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}+\frac{1}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}\right)a_3{}^k\cdots\cdots\cdots(1)$$

由(1)式中 $\frac{1+a_1+a_2}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}=\frac{1}{(1+a_1+a_2)^k}=(\frac{1}{1+a_1})^k\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1}\cdot a_2})^k$

以a_2去展開

$$(\frac{1}{1+a_1})^k\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1}\cdot a_2})^k=(\frac{1}{1+a_1})^k\cdot[1+C_1^{1+k-1}\cdot(-\frac{1}{1+a_1}\cdot a_2)+\cdots+C_j^{j+k-1}\cdot(-\frac{1}{1+a_1}\cdot a_2)^j+\cdots]$$

其中第 j 項爲 $(-1)^j\cdot(\frac{1}{1+a_1})^{k+j}C_j^{j+k-1}a_2{}^ja_3{}^k$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

同理可證

$\frac{1+a_1}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}=(\frac{1}{1+a_1})^k\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1}\cdot a_2})^{k+1}$ 第 j 項爲 $(-1)^j\cdot(\frac{1}{1+a_1})^{k+j}C_j^{j+k}a_2{}^ja_3{}^k\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$\frac{1}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}=(\frac{1}{1+a_1})^{k+1}\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1}\cdot a_2})^{k+1}$ 第 j 項爲 $(-1)^j\cdot(\frac{1}{1+a_1})^{k+j+1}C_j^{j+k}a_2{}^ja_3{}^k\cdots\cdots\cdots(4)$

由(1) (2) (3) (4)可得到

$(-1)^k\cdot\frac{3+2a_1+a_2}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}a_3{}^k$ 第 j 項爲

$$(-1)^j\cdot(-1)^k[(\frac{1}{1+a_1})^{k+j}C_j^{j+k-1}+(\frac{1}{1+a_1})^{k+j}C_j^{j+k}+(\frac{1}{1+a_1})^{k+j+1}C_j^{j+k}]a_2{}^ja_3{}^k\cdots(5)$$

在(5)式中再以a_1去展開得到

$(-1)^k\cdot\frac{3+2a_1+a_2}{(1+a_1+a_2)^{k+1}}a_3{}^k$ 第 i 項爲 $(-1)^{i+j+k}(C_i^{i+j+k-1}C_j^{j+k-1}+C_i^{i+j+k-1}C_j^{j+k}+C_i^{i+j+k}C_j^{j+k})a_1{}^ia_2{}^ja_3{}^k$

$$=(-1)^{i+j+k}\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!k!}\cdot\frac{i+2j+3k}{i+j+k}a_1{}^ia_2{}^ja_3{}^k$$

所以我們就可以得到

$m\geq 1$，$f_m(a_1,a_2,a_3)$的一般式 $\sum_{i+2j+3k=m}S_{i,j,k}a_1{}^ia_2{}^ja_3{}^k$，其中 $S_{i,j,k}=(-1)^{i+j+k}\cdot\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!k!}\cdot\frac{i+2j+3k}{i+j+k}$

四、探討巴斯卡三角錐和”有符號的 Lucas 三角錐”數值之間的關係圖形

由於我在 Episte math 數學知識搜尋巴斯卡找到一個網站[6]，裡面有提到巴斯卡與 Fibonacci 數列的關係，所以我又去找有關巴斯卡與 Fibonacci 數列有關的文章[6][8]。裡面有提到**巴斯卡三角錐和 Lucas 三角形**，所以我就想，是否能研究**巴斯卡三角錐**與 **”有符號的 Lucas 三角錐”** 有無相似的關係。

由於[3]得知巴斯卡三角錐是由 $(x+y+z)^n$ 所產生的。所以**巴斯卡三角錐**的一般式為：

$\sum_{i+j+k=m} \frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!} x^i y^j z^k$，而這也是大家所熟悉的多項式定理。此時我令 $\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!} = P_{i,j,k}$，

以下我們就開始來探討**巴斯卡三角錐和 ”有符號的 Lucas 三角錐”** 數值之間的關係圖形

1．觀察**巴斯卡三角錐**與 **”有符號的 Lucas 三角錐”** 在 X-Y 平面上數值之間的關係：

這是**巴斯卡三角錐**在 X-Y 平面上的數值：$P_{i,j,0} = P_{i-1,j,0} + P_{i,j-1,0}$。

此是我們熟悉的巴斯卡定理：

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

巴斯卡三角形

圖 3.

這是”**有符號的 Lucas 三角錐**”在 X-Y 平面上的數值：$S_{i,j,0} = -(S_{i-1,j,0} + S_{i,j-1,0})$。

2
-1 -2
1 3 2
-1 -4 -5 -2
1 5 9 7 2

有符號的Lucas 三角形

圖 4.

2．觀察巴斯卡三角錐與 ”有符號的 Lucas 三角錐”不在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上數值之間的關係：

巴斯卡三角錐在$\{(i,j,k) \mid i，j，k \in N\}$上的數值： $P_{i,j,k} = P_{i-1,j,k} + P_{i,j-1,k} + P_{i,j,k-1}$ 。

”有符號的 Lucas 三角錐”在$\{(i,j,k) \mid i，j，k \in N\}$上的數值： $S_{i,j,k} = -(S_{i-1,j,k} + S_{i,j-1,k} + S_{i,j,k-1})$ 。

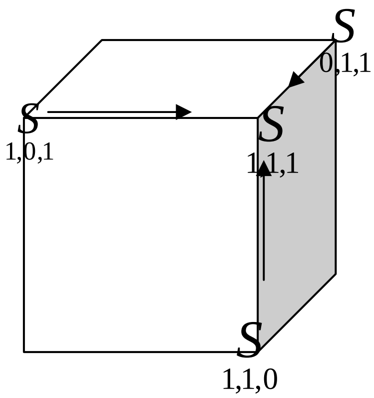


圖 2.

五、探討”有符號的 Lucas 三角錐”與 Fibonacci 數列和 Lucas 數列之間的關係

由[6]得知巴斯卡三角錐和 Fibonacci 數列之間有某些關係，而在[1]中探討的是 Lucas 數列，因此，我們想了解**“有符號的 Lucas 三角錐”** 和 Fibonacci 數列及 Lucas 數列之間應有相對應的關係.

1．首先，我們先討論二維的情況：

巴斯卡三角形的係數有 Fibonacci 數列： 0，1， 1，2，3，5，8，13……

$f_n^{(2)} = (f_{n-1}^{(2)} + f_{n-2}^{(2)})$ ，n ≥ 2

Lucas 三角形[8]的係數也有 Lucas 數列： 2， 1，3，4，7，11……

$l_n^{(2)} = (l_{n-1}^{(2)} + l_{n-2}^{(2)})$ ，n ≥ 2

所以我們猜測 $S_{i,j,0}$ 也有類似的關係。

性質 1：

$S_m^{(2)} = \left\{ S_{i,j,0} \middle| i+2j=m,\quad m \in \mathrm{N} \cup \{0\} \right\}$ ， $s_m^{(2)} = \sum_{i+2j=m} S_{i,j,0}$

$s_0^{(2)} = 2$ ， $s_1^{(2)} = -1$ ， $s_m^{(2)} = -(s_{m-1}^{(2)} + s_{m-2}^{(2)})$ ，$m \ge 2$ 。

而第 m 列的元素爲{ $S_{i,j,0} \mid i+j=m$ ， $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ }。

可由圖 5.說明：

2

-1 -2

1 3 2

-1 -4 -5 -2

圖 5.

如果把 $\underset{i,j,0}{S}$ 係數加上絕對值，就會發現我們的數列與 Lucas 數列是一樣的，所以我們稱

$s_m^{(2)} = -(s_{m-1}^{(2)} + s_{m-2}^{(2)})$ ，m ≥ 2 爲**有符號的 Lucas 數列**。

證明：由 $s_0^{(2)} = 2, s_1^{(2)} = -1$ ，

$$\text{當 } m \geq 2 \text{ 時，} s_m^{(2)} = \sum_{i+2j=m} \underset{i,j,0}{S} = \sum_{i+2j=m} -(\underset{i-1,j,0}{S} + \underset{i,j-1,0}{S})$$

$$= -(\sum_{i+2j=m} \underset{i-1,j,0}{S} + \sum_{i+2j=m} \underset{i,j-1,0}{S})$$

$$= -(\sum_{i_1+2j=m-1} \underset{i_1,j,0}{S} + \sum_{i+2j_1=m-2} \underset{i,j_1,0}{S}) = -(s_{m-1}^{(2)} + s_{m-2}^{(2)})$$

因此我們得到**有符號的 Lucas 數列**爲： 2，－1，－1，2，－1，－1，……

有趣的是我們也發覺此一數列恰爲 $f_0(a_1,a_2), f_1(a_1,a_2), f_2(a_1,a_2),\cdots\cdots, f_m(a_1,a_2),\cdots\cdots$ 的各項係數和所排成之數列。

2．其次，再討論三維的情況：

在空間中也是一樣，**巴斯卡三角錐**的係數有推廣的 Fibonacci 數列：0，1，1，2，4，7，13…

$f_m^{(3)} = (f_{m-1}^{(3)} + f_{m-2}^{(3)} + f_{m-3}^{(3)})$ ，m ≥ 3

Lucas 三角錐的係數也有推廣的 Lucas 數列： 3，1，3，7，11，21……

$l_m^{(3)} = (l_{m-1}^{(3)} + l_{m-2}^{(3)} + l_{m-3}^{(3)})$ ，m ≥ 3

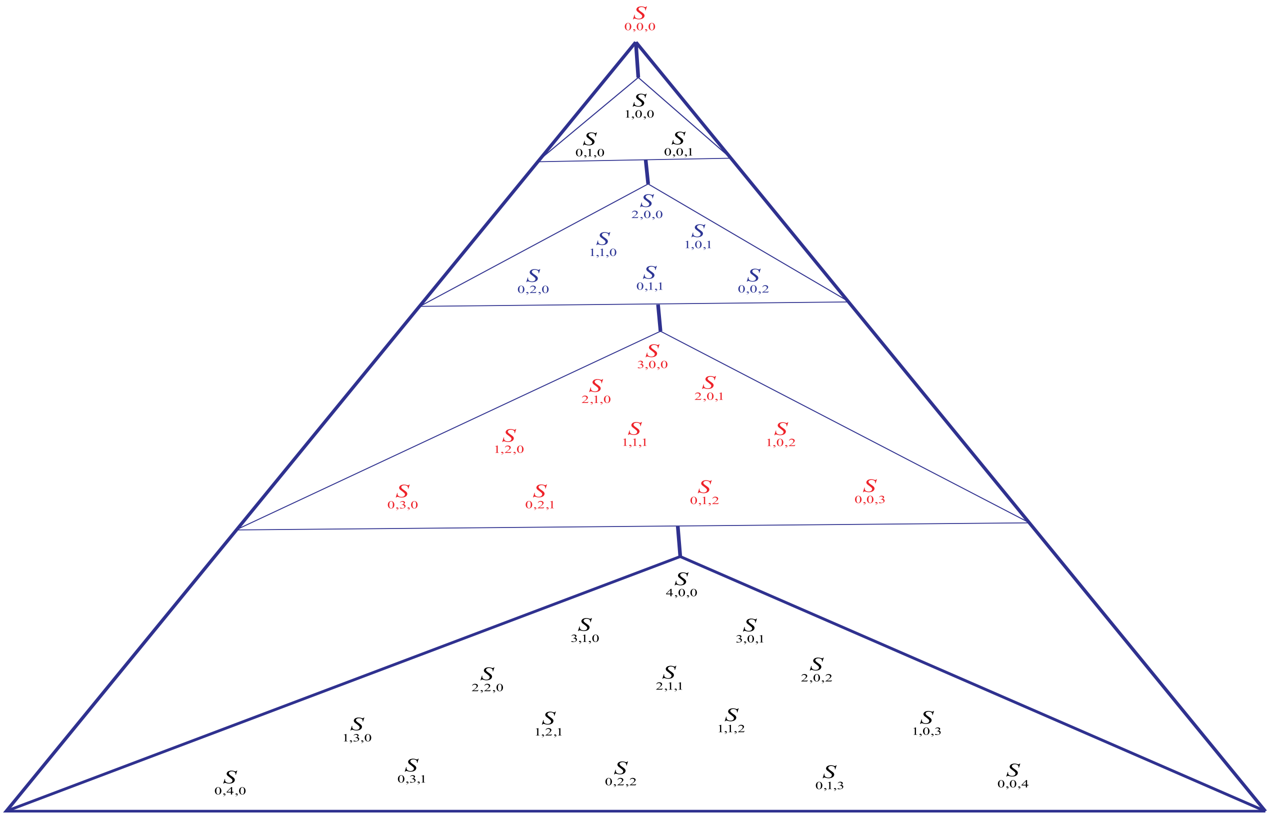
性質 2：

$S_m^{(3)} = \left\{ \underset{i,j,k}{S} \middle| i+2j+3k=m,\ \ m \in \mathrm{N} \cup \{0\} \right\}$ ，$s_m^{(3)} = \sum_{i+2j+3k=m} \underset{i,j,k}{S}$

$s_0^{(3)} = 3$ ， $s_1^{(3)} = -1$ ， $s_2^{(3)} = -1$ ， $s_m^{(3)} = -(s_{m-1}^{(3)} + s_{m-2}^{(3)} + s_{m-3}^{(3)})$ ，m ≥ 3，

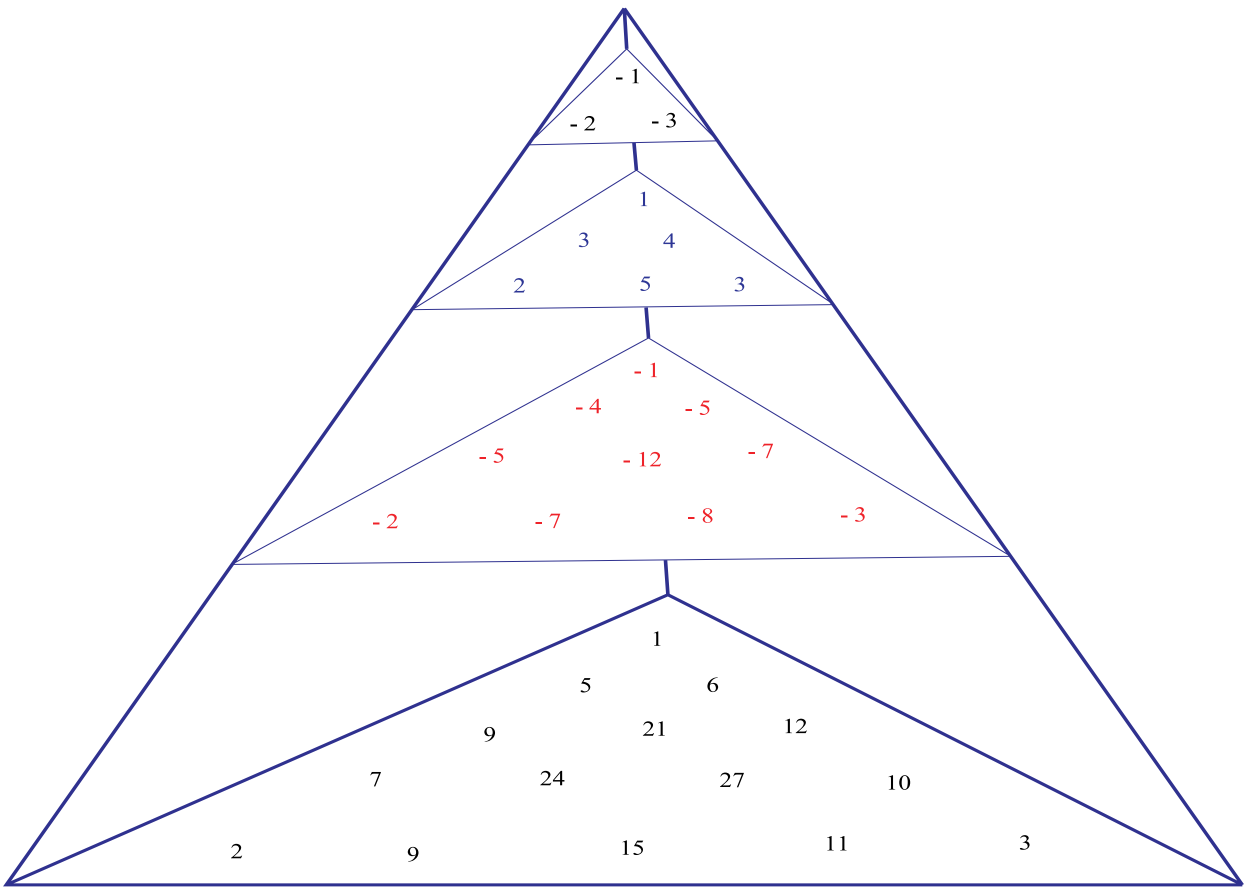
而第 m 層的元素爲{ $\underset{i,j,k}{S} \mid i+j+k=m$ ， $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ }。

說明：由圖 6、圖 7、圖 8



$S_{0,0,0}$
$S_{1,0,0}$
$S_{0,1,0}$ $S_{0,0,1}$
$S_{2,0,0}$
$S_{1,1,0}$ $S_{1,0,1}$
$S_{0,2,0}$ $S_{0,1,1}$ $S_{0,0,2}$
$S_{3,0,0}$
$S_{2,1,0}$ $S_{2,0,1}$
$S_{1,2,0}$ $S_{1,1,1}$ $S_{1,0,2}$
$S_{0,3,0}$ $S_{0,2,1}$ $S_{0,1,2}$ $S_{0,0,3}$
$S_{4,0,0}$
$S_{3,1,0}$ $S_{3,0,1}$
$S_{2,2,0}$ $S_{2,1,1}$ $S_{2,0,2}$
$S_{1,3,0}$ $S_{1,2,1}$ $S_{1,1,2}$ $S_{1,0,3}$
$S_{0,4,0}$ $S_{0,3,1}$ $S_{0,2,2}$ $S_{0,1,3}$ $S_{0,0,4}$

圖 6.



- 1
- 2 - 3
1
3 4
2 5 3
- 1
- 4 - 5
- 5 - 12 - 7
- 2 - 7 - 8 - 3
1
5 6
9 21 12
7 24 27 10
2 9 15 11 3

圖 7.

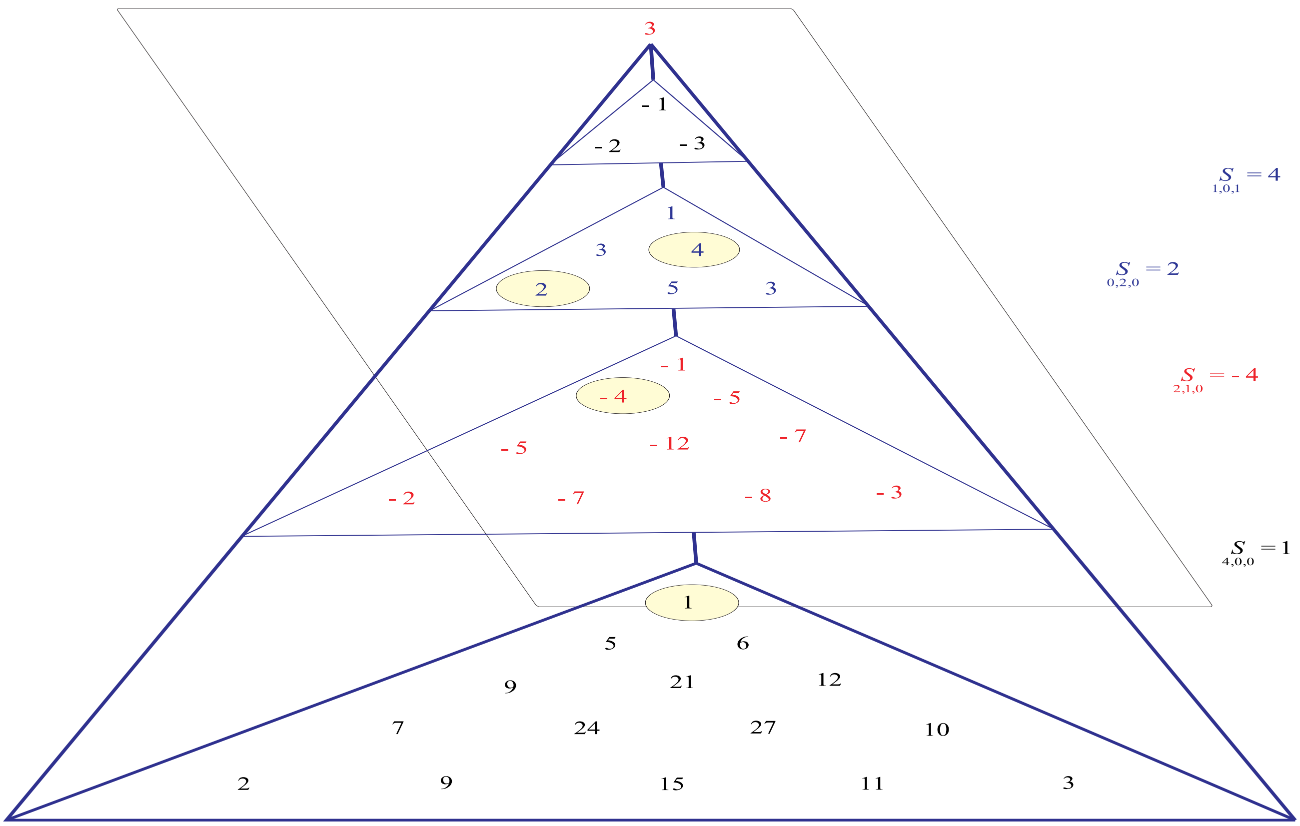


圖 8..

上圖中的平面所切到的點爲 $S_4^{(3)}$ 。

證明：由 $s_0^{(3)}=3, s_1^{(3)}=-1, s_2^{(3)}=-1$

當 $m\ge 3$ 時， $s_m^{(3)}=\sum\limits_{i+2j+3k=m} S_{i,j,k}=\sum\limits_{i+2j+3k=m} -(S_{i-1,j,k}+S_{i,j-1,k}+S_{i,j,k-1})$

$$=-(\sum_{i+2j+3k=m} S_{i-1,j,k}+\sum_{i+2j+3k=m} S_{i,j-1,k}+\sum_{i+2j+3k=m} S_{i,j,k-1})$$

$$=-(\sum_{i_1+2j+3k=m-1} S_{i_1,j,k}+\sum_{i+2j_1+3k=m-2} S_{i,j_1,k}+\sum_{i+2j+3k_1=m-3} S_{i,j,k_1})$$

$$=s_m^{(3)}=-(s_{m-1}^{(3)}+s_{m-2}^{(3)}+s_{m-3}^{(3)})$$

因此我們得到有符號的 Lucas 數列爲： 3，－1，－1，－1，3，－1，－1，－1……

如同在二維的情況一樣，我們也發覺此一數列恰爲 $f_0(a_1,a_2,a_3), f_1(a_1,a_2,a_3), f_2(a_1,a_2,a_3),\cdots\cdots$ ，$f_m(a_1,a_2,a_3),\cdots\cdots$ 的各項係數和所排成之數列。

六、探討巴斯卡三角錐與”有符號的 Lucas 三角錐”奇偶性的圖形變化

我們從[2]“巴斯卡三角形的幾個性質”中發現,如果我們把**巴斯卡三角形**的每個奇數以紅色小圈圈表示,每個偶數以黑色小點表示,所得到的圖形將具有相當美妙的結構。因此既然**巴斯卡三角形**奇偶性的圖形有相當美妙的結構,那”**有符號的 Lucas 三角錐**”是不是也有如此美妙的結構呢？

接著我們就來探討 **巴斯卡三角錐** 與”**有符號的 Lucas 三角錐**”圖形。

1．觀察 **巴斯卡三角錐** 與 ”**有符號的 Lucas 三角錐**”在 X-Y 平面上奇偶性的圖形變化：

由圖 9.可觀察出,只要將**巴斯卡三角錐**的圖形向 X 軸正向平移 1 單位就能得到”**有符號的 Lucas 三角錐**”的圖形。

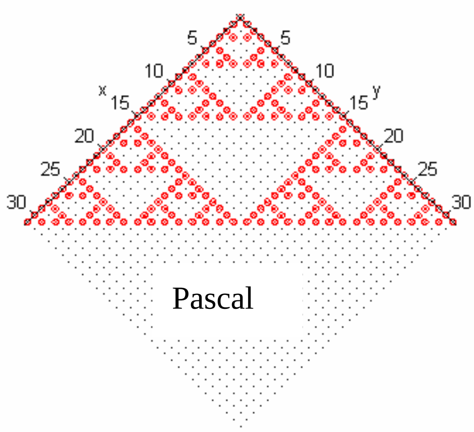
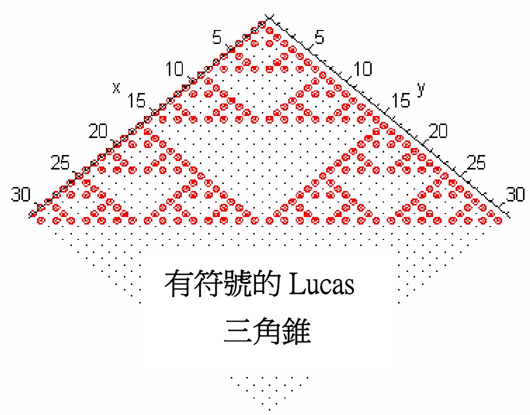


圖 9.



2．觀察 **巴斯卡三角錐**與 ”**有符號的 Lucas 三角錐**”在 Y-Z 平面上奇偶性的圖形變化：

由圖 10.可觀察出,只要將**巴斯卡三角錐**的圖形向 Z 軸正向平移 1 單位就能得到”**有符號的 Lucas 三角錐**” 的圖形。

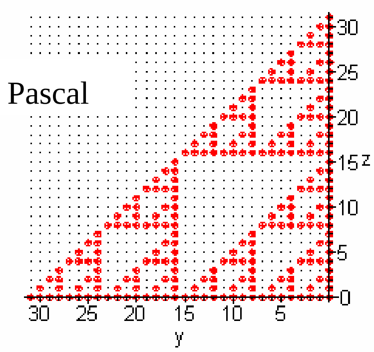
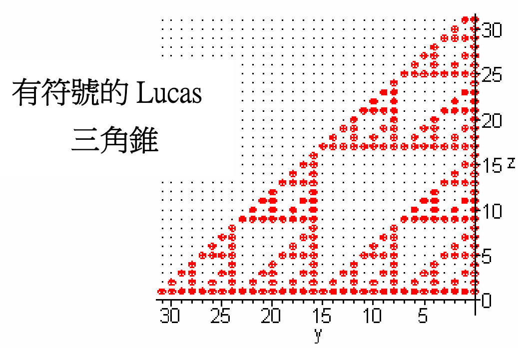


圖 10.



3．觀察 巴斯卡三角錐 與 ”有符號的 Lucas 三角錐” X-Z 平面上奇偶性的圖形變化：

由圖 11.可觀察出,只要將巴斯卡三角錐的圖形 與 ”有符號的 Lucas 三角錐”的圖形完全一樣。

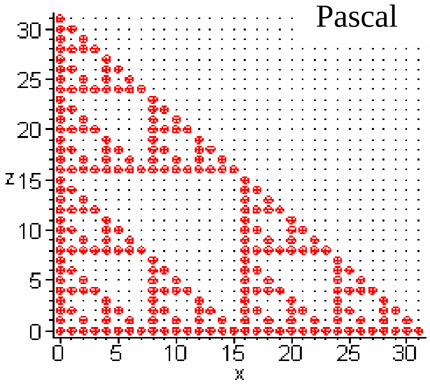
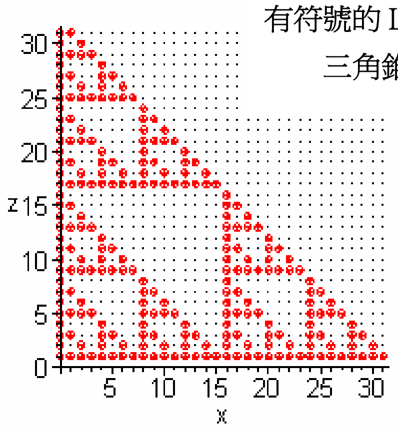


圖 11.



所以我們得到以下推論

推論 1：

(1) $S_{i+1,j,0} \equiv P_{i,j,0}$ (mod 2) X-Y 平面

(2) $S_{0,j,k+1} \equiv P_{0,j,k}$ (mod 2) Y-Z 平面

(3) $S_{i,0,k} \equiv P_{i,0,k}$ (mod 2) X-Z 平面

證明：(1)

$$S_{i+1,j,0} = (-1)^{i+1+j} \times \frac{(i+1+j)!}{(i+1)!\,j!} \times \frac{i+1+2j}{i+j+1}$$

$$= (-1)^{i+1+j} \times \left(\frac{(i+1+j)!}{(i+1)!\,j!} \times \frac{i+1}{i+j+1} + \frac{(i+1+j)!}{(i+1)!\,j!} \times \frac{2j}{i+1+j}\right)$$

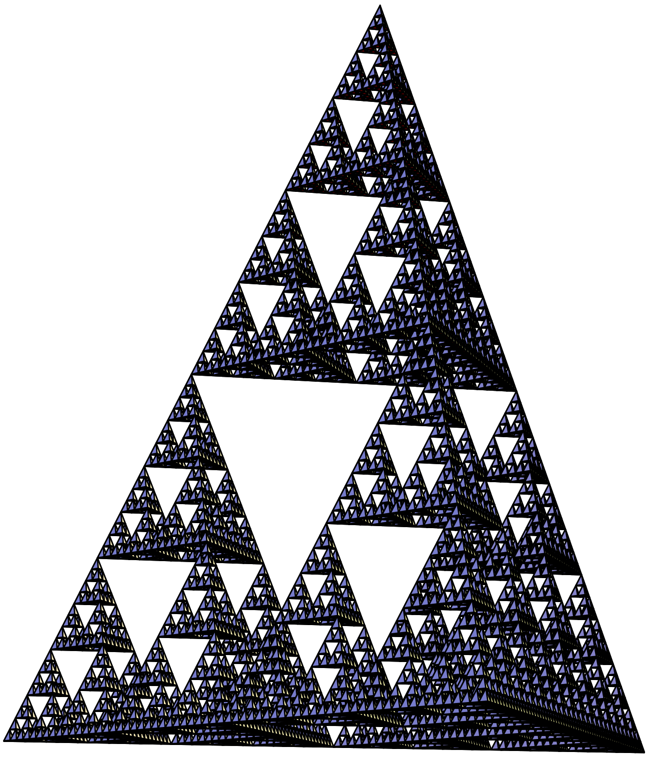
$$= (-1)^{i+1+j} \times (C_i^{i+j} + C_{i+1}^{i+j} \bullet 2)$$

$$S_{i+1,j,0} \equiv (-1)^{i+1+j} \times (C_i^{i+j} + C_{i+1}^{i+j} \bullet 2) \equiv C_i^{i+j} \equiv P_{i,j,0} \pmod 2$$

(2)與(3)同理可證。

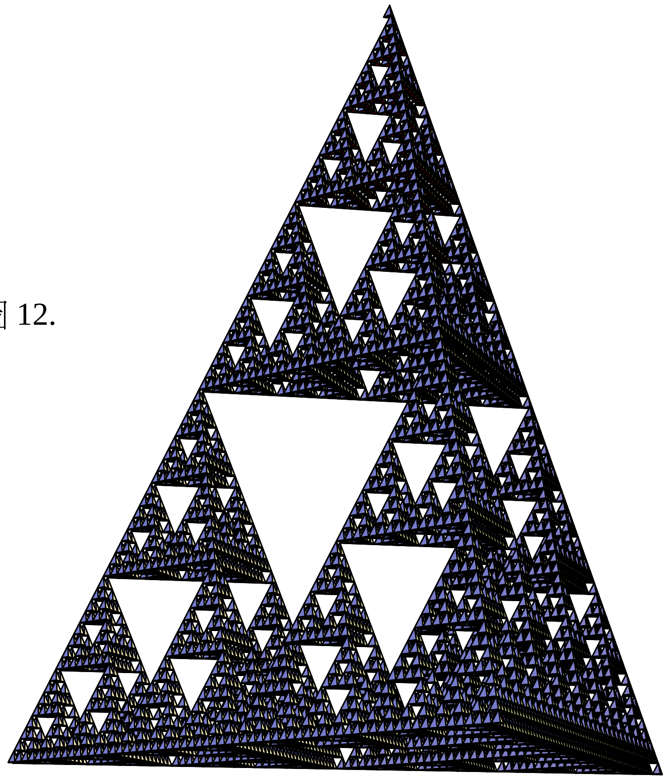
4．觀察 **巴斯卡三角錐**與 ”**有符號的 Lucas 三角錐**”空間中奇偶性的圖形變化：

我們把**巴斯卡三角錐**與 ”**有符號的 Lucas 三角錐**”的每個奇數點以邊長為$\sqrt{3}$的正四面體表示，得到圖 12.。



巴斯卡三角錐

圖 12.



有符號的 Lucas 三角錐

從圖 12.中，**巴斯卡三角錐** 與 “**有符號的 Lucas 三角錐**”的奇偶圖形非常相似，且都有似碎形的結構。且發現”**有符號的 Lucas 三角錐**”奇偶性的圖形分別在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的圖形只要平移就能和 **巴斯卡三角錐** 在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的圖形全等。但不在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的點卻非如此。

七、探討”有符號的 Lucas 三角錐”係數的奇偶性

$$\underset{i,j,k}{S}=(-1)^{i+j+k}\cdot\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!k!}\times\frac{i+2j+3k}{i+j+k}$$

$$=(-1)^{i+j+k}\cdot\left(\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!k!}\times\frac{i}{i+j+k}+\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!k!}\times\frac{2j}{i+j+k}+\frac{(i+j+k)!}{i!\,j!k!}\times\frac{3k}{i+j+k}\right)$$

$$=(-1)^{i+j+k}\cdot(C_{i-1}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}+C_{i}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}\cdot 2+C_{i}^{i+j}\cdot C_{k-1}^{i+j+k-1}\cdot 3)$$

$$\underset{i,j,k}{S}\equiv(-1)^{i+j+k}\cdot(C_{i-1}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}+C_{i}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}\cdot 2+C_{i}^{i+j}\cdot C_{k-1}^{i+j+k-1}\cdot 3)$$

$$\equiv C_{i-1}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}+C_{i}^{i+j}\cdot C_{k-1}^{i+j+k-1}\qquad(\text{mod}2)$$

因此只要討論 $C_{i-1}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}+C_{i}^{i+j}\cdot C_{k-1}^{i+j+k-1}$的奇偶性，所以根據 Lucas 定理

我們先分別把 n 與 r 表示爲 2 進位 $n=(a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)_2$ ，$r=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2$ ，且 $0\le a_i, b_i<2$

則 $C_r^n\equiv\prod_{i=0}^{m}C_{b_i}^{a_i}\pmod 2$ ，接著我們只要把 $C_{i-1}^{i+j-1}\cdot C_{k}^{i+j+k-1}+C_{i}^{i+j}\cdot C_{k-1}^{i+j+k-1}$ 中的

$i+j-1$，$i-1$，$i+j+k-1$，k，$i+j$，$i+j+k-1$，i，$k-1$，依照上面的法則分別化成二進位即可判斷奇偶了。

八、探討”有符號的 Lucas 三角錐”的推廣

設 $h(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ ，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 爲此多項式的根，，$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=-a_1$ ，

$\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_4+\beta_2\beta_4+\beta_4\beta_3=a_2$ ，$\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\beta_1\beta_4\beta_3+\beta_4\beta_2\beta_3=-a_3$

$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4=a_4$ ，令 $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=\beta_1^{\,m}+\beta_2^{\,m}+\beta_3^{\,m}+\beta_4^{\,m}$

利用 a_1 , a_2 , a_3, a_4 來表示 $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)$，令 $\underset{i,j,k,l}{S}$ 代表 $a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}a_4^{\,l}$ 此項係數且 i+2j+3k+4l=m

引理 1′：

$f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=-[a_1f_{m-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)+a_2f_{m-2}(a_1,a_2,a_3,a_4)+a_3f_{m-3}(a_1,a_2,a_3,a_4)+a_4f_{m-4}(a_1,a_2,a_3,a_4)]$

，$\forall\ m\ge 4$，其中 $f_0(a_1,a_2,a_3,a_4)=4$ ，$f_1(a_1,a_2,a_3,a_4)=-a_1$ ，$f_2(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1^{\,2}-2a_2$ ，

$f_3(a_1,a_2,a_3,a_4)=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3$

證明：

$h(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ ， $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 爲此多項式的根

$\beta_1^{\,4}=-(a_1\beta_1^{\,3}+a_2\beta_1^{\,2}+a_3\beta_1+a_4)$ ， $\beta_2^{\,4}=-(a_1\beta_2^{\,3}+a_2\beta_2^{\,2}+a_3\beta_2+a_4)$ ，

$\beta_3^{\,4}=-(a_1\beta_3^{\,3}+a_2\beta_3^{\,2}+a_3\beta_3+a_4)$ ， $\beta_4^{\,4}=-(a_1\beta_4^{\,3}+a_2\beta_4^{\,2}+a_3\beta_4+a_4)$ ， $m\geq 4$

$\beta_1^{\,m}=\beta_1^{\,4}\bullet\beta_1^{\,m-4}=-(a_1\beta_1^{\,m-1}+a_2\beta_1^{\,m-2}+a_3\beta_1^{\,m-3}+a_4\beta_1^{\,m-4})$ ……………………………(1)

$\beta_2^{\,m}=\beta_2^{\,4}\bullet\beta_2^{\,m-4}=-(a_1\beta_2^{\,m-1}+a_2\beta_2^{\,m-2}+a_3\beta_2^{\,m-3}+a_4\beta_2^{\,m-4})$ ……………………………(2)

$\beta_3^{\,m}=\beta_3^{\,4}\bullet\beta_3^{\,m-4}=-(a_1\beta_3^{\,m-1}+a_2\beta_3^{\,m-2}+a_3\beta_3^{\,m-3}+a_4\beta_3^{\,m-4})$ ……………………………(3)

$\beta_4^{\,m}=\beta_4^{\,4}\bullet\beta_4^{\,m-4}=-(a_1\beta_4^{\,m-1}+a_2\beta_4^{\,m-2}+a_3\beta_4^{\,m-3}+a_4\beta_4^{\,m-4})$ ……………………………(4)

(1)(2)(3)(4)式相加等於

$$\beta_1^{\,m}+\beta_2^{\,m}+\beta_3^{\,m}+\beta_4^{\,m}=-[a_1(\beta_1^{\,m-1}+\beta_2^{\,m-1}+\beta_3^{\,m-1}+\beta_4^{\,m-1})+a_2(\beta_1^{\,m-2}+\beta_2^{\,m-2}+\beta_3^{\,m-2}+\beta_4^{\,m-2})$$
$$+a_3(\beta_1^{\,m-4}+\beta_2^{\,m-4}+\beta_3^{\,m-4}+\beta_4^{\,m-4})+a_4(\beta_1^{\,m-4}+\beta_2^{\,m-4}+\beta_3^{\,m-4}+\beta_4^{\,m-4})]$$

$$f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=-[a_1f_{m-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)+a_2f_{m-2}(a_1,a_2,a_3,a_4)+a_3f_{m-3}(a_1,a_2,a_3,a_4)+a_4f_{m-4}(a_1,a_2,a_3,a_4)]$$

定理 1′：

$S_{i,j,k,l}=-(S_{i-1,j,k,l}+S_{i,j-1,k,l}+S_{i,j,k-1,l}+S_{i,j,k,l-1}), i\geq 0, j\geq 0, k\geq 0, l\geq 0$ 且 $i+j+k+l\geq 2$ 時成立。

令 $S_{i,j,k,l}$=0 當 i<0 或 j<0 或 j<0 或 l<0，且 $S_{0,0,0,0}=4,\ S_{1,0,0,0}=-1,\ S_{0,1,0,0}=-2,\ S_{0,0,1,0}=-3,\ S_{0,0,0,1}=-4$

證明：因爲 $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-4l}{3}]}\sum_{l=0}^{[\frac{m}{4}]}S_{m-2j-3k-4l,j,k,l}\,a_1^{m-2j-3k-4l}a_2^ja_3^ka_4^l$ (1)

$$a_1f_{m-1}(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1\Big(\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-4l-1}{3}]}\sum_{l=0}^{[\frac{m-1}{4}]}S_{m-2j-3k-4l-1,j,k,l}\,a_1^{m-2j-3k-4l-1}a_2^ja_3^ka_4^l\Big)$$

$$=\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-4l-1}{3}]}\sum_{l=0}^{[\frac{m-1}{4}]}S_{m-2j-3k-4l-1,j,k,l}\,a_1^{m-2j-3k-4l}a_2^ja_3^ka_4^l \qquad (2)$$

$$a_2f_{m-2}(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_2\Big(\sum_{j=0}^{1+[\frac{m-3k-4l-2}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{m-4l-2}{3}]}\sum_{l=0}^{[\frac{m-2}{4}]}S_{m-2j-3k-4l,j-1,k,l}\,a_1^{m-2j-3k-4l}a_2^{j-1}a_3^ka_4^l\Big)$$

$$= \sum_{j=0}^{1+[\frac{m-3k-4l-2}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{m-4l-2}{3}]} \sum_{l=0}^{[\frac{m-2}{4}]} S_{m-2j-3k-4l,\,j-1,k,l} \, a_1^{m-2j-3k-4l} a_2^j a_3^k a_4^l \qquad (3)$$

$$a_3 f_{m-3}(a_1,a_2,a_3,a_4) = a_3 (\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l-3}{2}]} \sum_{k=0}^{1+[\frac{m-4l-3}{3}]} \sum_{l=0}^{[\frac{m-3}{4}]} S_{m-2j-3k-4l,\,j,k-1,l} \, a_1^{m-2j-3k-4l} a_2^j a_3^{k-1} a_4^l)$$

$$= \sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l-3}{2}]} \sum_{k=0}^{1+[\frac{m-4l-3}{3}]} \sum_{l=0}^{[\frac{m-3}{4}]} S_{m-2j-3k-4l,\,j,k-1,l} \, a_1^{m-2j-3k-4l} a_2^j a_3^k a_4^l \qquad (4)$$

$$a_4 f_{m-4}(a_1,a_2,a_3,a_4) = a_4 (\sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l-4}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{m-4l-4}{3}]} \sum_{l=0}^{1+[\frac{m-4}{4}]} S_{m-2j-3k-4l,\,j,k,l-1} \, a_1^{m-2j-3k-4l} a_2^j a_3^k a_4^{l-1})$$

$$= \sum_{j=0}^{[\frac{m-3k-4l-4}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{m-4l-4}{3}]} \sum_{l=0}^{1+[\frac{m-4}{4}]} S_{m-2j-3k-4l,\,j,k,l-1} \, a_1^{m-2j-3k-4l} a_2^j a_3^k a_4^l \qquad (5)$$

根據引理 $1'$， $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4) =$

$-[a_1 f_{m-1}(a_1,a_2,a_3,a_4) + a_2 f_{m-2}(a_1,a_2,a_3,a_4) + a_3 f_{m-3}(a_1,a_2,a_3,a_4) + a_4 f_{m-4}(a_1,a_2,a_3,a_4)]$，$m \ge 4$

可得 (1)=－[(2)+(3)+(4)+(5)] ，

比較 $a_1^{m-2j-3k-4l} a_2^j a_3^k a_4^l$ 的係數得到：

$$S_{m-2j-3k-4l,\,j,k,l} = -(S_{m-2j-3k-4l-1,\,j,k,l} + S_{m-2j-3k-4l,\,j-1,k,l} + S_{m-2j-3k-4l,\,j,k-1,l} + S_{m-2j-3k-4l,\,j,k,l-1})，$$

又 $i+2j+3k+4l=m$，則 $S_{i,j,k,l} = -(S_{i-1,j,k,l} + S_{i,j-1,k,l} + S_{i,j,k-1,l} + S_{i,j,k,l-1})$

引理 $2'$：

$$F(a_1,a_2,a_3,a_4) = \sum_{i\ge0,\,j\ge0,k\ge0,l\ge0} S_{i,j,k,l}\, a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l = 4 + (-\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{1+a_1+a_2+a_3+a_4})$$

證明：由定理 $1'$ 可得到

$$\sum_{i\ge1,\,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i,j,k.l}\, a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l = -\sum_{i\ge1,\,j\ge1,k\ge1,l\ge1} (S_{i-1,j,k,l} + S_{i,j-1,k,l} + S_{i,j,k-1,l} + S_{i,j,k.l-1}) a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l$$

$$\sum_{i\ge1,\,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i,j,k,l}\, a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l = \sum_{i\ge0,\,j\ge0,k\ge0,l\ge0} S_{i,j,k,l}\, a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l - \sum_{i\ge0,\,j\ge0,k\ge0} S_{i,j,k,0}\, a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k - \sum_{j\ge0,k\ge0,l\ge0} S_{0,j,k,l}\, a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l$$

$$- \sum_{i\ge0,\,j\ge0,l\ge0} S_{i,j,0,l}\, a_1{}^i a_2{}^k a_4{}^l - \sum_{i\ge0,k\ge0,l\ge0} S_{i,0,k,l}\, a_1{}^i a_3{}^k a_4{}^l$$

$$+\sum_{i\ge0,j\ge0} S_{i,j,0,0}a_1^i a_2^j+\sum_{i\ge0,k\ge0} S_{i,0,k,0}a_1^i a_3^k+\sum_{i\ge0,l\ge0} S_{i,0,0,l}a_1^i a_4^l+\sum_{j\ge0,k\ge0} S_{0,j,k,0}a_2^j a_3^k$$

$$+\sum_{j\ge0,l\ge0} S_{0,j,0,l}a_2^j a_4^l+\sum_{k\ge0,l\ge0} S_{0,0,k,l}a_3^k a_4^l-\sum_{i\ge0} S_{i,0,0,0}a_1^i-\sum_{j\ge0} S_{0,j,0,0}a_2^j-\sum_{k\ge0} S_{0,0,k,0}a_3^k-\sum_{l\ge0} S_{0,0,0.l}a_4^l+S_{0,0,0,0}$$

$$=F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_4)$$

$$+F(a_1,a_2)+F(a_1,a_3)+F(a_1,a_4)+F(a_2,a_3)+F(a_2a_4)+F(a_3,a_4)$$

$$-F(a_1)-F(a_2)-F(a_3)-F(a_4)+4\cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i-1,j,k,l}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l$$

$$=a_1(\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i-1,j,k,l}a_1^{i-1}a_2^j a_3^k a_4^l)=a_1(\sum_{i\ge0,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i,j,k,l}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l)$$

$$=a_1\Bigg[\sum_{i\ge0,j\ge0,k\ge0,l\ge0} S_{i,j,k,l}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l-\sum_{i\ge0,j\ge0,k\ge0} S_{i,j,k,0}a_1^i a_2^j a_3^k-\sum_{i\ge0,j\ge0,l\ge0} S_{i,j,0,l}a_1^i a_2^j a_4^l-\sum_{i\ge0,k\ge0,l\ge0} S_{i,0,k,l}a_1^i a_3^k a_4^l$$

$$+\sum_{i\ge0,j\ge0} S_{i,j,0,0}a_1^i a_2^j+\sum_{i\ge0,k\ge0} S_{i,0,k,0}a_1^i a_3^k+\sum_{i\ge0,l\ge0} S_{i,0,0,l}a_1^i a_4^l-\sum_{i\ge0} S_{i,0,0,0}a_1^i\Bigg]$$

$$=a_1[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_4)+F(a_1,a_2)+F(a_1,a_3)$$

$$+F(a_1,a_4)-F(a_1)]\cdots\cdots(2)$$

同理可證：

$$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i,j-1,k,l}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l=a_2[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2,a_4)$$

$$+F(a_1,a_2)+F(a_2,a_3)+F(a_2,a_4)-F(a_2)]\cdots\cdots(3)$$

$$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i,j,k-1,l}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l=a_3(F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_3,a_4)$$

$$+F(a_1,a_3)+F(a_2,a_3)+F(a_3,a_4)-F(a_3))\cdots\cdots(4)$$

$$\sum_{i\ge1,j\ge1,k\ge1,l\ge1} S_{i,j,k,l-1}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l=a_4[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_4)-F(a_1,a_3,a_4)$$

$$+F(a_1,a_4)+F(a_2,a_4)+F(a_3,a_4)+F(a_4)]\cdots\cdots(5)$$

由(1) (2) (3) (4) (5)得到

$$F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_4)+F(a_1,a_2)+F(a_1,a_3)$$

$$+F(a_1,a_4)+F(a_2,a_3)+F(a_2a_4)+F(a_3,a_4)-F(a_1)-F(a_2)-F(a_3)-F(a_4)+4$$

$$=-\{a_1[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_4)+F(a_1,a_2)+F(a_1,a_3)$$

$$+F(a_1,a_4)-F(a_1)]+a_2[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)-F(a_1,a_2,a_4)$$

$$+F(a_1,a_2)+F(a_2,a_3)+F(a_2,a_4)-F(a_2)]+a_3[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_3)$$

$$-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_3,a_4)+F(a_1,a_3)+F(a_2,a_3)+F(a_3,a_4)-F(a_3)]$$

$$+a_4[F(a_1,a_2,a_3,a_4)-F(a_2,a_3,a_4)-F(a_1,a_2,a_4)-F(a_1,a_3,a_4)+F(a_1,a_4)+F(a_2,a_4)$$

$$+F(a_3,a_4)+F(a_4)]\}$$

$$\Rightarrow \quad F(a_1,a_2,a_3,a_4)=4+(-\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{1+a_1+a_2+a_3+a_4})$$

利用引理 2$'$得到本節主要定理

定理 2$'$：

$$f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=\sum_{i+2j+3k+4l=m}\underset{i,j,k,l}{S}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l \quad ，m\geq 1。其中$$

$$\underset{i,j,k,l}{S}=(-1)^{i+j+k+l}\cdot\frac{(i+j+k+l)!}{i!\,j!\,k!\,l!}\cdot\frac{i+2j+3k+4l}{i+j+k+l} \text{ 而 } f_0(a_1,a_2,a_3,a_4)=4$$

證明：

由 $F(a_1,a_2,a_3,a_4)=4+(-\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{1+a_1+a_2+a_3+a_4})$ 去推出 $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)$，$m\geq 1$的一般式

根據[4]中 $\frac{1}{(1+x)^n}=1-C_1^{n+1-1}x^1+C_2^{n+2-1}x^2+\cdots+C_k^{n+k-1}x^k+\cdots \qquad (|x|<1)$

因此由 $-\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{1+a_1+a_2+a_3+a_4} = -\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{1+a_1+a_2+a_3}(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1+a_2+a_3}a_4})$

以 a_4 去展開，得到一般項爲

$$(-1)^l\cdot\frac{4+3a_1+2a_2+a_3}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}a_4{}^l=$$

$$(-1)^l(\frac{1+a_1+a_2+a_3}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}+\frac{1+a_1+a_2}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}+\frac{1+a_1}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}+\frac{1}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}})a_4{}^l\cdots(1)$$

由(1)式推得

$$(-1)^l\cdot\frac{1+a_1+a_2+a_3}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}=(-1)^l\cdot\frac{1}{(1+a_1+a_2+a_3)^l}=(-1)^l\cdot(\frac{1}{1+a_1+a_2})^l\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1+a_2}\cdot a_3})^l$$

以 a_3 去展開 $(\frac{1}{1+\frac{1}{1+a_1+a_2}\cdot a_3})^l=1+C_1^{1+l-1}\cdot(-\frac{1}{1+a_1+a_2}\cdot a_3)+\cdots+C_k^{k+l-1}\cdot(-\frac{1}{1+a_1+a_2}\cdot a_3)^k+\cdots$

以此類推依序以 a_2 ， a_1 去展開

$(-1)^l\ \frac{1+a_1+a_2+a_3}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}$ 得到一般項爲 $(-1)^{i+j+k+l}C_i^{i+j+k+l-1}C_j^{j+k+l-1}C_k^{k+l-1}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l\cdots\cdots\cdots$ (2)

以此類推

$(-1)^l\ \frac{1+a_1+a_2}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}$ 得到一般項爲 $(-1)^{i+j+k+l}C_i^{i+j+k+l-1}C_j^{j+k+l-1}C_k^{k+l}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l\cdots\cdots\cdots\cdots$(3)

$(-1)^l\ \frac{1+a_1}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}$ 得到一般項爲 $(-1)^{i+j+k+l}C_i^{i+j+k+l-1}C_j^{j+k+l}C_k^{k+l}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4)

$(-1)^l\ \frac{1}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}$ 得到一般項爲 $(-1)^{i+j+k+l}C_i^{i+j+k+l}C_j^{j+k+l}C_k^{k+l}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(5)

由(1) (2) (3) (4) (5)可得到

$(-1)^l\cdot\frac{4+3a_1+2a_2+a_3}{(1+a_1+a_2+a_3)^{l+1}}a_4{}^l$ 的一般項爲 $(-1)^{i+j+k+l}$ （$C_i^{i+j+k+l-1}C_j^{j+k+l-1}C_k^{k+l-1}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l+$

$C_i^{i+j+k+l-1}C_j^{j+k+l-1}C_k^{k+l}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l+C_i^{i+j+k+l-1}C_j^{j+k+l}C_k^{k+l}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l+C_i^{i+j+k+l}C_j^{j+k+l}C_k^{k+l}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l$)

$$=(-1)^{i+j+k+l}\cdot\frac{(i+j+k+l)!}{i!\,j!\,k!\,l!}\cdot\frac{i+2j+3k+4l}{i+j+k+l}$$

所以我們就可以得到當 $m\ge1$ ， $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 的一般式 $\sum_{i+2j+3k+4l=m}\underset{i,j,k,l}{S}a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k a_4{}^l$ ，其中

$$\underset{i,j,k,l}{S}=(-1)^{i+j+k+l}\cdot\frac{(i+j+k+l)!}{i!\,j!\,k!\,l!}\cdot\frac{i+2j+3k+4l}{i+j+k+l}$$

伍、研究結果：

1．設 $g(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ ， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 爲此多項式的根， $\beta_1+\beta_2+\beta_3=-a_1$ ，

$\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3=a_2$ ， $\beta_1\beta_2\beta_3=-a_3$ ，令 $f_m(a_1,a_2,a_3)=\beta_1{}^m+\beta_2{}^m+\beta_3{}^m$ ，

利用 a_1 , a_2 , a_3 來表示 $f_m(a_1,a_2,a_3)$ ，令 $\underset{i,j,k}{S}$ 代表 $a_1{}^i a_2{}^j a_3{}^k$ 此項係數且 i+2j+3k=m。

(1)若 $S_{i,j,k}$=0 當 i<0 或 j<0 或 k<0， $S_{0,0,0}=3$， $S_{1,0,0}=-1$， $S_{0,1,0}=-2$， $S_{0,0,1}=-3$時，

則 $S_{i,j,k}=-(S_{i-1,j,k}+S_{i,j-1,k}+S_{i,j,k-1})$, $i\ge 0, j\ge 0, k\ge 0$ 且 $i+j+k\ge 2$ 時成立，

(2) $f_m(a_1,a_2,a_3)=\sum_{i+2j+3k=m} S_{i,j,k}\, a_1^{\,i} a_2^{\,j} a_3^{\,k}$ ，$m\ge 1$。其中

$S_{i,j,k}=(-1)^{i+j+k}\cdot\dfrac{(i+j+k)!}{i!\,j!\,k!}\cdot\dfrac{i+2j+3k}{i+j+k}$ ，而 $f_0(a_1,a_2,a_3)$=3.

2．設 $h(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ ，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 爲此多項式的根，，$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=-a_1$ ，

$\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_1+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_4+\beta_2\beta_4+\beta_4\beta_3=a_2$ ，$\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\beta_1\beta_4\beta_3+\beta_4\beta_2\beta_3=-a_3$

$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4=a_4$ ，令 $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=\beta_1^{\,m}+\beta_2^{\,m}+\beta_3^{\,m}+\beta_4^{\,m}$

利用 a_1 , a_2 , a_3, a_4 來表示 $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)$，令 $S_{i,j,k,l}$ 代表 $a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}a_4^{\,l}$ 此項係數且 i+2j+3k+4l=m。

(1)若 $S_{i,j,k,l}$=0 當 i<0 或 j<0 或 k<0 或 l<0，且 $S_{0,0,0,0}=4$, $S_{1,0,0,0}=-1$, $S_{0,1,0,0}=-2$, $S_{0,0,1,0}=-3$, $S_{0,0,0,1}=-4$時

則 $S_{i,j,k,l}=-(S_{i-1,j,k,l}+S_{i,j-1,k,l}+S_{i,j,k-1,l}+S_{i,j,k,l-1}), i\ge 0, j\ge 0, k\ge 0, l\ge 0$ 且 $i+j+k+l\ge 2$ 時成立。

(2) $f_m(a_1,a_2,a_3,a_4)=\sum_{i+2j+3k+4l=m} S_{i,j,k,l}\, a_1^{\,i}a_2^{\,j}a_3^{\,k}a_4^{\,l}$ ，$m\ge 1$。其中

$S_{i,j,k,l}=(-1)^{i+j+k+l}\cdot\dfrac{(i+j+k+l)!}{i!\,j!\,k!\,l!}\cdot\dfrac{i+2j+3k+4l}{i+j+k+l}$ 而 $f_0(a_1,a_2,a_3,a_4)$=4

3．”有符號的 **Lucas** 三角錐”所探討的數列有類似 Fibonacci 數列及 Lucas 數列的關係。

在二維 我們得到有符號的 **Lucas** 數列爲： 2，－1，－1，2，－1，－1……

在三維 我們得到有符號的 **Lucas** 數列爲： 3，－1，－1，－1，3，－1，－1，－1……

在四維 我們得到有符號的 **Lucas** 數列爲： 4，－1，－1，－1，4，－1，－1，－1……

4． $\left|s_m^{(2)}\right|=\left|s_{m-1}^{(2)}\right|+\left|s_{m-2}^{(2)}\right|$ ，m ≥ 2 爲 **Lucas** 數列 2， 1，3，4，7，11，⋯

$\left|s_m^{(3)}\right|=\left|s_{m-1}^{(3)}\right|+\left|s_{m-2}^{(3)}\right|+\left|s_{m-3}^{(3)}\right|$ ，m ≥ 3 爲推廣的 **Lucas** 數列 3，1，3，7，11，21，⋯。

5. 發現”有符號的 **Lucas** 三角錐”奇偶性的圖形分別在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的圖形只要平移就能和 巴斯卡三角錐在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的圖形全等。但不在 X-Y，Y-Z，X-Z 平面上的點卻非如此。

陸、討論：

1．3 次方程式可推出”**有符號的 Lucas 三角錐**”的相關性質，我們推廣到 4 次方程式也成立。

因此猜測 n 次，應該都有類似的性質，其中

(1)若 $S_{0,0,\cdots,0}$=0 當 i_1<0 或 i_2<0⋯或 i_n<0，且 $S_{0,0,\cdots,0}=4, S_{1,0,\cdots,0}=-1, S_{0,1,\cdots,0}=-2,\cdots, S_{0,0,\cdots,1}=-n$ 時

則 $S_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=-(S_{i_1-1,i_2,\cdots,i_n}+S_{i_1,i_2-2,\cdots,i_n}+S_{i_1,i_2,\cdots,i_n-1}), i_1\ge 0, i_2\ge 0,\cdots, i_n\ge 0$ 且 $\sum_{k=1}^{n} i_k \ge 2$ 時成立。

(2) $f_m\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=m} S_{i_1,i_2,\cdots,i_n} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}$ $m\ge 1$。其中

$$S_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n}\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\cdot\frac{i_1+2i_2+\cdots+ni_n}{i_1+i_2+\cdots+i_n}$$ 而 $f_0\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=n$

2．我們由 肆、研究過程及結果，此一部分之內容五.探討”**有符號的 Lucas 三角錐**”與 Fibonacci 數列和 Lucas 數列之間的關係 中得到 2 維及 3 維的 有符號的 Lucas 數列，發現 2 維的數列會以{2，－1，－1}一直循環下去，而 3 維數列以{3，－1，－1，－1}一直循環，4 維數列也以{4，－1，－1，－1，－1}一直循環。所以最後我們猜測甚至到 n 維數列也會以{ n , $\overbrace{-1,-1,\cdots,-1}^{n\text{個}}$ }一直循環。

柒、參考文獻：

1． 郭立翔 <u>擬 Lucas 多項式的幾個性質</u> 2002 第一屆中華民國國際科展大會獎第三名,
香港正選代表

2． 許介彥 (2004)巴斯卡三角形的幾個性質科學教育學刊 275 期 93 年 12 月號

3． 郁建輝(2005)求真立德，育美致善 — 發揮數學文化教育功能實踐之一
數學傳播季刊 115 期(p70~73)

4． 莊心谷譯 組合數學及其在計算機科學中的應用 儒林出版社 1991 年 11 月初版

5． 嚴鎭軍 高中數學競賽教程 p382 九章出版社 2002 年 9 月一版

6． John F. Putz **The Pascal Polytope：An Extension of Pascal’s Triangle to N Dimensions**
The College Mathematics Journal ,Vol. 17, No.2.(Mar.,1986),pp.144-155 <u>http://www.jstor.org</u>

7． 蔡聰明(1995) 輾轉相除法,黃金分割與費式氏數列(上) (下)數學傳播季刊 75,76 期

8． Mark Feinberg. “A Lucas Triangle.” *Fibonacci Quart*. **5.** (1967): 486-490

評　　語

040413　根與係數關係—有符號的 Lucas 三角錐

1. 研究題材在過去科展中出現十分頻繁。因此，我們會好奇的詢問：這一大堆的數學式子是否代表一些有趣的結果？

2. 數學研究的重點是化繁為簡。本作品似乎是化簡為繁。

3. 若能由碎形角度進行分析討論，作品會更有意義。