中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040410

弧邊面積大探究

學校名稱： 國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 施銘杰	巫權祐
高二 余志恒	

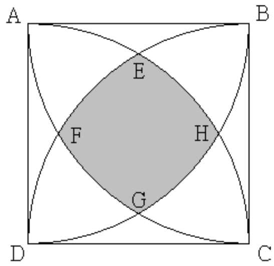
關 鍵 詞：弧邊面積

弧邊面積大探究

壹、摘要

本研究欲以一般性的推導手法，導出可廣用的弧邊面積求值公式

貳、研究動機



國中小時代常常看到求面積的問題，其中一題令人印象深刻，*【題目】如圖，正方形 ABCD，邊長為 1，以此四頂點為圓心，正方形邊長為半徑做出四個圓，求此四圓的交集面積大小？* 我們用的求法，都是分別列方程式求出 *AFE* 面積、*AEB* 面積、*EFGH* 面積求得答案(解見【附錄】)，但我們卻發現此種解法費時、不具一般性(換成正五、六邊形或不以邊長為半徑皆不易求)，難道，就沒有更好的方法嗎?

參、研究目的

對於此問題，我們希望能找出一個更具一般性及更簡便的方法。最終目的是在於能找出一個「函數」或「公式」(只需帶入邊長或正多邊形邊數)來求解。

肆、研究設備及器材

製圖工具〔圓規、尺、量角器、小畫家〕、Windows Office Excel
The Integrator(積分器)、GSP 數學繪圖軟體

伍、研究過程或方法

一、尋求新解決途徑：

不在以原本 3 未知數做法研究，回歸幾何，不已代數作為求解途徑。透過幾何通用特性，找出一新的求法。改以「切割」方式。並求出單一切割單元與弧邊面積之邊數關係，以求得面積。或是改變多邊形頂點上圓半徑(以下稱「外半徑」)以研究面積的變化情形。

二、驗證以及證明公式

將「公式出結果」與「一般結果」以及「電腦運算結果」(將會採電腦軟體程式做為工具求出欲求面積加以對照)做比較，確認公式的準確性。並加以簡化公式，達到實用性的目的。

三、探討各輸入值與輸出值得關係

公式具有多個應變量，將探討不同應變量對面積有什麼程度的影響。如：外半徑與弧邊面積關係(求比例等)、改變多邊形邊數之面積比較。(以「面積表」查表方式展現)

四、繪出公式函數圖形

採用電腦軟題繪出公式的函數圖形，探討圖形變化(研究代數狀態出現)

五、推廣公式範圍

公式在完成特殊的幾何面積運算後，可推廣為各個圓之半徑可不同所交之面積。亦能往立體方面推廣，以正多面體做球，求各球的交集體積。

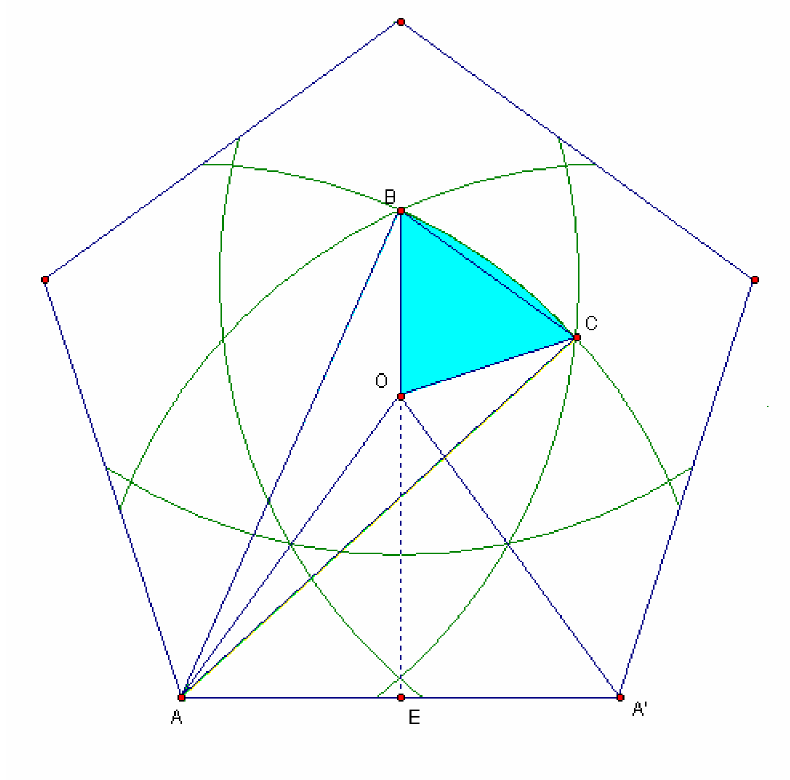
陸、研究結果

一、基本算式推導

(一)背景假設

現今有一正 n 邊形，以其 n 個頂點為圓心，邊長的 k 倍為半徑做 n 個圓。n 圓的共同交集稱為「弧邊面積」(此情形亦稱為正弧邊面積)。欲求出此弧邊面積大小與 k、n 之間關係。推導 f(k, n)。

(二)公式推導



為求得此弧邊面積，先以正五邊形作為試驗

1. 分割中央弧邊面積 先將中央弧邊面積以 $\overline{OB}$ $\overline{OC}$ 中心分割成五分之一，並連接 $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ 。且 OBC 面積 ＝ 扇形 ABC 面積 －2 ΔOAB 面積。

2. 求得所需用角度 令五邊形邊長為 1 *弧邊半徑*= $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$ ＝k 則令

$$\alpha = \angle BAE = \cos^{-1}\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \cos^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{k} = \cos^{-1}\frac{1}{2k}$$

$$\beta = \angle OAE = \frac{\pi}{2} - \angle AOE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle AOA' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 2\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

$$\gamma = \angle BAO = \alpha - \beta$$

3. 求得 ΔOAB 面積

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}\ \overline{AB}\ \overline{AO}\ \sin\gamma = \frac{1}{2}\ k\ \overline{AE}\ \sec\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}\ k\sec\beta\sin\gamma \quad (\because \overline{AE} = \tfrac{1}{2})$$

4. 求得扇形 ABC 面積 扇形 ABC $= \frac{1}{2}\ r^2\ \theta = \frac{1}{2}\ k^2\, 2\gamma$

5. 以 3. 4.求得 OBC 面積

OBC 面積= 扇形 ABC 面積 -2 ΔOAB 面積

$$=(\frac{1}{2}k^2 2\gamma)-2(\frac{1}{4}k\sec\beta\sin\gamma)=k^2\gamma-\frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2}$$

6. 求得弧邊面積 弧邊面積 = 5 OBC 面積 $=5(k^2\gamma-\frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2})$

由上述推導過程，可將關於五邊形邊長之係數改用 n 代替可得

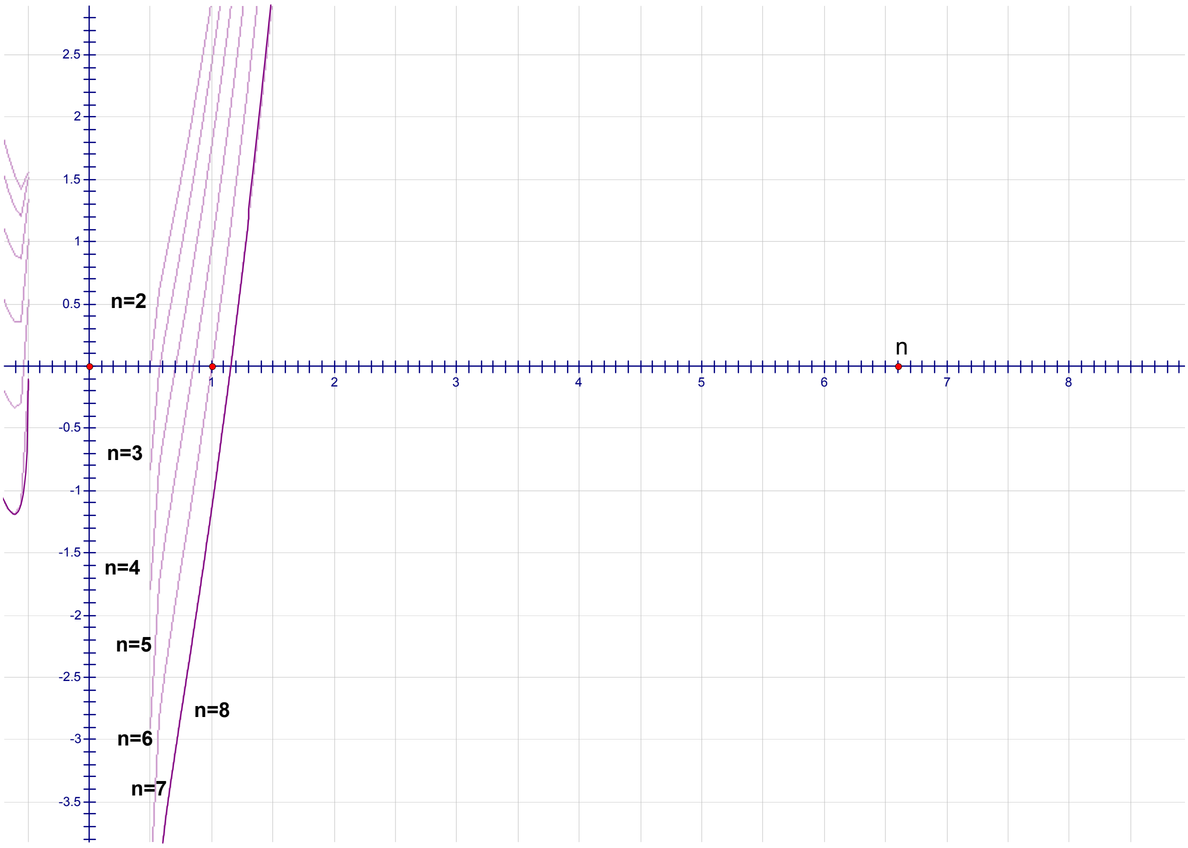
弧邊半徑邊長為 k 的 n 邊弧邊面積公式為

$$n(k^2\gamma-\frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2})$$

其中 $\gamma=\alpha-\beta$ $\quad\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{2k}$ $\quad\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$

(三)函數分析

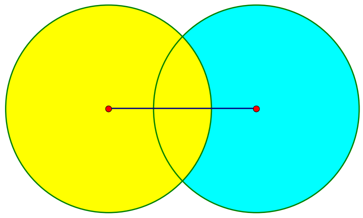
1.函數圖形繪製



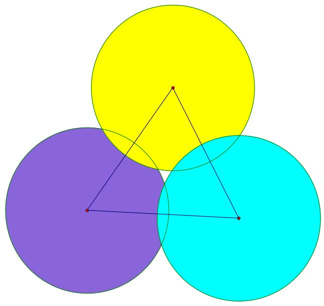
2.函數意義詮釋

(1)由圖形可知，n=6 時，函數圖形交 k 軸於(1,0) ，也就是說，在正六邊形時，以邊長為半徑畫弧所交出的面積恰好為 0，這與實際上六個弧交於同一點的事實是相符的。

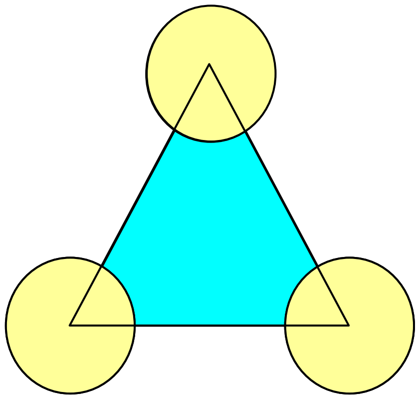
(2)讓我們驚訝的是，n=2 也有圖形，這應該是算出了如下綠色交集面積。



(3)容易看出，n 在大於三時，均有一部分的面積值為負值。經過計算，可以知道，這個負值的絕對值就是如下圖三角形內空白的面積。



(4)從圖形發現，k 在 0 到$\frac{1}{2}$時,對於所有的 n 值皆沒有圖形。這應該是因為半徑不滿邊長的一半，使得圖形既沒有真正的交出面積來，也沒有如前面說的「負的面積」。換言之，k 在 0 到$\frac{1}{2}$之間時，做出來的圖形是 n 個相離的圓，因此函數沒有圖形。



(5)在圖形中，令人不解的是，當 k 為負值的時候，函數竟然還有圖形。這個結果的幾何意義不明顯，應該要再作更進一步的研究。並且我們可以看到，這群神秘的「負 k 值曲線」中，有以下三個特點：

a. k 在$-\frac{1}{2}$到 0 之間沒有圖形。

b.在 y 軸左方圖形的函數值關於每一個 n 值都有最小值。這和 y 軸右方的「正常值」是截然不同的。

c.正 k 值的圖形在 k=$\frac{1}{2}$時趨近於負無限大，但負 k 值的圖形在 k=$-\frac{1}{2}$ 時趨近於正無限大。

這些迷人的性質讓這個函數有很大的討論空間可以發揮。

二、平面推廣

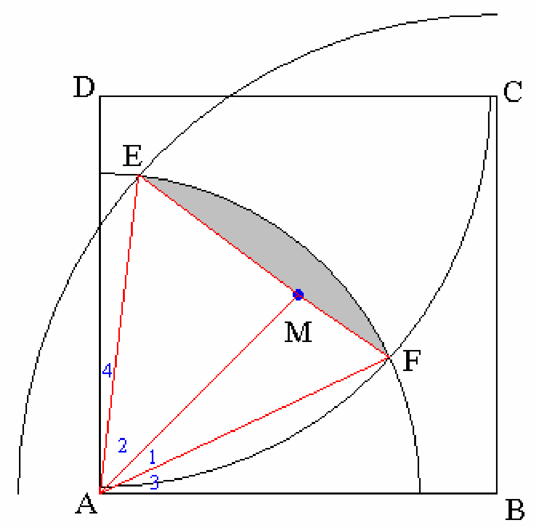
(一)背景假設

以上將各個圓的半徑皆同的情況研究完成。更進一步的，現今欲以各頂點所繪出之圓半徑作為一個自由變量，意即可求出多個不同半徑圓的所交面積。現今有一正 n 邊形，以其 n 個頂點為圓心，以不同半徑做 n 個圓。n 圓的共同交集稱為「弧邊面積」(此情形亦稱為一般弧邊面積)。欲求出此弧邊面積大小與 n、各半徑之間關係。

(二)結果試算

別於「正弧邊面積」，在「一般弧邊面積」，即半徑可任意的狀況下，已不在

適合以函數表示。相對的已成為一種求解路徑的發展。以下以正方形作為過程介紹之示範。



欲求 EMF 面積

正方形 ABCD 中　中心為 M

以 A 為圓心 r_A 為半徑

以 B 為圓心 r_B 為半徑

以 D 為圓心 r_D 為半徑

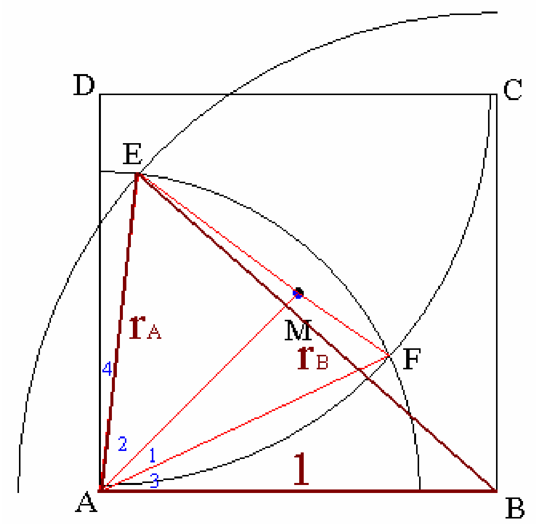
作弧交於 E F 點

令 $\angle AMF = \angle 1$　$\angle AME = \angle 2$

$\angle FAB = \angle 3$　$\angle EAD = \angle 4$

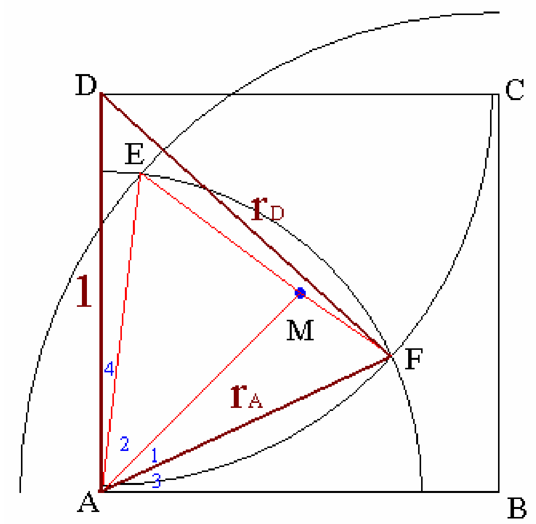
其中 $\angle 1+\angle 3 = \angle 2+\angle 4 = 45°$

【$45° = \dfrac{\delta}{2}$ (δ=正多邊形內角)】



$$\angle 1+\angle 2+\angle 3 = \cos^{-1}\frac{1+r_A^2-r_B^2}{2\,r_A}$$

(ΔABE 餘弦定理)



$$\angle 1+\angle 2+\angle 4 = \cos^{-1}\frac{1+r_A^2-r_D^2}{2\,r_A}$$

(ΔAFD 餘弦定理)

【訂定函數 $\Theta(r_H, r_K) = \cos^{-1}\dfrac{1+r_H^2-r_K^2}{2\,r_H}$ (※可表成 Θ_{HK})

$\Rightarrow\ \angle 1+\angle 2+\angle 3 = \Theta(r_A, r_B)$　$\angle 1+\angle 2+\angle 4 = \Theta(r_A, r_D)$】

則 $\angle 1 = \Theta(r_A, r_D) - \dfrac{\pi}{4}$　$\angle 2 = \Theta(r_A, r_B) - \dfrac{\pi}{4}$　$(\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\delta}{2})$

$\Rightarrow\ \angle 1+\angle 2 = \Theta(r_A, r_D) + \Theta(r_A, r_B) - \dfrac{\pi}{2}$　$(\dfrac{\pi}{2} = \delta)$

∴面積 EMF (扇形 AEF 面積 −ΔAME 面積−ΔAMF 面積)

$= r_A[\Theta_{AD} + \Theta_{AB} - \dfrac{\pi}{2}] - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ r_A[\sin(\Theta_{AD} - \dfrac{\pi}{4}) + \sin(\Theta_{AB} - \dfrac{\pi}{4})]$　$(\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sec\dfrac{\delta}{2})$

$= r_A[\Theta_{AD} + \Theta_{AB} - \dfrac{\pi}{2}] - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ r_A[\sin\Theta_{AD} - \cos\Theta_{AD} + \sin\Theta_{AB} - \cos\Theta_{AB}]$　(正方形特例)

(三)結果討論

紅色部分為推廣至多邊形時所需要的變化。其中的δ為多邊形的內角大小。由公式可以看到，一個「切片」的弧邊面積只和他對面頂點和相鄰的兩個頂點用的半徑有關。所以結論得部分一般弧邊面積公式：

$$\sum_{i=1}^{n} r_{P_i}[\Theta_{P_iP_{i+1}}+\Theta_{P_iP_{i-1}}-\delta]-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sec\frac{\delta}{2}\ r_{P_i}[\sin(\Theta_{P_iP_{i+1}}-\frac{\delta}{2})+\sin(\Theta_{P_iP_{i-1}}-\frac{\delta}{2})]$$

三、立體推廣

(一)背景假設

平面推廣之後，欲將適用範圍延伸至立體計算，研究「弧面體積」。現今有一正多邊體，以頂點做球心，作球交於一體積—稱之為「弧面體積」。

(二)結果試算

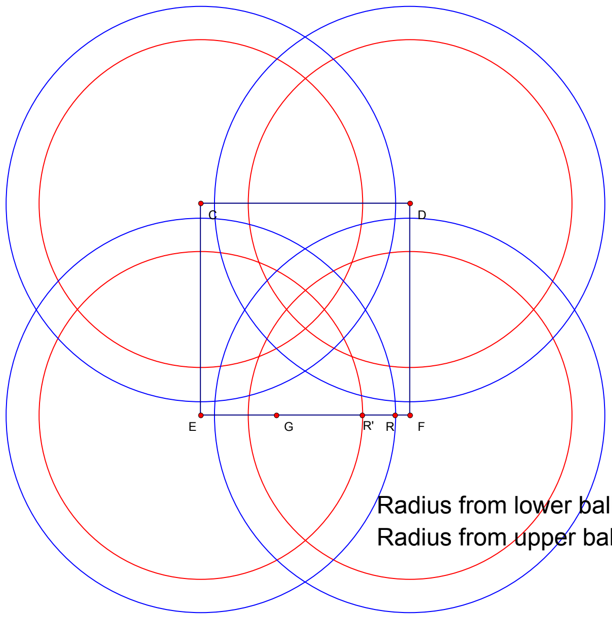
「弧面體積」即算之機構乃源至弧邊面積公式之積分運算。以下將說明如何將弧邊面積公式運用。

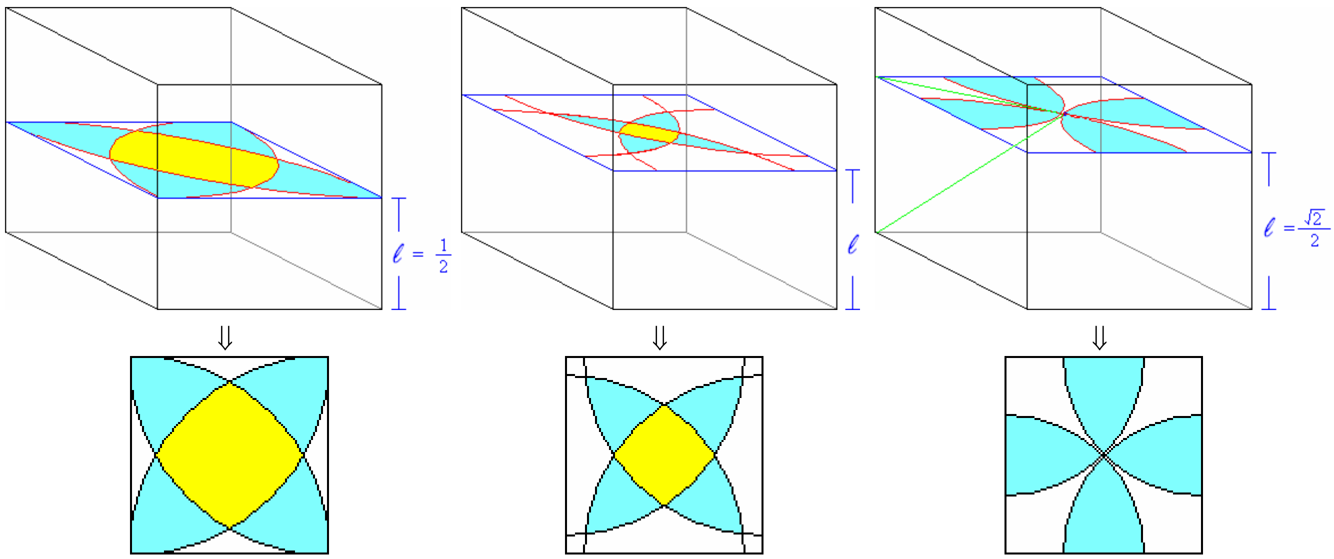
1.計算概念說明

(1)首先，我們觀察這個弧邊體積。角落八個球在每一個水平剖面的交線圍成了兩個弧邊面積。這兩個弧邊面積中較小的一個即為弧面體積的剖面圖。而易知，弧邊體積的上半部的剖面應為下半部四顆球所交成的弧邊體積。

(紅：上方四球剖面情形)

(藍：下方四球剖面情形)





(2)由圖可知，觀察其立體剖面，可發現弧面體積(黃色部分)每一個剖面均呈現不同邊長的弧邊面積。亦即隨著 l(代表剖面位置與底面距離)改變，剖面的弧邊面積 k 值也跟著改變。

(3)先將欲求的弧邊體積分成上下兩部分。現今從 $l=\frac{1}{2}$開始討論直到體積消失。經過計算【$k^2=1^2-l^2$(k 為剖面弧邊面積頂點所繪圓之半徑) 令 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$代入】可發現體積消失於 $l=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，在計算過程中我們把這個上界表為 h。

(4)是故我們可以知道，因為此弧邊體積上下對稱，所以我們可以算出上半部體積後再乘以 2 即可。所以體積可以用積分來表示為 $2\times\int_{\frac{1}{2}}^{h}$ 弧邊面積 dl。

2.計算過程

欲求 $2\times\int_{\frac{1}{2}}^{h} n(k^2r-\frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2})\,dl$ (積分函數參考附錄二)

$k=\sqrt{1-l^2}$. 代入 n=4 r=1

$\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{2k}$ $\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{4}$ $\gamma=\alpha-\beta=\cos^{-1}\frac{1}{2k}-\frac{\pi}{4}$

$$2\times\int_{\frac{1}{2}}^{h} n(k^2r-\frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2})\,dl$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{h} 4[(1-l^2)(\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{1-l^2}\,\sqrt{2}\sin(\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}}-\frac{\pi}{4})}{2}]\,dl$$

$$=2\times\int_{\frac{1}{2}}^{h} 4\,[(1-l^2)(\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{1-l^2}\,[\sin\cos^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}})-\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}}]}{2}]\,dl$$

$$=8\times\int_{\frac{1}{2}}^{h}[(1-l^2)\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}}-(1-l^2)\times\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3-4l^2}-1}{4}]\,dl$$

$$=\frac{1}{6}\{\frac{8l^3}{\sqrt{3-4l^2}}-16l(l^2-3)\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{1-l^2}}-\frac{6l}{\sqrt{3-4l^2}}+32\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3-4l^2}}-13\tan^{-1}\frac{2l}{\sqrt{3-4l^2}}\}-2\pi\times(l-\frac{1}{3}l^3)-\{l\sqrt{3-4l^2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{2l}{\sqrt{3}}\}+2l\,\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{h}$$

$\because \sqrt{1-h^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore h=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$=\frac{65}{12}\pi-\frac{49}{3}\tan^{-1}\sqrt{2}-\frac{16}{3}\sin^{-1}\frac{1}{3}+\sqrt{2}-1=0.0152054895288$$

【如果我們用正八面體預估，因為其對角線長為 $\sqrt{2}-1$ ，所以體積可以估計為 $\frac{1}{6}\times(\sqrt{2}-1)^3$=0.0118446353109，但是用正八面體估計時，會忽略弧面體積八面凸出的部份，所以體積估計值應小於實際值，符合結果。】

柒、結論

ε 成功的推出 $f(k, n) = n(k^2\gamma + \frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2})$

其中 $\gamma = \alpha - \beta$ $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2k}$ $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$

ζ 可求出不同弧半徑(以頂點作圓之半徑長)之弧邊面積

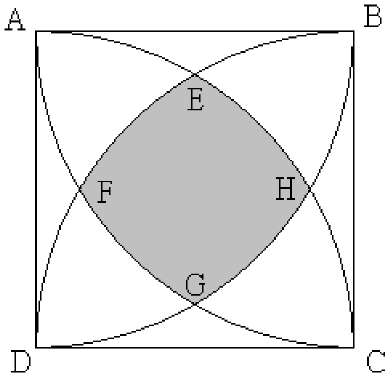
$$\sum_{i=1}^{n} r_{Pi}[\Theta_{PiPi+1}+\Theta_{PiPi-1}-\delta]-\frac{1}{4}\sec\frac{\delta}{2}\times r_{Pi}[\sin(\Theta_{PiPi+1}-\frac{\delta}{2})+\sin(\Theta_{PiPi-1}-\frac{\delta}{2})]$$

(其中δ為正多邊形內角)

η 弧面體積運算方式 $2\times\int_{\frac{1}{2}}^{h} n(k^2 r-\frac{k\sec\beta\sin\gamma}{2})\,dl$ (正六面體)

從這些研究結果可以發現，有些看似困難問題可以從最簡單的角度來探討。我們從最簡單的單邊長弧邊面積，進展到多邊長弧邊面積，最後還推廣到立體的弧面體積。而且可以知道，由一個簡單的切入點切入，再用另外一個角度來討論，可以得到令人滿意的結果，有時還可以得到不同的結論，創造出另一片天！

【附錄 1】



令

EFGH 面積為 X, *AEF* 面積為 Y, *ABE* 面積為 Z

得方程式

由弧 *BED*、弧 *DGB* 圍成面積(a) $=X+2Y=\dfrac{\pi}{2}-1$……①

扇形 *BDC* 面積(e) $=X+3Y+2Z=\dfrac{\pi}{4}$……②

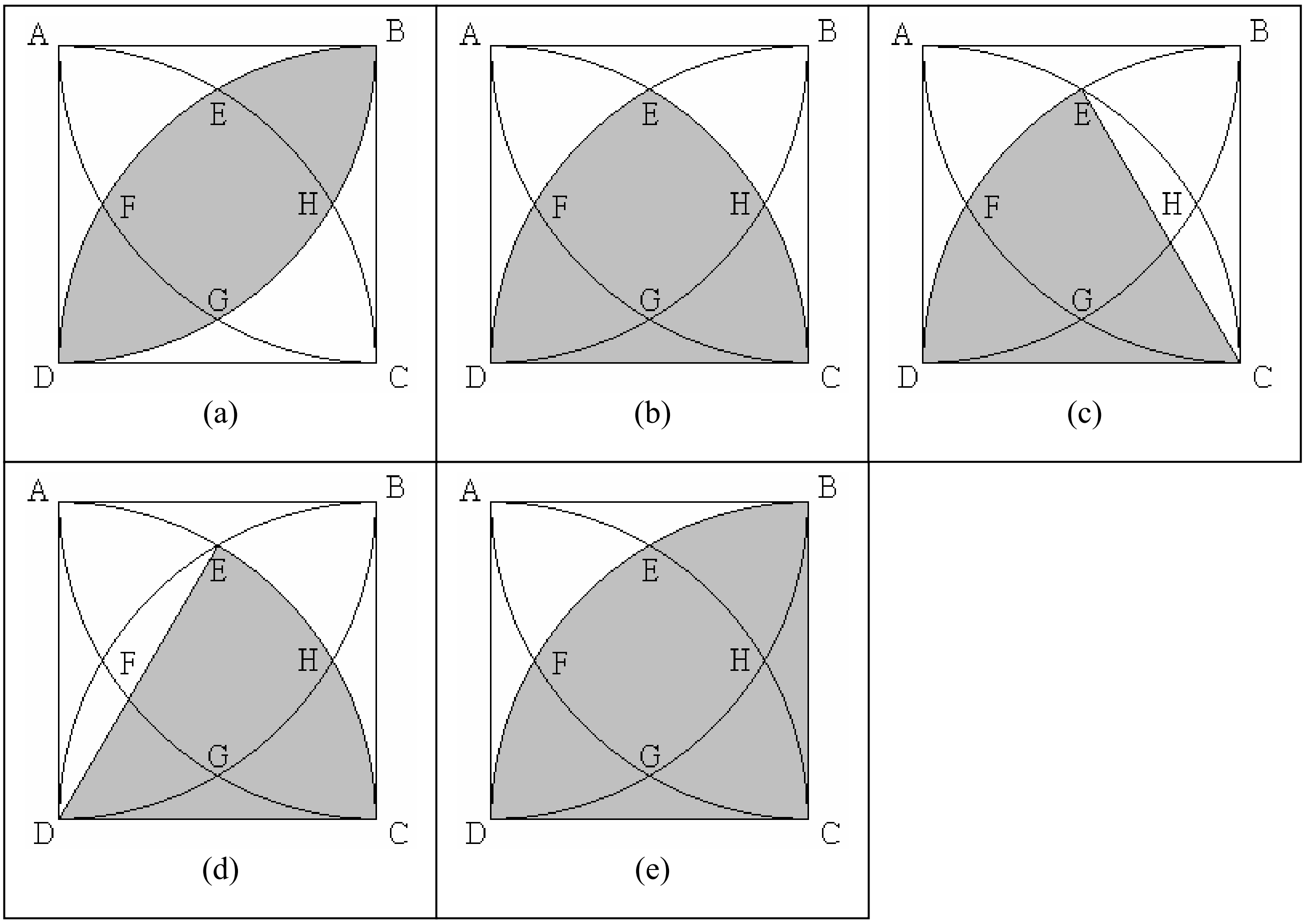
DEC 面積$(b)=$ 扇形 *ECD*(c) +扇形 *EDC*$(d)-$ 三角形 *EDC*=

$$=X+2Y+Z=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\text{……③}$$

③−①$\Rightarrow Z=\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ 帶入②

$\Rightarrow X+3Y=\dfrac{\pi}{4}-2\times\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2$……④

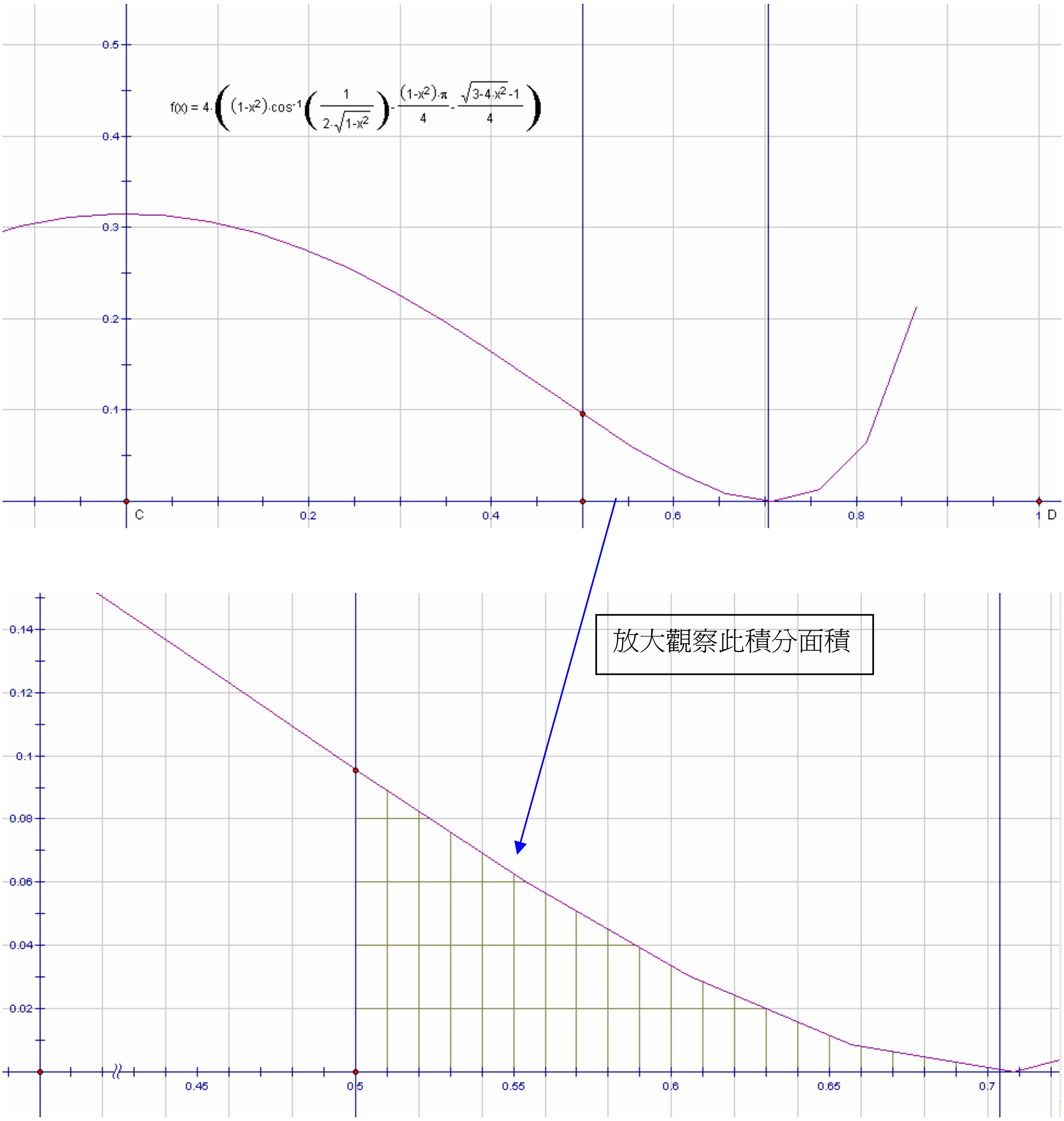
④−①$\Rightarrow X=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ $\quad\Rightarrow Y=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(a) (b) (c) (d) (e)

【附錄 2】

積分位置展示 $f(x) = n(k^2 r - \frac{k \sec\beta \sin\gamma}{2})$ (欲對此函數積分)



評　　　語

040410　弧邊面積大探究

1. 本問題為優良的微積分習題。

2. 本研究的名稱為「弧邊面積大探究」。然而，在數學詞典中我們無法找到「弧邊」一詞。作數學研究一定要具有嚴謹、通用的名詞，否則無法進行溝通。

3. 口頭報告表現出作者對於研究的熱忱。