中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040411

柯西不等式之推廣

學校名稱： 國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 葉昇翰	陳建良
高二 吳偉志	

關 鍵 詞：不等式、三角函數

柯西不等式之推廣

摘要:

本次科展由一個高中關於柯西不等式的題目『設$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求$\frac{4}{\sin\theta}+\frac{9}{\cos\theta}$的最小值為？』在求解的過程中，因無法馬上求得答案，必須尋求更好之方法，而所推出的推廣柯西不等式，就成了這次的研究關鍵，除了快速求出原題解之外，進而將原題型複雜化，多樣化，然後以推廣柯西不等式搭配特殊的配方求出它的最小值。

一、研究動機

在課堂上教到第三冊數學的「科西不等式」時，數學老師提到某年大學聯考的試題為

『設$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求$\dfrac{4}{\sin\theta}+\dfrac{9}{\cos\theta}$的最小值為？』，當下用科西不等式無法馬上求得答案，而引發

我們想了解究竟該如何求解？於是有了這次的研究

二、研究目的

想探討當$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$時，該如何求$\dfrac{4}{\sin\theta}+\dfrac{9}{\cos\theta}$的最小值及推廣到如何求$\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ ($a>0$, $b>0$, $n\in\mathbf{N}$)的最小值，甚至更進一步對於n為正有理數時，最小值是否可以求出

三、研究器材

(一)紙筆 (二)神奇萬能的人腦兩顆

四、研究過程與結果

(一) 科西不等式的另一證明

設 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in$ · ·; $b_1, b_2, \ \ , b_n \in$

則 $(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \cdots\cdots$ ①

等號成立 $\Leftrightarrow$ $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$, $\cdots$, $a_n=kb_n$, $k\in$

【證明】

設 $A=(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k{}^2)^{\frac{1}{2}}, B=(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k{}^2)^{\frac{1}{2}}$ ，則 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k{}^2}{A^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{b_k{}^2}{B^2}=1$

根據算幾不等式 $2=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{a_k{}^2}{A^2}+\dfrac{b_k{}^2}{B^2})\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\left|a_kb_k\right|}{AB}$

即 $AB\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_kb_k\right|$ $\quad\because\ \sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_kb_k\right|\ge\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right|$ $\quad\therefore AB\ge\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ 故 $A^2B^2\ge(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k)^2$

$\therefore$ ① 式成立

等號成立時 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{{a_1}^2}{A^2}=\dfrac{{b_1}^2}{B^2} \Rightarrow a_1:b_1=A:B$ ($\because a_1,b_1$ 同號)

$\dfrac{{a_2}^2}{A^2}=\dfrac{{b_2}^2}{B^2} \Rightarrow a_2:b_2=A:B$ ($\because a_2,b_2$ 同號)

$\dfrac{{a_3}^2}{A^2}=\dfrac{{b_3}^2}{B^2} \Rightarrow a_3:b_3=A:B$ ($\because a_3,b_3$ 同號)

………………………………………………

$\dfrac{{a_n}^2}{A}=\dfrac{{b_n}^2}{B} \Rightarrow a_n:b_n=A:B$ ($\because a_n,b_n$ 同號)

$\therefore$ $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\cdots=a_n:b_n$ 當 $a_i=0$ 時， $b_i=0$

故 $a_1=kb_1$ ， $a_2=kb_2$ ，$\cdots$ ， $a_n=kb_n$ ， $k\in$

(二) 科西不等式的幾種變形

1. 變形 Ⅰ. $(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{b_k})\ge(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2$ $(a_k>0,b_k>0)$

2. 變形 Ⅱ. $(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}b_k)\ge(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kb_k})^2$ $(a_k>0,b_k>0)$

3. 變形 Ⅲ. $(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{{b_k}^2}{a_k})\ge(\sum_{k=1}^{n}b_k)^2$ $(a_k>0)$

4. 變形 Ⅳ. $(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{{b_k}^2}{a_k})\ge(\sum_{k=1}^{n}b_k)^2/(\sum_{k=1}^{n}a_k)$ $(a_k>0)$

5. 變形 Ⅴ. $(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{{x_k}^2}{y_k+z_k})\ge(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2/[\sum_{k=1}^{n}(y_k+z_k)]$ $(y_k>0,z_k>0)$

【證明】

1. $\because$ $(\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2)\ge(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k)^2\cdots\cdots$ ②

令 ${x_k}^2=a_kb_k$ ， ${y_k}^2=\dfrac{a_k}{b_k}$ 代入②得證

2. 令 ${x_k}^2=a_k$ ， ${y_k}^2=b_k$ 代入②得證

3. 令 ${x_k}^2=a_k$ ， ${y_k}^2=\dfrac{{b_k}^2}{a_k}$ 代入②得證

4. 由 3 移項即得證

5. 由 4 設 $b_k=x_k$ ， $a_k=y_k+z_k$ 代入得證

(三) 科西不等式的推廣定理

設有 m 個非負實數列，$<a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}>,<a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}>,\cdots,<a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn}>$

則 $(a_{11}{}^m+a_{12}{}^m+\cdots+a_{1n}{}^m)(a_{21}{}^m+a_{22}{}^m+\cdots+a_{2n}{}^m)\cdots(a_{m1}{}^m+a_{m2}{}^m+\cdots+a_{mn}{}^m)\geq$

$(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})^m$

【證明】根據算幾不等式

$$\frac{a_{11}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^m}+\frac{a_{21}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^m}+\frac{a_{31}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^m}+\cdots+\frac{a_{m1}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}{}^m}\geq m\cdot\frac{|a_{11}a_{21}a_{31}\cdots a_{m1}|}{\sqrt[m]{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^n\cdots\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}{}^n}}$$

$$\frac{a_{12}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^m}+\frac{a_{22}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^m}+\frac{a_{32}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^m}+\cdots+\frac{a_{m2}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}{}^m}\geq m\cdot\frac{|a_{12}a_{22}a_{32}\cdots a_{m2}|}{\sqrt[m]{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^n\cdots\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}{}^n}}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{a_{1n}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^m}+\frac{a_{2n}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^m}+\frac{a_{3n}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^m}+\cdots+\frac{a_{mn}{}^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}{}^m}\geq m\cdot\frac{|a_{1n}a_{2n}a_{3n}\cdots a_{mn}|}{\sqrt[m]{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^n\cdots\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}{}^n}}$$

各式相加 $\quad m\geq m\cdot\dfrac{|a_{11}a_{21}a_{31}\cdots a_{n1}+a_{12}a_{22}a_{32}\cdots a_{n2}+\cdots+a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nm}|}{\sqrt[m]{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}{}^m\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}{}^m\sum\limits_{i=1}^{n}a_{3i}{}^m\cdots\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}{}^m}}$

再同時 m 次方得

$$\sum_{i=1}^{n}a_{1i}{}^m\sum_{i=1}^{n}a_{2i}{}^m\sum_{i=1}^{n}a_{3i}{}^m\cdots\sum_{i=1}^{n}a_{ni}{}^m\geq(|a_{11}a_{21}a_{31}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}a_{32}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{mn}|)^m\geq(\sum_{i=1}^{n}a_{1i}a_{2i}a_{3i}\cdots a_{mi})^m$$

(四) 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ ($a>0$, $b>0$, $n\in\mathbf{N}$)的最小值

1.『$n=1$』： 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{4}{\sin\theta}+\dfrac{9}{\cos\theta}$ 的最小值為？

【解】

$$[(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin\theta}})^3+(\sqrt[3]{\frac{9}{\cos\theta}})^3]^2\cdot[(\sqrt[3]{\sin^2\theta})^3+(\sqrt[3]{\cos^2\theta})^3]^1$$

$$\geq[(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin\theta}})^2\cdot\sqrt[3]{\sin^2\theta}+(\sqrt[3]{\frac{9}{\cos\theta}})^2\cdot\sqrt[3]{\cos^2\theta}]^3=(4^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{2}{3}})^3$$

$\therefore\ \dfrac{4}{\sin\theta}+\dfrac{9}{\cos\theta}$ 的最小值為 $(4^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ ，

此時 $\sqrt[3]{\dfrac{4}{\sin\theta}}:\sqrt[3]{\dfrac{9}{\cos\theta}}=\sqrt[3]{\sin^2\theta}:\sqrt[3]{\cos^2\theta}$ ， 即 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{9}$

2. 『$n=2$』：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{9}{\cos^2\theta}$ 的最小值為？

【解】

$$[(\sqrt{\frac{4}{\sin^2\theta}})^2+(\sqrt{\frac{9}{\cos^2\theta}})^2]^2\cdot[(\sin^2\theta+\cos^2\theta]\geq(\frac{2}{\sin\theta}\cdot\sin\theta+\frac{3}{\cos\theta}\cdot\cos\theta)^2=(2+3)^2=25$$

∴ $\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{9}{\cos^2\theta}$ 的最小值為 25

此時 $\sqrt{\dfrac{4}{\sin^2\theta}}:\sqrt{\dfrac{9}{\cos^2\theta}}=\sin\theta:\cos\theta$ ，即 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt{2}:\sqrt{3}$

3. 『$n=3$』：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{a}{\sin^3\theta}+\dfrac{b}{\cos^3\theta}$ 的最小值為？

【解】

$$[(\sqrt[5]{\frac{a}{\sin^3\theta}})^5+(\sqrt[5]{\frac{b}{\cos^3\theta}})^5]^2\cdot[(\sqrt[5]{\sin^2\theta})^5+(\sqrt[5]{\cos^2\theta})^5]^3$$

$$\geq[(\sqrt[5]{\frac{a}{\sin^3\theta}})^2\cdot(\sqrt[5]{\sin^2\theta})^3+(\sqrt[5]{\frac{b}{\cos^3\theta}})^2\cdot(\sqrt[5]{\cos^2\theta})^3]^5=(a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}})^5$$

∴ $\dfrac{a}{\sin^3\theta}+\dfrac{b}{\cos^3\theta}$ 的最小值為 $(a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}}$

此時 $\sqrt[5]{\dfrac{a}{\sin^3\theta}}:\sqrt[5]{\dfrac{b}{\cos^3\theta}}=\sqrt[5]{\sin^2\theta}:\sqrt[5]{\cos^2\theta}$ ，即 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[5]{a}:\sqrt[5]{b}$

4. 『一般化』：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ 的最小值為？

【解】∵ $(-n)\times2+2\times n=0$ ∴ 取 2 個 $(\sqrt[n+2]{\dfrac{a}{\sin^n\theta}})^{n+2}+(\sqrt[n+2]{\dfrac{b}{\cos^n\theta}})^{n+2}$ 及 n 個

$(\sqrt[n+2]{\sin^2\theta})^{n+2}+(\sqrt[n+2]{\cos^2\theta})^{n+2}$ 代入科西不等式推廣定理得

$$[(\sqrt[n+2]{\frac{a}{\sin^n\theta}})^{n+2}+(\sqrt[n+2]{\frac{b}{\cos^n\theta}})^{n+2}]^2\cdot[(\sqrt[n+2]{\sin^2\theta})^{n+2}+(\sqrt[n+2]{\cos^2\theta})^{n+2}]^n$$

$$\geq[(\sqrt[n+2]{\frac{a}{\sin^n\theta}})^2\cdot(\sqrt[n+2]{\sin^2\theta})^n+(\sqrt[n+2]{\frac{b}{\cos^n\theta}})^2\cdot(\sqrt[n+2]{\cos^2\theta})^n]^{n+2}=(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{n+2}$$

∴ $\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ 的最小值為 $(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$

此時 $\sqrt[n+2]{\dfrac{a}{\sin^n\theta}}:\sqrt[n+2]{\dfrac{b}{\cos^n\theta}}=\sqrt[n+2]{\sin^2\theta}:\sqrt[n+2]{\cos^2\theta}$ ，即 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[n+2]{a}:\sqrt[n+2]{b}$

(五) 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ ($a>0$, $b>0$, $n\in\mathbf{Q}^+$)的最小值

1. 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}$ ($a>0$, $b>0$)的最小值

【解】$\because$ $(-\dfrac{1}{2})\times 4+2\times 1=0$ $\therefore$ 取 4 個 $(\sqrt[5]{\dfrac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}})^5+(\sqrt[5]{\dfrac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}})^5$ 及 1 個 $(\sqrt[5]{\sin^2\theta})^5+(\sqrt[5]{\cos^2\theta})^5$

代入科西不等式推廣定理得

$$[(\sqrt[5]{\frac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}})^5+(\sqrt[5]{\frac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}})^5]^4\cdot[(\sqrt[5]{\sin^2\theta})^5+(\sqrt[5]{\cos^2\theta})^5]^1$$

$$\geq[(\sqrt[5]{\frac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}})^4\cdot\sqrt[5]{\sin^2\theta}+(\sqrt[5]{\frac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}})^4\cdot\sqrt[5]{\cos^2\theta}]^5=(a^{\frac{4}{5}}+b^{\frac{4}{5}})^5$$

$\therefore$ $\dfrac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}$ 的最小值為 $(a^{\frac{4}{5}}+b^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{4}}$

此時 $\sqrt[5]{\dfrac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}}:\sqrt[5]{\dfrac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}}=\sqrt[5]{\sin^2\theta}:\sqrt[5]{\cos^2\theta}$ ，即 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[5]{a^2}:\sqrt[5]{b^2}$

2. 『一般化 $n=\dfrac{q}{p}\in$丰$,\ p,q\in$ 』：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，求 $\dfrac{a}{\sin^{\frac{q}{p}}\theta}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{q}{p}}\theta}$ ($a>0$, $b>0$)的最小值

【解】$\because\dfrac{q}{p}:2=q:2p$ 即 $(-\dfrac{q}{p})\times 2p+2\times q=0$

$\therefore$ 取 $2p$ 個 $(\sqrt[2p+q]{\dfrac{a}{\sin^{\frac{q}{p}}\theta}})^{2p+q}+(\sqrt[2p+q]{\dfrac{b}{\cos^{\frac{q}{p}}\theta}})^{2p+q}$ 及 q 個 $(\sqrt[2p+q]{\sin^2\theta})^{2p+q}+(\sqrt[2p+q]{\cos^2\theta})^{2p+q}$

代入科西不等式推廣定理得

$$[(\sqrt[2p+q]{\frac{a}{\sin^{\frac{q}{p}}\theta}})^{2p+q}+(\sqrt[2p+q]{\frac{b}{\cos^{\frac{q}{p}}\theta}})^{2p+q}]^{2p}\cdot[(\sqrt[2p+q]{\sin^2\theta})^{2p+q}+(\sqrt[2p+q]{\cos^2\theta})^{2p+q}]^q$$

$$\geq[(\sqrt[2p+q]{\frac{a}{\sin^{\frac{q}{p}}\theta}})^{2p}\cdot(\sqrt[2p+q]{\sin^2\theta})^q+(\sqrt[2p+q]{\frac{b}{\cos^{\frac{q}{p}}\theta}})^{2p}\cdot(\sqrt[2p+q]{\cos^2\theta})^q]^{2p+q}=(a^{\frac{2p}{2p+q}}+b^{\frac{2p}{2p+q}})^{2p+q}$$

$\therefore\ \dfrac{a}{\sin^{\frac{q}{p}}\theta}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{q}{p}}\theta}$ 的最小值為 $(a^{\frac{2p}{2p+q}}+b^{\frac{2p}{2p+q}})^{\frac{2p+q}{2p}}$

此時 $\sqrt[2p+q]{\dfrac{a}{\sin^{\frac{q}{p}}\theta}}:\sqrt[2p+q]{\dfrac{b}{\cos^{\frac{q}{p}}\theta}}=\sqrt[2p+q]{\sin^2\theta}:\sqrt[2p+q]{\cos^2\theta}$ ， 即 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[2p+q]{a^p}:\sqrt[2p+q]{b^p}$

(六) 若將條件改為 $x^k+y^k+z^k=1$， 求

$\dfrac{a}{x^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{b}{y^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{c}{z^{\frac{q}{p}}}$($x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $k,p,q\in\mathbf{N}$)的最小值

【解】

$\because \dfrac{q}{p}:k=q:pk$ 即 $(-\dfrac{q}{p})\times pk+k\times q=0$

$\therefore$ 取 pk 個 $[(\sqrt[pk+q]{\dfrac{a}{x^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\dfrac{b}{y^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\dfrac{c}{z^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}]$ 及 q 個

$[(\sqrt[pk+q]{x^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{y^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{z^k})^{pk+q}]$ 代入科西不等式推廣定理得

$$[(\sqrt[pk+q]{\frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}]^{pk}\cdot[(\sqrt[pk+q]{x^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{y^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{z^k})^{pk+q}]^{q}$$

$$\ge[(\sqrt[pk+q]{\frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}})^{pk}\cdot(\sqrt[pk+q]{x^k})^{q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}})^{pk}\cdot(\sqrt[pk+q]{y^k})^{q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}})^{pk}\cdot(\sqrt[pk+q]{z^k})^{q}]^{pk+q}=(a^{\frac{pk}{pk+q}}+b^{\frac{pk}{pk+q}}+c^{\frac{pk}{pk+q}})^{pk+q}$$

$\therefore\ \dfrac{a}{x^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{b}{y^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{c}{z^{\frac{q}{p}}}$ 的最小值為 $(a^{\frac{pk}{pk+q}}+b^{\frac{pk}{pk+q}}+c^{\frac{pk}{pk+q}})^{\frac{pk+q}{pk}}$

此時 $\sqrt[pk+q]{\dfrac{a}{x^{\frac{q}{p}}}}:\sqrt[pk+q]{\dfrac{b}{y^{\frac{q}{p}}}}:\sqrt[pk+q]{\dfrac{c}{z^{\frac{q}{p}}}}=\sqrt[pk+q]{x^k}:\sqrt[pk+q]{y^k}:\sqrt[pk+q]{z^k}$ ， 即 $x:y:z=\sqrt[pk+q]{a^p}:\sqrt[pk+q]{b^p}:\sqrt[pk+q]{c^p}$

(七) 若將條件改為 $x^k+y^k+z^k=t\,(t>0)$， 求

$\dfrac{a}{x^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{b}{y^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{c}{z^{\frac{q}{p}}}$($x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $p,q\in\mathbf{N}$)的最小值

【解】

$\because \dfrac{q}{p}:k=q:pk$ 即 $(-\dfrac{q}{p})\times pk+k\times q=0$

$\therefore$ 取 pk 個 $[(\sqrt[pk+q]{\frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}]$ 及 q 個

$[(\sqrt[pk+q]{x^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{y^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{z^k})^{pk+q}]$ 代入科西不等式推廣定理得

$$[(\sqrt[pk+q]{\frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}})^{pk+q}]^{pk}\cdot[(\sqrt[pk+q]{x^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{y^k})^{pk+q}+(\sqrt[pk+q]{z^k})^{pk+q}]^{q}$$

$$\geq[(\sqrt[pk+q]{\frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}})^{pk}\cdot(\sqrt[pk+q]{x^k})^{q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}})^{pk}\cdot(\sqrt[pk+q]{y^k})^{q}+(\sqrt[pk+q]{\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}})^{pk}\cdot(\sqrt[pk+q]{z^k})^{q}]^{pk+q}=(a^{\frac{pk}{pk+q}}+b^{\frac{pk}{pk+q}}+c^{\frac{pk}{pk+q}})^{pk+q}$$

$\therefore\ \frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}+\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}+\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}$ 的最小值為 $\frac{1}{t}\cdot(a^{\frac{pk}{pk+q}}+b^{\frac{pk}{pk+q}}+c^{\frac{pk}{pk+q}})^{\frac{pk+q}{pk}}$ …………(A)

此時 $\sqrt[pk+q]{\frac{a}{x^{\frac{q}{p}}}}:\sqrt[pk+q]{\frac{b}{y^{\frac{q}{p}}}}:\sqrt[pk+q]{\frac{c}{z^{\frac{q}{p}}}}=\sqrt[pk+q]{x^k}:\sqrt[pk+q]{y^k}:\sqrt[pk+q]{z^k}$ ， 即 $x:y:z=\sqrt[pk+q]{a^p}:\sqrt[pk+q]{b^p}:\sqrt[pk+q]{c^p}$

(八) 若將條件改為 $ax+by+cz=k\ (k>0)$， 求
$x^n+y^n+z^n$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0,\ b>0, c>0,\ n\in\mathbf{N}$)的最小值

【解】 取 1 個 $(x^n+y^n+z^n)$ 及 $n-1$ 個 $(\sqrt[n-1]{a})^n+(\sqrt[n-1]{b})^n+(\sqrt[n-1]{c})^n$ 代入科西不等式推廣定理得

$$(x^n+y^n+z^n)^1\cdot[(\sqrt[n-1]{a})^n+(\sqrt[n-1]{b})^n+(\sqrt[n-1]{c})^n]^{n-1}\geq[x\cdot(\sqrt[n-1]{a})^{n-1}+y\cdot(\sqrt[n-1]{b})^{n-1}+z\cdot(\sqrt[n-1]{c})^{n-1}]^n=k^n\ \cdots\cdots\cdots(A)$$

$\therefore\ x^n+y^n+z^n$ 的最小值為 $\frac{k^n}{[(\sqrt[n-1]{a})^n+(\sqrt[n-1]{b})^n+(\sqrt[n-1]{c})^n]^{n-1}}$

等號成立時 $\Leftrightarrow\ x:y:z=(\sqrt[n-1]{a})^n:(\sqrt[n-1]{b})^n:(\sqrt[n-1]{c})^n$

(九) 例題應用：

1. 設 x、y 均為正數且 $x+y=3$， 求 x^3+y^3 的最小值為？

【解】 將 $k=3$, $n=3$, $a=1$, $b=1$ 代入(A)得 x^3+y^3 的最小值為 $(\frac{1}{2})^2\cdot 3^3=\frac{27}{4}$

此時 $x:y=1:1\Rightarrow x=y=\frac{3}{2}$

2. 設 x、y 均為正數且 $x+y=3$， 求 x^4+y^4 的最小值為？

【解】 將 $k=3$, $n=4$, $a=1$, $b=1$ 代入(A)得 x^3+y^3 的最小值為 $(\frac{1}{2})^3\cdot 3^4=\frac{81}{8}$

此時 $x:y=1:1 \Rightarrow x=y=\dfrac{3}{2}$

3. 設 x、y 均為正數且 $x+4y=2$ ， 求 x^3+y^3 的最小值為？

【解】 將 $a=1$, $b=4$, $k=2$, $n=3$ 代入(A)得 x^3+y^3 的最小值為 $\dfrac{2^3}{[(\sqrt{1})^3+(\sqrt{4})^3]^2}=\dfrac{8}{81}$

此時 $x:y=1:2 \Rightarrow x=\dfrac{2}{9}$, $y=\dfrac{4}{9}$

4. 設 x、y、z 均為正數且 $x+4y+9z=6$，求(1) $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為？(2) $x^3+y^3+z^3$ 的最小值為？

【解】 (1) 將 $a=1,b=4,c=9,k=6$, $n=2$ 代入(A)得 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為 $\dfrac{6^2}{(1^2+4^2+9^2)^1}=\dfrac{18}{49}$

此時 $x:y:z=1:4:9 \Rightarrow x=\dfrac{3}{49}$, $y=\dfrac{12}{49}$, $z=\dfrac{27}{49}$

(2) 將 $a=1,b=4,c=9,k=6$, $n=3$ 代入(A)得 $x^3+y^3+z^3$ 的最小值為 $\dfrac{6^3}{(\sqrt{1}^3+\sqrt{4}^3+\sqrt{9}^3)^2}=\dfrac{1}{6}$

此時 $x:y:z=1:2:3 \Rightarrow x=\dfrac{1}{6}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{2}$

5. 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ， 求 $\dfrac{81}{\sin\theta}+\dfrac{24}{\cos\theta}$ 的最小值為？

【解】根據科西不等式推廣定理

$$[(\sqrt[3]{\frac{81}{\sin\theta}})^3+(\sqrt[3]{\frac{24}{\cos\theta}})^3]^2\cdot[(\sqrt[3]{\sin^2\theta})^3+(\sqrt[3]{\cos^2\theta})^3]^1$$

$$\geq[(\sqrt[3]{\frac{81}{\sin\theta}})^2\cdot\sqrt[3]{\sin^2\theta}+(\sqrt[3]{\frac{24}{\cos\theta}})^2\cdot\sqrt[3]{\cos^2\theta}]^3=(81^{\frac{2}{3}}+24^{\frac{2}{3}})^3=(13\sqrt[3]{9})^3=13^3\cdot 9$$

$\therefore$ $\dfrac{81}{\sin\theta}+\dfrac{24}{\cos\theta}$ 的最小值為 $39\sqrt{13}$

此時 $\sqrt[3]{\dfrac{81}{\sin\theta}}:\sqrt[3]{\dfrac{24}{\cos\theta}}=\sqrt[3]{\sin^2\theta}:\sqrt[3]{\cos^2\theta}$ ， 即 $\sin\theta:\cos\theta=3:2$

6. 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ， 求 $\dfrac{1}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+\dfrac{32}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}$ ($a>0$, $b>0$) 的最小值

【解】將 $a=1$, $b=32$ 代入 $\dfrac{a}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}$ 的最小值為 $(a^{\frac{4}{5}}+b^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{4}}=(1^{\frac{4}{5}}+32^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{4}}=17\sqrt[4]{17}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+\dfrac{32}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}$ 的最小值為 $17\sqrt[4]{17}$

此時 $\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}}:\sqrt[5]{\dfrac{32}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}}=\sqrt[5]{\sin^2\theta}:\sqrt[5]{\cos^2\theta}$ ，即 $\sin\theta:\cos\theta=1:4$

五、討論與結論

(一). 利用科西不等式推廣定理可以求出：

當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$($a>0$, $b>0$, $n\in\mathbf{N}$)的最小值為 $(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}})^{\frac{n+2}{2}}$ ，

此時 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[n+2]{a}:\sqrt[n+2]{b}$

(二). 並且對於 n 為正有理數 $\dfrac{q}{p}$ 時，$\dfrac{a}{\sin^n\theta}+\dfrac{b}{\cos^n\theta}$ 的最小值為 $(a^{\frac{2p}{2p+q}}+b^{\frac{2p}{2p+q}})^{\frac{2p+q}{2p}}$

此時 $\sin\theta:\cos\theta=\sqrt[2p+q]{a^p}:\sqrt[2p+q]{b^p}$

(三). 推廣到 $x^k+y^k+z^k=1$，$\dfrac{a}{x^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{b}{y^{\frac{q}{p}}}+\dfrac{c}{z^{\frac{q}{p}}}$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0,\ b>0, c>0$, $k,p,q\in\mathbf{N}$)

的最小值為 $(a^{\frac{pk}{pk+q}}+b^{\frac{pk}{pk+q}}+c^{\frac{pk}{pk+q}})^{\frac{pk+q}{pk}}$ ，此時 $x:y:z=\sqrt[pk+q]{a^p}:\sqrt[pk+q]{b^p}:\sqrt[pk+q]{c^p}$

六、參考資料

(一).高中數學第三冊　林福來等著　南一書局

(二).平均值不等式與科西不等式　李勝宏著　華東師範大學出版社

評　　語

040411　柯西不等式之推廣

本研究的名稱為「柯西不等式的推廣」。已經有足夠多的研究以此為題，或許將題目更改為「擬柯西不等式的應用」更為恰當。