中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第二名

040409

真是太過影了

學校名稱： 國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃偉庭	林榮男
高二 李巧君	

關 鍵 詞：投影、面積、傾斜角度

壹、摘要

根據投影的定義(地面上方之不透明物體受一垂直地面光線之照射，在地面上的陰影部分的長度或面積)。根據投影的定義，由線和面的投影延伸到立體之投影。我們以各種正多角錐和角柱爲例，固定光源方向，分別改變角錐和角柱的控制變因和傾角，其投影面積是否有規律性變化？欲求出一條投影面積與傾斜角度的通式，由最簡易的三角錐、三角柱至繁複的多角錐、多角柱，分別計算其投影面積並傾斜其中心軸，並列出其傾斜角度與投影面積的關係式，從中找出不同角錐與不同角柱的各項關係式的規律。

貳、研究動機

看過影子嗎？我們一般可見，在一天中的日出到日落，路旁的樹、行走的路人、電線桿等，影子都有週期性的變化，這些影子稱作此物的投影量，然而不同形狀所造成的投影面積不相同，光線照射的角度也有影響，我們觀察此投影的改變現象，是否能找出它們之間的關係？我們想到以一般的正角錐和正角柱爲例，模擬日常生活中太陽的光線投影，並假想角錐與角柱中存在著一條中心軸，視日常生活中的每樣物體也存在著使其約略對稱的中心軸，觀察太陽光線照射角度的改變，我們想到已改變物體中心軸的傾斜角度來代替太陽光線照射的角度變化，來進行我們的實驗。

參、研究目的

藉由立體圖形-正角錐、正角柱，以固定光源方向的方式，改變正角錐和正角柱的傾角，並控制其控制變因(如：固定一端點、面、邊) ，觀察、計算並記錄所求得之投影面積，找出其和角度之關係並推廣至不等邊之多面體，以求出其特別關係式。

肆、研究設備及器材

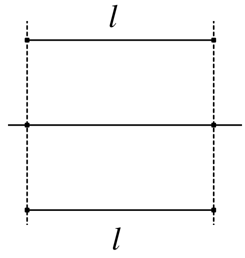
紙、筆、圓規、量角器

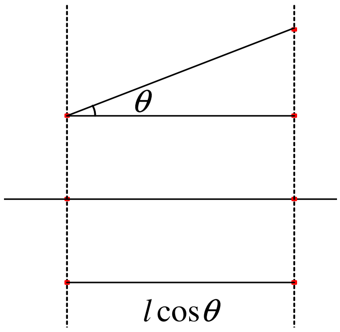
伍、研究過程或方法

一、空間中的線段投影(設線段長爲 l)

先以基本的線段作討論，討論其投影長和傾斜角度的關係：(如圖)

水平時之投影長→其投影長爲 l

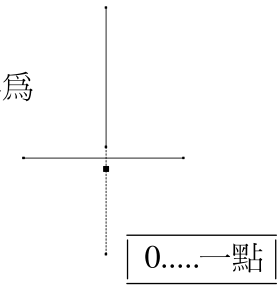




線段與水平面傾斜θ時之投影長度→

其投影長之 l 餘弦值，$l\cos\theta$

當線段垂直於水平面時，其投影長度→其投影長爲零，所見投影爲一點(如右圖)

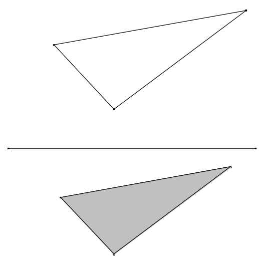


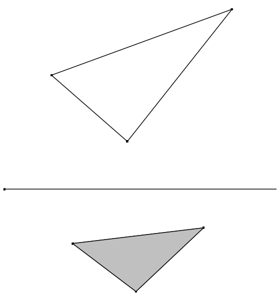
二、空間中的面投影

以每邊長爲l，再加以計算面的面積(目前以正多邊形計算)

(一)正三角形

其面和水平面平行時的投影面積：(三角形面積)$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$





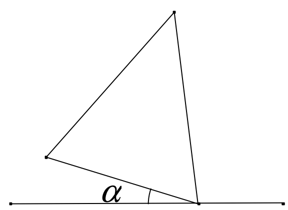
其面和水平面夾θ角時的投影面積：(三角形面積)$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\cos\theta$

三、空間中的立體投影

(一)正角錐

設光源皆垂直地面照射，且重複的投影面積不再重複計算

1.固定其底面一邊爲旋轉軸，以底面平行地面爲0°，順時針爲正，逆時針爲負(如例圖一)。旋轉底面使其與地面夾角α，



例圖一

求出不同角度的投影面積。

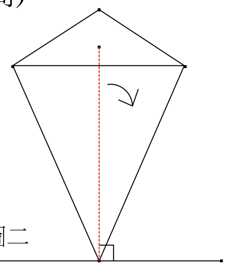
2.固定其頂點爲支點，並從頂點對底面作一垂直線(即是此角錐的高)，

以高和地面垂直爲$0°$基準線，順時針爲正，逆時針爲負(例圖二)。

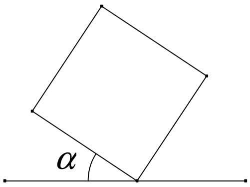
傾斜此角錐的高使其與基準線夾角α，求出不同角度的投影面積。

但後來爲了方便計算，改爲以底面一點作旋轉＝＞

(先對底面一邊作旋轉，再沿著底面對一點作旋轉)。



例圖二



例圖三

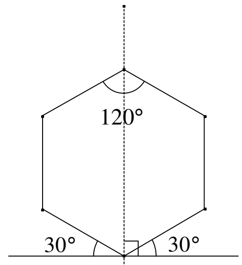
(二)正角柱

設光源皆垂直地面照射，且重複的投影面積不再重複計算固定其側面一邊爲旋轉軸，以底面平行地面爲 $0°$，順時針爲正，逆時針爲負(如例圖三)。旋轉底面使其與地面夾角α，求出不同角度的投影面積。

例：正六角柱

設邊長爲a，以固定側面的高之一邊做不同角度之傾斜求投影面積

側面的夾角 $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$



側視圖一

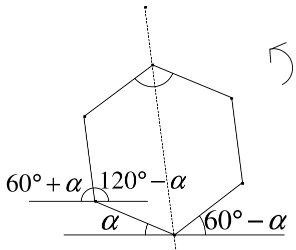
令與地面的傾斜角度爲 (側視圖一和側視圖二)

→正六邊形的對角連線與地面垂直即此正六邊形左右與地面夾角皆爲 $30°$

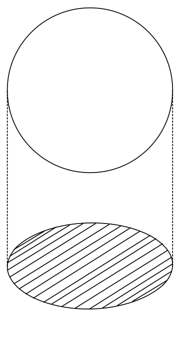
→此時的投影面積 $= 2 \times a^2 \cos 30° = \sqrt{3} \times a^2$

當正六邊形的對角連線與地面夾$\alpha + 60°$時，

→此時的投影面積 $= a^2 \left[\cos(60° + \alpha) + \cos\alpha + \cos(60° - \alpha)\right]$，如側視圖二。



側視圖二



(三)圓

半徑爲 r 的球體，其投影面積爲→πr^2

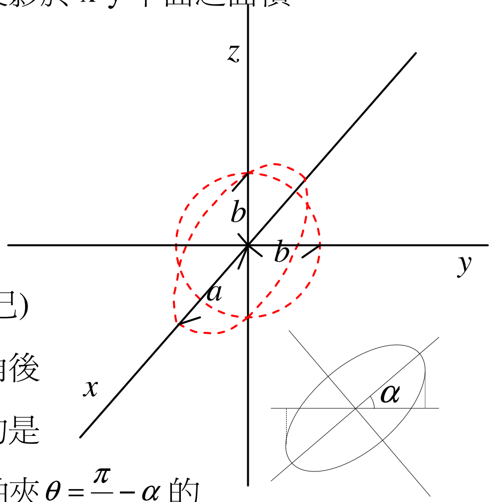
且無論如何傾斜轉動，其投影面積始終爲定值。

(四)橢圓體(x=0 之縱切面爲圓時)

橢圓體與水平面成水平時，設其表達式爲 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$，即將其放於 x-y 平面上

由此可知其交在 x-y 平面上的橢圓之半長軸爲a，半短軸爲b

現假若橢圓對著 y 軸做逆時針旋轉θ角，計算其投影於 x-y 平面之面積。



$\alpha=0$時，投影面積爲πab。

$\alpha=90°$時，投影面積爲πb^2。

$\alpha=\alpha$時，首先可知投影長軸爲 y=0 的縱切面與橢圓體的交面投影於 x-y 平面上的長度。

(這是因爲與橢圓長軸平行的弦中最長的即是它自己)

所以長軸的長度即爲將橢圓對 x 軸逆時針旋轉α角後投影於 x 軸的長度。因而由右圖知我們需要尋找的是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的第二象限中的點$(x_1,y_1)$的切線與 x 軸夾$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$的

由於$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在$(x_1,y_1)$上的切線方程式爲$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ 因此可知$\tan\alpha=\dfrac{y_1a^2}{x_1b^2}$

又我們要計算的長軸爲$2\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\times\cos(\alpha-\theta_1)$，$\theta_1$爲原點 o 到$(x_1,y_1)$對 x 軸的夾角

由$\tan\alpha=\dfrac{y_1a^2}{x_1b^2}$知$y_1^{\ 2}=(\tan\alpha\times\dfrac{b^2}{a^2})^2\times x_1^{\ 2}$而$\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$，因此$\dfrac{x_1^{\ 2}(a^2+b^2\tan^2\alpha)}{a^4}=1$

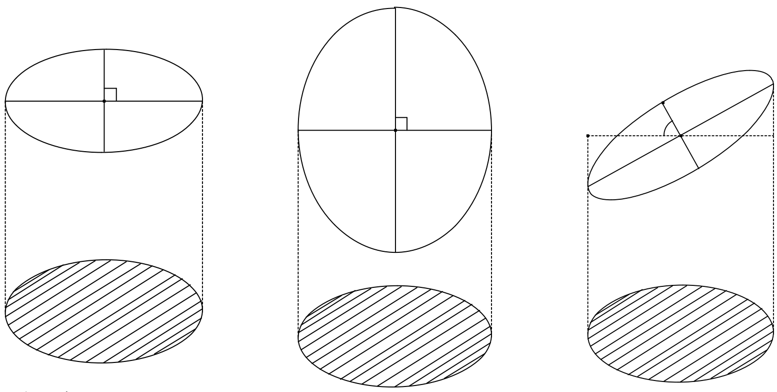
也得知

$\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}=\sqrt{\dfrac{a^4+b^4\tan^2\alpha}{a^2+b^2\tan^2\alpha}}$。另外，$\tan\theta_1=\dfrac{y_1}{x_1}=\tan\alpha\times\dfrac{b^2}{a^2}$，因而

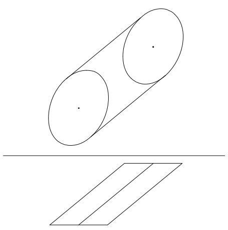
$\cos\theta_1=\sqrt{\dfrac{a^4}{b^4\tan^2\alpha+a^4}}$及$\sin\theta_1=\sqrt{\dfrac{b^4\tan^2\alpha}{b^4\tan^2\alpha+a^4}}$由此可得投影半長軸$\alpha'$

爲$\dfrac{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}}$。總結而知，當橢圓體旋轉$\alpha$角時，

其在 x-y 平面上的投影面積爲$\pi b\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}$。

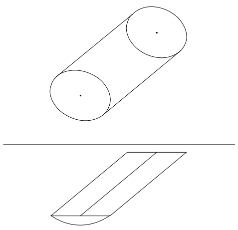


(五)圓柱(設高爲 l)



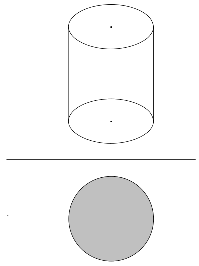
當圓柱橫放與水平面平行，其投影面積爲一截面長方形面積→$2rl$

與水平面垂直時，其投影面積爲一圓，即圓柱側面之圓面積→πr^2



傾斜θ角時，投影面積→最大截面長方形之面積之

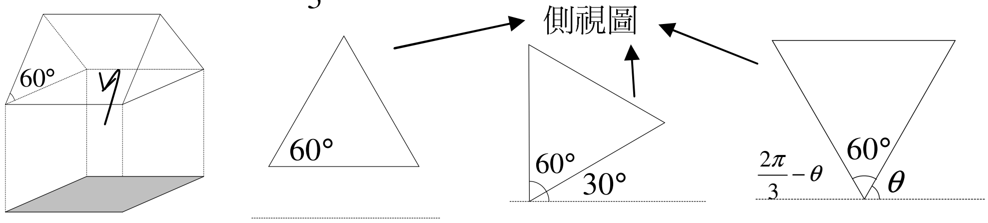
餘弦值+側圓面積投影的部分面積→$2rl\cos\theta+\pi r^2\sin\theta$



既然有了圓柱，那角柱呢？我們可以發現的是圓柱與角柱都有一個很特殊的特性，那就是其側面與底面平行。這個特性雖顯而易見，然而卻能避免了許多繁瑣的計算，例如：一旦底面對於投影面的夾角確定，相對的，所有的側面也確定了與底面的夾角了。因此，首先，我們先觀察一些角柱的公式，並且爲了化簡，先由對側面一邊爲旋轉軸開始討論起。

(六)正角柱(以側面一邊爲基準)因此投影面積皆以矩形的投影面積計算。

(一)正三角柱(側面夾角$\dfrac{\pi}{3}$)

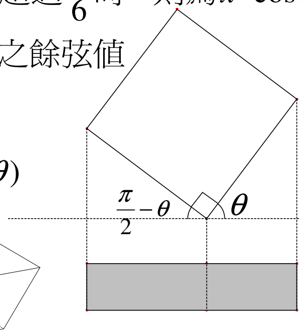


傾斜角度θ超過$(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{6}$時，可得左右兩塊投影面積。(不超過$\dfrac{\pi}{6}$時，則爲$x^2\cos\theta$)

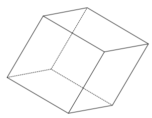
因此可計算左右側之投影面積 A 和 B 相當於各自側面面積之餘弦值

$A=x^2\cos\theta\quad B=x^2\cos(\pi-\dfrac{\pi}{3}-\theta)=x^2\cos(\dfrac{2\pi}{3}-\theta)$

故傾斜θ時，可得投影面積之公式爲$x^2\cos\theta+x^2\cos(\dfrac{2\pi}{3}-\theta)$



(二)正四角柱(側面夾角$\dfrac{\pi}{2}$)



同理之左右投影面積相加得

$x^2\cos\theta+x^2\cos(\pi-\dfrac{\pi}{2}-\theta)=x^2\cos\theta+x^2\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=x^2\cos\theta+x^2\sin\theta$

(三)正五角柱(側面夾角$\pi-\dfrac{360°}{5}=\pi-72°=\pi-\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{3}{5}\pi$)

當$\dfrac{2\pi}{5}+\theta\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta\le\dfrac{\pi}{10}$ 時，

投影面積爲 $x^2\cos\theta+x^2\cos(\dfrac{2\pi}{5}-\theta)+x^2\cos(\dfrac{2\pi}{5}+\theta)$

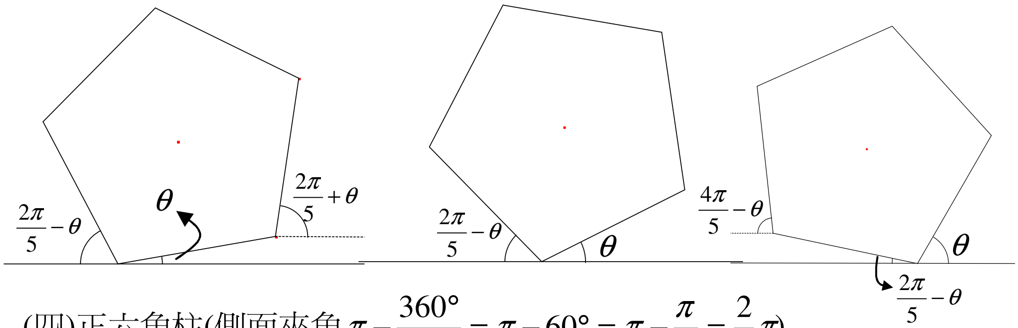
而$\dfrac{\pi}{10}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{10}$ 時，

投影面積爲 $x^2\cos\theta+x^2\cos(\dfrac{2\pi}{5}-\theta)$

最後當$\dfrac{3\pi}{10}\le\theta\le\dfrac{2\pi}{5}$時，

投影面積爲 $x^2\cos\theta+x^2\cos(\dfrac{2\pi}{5}-\theta)+x^2\cos(\dfrac{4\pi}{5}-\theta)$

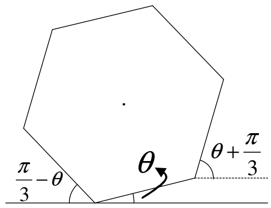
由此可知，角度對於投影面積的影響佔很大的分量。



(四)正六角柱(側面夾角 $\pi-\frac{360°}{6}=\pi-60°=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$)

當 $\theta\le\frac{\pi}{6}$ 時，由圖可知其投影面積可視爲右邊兩個側面投影加上左邊兩個投影

因此，投影面積爲 $x^2\cos\theta+x^2\cos(\theta+\frac{\pi}{3})+x^2\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)$



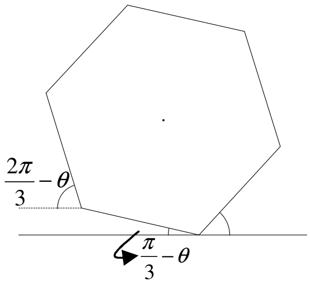
若 $\theta>\frac{\pi}{6}$，如圖 2，可知其投影面積可視爲

左邊兩個側面投影加上右邊兩個投影

因此，投影面積爲 $x^2\cos\theta+x^2\cos(\frac{2\pi}{3}-\theta)+x^2\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)$

可以發現，上下兩式可總和而成

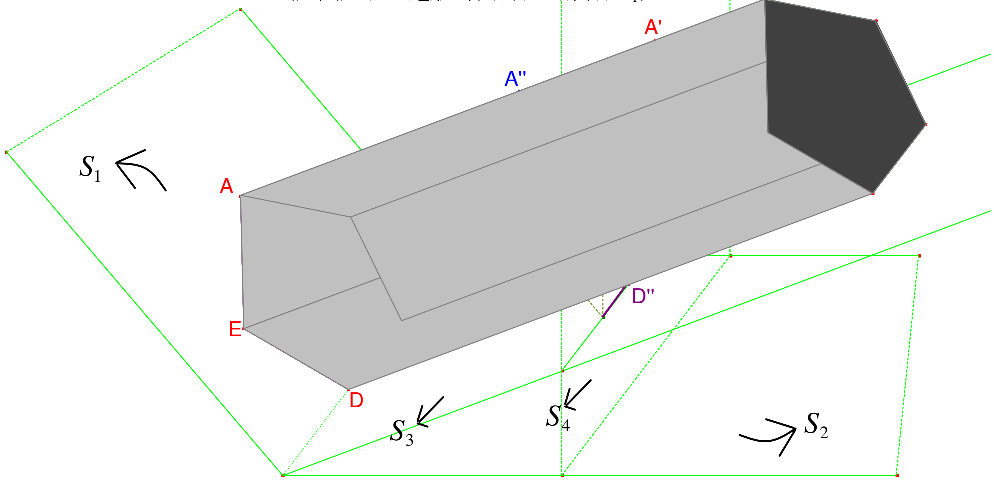
$x^2\cos\theta+x^2\left|\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\right|+x^2\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)$



由此，我們可知，雖然各個角柱的投影公式不盡相同。

然而，我們所用的計算方式卻是都是計算一個正多邊形投影到一個邊上的長度，再乘與其寬度(側面的高)所得的結果。由此可知，在二維平面上的投影是非常重要的。如今若我假設正多邊形投影到直線上的長度爲 X。首先，我們能用這個已知量解決之前的角柱對於側面一邊的投影面積公式，其爲 $X\times x$(x 爲側面之高)。另外，我們還可把這個觀念推廣到角柱的點旋轉上，值得注意的是，點旋轉基本上可視爲角柱對於底面一邊作旋轉，再以底面其中一點對底面作旋轉。

(此圖是以五邊形爲例,將D點當作X_1)



角柱最後的方法(點旋轉)的證明

以一個角柱來說，角柱的底面假設在S_1此平面上，並將 x-y 平面設成S_2(角柱高 h, 底面面積爲 A)。 $\alpha \le \frac{\pi}{2}$

現若S_1與S_2夾α角(把此當成先作對邊旋轉)，因爲對點旋轉時平面還是不變，不妨設此角柱的底面爲多邊形$X_1X_2X_3...X_n$，且是對X_1旋轉。此時我先把角柱對著底面平移到X在S_1與S_2的交線上，設此交線爲 L，假設底面投影到直線 L 的長度爲X。

現我要證明此角柱投影到 x-y 平面上的面積爲$A\cos\alpha + Xh\sin\alpha$。

首先，把通過 L 且垂直於S_1的平面假設爲S_3。

假若作一平面$S_4 \perp S_2$且將角柱切成多邊形 $X_1'X_2'X_3'\cdots X_n'$(對應於$X_1X_2X_3...X_n$)，設S_4與S_2交於L'並且假設$X_1'X_2'X_3'\cdots X_n'$投影到L'的點爲$M_1M_2M_3...M_n$(注意：因爲X_1'在L'上，所以可知M_1'即爲X_1')。

另外，對X_1'作多邊形$X_1''X_2''X_3''...X_n''$(X_1'即爲X_1'，此多邊形即爲過X_1'作與S_1平行的面交的全等多邊形)。

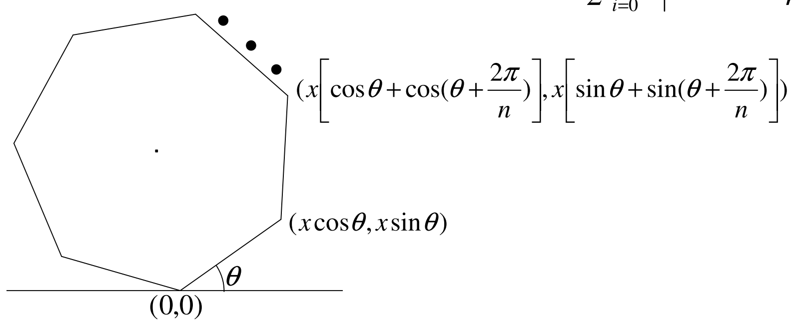
現將$X_1''X_2''X_3''...X_n''$投影在L'得$M_1'M_2'M_3'...M_n'$(M_1'即爲X_1')。

由三垂線定理得知，$\because \overline{M_i'X_i''} \perp \overline{X_1'M_i'}$，$\overline{M_i'X_i''} \perp \overline{X_i''X_i'}$ ($\because X_i''X_i'$在同一條高上)$\therefore \overline{X_1'M_i'} \perp \overline{M_i'X_i'}$，但是$\overline{X_i'M_i} \perp \overline{M_iX_i'}$，$\therefore M_i$和$M_i'$爲同一點。

即$X_1'X_2'X_3'\cdots X_n'$投影到L'的長度爲X。因此，角柱在 x-y 平面上的投影相當於$A\cos\alpha +$以長爲X爲寬爲h的長方形投影到S_2上的面積。

因而，此角柱投影到 x-y 平面上的面積爲$A\cos\alpha + Xh\sin\alpha$。

由上述的公式推導，我們可知現在只需算出 X 的值即可。然而，要如何才能有效得算出 X 的值呢？我們利用一個觀念，一個封閉圖形投影到一直線上的長度即爲將此圖形的所有邊投影到此直線後加總再除與 2。因此，此時利用設座標求解會是個不錯的選擇。首先，由下圖的座標設法可知，$X=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}x\left|\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right|$



那要如何計算上述的和呢？首先可知，$0\le\theta<\frac{2\pi}{n}$。又唯有當$\frac{\pi}{2}<\theta+\frac{2i\pi}{n}<\frac{3\pi}{2}$時，*cos* 的值才是負的。因此，我們將 n 分成幾個 *cases* 來討論。

$$\frac{\pi}{2}<\theta+\frac{2i\pi}{n}<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\theta<\frac{2i\pi}{n}<\frac{3\pi}{2}-\theta\Rightarrow\frac{n}{4}-\frac{n\theta}{2\pi}<i<\frac{3n}{4}-\frac{n\theta}{2\pi}$$

又由於$0\le\theta<\frac{2\pi}{n}$，代表我可以假設 $\theta=\frac{k\pi}{n}$ 且$0\le k<2$。

如此可知$\frac{n}{4}-\frac{k}{2}<i<\frac{3n}{4}-\frac{k}{2}$。

(一) $n=4m, m\in N$

而$m-\frac{k}{2}<i<3m-\frac{k}{2}$, (1) $k=0\Rightarrow i=(m+1)\sim(3m-1)$, (2) $k>0\Rightarrow i=m\sim(3m-1)$

此時可得,$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}x\left|\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right|\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}x\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})-2\sum_{j=m}^{3m-1}x\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right]$

$$=\frac{-x\cos(\theta+\frac{(4m-1)\pi}{4m})\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4m})}=\frac{x\cos(\theta-\frac{\pi}{4m})}{\sin(\frac{\pi}{4m})}=x\cos(\theta-\frac{\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{n})$$

(二) $n=4m+1, m\in N$

而$m+\frac{1}{4}-\frac{k}{2}<i<3m+\frac{3}{4}-\frac{k}{2}$,

(1) $0\le k\le\frac{1}{2}\Rightarrow i=(m+1)\sim 3m$, (2) $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}\Rightarrow i=m\sim 3m$,

(3) $\mathrm{k}\ge\frac{3}{2}\Rightarrow i=m\sim 3m-1$

此時可得,$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}x\left|\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})\right|\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}x\cos(\theta)\csc(\frac{\pi}{2n}), if\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2n}\\ \frac{1}{2}x\cos(\theta-\frac{\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n}), if\ \frac{\pi}{2n}<\theta<\frac{3\pi}{2n}\\ \frac{1}{2}x\cos(\theta-\frac{2\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n}), if\ \frac{3\pi}{2n}\le\theta<\frac{2\pi}{n}\end{cases}$

(三) $n = 4m+2, m \in N$

而$m + \frac{1}{2} - \frac{k}{2} < i < (3m+1) + \frac{1}{2} - \frac{k}{2}$,

(1) $0 \le k < 1 \Rightarrow i = (m+1) \sim (3m+1)$, (2) $k = 1 \Rightarrow i = (m+1) \sim 3m$,

(3) $\mathrm{k} > 1 \Rightarrow i = m \sim 3m$

此時可得, $\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} x\left|\cos(\theta + \frac{2i\pi}{n})\right|\right] = \begin{cases} x\cos(\theta)\csc(\frac{\pi}{n}), if\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{n} \\ x\cos(\theta - \frac{2\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{n}), if\ \frac{\pi}{n} < \theta < \frac{2\pi}{n} \end{cases}$

(四) $n = 4m+3, m \in N$

而$m + \frac{3}{4} - \frac{k}{2} < i < (3m+2) + \frac{1}{4} - \frac{k}{2}$,

(1) $0 \le k < \frac{1}{2} \Rightarrow i = (m+1) \sim (3m+2)$, (2) $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{2} \Rightarrow i = (m+1) \sim (3m+1)$,

(3) $\mathrm{k} > \frac{3}{2} \Rightarrow i = m \sim (3m+1)$

此時可得, $\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} x\left|\cos(\theta + \frac{2i\pi}{n})\right|\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}x\cos(\theta)\csc(\frac{\pi}{2n}), if\ 0 \le \theta < \frac{\pi}{2n} \\ \frac{1}{2}x\cos(\theta - \frac{\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n}), if\ \frac{\pi}{2n} \le \theta \le \frac{3\pi}{2n} \\ \frac{1}{2}x\cos(\theta - \frac{2\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n}), if\ \frac{3\pi}{2n} < \theta < \frac{2\pi}{n} \end{cases}$

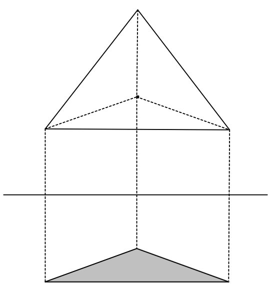
由(一)、(二)、(三)、(四)可得出 X 的結論。並以 X 解出角柱的點旋轉公式。至此，角柱全部解決。

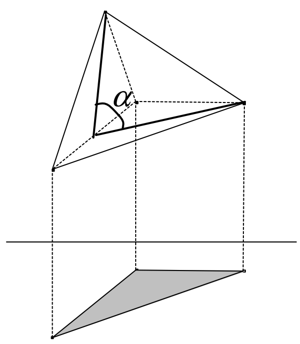
同樣的，角錐呢？首先，我們必須知道的是角錐的側面並不垂直於底面。因此，角錐的推導方法勢必比較麻煩。同樣的，角錐我們也採設座標的方式解決，不過，我們先來看一些例子。

一、正角錐(以底面一邊爲基準)

(一)正三角錐(示範推導過程)

一面與水平面平行時之投影面積→$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$



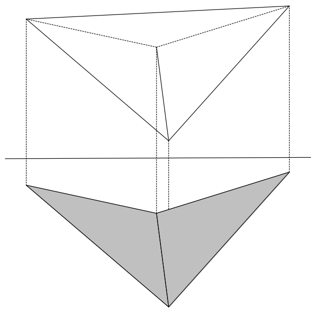


一邊固定做傾斜(傾角不大於$\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$)，其投影面積

→$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cos\theta$ (僅一面之投影面積之餘弦値)

傾角大於時 $\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，其投影面積出現兩個三角形之

面積→ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cos(\pi-\theta-\cos^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3})$

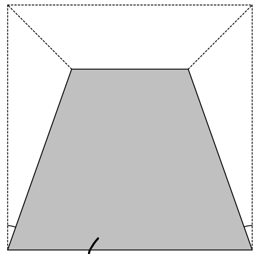


(二)正四角錐

正四邊形就開始有點麻煩了。首先我們得證明當以任何一邊為基準作旋轉時，可直接以底面的正四邊形和基準邊所對應的側面作投影即可(如果傾斜到不能只算底面的投影時)。

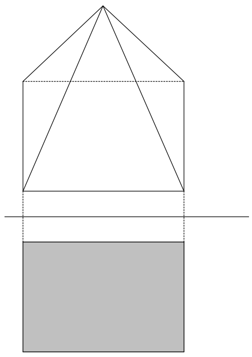
Proof：

當我們以任何一個垂直於底面的面切此斜正四面體時，其所切出來的切面為一等腰梯形(如右圖)。



因為此為正四角錐，代表水平切出來的正四邊形是越接近頂點越小。因而，代表其等腰梯形較長的底邊是此平面與基準邊的側面切出來的底邊。也就是說，其另外三條邊的投影到底面時的長度其實就是最長底邊的長度。

因此，我們可得，一正四角錐對於底面一邊作旋轉時，其投影面積即為底面的正四邊形和基準邊所對應的側面分別作投影之和。證畢。



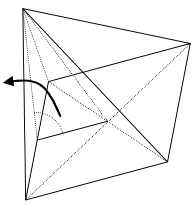
現我們便可計算正四角錐對於底邊作旋轉時的公式。

假設正四角錐的底面與投影面成 θ 角。

則 $\theta=0$ 時，

投影面積為 x^2。

$0<\theta\le\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ 時，



投影面積為 $x^2\cos\theta$。

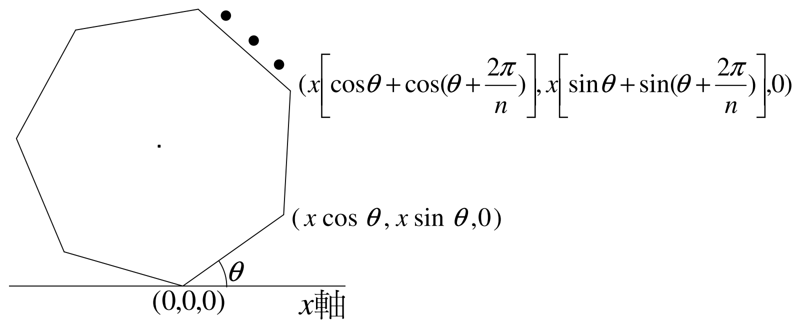
$\theta>\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ 時，

投影面積為 $x^2\cos\theta+x^2\cos(\pi-\theta-\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$ 。

原本，我們打算依此算出多角錐的投影面積與角度關係，並試圖找出角錐之間的規律性。然而卻發現當面數增加時，連帶的是角度需要討論更多種情形。因此，我們決定用設座標的方式解決此問題，而此時也直接做對點旋轉即可涵蓋所有情形。

(角錐對點旋轉的公式之推導)：

同樣的，我們以設座標的方法解。首先，我們可知投影面積即爲把所有的面皆投影後相加除與 2。由於我們現在設的是三維座標，因此，爲了能方便計算，我們改成是投影面在旋轉。如下圖，我們將正多邊形設座標並假設高爲 h。



我們先計算此正多邊形的中心 G，如下：

$$(\frac{x}{2}\sec\frac{(n-2)\pi}{2n}\cos(\theta+\frac{(n-2)\pi}{2n}),\frac{x}{2}\sec\frac{(n-2)\pi}{2n}\sin(\theta+\frac{(n-2)\pi}{2n}),0)$$

而其中任何一點的座標爲

$$(\frac{\cos(\theta+\frac{i\pi}{n})\sin(\frac{(i+1)\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}},\frac{\sin(\theta+\frac{i\pi}{n})\sin(\frac{(i+1)\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}},0),\ for\ i=0\sim(n-1)$$

現在，爲了方便計算，我們改以投影面對 x 軸作旋轉並假設投影面爲 $z=(\tan\alpha)$y，而 α 爲底面與投影面的夾角。如此任何一個側面投影到投影面上的面積即爲此側面之面積乘上側面與投影面夾角的 cos 值再取絕對值。而要計算此 cos 值，將分別垂直兩個面的兩個單位向量內積起來即可。所以可得：

$$\left|x\times\sqrt{h^2+(\frac{x}{2}\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})^2}\times\frac{(\sin(\theta+\frac{2i\pi}{n}),-\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n}),\frac{x}{2}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times\frac{1}{h})\bullet(0,\tan\alpha,-1)}{\sqrt{(\frac{x}{2}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times\frac{1}{h})^2+1}\times\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}}\right|$$

$$=\left|x\times h\times\cos\alpha\times(\tan\alpha\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})+\frac{x}{2}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times\frac{1}{h})\right|,\ for\ i=0\sim(n-1)$$

上述結論即爲一個側面投影到投影面的面積。

因此可知，當一個正角錐與投影面夾 α 角時(已把點旋轉考慮進去)，其投影面積爲：

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left|x\times h\times\cos\alpha\times(\tan\alpha\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})+\frac{x}{2}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times\frac{1}{h}\right|+\frac{nx^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times|\cos\alpha|\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\times h\times|\cos\alpha|\times\sum_{i=0}^{n-1}\left|\tan\alpha\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})+\frac{x}{2}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times\frac{1}{h}\right|+\frac{nx^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})|\cos\alpha|\right]$$

雖然我們的確寫出了投影面積公式，但目前卻無法有效的化簡裡面的絕對值。

因此，未來還需要更進一步的方法來解決上述的結果。

柒、結論

現在讓我們對之前所討論的公式做一個整理：

一、空間中的線段投影＝＞ $l\cos\theta$

二、空間中的面投影＝＞ $A\cos\theta$

三、球體的投影＝＞ πr^2

四、橢圓體(x=0 之縱切面為圓)＝＞$\pi b\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}$

五、圓柱＝＞ $2rl\cos\theta+\pi r^2\sin\theta$

六、正 n 角柱(對點旋轉，涵蓋所有情形)

＝＞ (一)$n=4m$時$, m\in N$

$$\frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+x\cos(\theta-\frac{\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{n})\times l\times\sin\alpha,$$
$$for\ 0\le\theta<\frac{2\pi}{n}, 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$$

(二)$n=4m+1, m\in N$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+\frac{1}{2}x\cos(\theta)\csc(\frac{\pi}{2n})\times l\times\sin\alpha, if\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2n}\\ \frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+\frac{1}{2}x\cos(\theta-\frac{\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n})\times l\times\sin\alpha, if\ \frac{\pi}{2n}<\theta<\frac{3\pi}{2n}\\ \frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+\frac{1}{2}x\cos(\theta-\frac{2\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n})\times l\times\sin\alpha, if\ \frac{3\pi}{2n}\le\theta<\frac{2\pi}{n}\end{cases}$$

(三)$n=4m+2, m\in N$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+x\cos(\theta)\csc(\frac{\pi}{n})\times l\times\sin\alpha, if\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{n}\\ \frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+x\cos(\theta-\frac{2\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{n})\times l\times\sin\alpha, if\ \frac{\pi}{n}<\theta<\frac{2\pi}{n}\end{cases}$$

(四)$n=4m+3, m\in N$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+\frac{1}{2}x\cos(\theta)\csc(\frac{\pi}{2n})\times l\times\sin\alpha, if\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2n}\\ \frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+\frac{1}{2}x\cos(\theta-\frac{\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n})\times l\times\sin\alpha, if\ \frac{\pi}{2n}\le\theta\le\frac{3\pi}{2n}\\ \frac{x^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times n\times\cos\alpha+\frac{1}{2}x\cos(\theta-\frac{2\pi}{n})\csc(\frac{\pi}{2n})\times l\times\sin\alpha, if\ \frac{3\pi}{2n}<\theta<\frac{2\pi}{n}\end{cases}$$

七、正 n 角錐(對點旋轉，涵蓋所有情形)＝＞

$$\frac{1}{2}\left[x\times h\times|\cos\alpha|\times\sum_{i=0}^{n-1}\left|\tan\alpha\cos(\theta+\frac{2i\pi}{n})+\frac{x}{2}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times\frac{1}{h}\right|+\frac{nx^2}{4}(\tan\frac{(n-2)\pi}{2n})\times|\cos\alpha|\right],$$
$$if\ 0\le\theta<\frac{2\pi}{n}$$

捌、討論

由起初線段的投影長的討論中，我們可以得到線段的投影長隨傾斜角度而變，及其原長的餘弦值。而衍伸至面時也得到了相同的結果，加以推論至立體投影時，由最簡單的球體討論，由與我們以限制光線的照射方向及其並非點光源，求得球體的任意擺放傾斜並不影響其投影面積而橢圓以及圓柱橫放時的任意傾斜也不影響其投影面積，但垂直放置時的傾斜卻會影響面積，我們得到一結論：一物體若有一截面爲圓形，則依此截面的圓的圓周轉動(即通過此圓圓心假如有一條固定的中心軸與此圓截面平行，此中先軸任意傾斜)此物體的投影面積恆不變。任意改變其傾斜角度三角錐至四角錐所計算出的諸項列式中，我們找出共同的規律，但目前尚無法找出公式簡捷表示方法，以致於無法求得通式。而角柱的推論當中，由三角柱至六角柱列式中，我們發現其中的規律，推導出一通式，期望下次有機會可以更深入推導長、寬、高長度不同時的結果，以及多面體的深入探討！

玖、結論

因時間限制，目前尚未求出正 n 角錐的通式，接下來將以此爲目標。並希望能藉由求出等邊多面體的經驗，找出可以表示一物體的參數式，進而推得可預測估計出任一物體之投影面積約略多少的關係式，然後推廣到光源之轉移角度也適用此式。

拾、參考資料及其他

一、宋兆全/投影幾何學/臺北市/文京圖書/1996

二、馬德潤, 陳廣鐸編著/投影幾何/臺南市/中華/1974

三、陳春錦/投影幾何例解/臺南市/復文/1974

四、關永山/投影幾何學/臺九版/臺北市/正中/1973

評　　語

040409　真是太過影了

1. 口頭報告十分穩健。內容雖然平實，整體看合乎科學發展的實做精神。

2. 投影幾何乃是科展及數學實驗的重要題材。投影變換可以維持線性關係而無法維持面積及夾角。作者挑選到投影變換不能夠維持的幾何量來研究。