中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

040405

史坦納樹

學校名稱：　國立花蓮高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄒宗辰	羅伸儀
高二 陳柏甫	
高二 葉俊逸	
高二 莊皓宇	

關 鍵 詞：最佳化、費馬點、史坦納點

壹、摘要：

「史坦納樹 Steiner Trees」爲尋找已知圖形最短路徑和的問題，對於路徑最短要求，即我們所要的『最佳化』。舉個例子，在城鎮規劃，無論造橋或馬路或捷運。系統能以最短距離連接各個鄉鎮，就能大量節省經費及通往的時間。另外，在一個電路板或 IC 晶片 CPU 上，有許多電晶體或邏輯閘需用許多線路連接，如果將這些電晶體以一種規則排列，讓所連接的線路總和最短，這樣不僅能節省線路材料的成本，且能降低電阻所浪費的電能，也可提高電路板在執行工作的效率。本研究對史坦納樹的各種規律和性質作進一步的探討。(史坦納之生平，參照附錄)

貳、研究動機：

閒暇時翻閱《打開魔數箱》(Martin Gandner 著)一書，其中「史坦納樹」吸引我們的注意力。史坦納樹是尋找已知各點間最短路徑的最佳化問題，我們可發現這些點中加入若干規則性的點，再加以連接可得最短路徑，而這些線段會構成一個樹狀的網路，故得名。舉例來說，三角形的史坦納樹是在三角形內部或邊上加入一點，而此點即有名的費馬點，但定義上有很大的不同，費馬點是圖形中加入一點，而史坦納點則可加入不只一點，直到其路徑和最短，這個最佳化問題非常吸引人，所以決定作更深入的研究。

參、研究目的：

一. 研究平面上已知有規律點的最短連接路徑
二. 平面上不規則圖形的探討
三. 探討空間中是否存在史坦納樹
四. 尋找平面上史坦納樹規律
五. 研究平面上的直角史坦納樹
六. 發現生活上的應用

肆、研究設備及器材

紙、筆、黑板、粉筆、電腦(桌上型+筆記型)、電腦繪圖軟體 GSP

伍、研究過程或方法

研究方法：

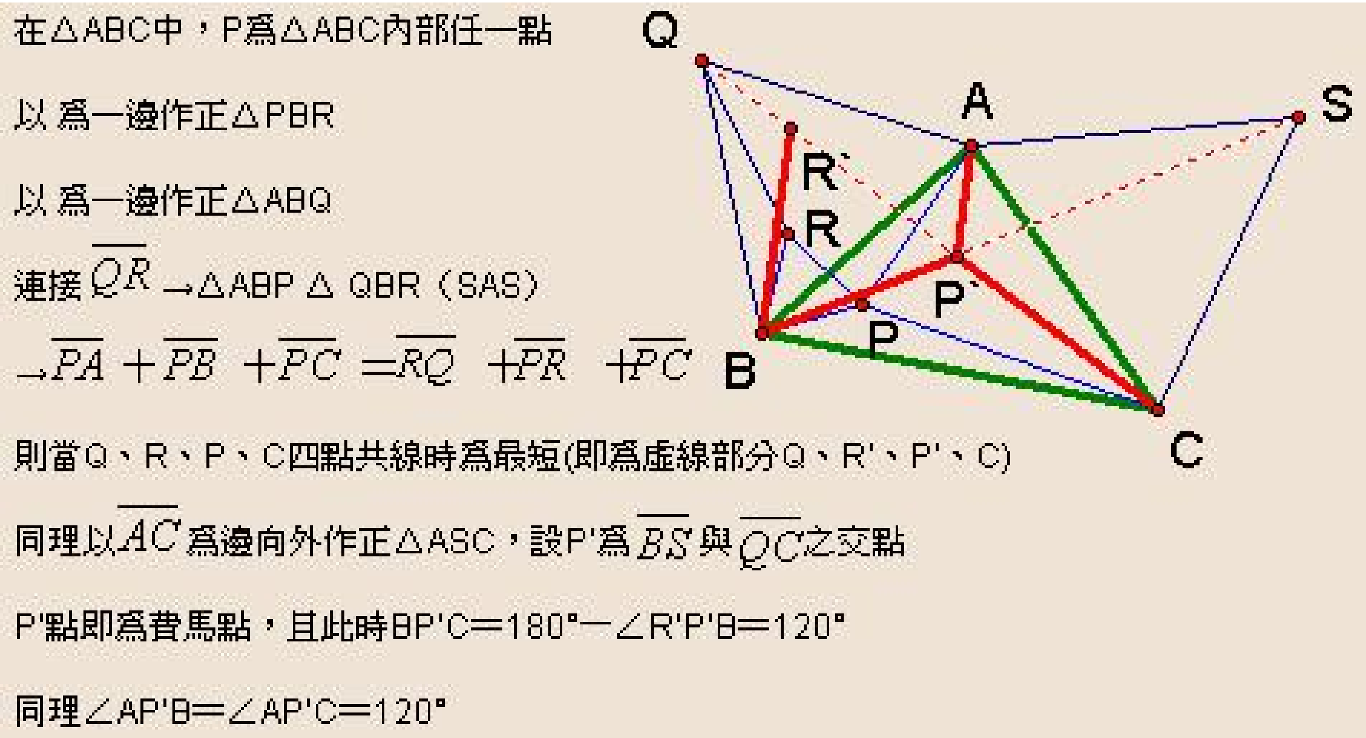
本研究爲連接已知點來求取其最短路徑和，並尋找連接之方法及規律。我們將欲連接的各點當成一多邊形之各頂點，以凸多邊形爲準。先從正三角形、任意三角形、正方形、長方形、正五邊、正六邊來做分析。再推廣至任意四邊形、任意五邊形、任意六邊形。最後合理的提出七邊形至 n 邊形史坦納樹之猜測。除了平面上的圖形，立體亦是，我們先由正四面體和六面體著手，單位圖形上之路徑圖，稱爲小樹。由多個小樹所構成之圖稱爲大樹。另外僅由鉛直及水平線所連結而成的史坦納樹，在電子元件的連結上有良好的應用，我們也做了部分的探討。

一、 平面

(一)基礎圖形

1.三角形

(1).證明三角形的史坦納點是費馬點



★.由上得知，除了鈍角≧120°，其他三角形的史坦納點(費馬點)都有相同的特性，即史坦納點到相鄰兩頂點連線夾角均為 120°。也證明出若要達到路徑和最短，史坦納點與相鄰頂點所連出來的路徑，線與線之間均夾 120°。

★.當角度≧120°時，此鈍角兩夾邊為史坦納樹。證明詳見附錄。

2.正方形

(1).正方形史坦納樹猜想：

我們發現，圖形內加入史坦納點，加入點的個數，與頂點數有密切的關係。作圖時，目的要做出夾角均為 120°的史坦納樹，所以一個交會點(史坦納點)一定會由三條線各自夾 120°組成。

例：

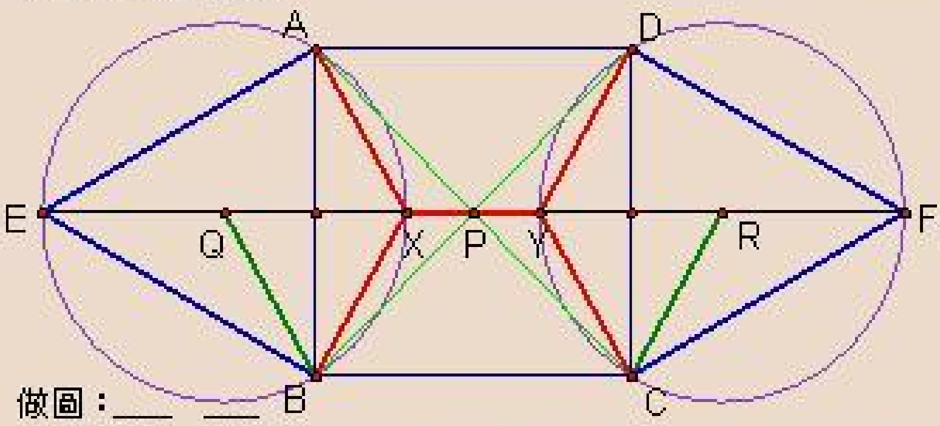
三角形：史坦納樹各邊恰連接每一頂點。

四邊形：若是其中有一條路又有分叉，則連的頂點數又會多一個。所以判定有兩個史坦納點在其中。

以此類推，若是某圖形有 n 個頂點，猜測所擁有的史坦納點，(n-3)+1=m 個

（２）.畫四邊形史坦納樹

正方形史坦納樹



做圖：
1. 以 $\overline{AC}$，$\overline{CD}$ 爲邊向外做正三角形，得△ABE、△CDF兩三角形。
2. 作△ABE，△CDF之外接圓。
3. 連接E、F交兩外接圓於 X、Y兩點，此X、Y就是史坦納點。
4. 連接 $\overline{AX}$、$\overline{BX}$、$\overline{XY}$、$\overline{YD}$、$\overline{CY}$ 圖形即爲所求。

證明此圖會最小：

1.連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於P點

2.在▫ABCD中，XY爲△ABC內部兩點(同三角形費馬點之理證明)

△BQX、△ABE、△YDR、△CDF皆爲正三角形

△AXB ≅ △EQB（SAS），△DYC ≅ △FRC（SAS）

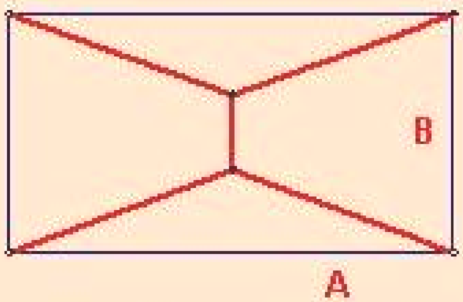
故 $\overline{BX}=\overline{BQ}=\overline{QX}$、$\overline{AX}=\overline{EQ}$，$\overline{CY}=\overline{FR}$、$\overline{YC}=\overline{RC}=\overline{YR}$

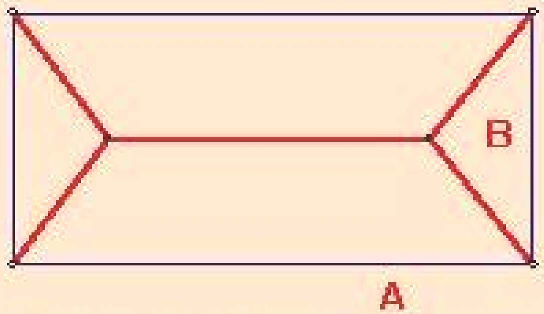
則 $\overline{BX}+\overline{AX}+\overline{XY}+\overline{CY}+\overline{YD}=\overline{BQ}+\overline{EQ}+\overline{XY}+\overline{RC}+\overline{FR}$

$=\overline{QX}+\overline{EQ}+\overline{XY}+\overline{FR}+\overline{YR}=\overline{EF}$ (恰爲一直線，故爲最短)

3.長方形史坦納樹

我們發現當四邊形爲長方形時，會出現兩種史坦納樹的畫法，造成會有長短的差異。
我們假設令A>B





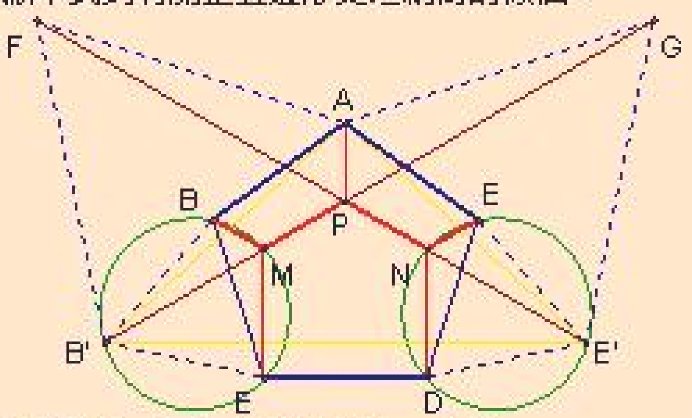
$(A+\sqrt{3}B)-(\sqrt{3}A)=(1-\sqrt{3})A-(1-\sqrt{3})B=(1-\sqrt{3})(A-B)<0$

$(A+\sqrt{3}B)$ 較 $(\sqrt{3}A+B)$ 短，

所以我們判斷，以短邊爲主 作史坦納樹會比用長邊作史坦納樹還要短

4.正五邊形

從文獻中找到有關正五邊形史坦納樹的做法：



1. 以 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 往外做兩正三角形△BB'E，△CC'D。

2. 做$\triangle AB'C'$，再以$\overline{AB'}$ $\overline{AC'}$爲邊往外做兩正△AB'F，正△AC'G。

3. 連接$\overline{GB'}$ $\overline{FC'}$，交點P就是$\triangle AB'C'$ 的費馬點。

4. 爲了做出120°三角形，作△BB'E，△CC'D兩正三角形之外接圓。

5. 連接$\overline{PB'}$ $\overline{PC'}$，交於兩外接圓於M、N兩點，連接 $\overline{MB}$、$\overline{ME}$、$\overline{NC}$、$\overline{ND}$

6. 最後在連接$\overline{PM}$、$\overline{PN}$、$\overline{PA}$，此樹狀圖即爲所求。

7. 證明其最短的方法同三角形證法同，以□B'EBM這圖形，$\overline{MB}+\overline{ME}=\overline{MB'}$

，而□C'DNC也同理，$\overline{NC}+\overline{ND}=\overline{NC'}$。

就看$\triangle AB'C'$ 其$\overline{PB'}=\overline{PM}+\overline{MB'}$，$\overline{PC'}=\overline{PN}+\overline{NC'}$。

而$\overline{PA}+\overline{PB'}+\overline{PC'}$=此$\triangle AB'C'$ 的史坦納樹，故得證。

5.正 N 邊形

正六邊形以後，角度都≧120° 。樹的做法，繞著邊長走一圈，再減其中一邊 （圖 1 、圖 2、圖 3、圖 4) 。這方法，到正 *N* 邊形都成立。

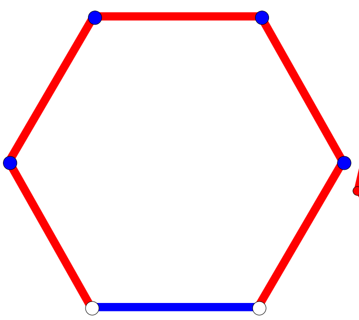


圖 1　正六邊形

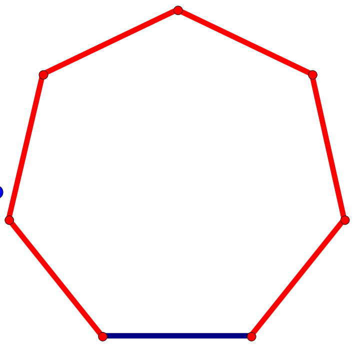


圖 2　正七邊形

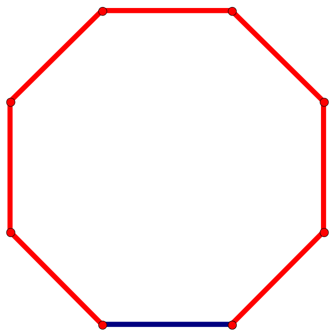


圖 3　正八邊形

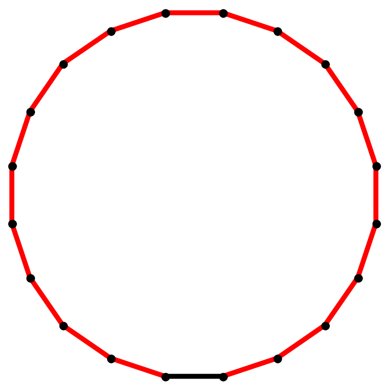


圖 4　正二十邊形

二 .任意多邊形

四邊形爲例，之前方法有特殊情況。三角形頂點相連線段與三角形外接圓交點爲史坦納點。如圖(圖 5)、(圖 6)，史坦納點在圖外，這做法是錯誤。

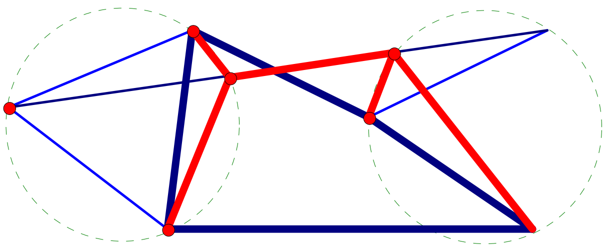


圖 5

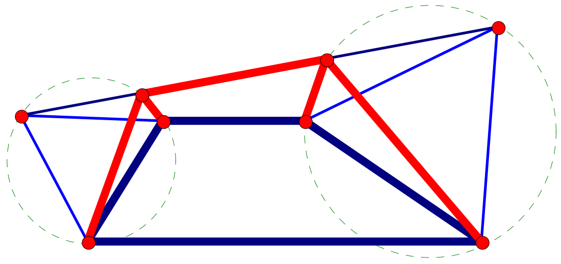


圖 6

五邊形也是(圖 7)、(圖 8)

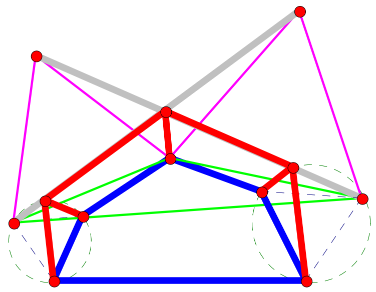


圖 7

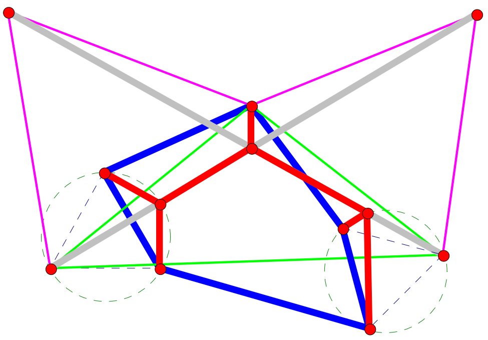


圖 8

使用 GSP 跑圖形，試圖找出能畫與不能畫的規則。
研究過程在於附錄

(一).任意四邊形

1.分類：

四邊形可分出四類。(圖 11) (圖 12)是兩個史坦納點均與頂點重合的圖形，如果兩個史坦那點均在圖形外(圖 20.21)，這時則以離 L 最近的頂點爲新的史坦納點，原來圖外的史坦納點就不管。

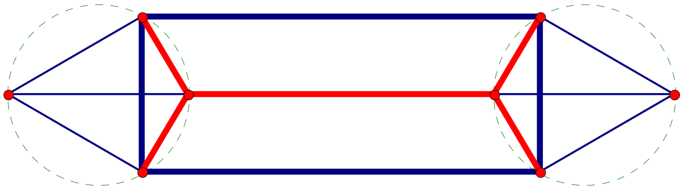


圖 9

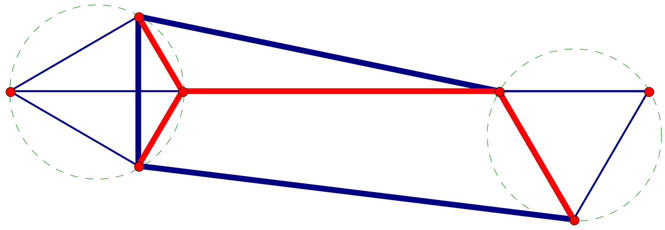


圖 10

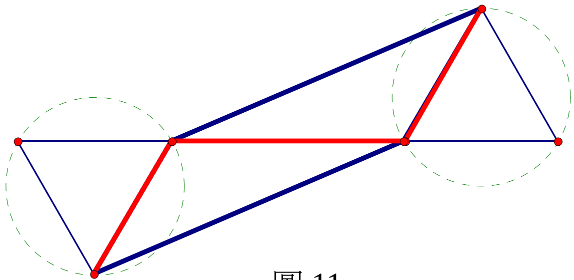


圖 11

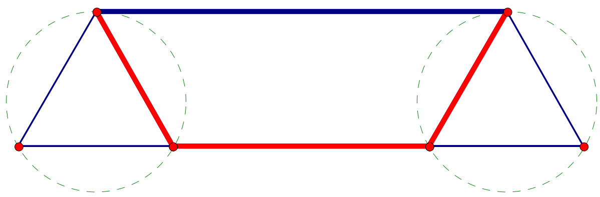


圖 12

(圖 10)是只有一個史坦納點在圖外，若一個史坦納點在圖外(B2) (圖 13)，則以離 L 最近的頂點爲新史坦納點(B1)。是以 B1 爲新史坦納樹，若直接以 S1 連接，會有角度不爲 120° ，S1 的位子也需跟著變動。做法是把與 S1 共圓的兩個頂點 A、C 與另一端 *B*1 當一三角形 (綠色)，做此三角形的史坦納樹(圖 14)

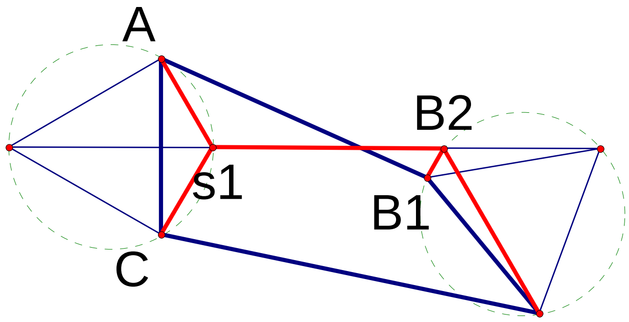


圖 13

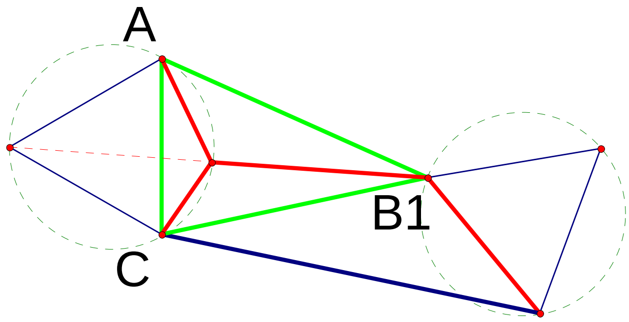


圖 14

2.任意四邊畫圖法

(1).挑一組對邊向外做正三角形。

(2).正三角形頂點連線，令爲 L(圖 15~18 中之紅線)。

(3).分類：

類型 a. L 同時過此組對邊 (圖 15)

類型 b. L 只過其中一邊(圖 16)

類型 c. L 與此組對邊均不相交，但與另兩邊相交(圖 17)

類型 d. L 與四邊均不相交(圖 18)

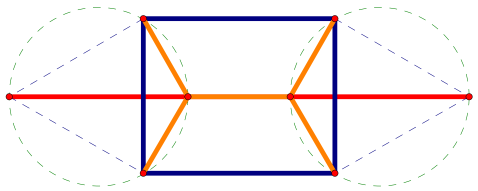


圖 15

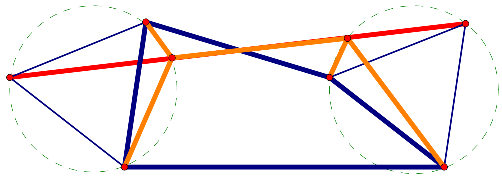


圖 16

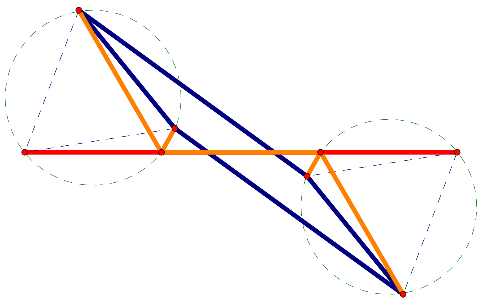


圖 17

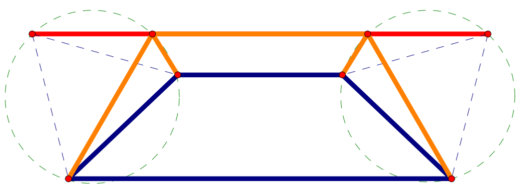


圖 18

上圖中橘色線表示與正方形相同畫法時的史坦納樹，以下爲修正畫法

(4).畫圖法：

類型 a：畫法與正方形同(圖 19)

類型 b：L 沒過的邊，以最靠近 L 的頂點爲史坦納點。此點與對邊兩端點當三角形做史坦納樹，再相連 L 沒過的邊。(圖 20)

類型 c：取最靠近 L 之 2 點爲 S 點，將點相連。(圖 21)

類型 d：取最靠近 L 之 2 點爲 S 點，將點相連。(圖 22)

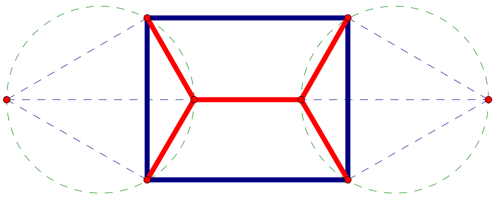


圖 19

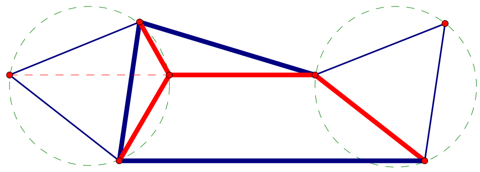


圖 20

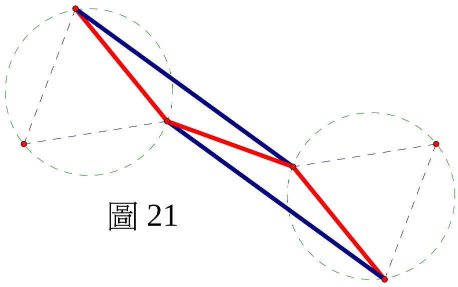


圖 21

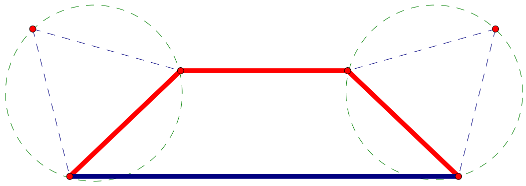


圖 22

四邊形最多兩組畫法(對邊共 2 組)(圖 23)，但也可能只有一組(圖 24)

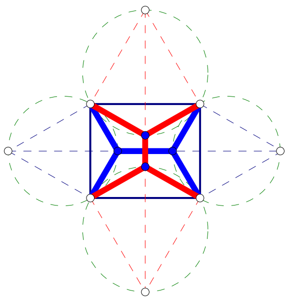


圖 23

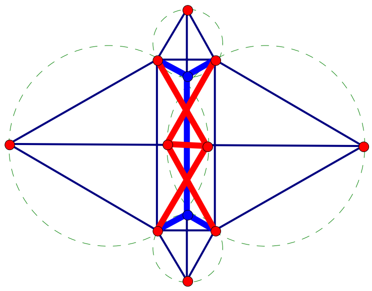


圖 24

(二).任意五邊形

以四邊形的方法，依史坦納點的位子，找出 18 種類型(圖３１~圖４８)

A.作法：

1. 挑一組不相鄰兩邊各往外做小正三角形
2. 將兩三角形頂點與沒做三角形的點(圖中 E 點)連線，以此兩線各往外做大正三角形
3. 將大正三角形頂點與對面小正三角形頂點相連如圖中紅線 L_1、L_2。

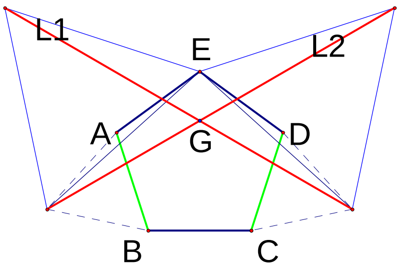


圖 25

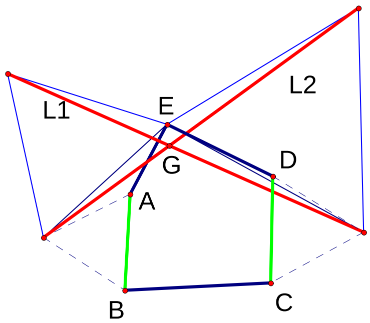


圖 26

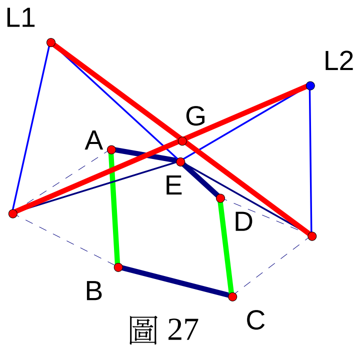


圖 27

B.定義類型

以(a，b，c)表 18 種類型其中一種

當 a＝ 1 ，L2 與 $\overline{AB}$ 相交(圖 25)

a＝ 1A ，L2 與 $\overline{AB}$ 不相交(圖 26)，L2 與 A 較接近

a＝ 1B ，L2 與 $\overline{AB}$ 不相交，L2 與 B 較接近

當 b＝ 2 ，L1 與 $\overline{CD}$ 相交(圖 25)

b＝ 2C ，L1 與 $\overline{CD}$ 不相交，L1 與 C 較接近

b＝ 2D ，L1 與 $\overline{CD}$ 不相交(圖 27)，L1 與 C 較接近

當 c＝ 3 ，L2 與 L1 之交點 G 在圖形外(圖 26)

c＝ 4 ，L2 與 L1 之交點 G 在圖形內(圖 27)

C.各類型圖示：以下各圖紅線極爲史坦納樹畫法

a. (1，2，3)： (圖 28)。

(1，2，4)：(圖 29)。

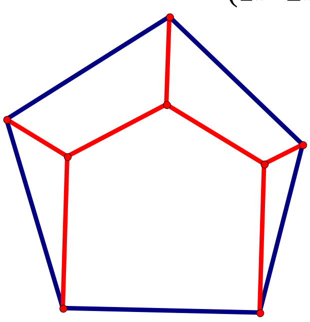


圖 28

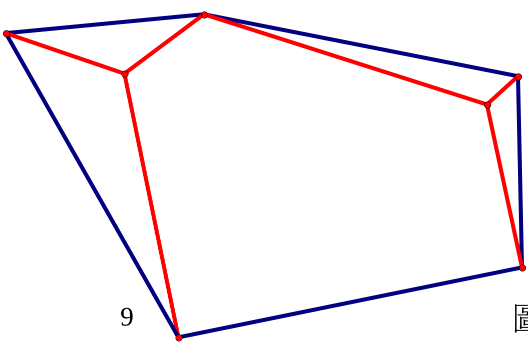


圖 29

b. 圖形分成四邊形圖形第一類加上一條最短的連線。

(1A，2，3)： (圖 30)。

(1B，2，3)： (圖 31)。

(1，2C，3)： (圖 32)。

(1，2D，3)： (圖 33)。

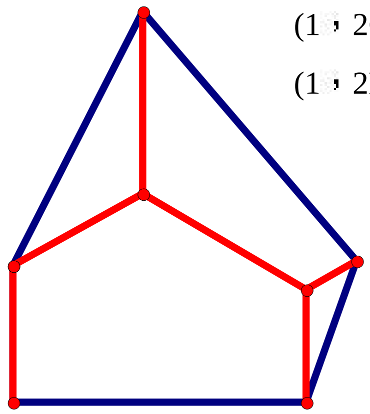


圖 30

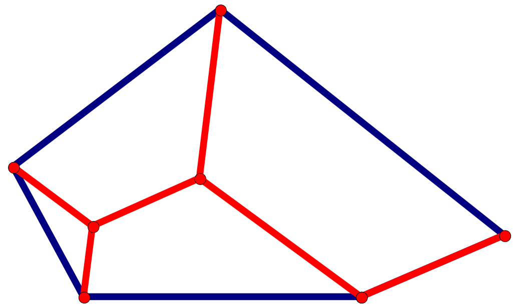


圖 32

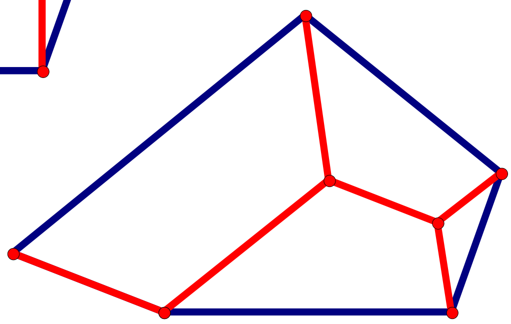


圖 31

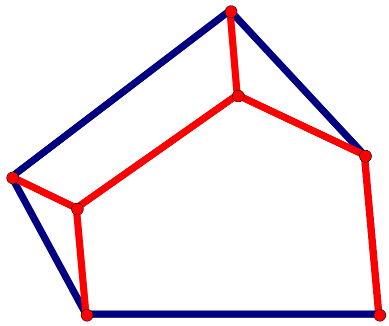


圖 33

c. 圖形分成四邊形圖形第二類加上一條最短的連線。

(1A，2，4)： (圖 34)。

(1B，2，4)： (圖 35)。

(1，2C，4)： (圖 36)。

(1，2D，4)： (圖 37)。

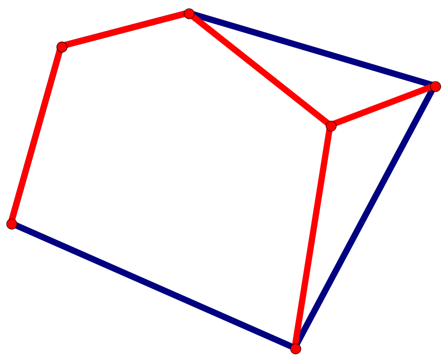


圖 34

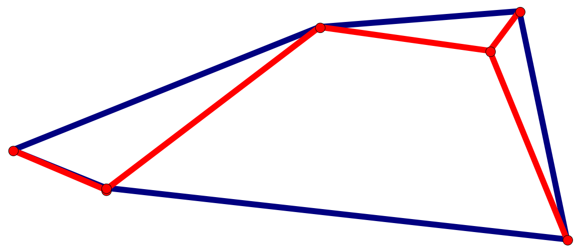


圖 35

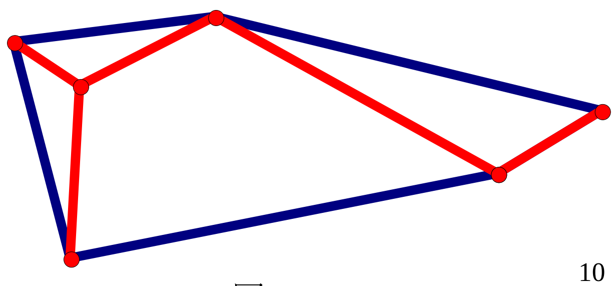


圖 36

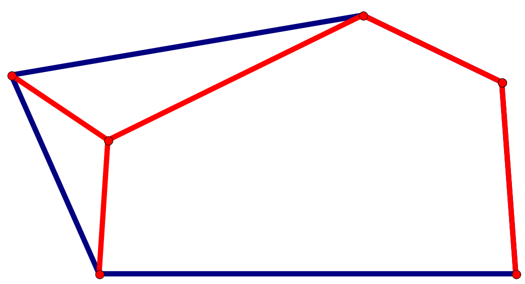


圖 37

d. 圖形分成一個三角形圖形加上 2 條最短的連線，此三角為小於 120° 三角形。

(1A，2D，3)：(圖 38)。

(1B，2D，3)：(圖 39)。

(1A，2C，3)：(圖 40)。

(1B，2C，3)：(圖 41)。

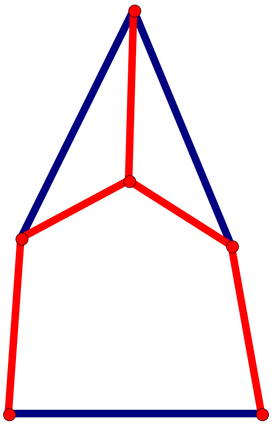


圖 38

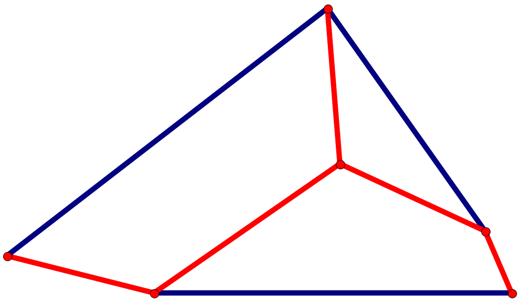


圖 39

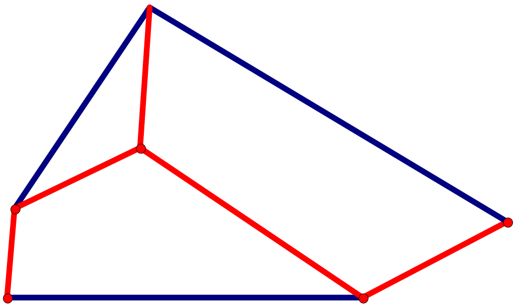


圖 40

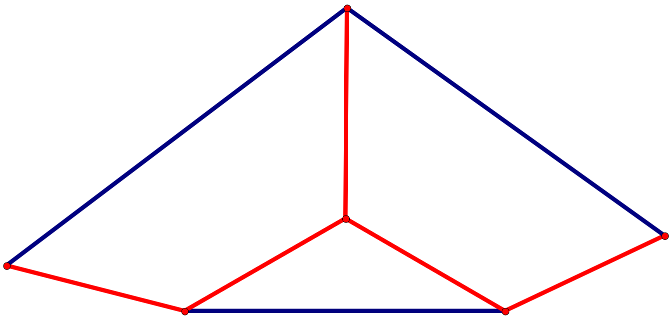


圖 41

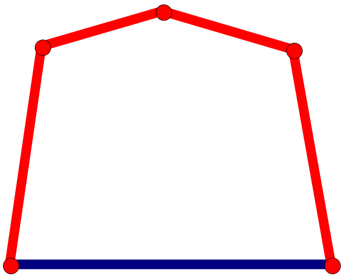
e. 圖形分成一個三角形圖形加上 2 條最短的連線，，此三角為大於 120° 三角形

(1A，2D，4)：(圖 42)。

(1B，2D，4)：(圖 43)。

(1A，2C，4)：(圖 44)。

(1B，2C，4)：(圖 45)。



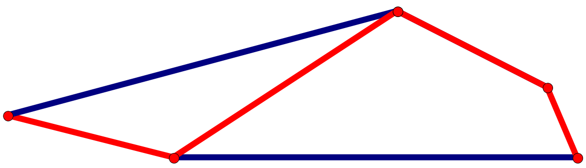


圖 43

圖 42

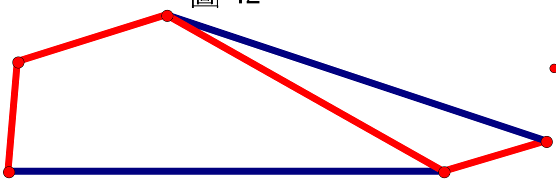


圖 44

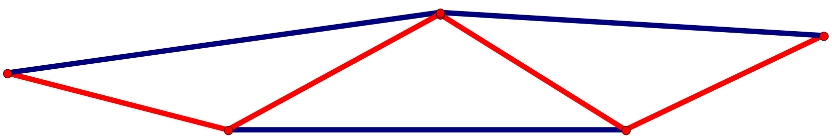


圖 45

五邊形(圖 46)的大正三角形(藍色)是由 2 小正三角形(深藍色)頂點(K、L)與剩餘那一點(E)形成三角形(△KLE)的邊長做出來的，大正三角形與對面小正三角形頂點相線會有兩條(L1、L2)。在證正五邊形已證出史坦納樹長度爲 L1、L2。五邊形可畫 5 組史坦納樹(圖 47)，有五條線，故比較何條最短，以何組做史坦納樹，即爲最短。

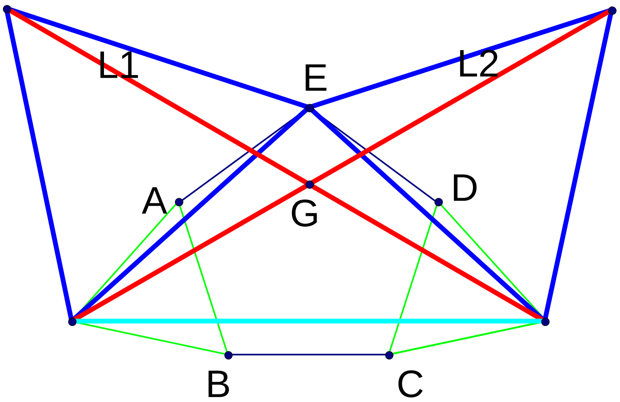


圖 46

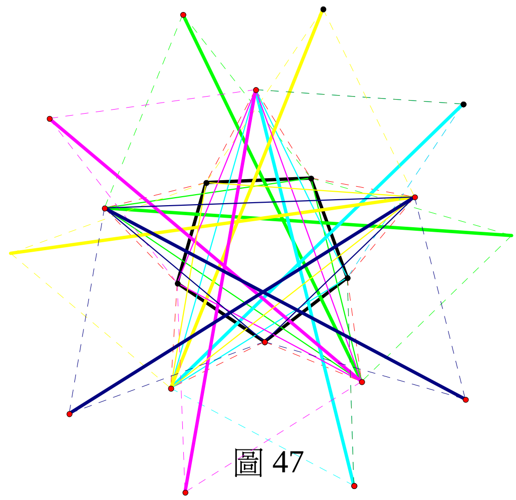


圖 47

(三).目前爲止的結論：

觀察所有的圖形，歸納出以下結論。

1.若樹上的點，只有一條線，則此點必爲圖形上的頂點。

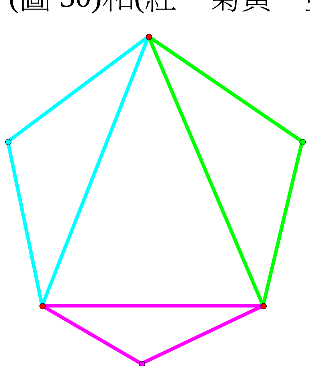
2.若樹上的點，只有兩條路，則此點必爲圖形上的頂點，且兩邊路線必夾≧120° 。

3.若樹上的點，有三條線，則此點必爲圖內外加史坦納點。三線互夾 120°

運用這些條件，觀察任意多邊是否爲最小。經此作圖法若發現不符合條件 2 修正畫法參件附錄

(四).任意六邊形：

發現正六邊形可分成三個三角形(圖 48)各作史坦納樹。把這方法用到任意六邊形去。六邊形可分成 2 組三角形群，每組各三個三角形，底邊頂點都相連，(綠、黃、粉紅)(圖 50)和(紅、菊黃、藍)(圖 49)。


經由 GSP 觀察出的做法
圖 48

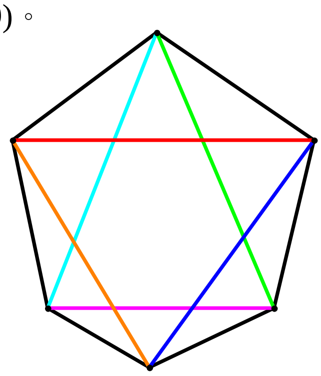


圖 49

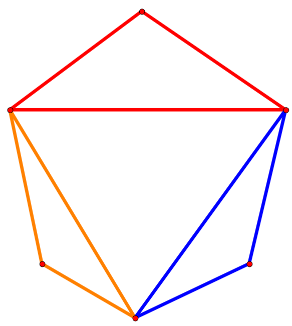


圖 50

將2組中三角形分別做史坦納樹(圖 52)圖 54 中紅色爲一組三角形的史坦納樹、圖 56 中淡藍色爲另一組三角形的史坦那樹(即圖形本身)。每組各自選最小2個史坦納樹相加，再把剩餘點挑最短邊連上。最後再把 2 組比較大小，較短即此圖史坦納樹。

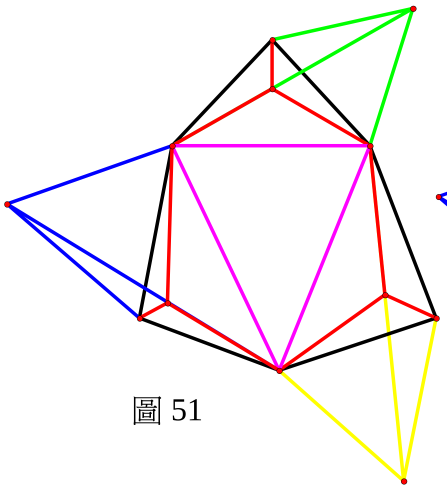


圖 51

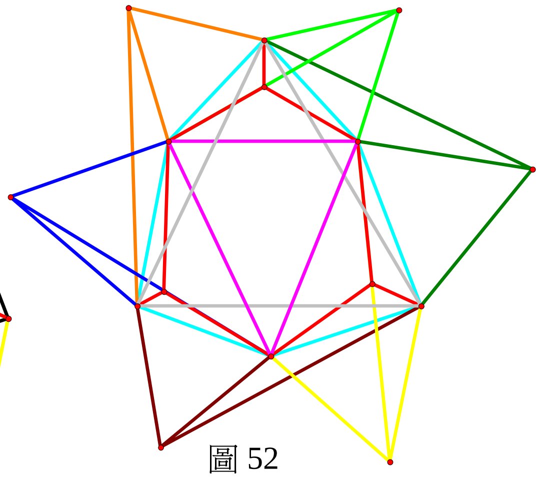


圖 52

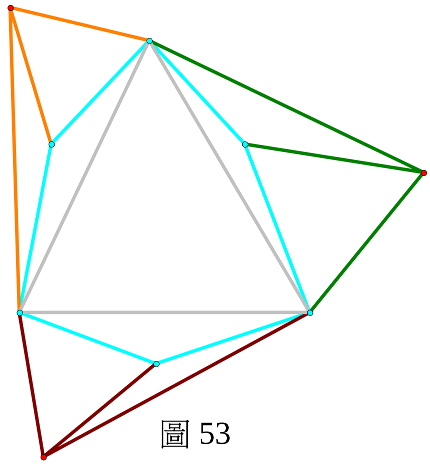


圖 53

(五).任意N邊形：

因爲正6邊形～正n邊形都是以最外圈爲史坦納樹。

又因爲任意六邊形以切三角形來做史坦納樹。

故猜想這原理可用到＞6邊形以上的圖形(7邊形(圖 54)、8邊形(圖 55))。

經 GSP 證實原理正確。整理出以下流程

1. a. n爲偶數：將圖切成許多底邊頂點相連三角形。可分成2組三角形群，每組各 N／2 個三角形。

   b. n爲奇數：除了最長邊，以外將圖切成許多底邊頂點相連三角形，除最長邊的兩點沒重疊。一圖會有(N－1)／2個三角形。

2. 兩組中的三角形各畫史坦納樹。

3. a.n 爲偶數：兩組各把最大史坦納樹的三角形除外其餘都相加。比較大小，最小的爲此圖史坦納樹。

   b.n 爲奇數：全部史坦納樹相加

4. 有無犯第2項。如有，將兩條線夾的角度小於 120° 所夾的那個點。將重複此點的三角形(即此點左右兩個三角形)上的頂點，共五點，當一個五邊形，做此五邊形的史坦納樹。

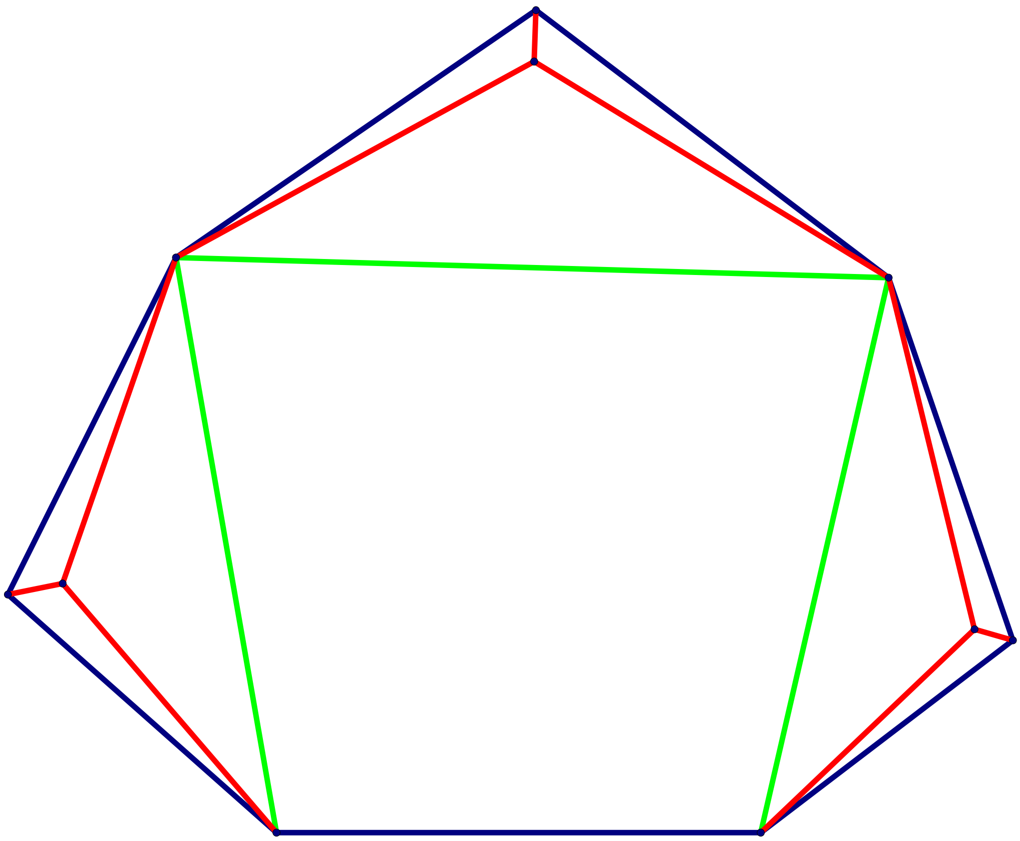


圖 54　七邊形

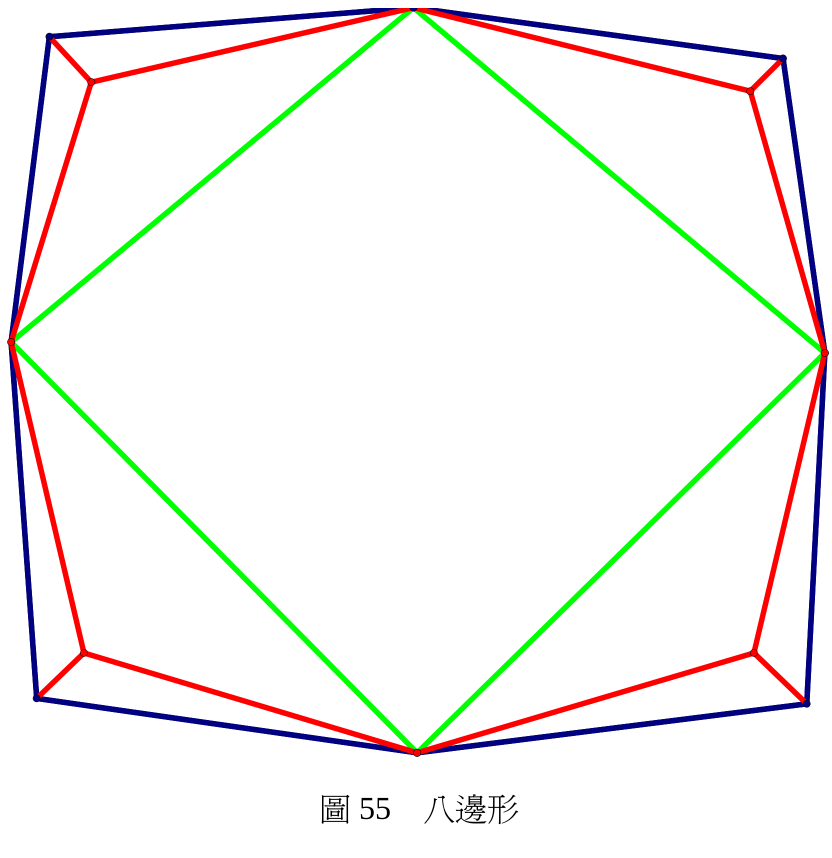


圖 55　 八邊形

二、立體

(一)正四面體畫法：

(１).將正四面體 ABCD 之一組對邊 $\overline{AB}$ 線段和 $\overline{CD}$ 線段各取中點 K、L 做 $\overline{KL}$ 線段，取此線段中點 O。

(２).做一通過 A、B、O、K 的平面，在平面上做一三角形△ABO，做此三角形費馬點 X，而此點必在 $\overline{KL}$ 線段上。(圖 56)

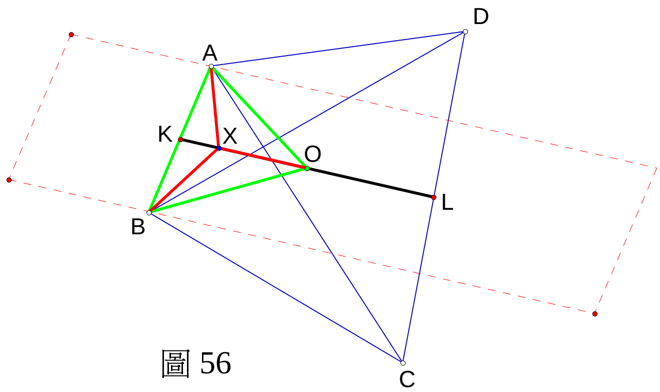


圖 56

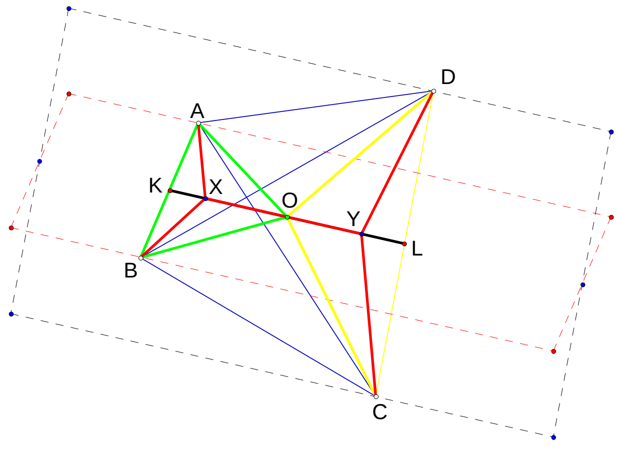


圖 57

(３).同理，做一另平面三角形△DCO，做一另費馬點 Y，此點也在 $\overline{KL}$ 線段。(圖 61)

(４).再回到立體的圖形上看，連接 $\overline{AX}$ 、$\overline{BX}$ 、$\overline{XO}$ 、$\overline{CY}$ 、$\overline{DY}$ ，此圖形為我們要的史坦納樹。(圖 58)

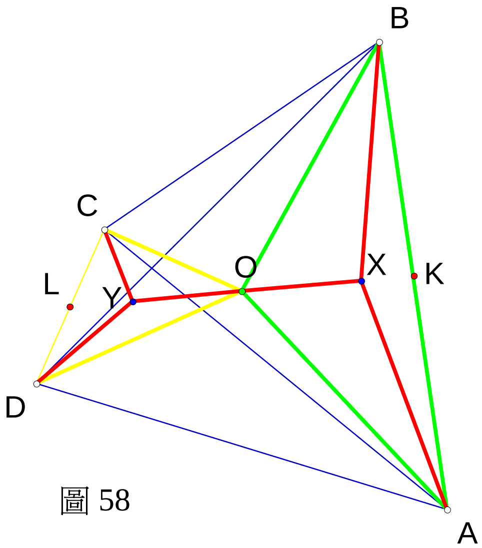


圖 58

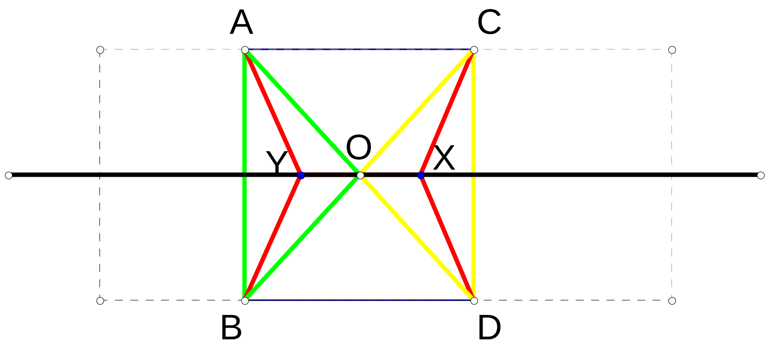


圖 59

(５).要證明其為最短，於是我們做一平面 R 通過 A，B，O，X，再做另一平面 P 通過 C，D，O，Y，以 $\overline{KL}$ 線段為轉軸將 R 平轉成與 P 平面重合，此時圖形視作一個長方形的史坦納樹，而且它做在短邊。(圖 57)

(二) 六面體正確畫法：

(六面體猜想於附錄)

(1).將正六面體 ABCD-EFGH 選出四組平行的邊 $\overline{AB}$ ，$\overline{CD}$ ，$\overline{EF}$ ，$\overline{GH}$ 。

(2).先做一平面 L 包含 $\overline{AB}$ 線段，然後在此平面上，以 $\overline{AB}$ 爲底做一 120° 等腰三角形 △ABW，在底線 $\overline{AB}$ 線段中點做一通過頂點 W 垂直射線。(圖 60)

(3).再以 $\overline{AB}$ 爲轉軸，轉此平面，則不管此平面怎麼轉，120° 等腰三角形△ABW，不會變且永遠在平面 L 上。(圖 61)

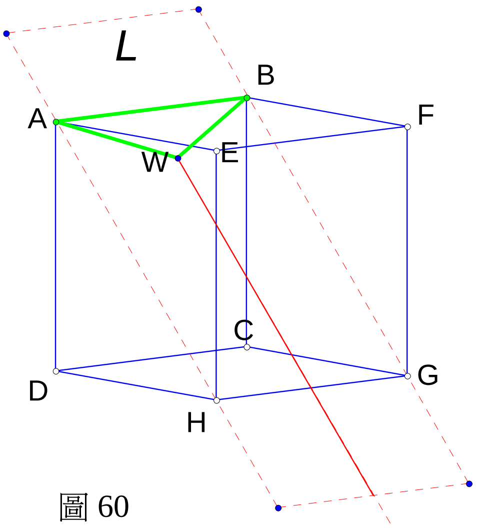


圖 60

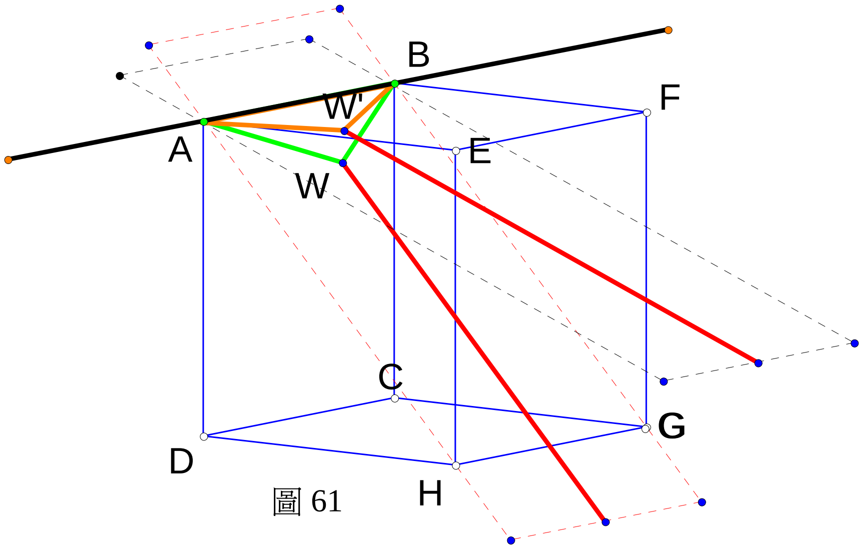


圖 61

(4).在另三邊做出三平面 PQR，P 平面包含 120° 等腰三角形△CDX，Q 平面 120° 等腰三角形△EFZ，R 平面 120° 等腰三角形△GHY。(圖 62)只做 2 面、(圖 63)做 4 面。

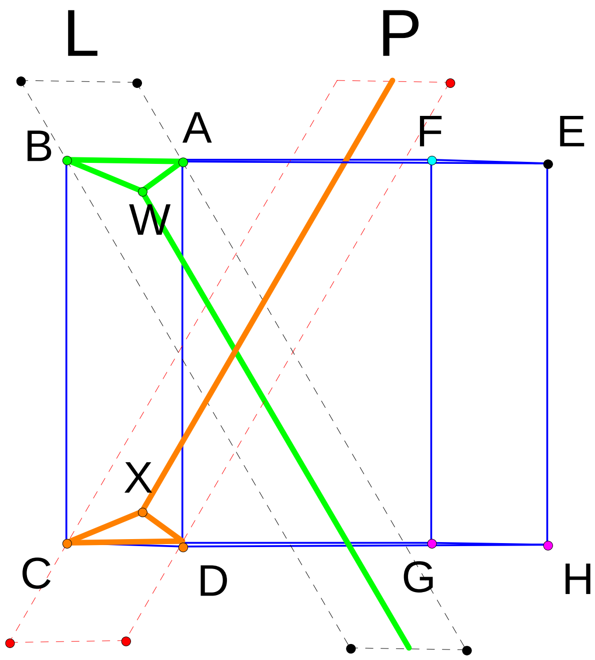


圖 62

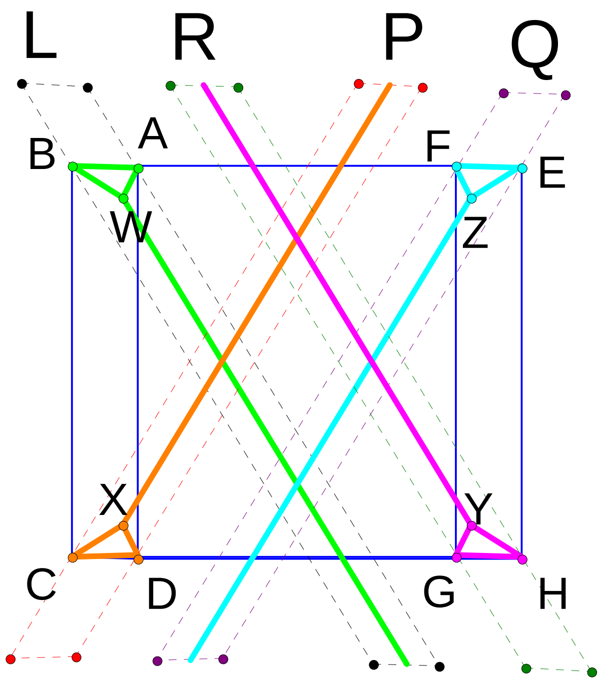


圖 63

(５).再回來看立體圖，在立體圖上找一面與 L 平面，P 平面，Q 平面，R 平面垂直的面 K 平面。看 K 平面，就為一正方形的圖，然後 L 平面，P 平面，Q 平面，R 平面因是從旁邊看，所以會看起來是一直線。所以轉動這些線。(圖 64)只做 2 面、(圖 65)做 4 面。

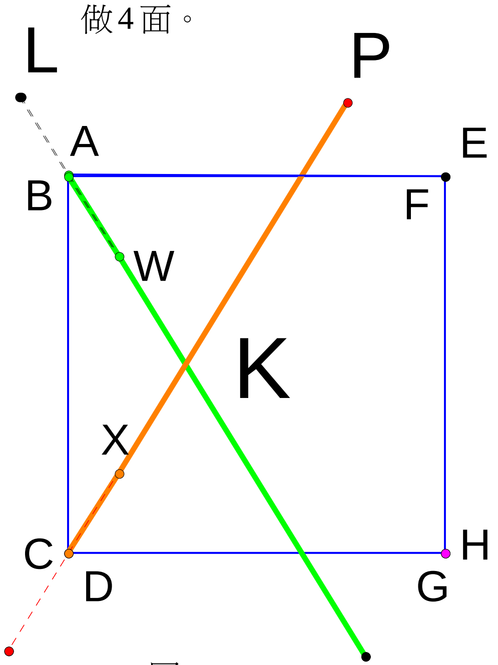


圖 64

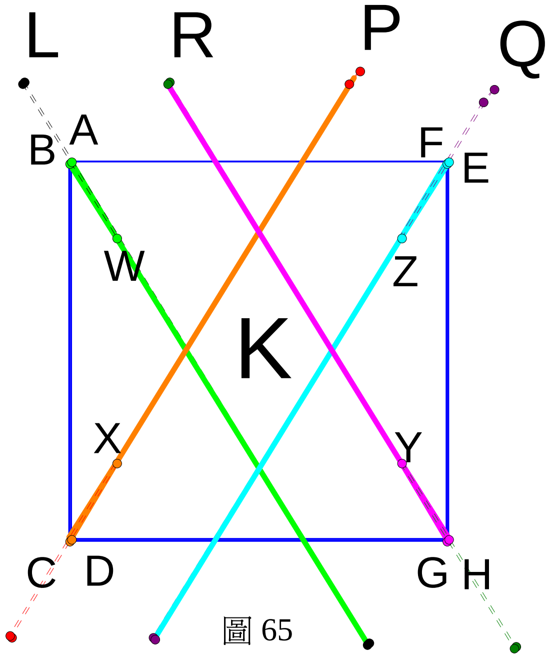


圖 65

(６). L 平面與 P 平面三角形上的射線會交一點 N，Q 平面與 R 平面也會交出點 M，做出正方形史坦納樹的樣子。(圖 66)

(７).W、X、Y、Z、N、M 即所謂的史坦納樹點，連接起來的圖即正六面體史坦納樹。(圖 67)

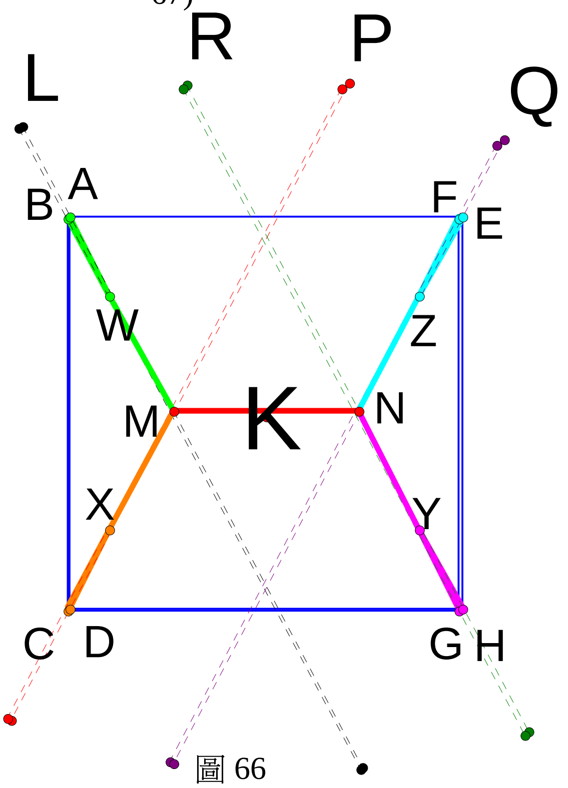


圖 66

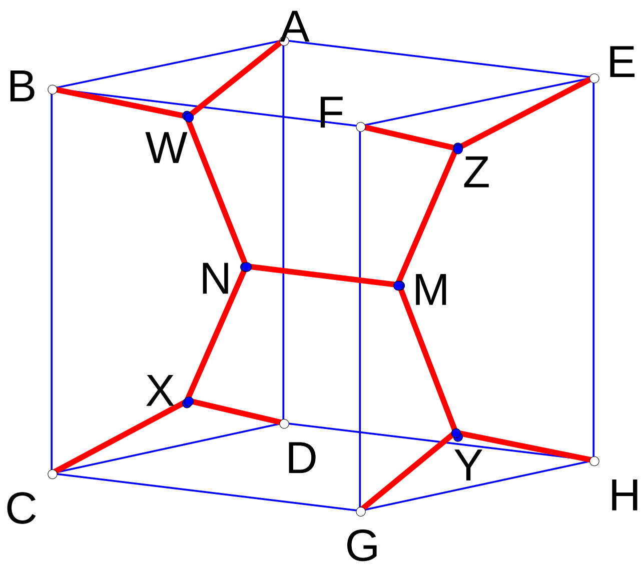


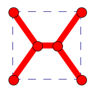
圖 67

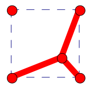
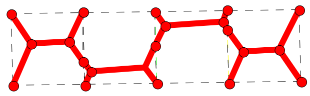
$$3\sqrt{3}a + a \approx 6.196a$$

三、大樹

(一)正方形大型史坦納樹

推想找出大型史坦納樹將排列眾多正方形的點連接起來，可應用在連接許多電晶體時節省線路成本。

定義:（兩點間距離為1） E=1  $X=1+\sqrt{3}=2.73205\cdots$

 $T=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1.93185\cdots$  L=8.34512⋯

E 為兩點間的距離
X 為正方形最短史坦納數
T 為正方形裡任三點所形的的三角形的史坦納數
L 為 2x5 個點形成的最短史坦納樹，連接方式相當特別

1.N×N ，$N=2^t$ 時的大樹：

正方形 X 是 2x2 個點的史坦納樹。設現有 n×n 個點，即(n-1) × (n-1)個正方形所排列(n≧2)。

例如:

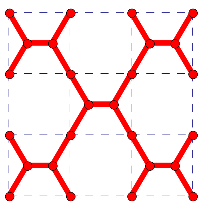
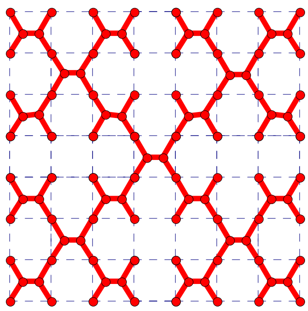


圖 68， n =4，4x4



而至於 n=8，8x8 的為中間一個 X 四周再加上 4 個 n=4 時的史坦納樹總長為 X+(5Xx4)=21X

圖 69

2^t-2^t 史坦納樹必全為 X 構成。畫法皆中心一個 X，四周各有一個 2^{t-1}-2^{t-1} 的大樹。大樹總長為 X+4(2^{t-1}-2^{t-1} 總長)。

例如：n=2→ X　　n=4 → 4X+X=5X

n=8→ 5X×4+X=21X　　n=16→ 21X×4+X=85X

2.N×N，$N\neq 2^t$ 大樹：

$n\neq 2^t$ 史坦納樹會因點數不同而有不同畫法。(圖在附錄)

分成四種：

(1) n mod 6 = 1、5 → XX+3 所構成，其中有 2^t 圖形

(2) n mod 6 = 2、4 → χX 構成，最後留下 2×5 個點，由 L 收尾，其中有 2^t 圖形

(3) n mod 6 = 3 → XX+2，2 爲開頭結尾各一條

(4) n mod 6 = 0 → χX 構成，最後留下三個點以 T 收尾

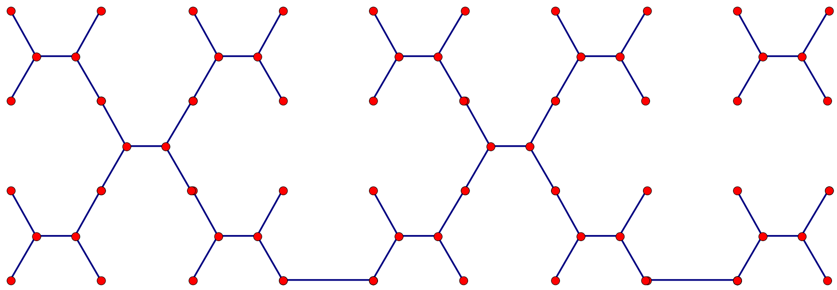
樹用帶狀圖形作曲折，再視情況加上不同的圖形。所謂帶狀，是由 3×n 個點，以 X 連接的形狀。除 n mod 6 = 2、4 之圖有二條帶狀，其餘皆爲一條。

※要 n≠2^t 時才成立

3. N×M，N≠M 大樹：

N×M，(N 爲寬度) 由許多小正方形構成大型長方形的史坦納樹，當 m 不同時需不同個數的 E 來連接 X。例子於附錄

例如：N=4



(L 圖形和帶狀圖形的討論於附錄)

(二)正六邊形大樹

每加一個六邊形可擦去一邊剩下的邊長和爲最短路徑，得到規律爲：所拼出圖形的(頂點數－1)即爲所求，至於擦邊的方法並無固定形式(由圖 70 圖 71 可知擦邊的形式不只一種)

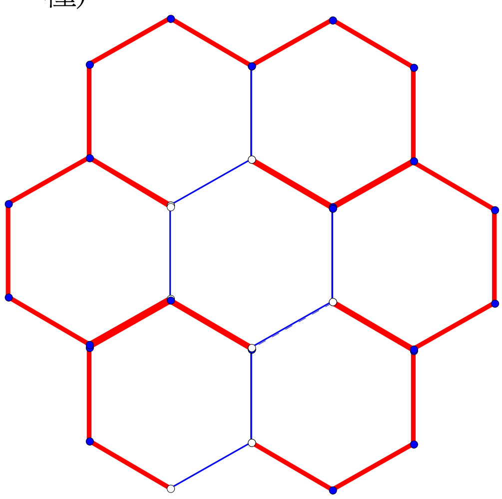


圖 70

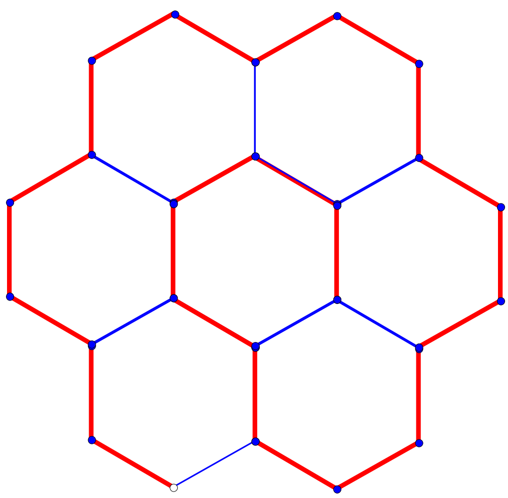


圖 71

四、垂直

因爲在電路板中，要做出交錯複雜的史坦納樹(夾角皆爲 120°　)的電線連接，不僅由於機械手臂在方向上的限制，而且技術上也很困難。

我們從不規則排列的圖形中，發現一些規則。這些史坦納樹有些可以在圖形中橫移，所以認爲應該有能直接算出總長度的方法。

(一) 三角形：

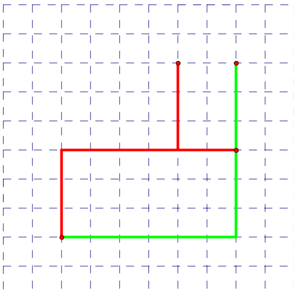


圖 72

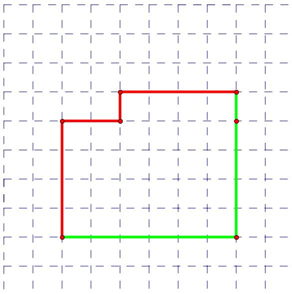


圖 73

圖中紅色線爲連接三個點的最短垂直史坦納樹，綠色則是將其圖形歸納以後的線段，不難發現，所有三個點的垂直史坦納圖形都是由 x 方向最長的距離和 y 軸方向最長的距離組成。

即令在座標點上：三個點(x1,y1)(x2,y2)(x3,y3)

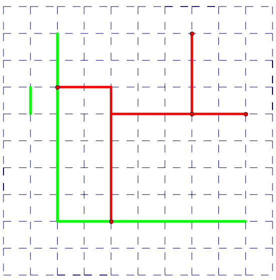
可以比較(x1.x2.x3)和(y1.y2.y3)中，每個差値的大小,就能夠計算總長度。

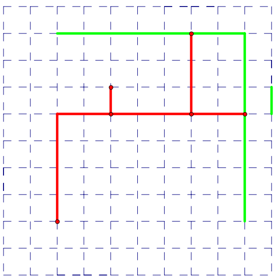
例如現有三個點(5.7)(6.2) (1.8)

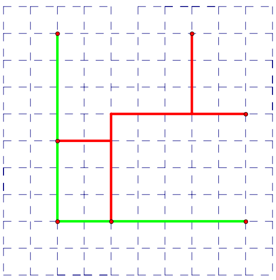
排列後(5.6.1)(7.2.8)　　(6-1)+(8-2)=11 即爲所求長度

現在以四邊形開始探討

(二) 四邊形







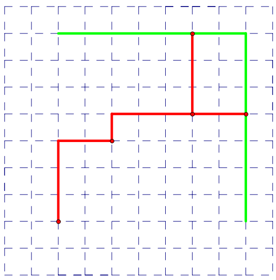


圖 74　　圖 75　　圖 76　　圖 77

圖 74 和圖 75，圖 76 和圖 77 我們分爲兩類，因爲平移以後除了 x . y 軸最遠的距離外，還會出一小段不在其規則內。

我們嘗試了很多種方法來區分這兩類的圖形，例如：角度，長度，是否有兩個以上的點在同一直線上…等。但是每個假設都不盡理想，總是在檢查時出現一些特例來推翻假設，直到單獨討論凸四邊形的時候，有一個猜想竟成立了，以兩條對角線交點當成原點，若是將四個點分在兩個象限(一.三)或(二.四)，就能做出長度和三角形畫法雷同的垂直史坦納樹。

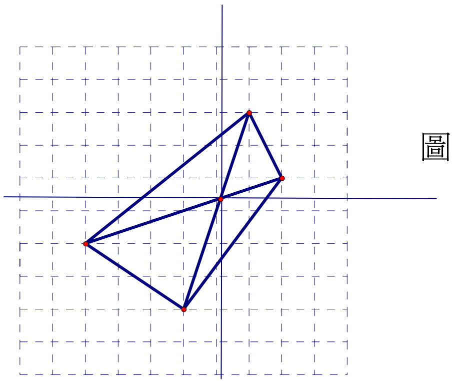


圖 78

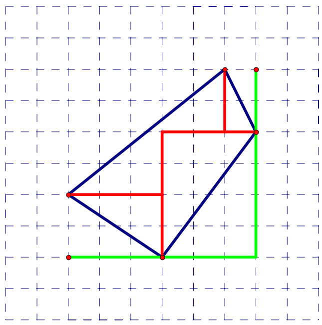


圖 79

我們觀察其規則，這類的四邊形的共同特徵：對角線斜率同號

至於其他對角線斜率異號的圖形，就無法把其畫出的史坦納樹整理成兩個軸上的最長距離，還會出現一個短邊，我們稱之爲重複邊：

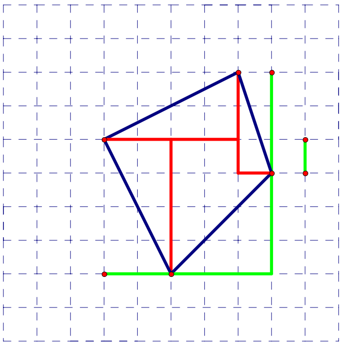


圖 80

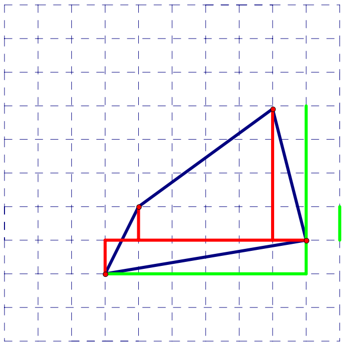


圖 81

至於短邊就是後期的研究重點，第一步驟由比較法來決定兩個方向的最長邊，第二步驟就是要判斷重複邊的長度了，需由對角線上來判定需要重複的邊。

第一步驟：先以斜率判斷有無重複邊

第二步驟：以對角線兩端點分別作長方形如圖 83 所示

第三步驟：依照三角形作圖法，取出橫向和縱向的最長邊後，再加上重疊長方形上的寬得到總長度 6+5+1=12。

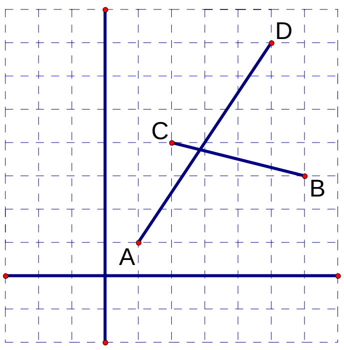


圖 82

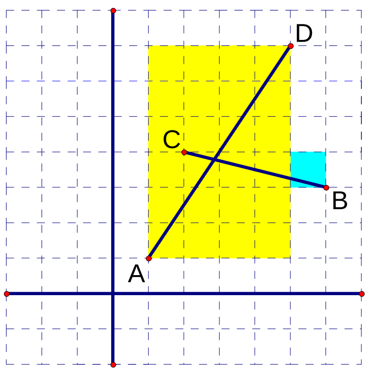


圖 83

至於作圖，判斷上由於上圖重複邊1爲點 B.C 所成，作圖時只需先連 BC，其餘點再直接連上即可(圖 84 中紅線)

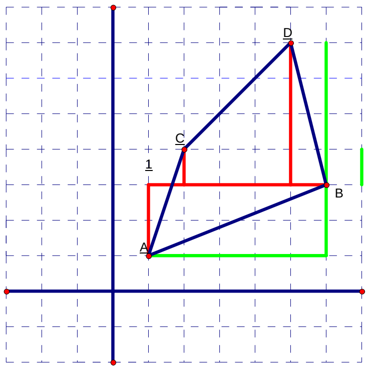


圖 84

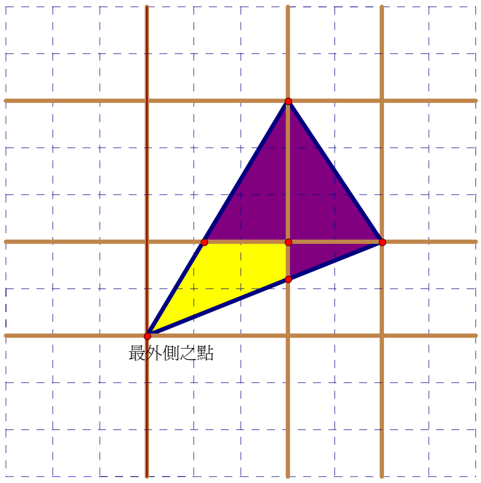


圖 85

(三)凹四邊形：

將凹四邊形看成在三角形內部，再加一點。因位置關係，可分四部分。垂直座標系中的三角形，一定能找出一點以上的點，居於圖形的最外側，即同時在橫向和縱向上的最遠點，若任意抓兩點作對角線依上述作圖，可以發現若第四個點出現在黃色區塊，又與最外側點當成一雙對角時，能夠做出兩個完全不相交的長方形。若已知圖形第四點在其他區域時，也需要判斷重複邊來決定其線段大小。

(四)凸五邊形

我們以凸五邊形最爲我們研究五個點的樣本

同樣的，用對角線的方式先檢查有無對角線，因爲一個五邊形總共有五條對角線，我們發現:

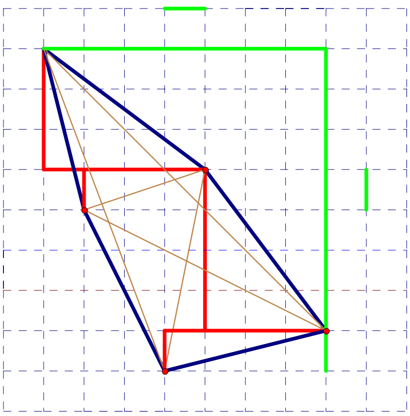
若對角線斜率正負號的比率爲3：2或是2：3會出現兩條重複邊，而且這種類型的圖形在隨機的凸五邊形中，出現的比率最高。如例一

若是對角線斜率正負號的比率爲4：1或是1：4會出現一條重複邊。如例二

若是對角線斜率全爲例2：斜率正，或是全爲負，將圖形畫出後會和三角形類似，不會有重複邊的情況發生。如例三

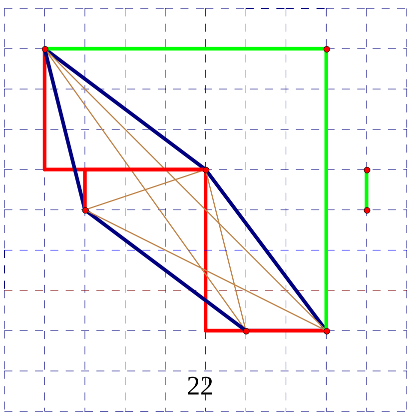
例一：斜率三負二正

總長度爲 8+7+1+1＝17



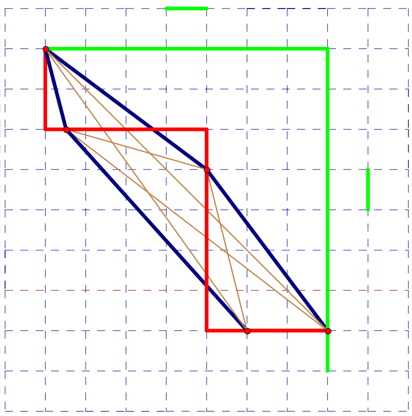
例二：斜率四負一正

總長度爲 7+7+1＝15



例三:斜率均爲負值

總長度爲 7+7＝14



依照假設和觀察驗算歸納出：
凸 N 邊形其最大重複邊線段個數爲 (N-1) /2
設對角線斜率正號 n 個負號 m 個
若 n>m 則重複邊長爲 m 段
若 n<m 則重複邊長爲 n 段
若是斜率有∞or0 則不列入 n 和 m 的計算
若是圖形爲凹多邊形，取確定重複邊和判定長度時
依照三角形內部再多做一點的方法作圖。
根據重複邊長的規則，作圖時宜以最外側點開始作圖。
隨著 N 越來越大時，
長度得應重複邊長排序後取最小值

陸、結果與討論

我們已發現了平面上任意圖形的畫法，立體上的正四面體和正六面體的畫法和垂直史坦納樹，和平面上規則晶格的大樹畫法。並歸納出其特性

1. 一般書上都不難看到正三角形(費馬點)和正方形，以及網路上找到正五邊形的畫法，正 N 邊形只要 N≧6，史坦納樹的做法爲沿著邊長做出不封閉均連接的圖形。
2. 任意四邊型和五邊形用普通畫法，依史坦納點的位置，四邊形可分成４種畫法，五邊可分成１８種畫法。各有挑最短的方法。
3. 在平面上，若樹上的點，只有兩條路，則此點必爲圖形上的頂點，且兩邊路線必夾大於等於 120°。若樹上的點，有三條路線，則此點必爲圖形內外加的史坦納樹點。三線互夾 120°。此可幫助判斷是否最短。
4. 任意 n 邊形(N≧6)，將圖切成許多底邊頂點重疊的三角形。
   n 爲奇：除最長邊，其餘都切，共(N－１)／2 個，各作史坦納樹，相加即此圖史坦納樹。
   n 爲偶：可切成２組各 N／2 個，兩組三角形各作史坦納樹，各組除了最大三角，其餘相加，再以最短線連剩餘點，比較兩組，最短即是。
5. 立體上，我們理用了空間翻轉的概念，與平面上所知的規則結合，四面體即是很好的例子
6. 平面晶格做出史坦那大樹時，主要利用到小的基礎史坦納樹拼湊而成。
7. 正六邊形蜂巢上大樹沿著邊長走，ｎ個點邊長ａ圖形長度爲(ｎ－１)ａ
8. 垂直中出發點以連接電路爲主，所以作圖上不全然要以最短爲主，但力求精簡

將所發現的結論彙整後在日常生活上的應用例子如下：

在平面史坦納樹上，假設在地圖上有四所學校，他們要再各校間建立起一個光纖網路，又由於光纖線的成本非常高，所以必須盡可能縮短架設的網路線總長，但又因架設的路線受到道路的影響，所以必須沿著馬路走，而道路又多成垂直，必須以互相垂直之史坦納樹畫法加以連接即可求得最短路徑。再舉個例，若在整個工廠的生產線上，有若

干個部門，則各個部門之間，要如何以輸送帶來連接才可以得到最低成本以及最短路徑？這時便可將其轉換爲史坦納樹問題。

因在電路板中，如果要做出交錯複雜的史坦納樹(夾角皆爲 120°)的電線連接，不僅由於機械手臂在方向上的限制，而且技術上也很困難。所以就要用到垂直史坦納樹的技術。

柒、結論:

這次研究目標是找出方法能使平面(空間)中的點能夠有效的連接起來，雖然在任意 n 邊形還沒有快速判斷法，做出最短需要一點時間，未來將改進方法加快作圖速度。

尋找日常中的史坦納樹：在我們應用史坦納樹的同時，應先探討自然中的最短連接路徑，目前我們已知能夠用在大廈配管線，電路板，運輸站等等。而由於生物的演化論，也相信在生物體中的血管神經中多多少少存在著史坦納樹，運送到各個組織器官的總線路最短，不僅能使輸送時間縮短，也能節省構成循環系統的養分及能量。

捌、參考資料

1. 打開魔術箱
   Martin Gardner 著　遠流出版事業股份有限公司 出版發行
2. 高中數學實驗教材
   高中數學實驗教材小組 著　　國立編譯館 出版發行
3. 五邊形證法↓鳳山高中科展
   http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040407.pdf
4. F.R.K. Chung and R.L. Graham 1976〈Steiner trees for ladders〉
5. Michael Herring 2004〈The Euclidean Steiner Tree Problem〉

評　　語

040405　史坦納樹

1. 優點：以數學遊戲為出發點，探討把握科學精神。

2. 最短路徑問題的完整解答十分的困難，一般人都依照 Polya 原則「尚未解決一難題以前，先尋找一個簡單一點的問題來解決」來處理。本作品亦不例外。當然，科展的教育價值在於引發學生對於研究的熱誠及興趣。我們由作者的表現可以看出本作品符合此教育理念。

3. 作者曾經花功夫來收集參考資料。