中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040403

千刀萬剮

學校名稱： 國立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 王廣煜 高二 陳晉偉 高二 王凱生	陳明仁

關 鍵 詞：正多邊形、圓錐曲線、球體

千刀萬剮

壹、摘　　要：n 個正多邊形最多可將一個平面切成幾塊?

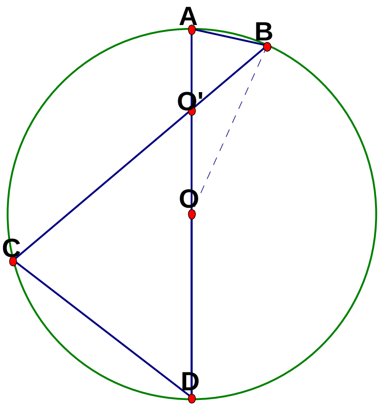
貳、研究動機：常常在數學競賽中，會看到這種題目：「n 條直線最多可將一個平面切成幾個部分？」一般的人遇到這種類型的題目常要思考一下子，才能想出它的規律，所以我們針對這個主題做研究。

參、研究目的：尋求各類不同圖形對平面切割所產生的區塊規律性。

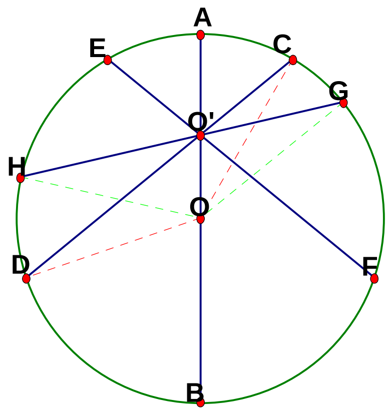
肆、研究設備：電腦(GSP、CABRI)、紙、筆

伍、研究內容：

一、圓內接之同類圖形：



圖(1)



圖(2)

引理(一)：以非圓心為支點旋轉的弦，與支點的距離較短者旋轉的弧度，比與支點的距離較長者旋轉的弧度為小，即 $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB}$。

證　明：$\overset{\frown}{CD} = \angle COD > \angle CO'D = \angle AO'B > \angle AOB = \overset{\frown}{AB}$。

引理(二)：通過圓內非圓心的點之弦，只有與之互相對稱的弦會跟它相等。

證　明：

由引理(一)可知:圖(2)中 $\because \overline{CO'} \neq \overline{O'D} \therefore \overset{\frown}{CG} \neq \overset{\frown}{DH}$

則 $\angle COG \neq \angle DOH \Rightarrow \angle COD = \angle DOH + \angle COH \neq \angle COG + \angle COH = \angle GOH$

故根據樞鈕定理得知 $\therefore \overline{GH} \neq \overline{CD}$

性質(一)：若為 n 個正多邊形互相疊合，則其邊與邊的交點不會有重複。

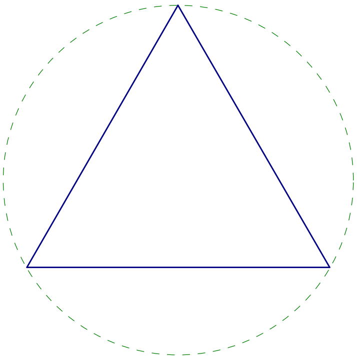
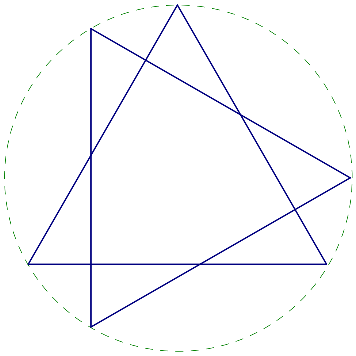
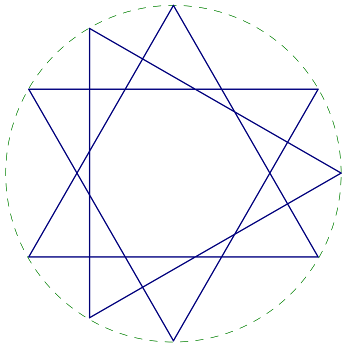
證　明：由引理二得知通過圓內非圓心的點之所有弦只有互相對稱的兩條相等

$\therefore$ 正多邊形之兩邊交點不會有第三個相同的弦通過

$\therefore$ 正多邊形之邊與邊的交點不會有重複。

結論：以性質一的方式來切割，可得最多區塊。

(一).圓內接三角形：

1 圓內接一個三角形　　2 圓內接兩個三角形　　3 圓內接三個三角形

推測：

n代表三角形的數目,M代表區塊的最多數目

$n=1 \to \mathrm{M}=2, n=2 \to \mathrm{M}=8, n=3 \to \mathrm{M}=20, n=4 \to \mathrm{M}=38, n=5 \to \mathrm{M}=62$

由上面可得知:$a_n = a_{n-1} + 6(n-1)$,n ≥ 2,$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 6$

$a_3 = a_2 + 12$

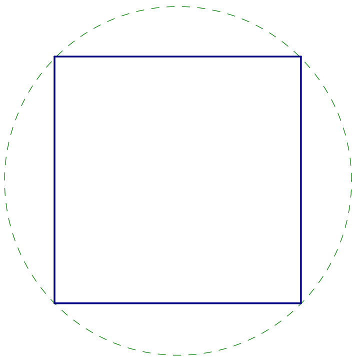
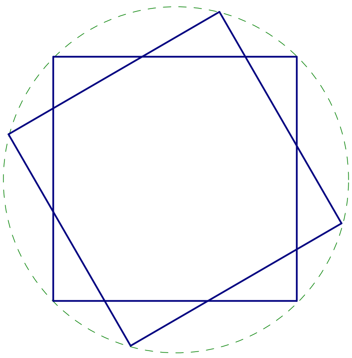
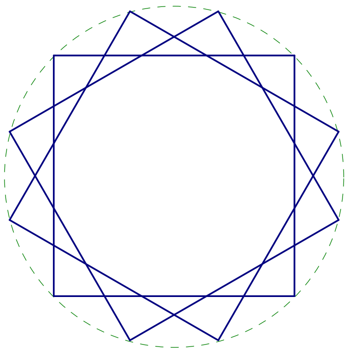
$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + 6(n-1)$

將上列式子相加可得:

$a_n = a_1 + 6(1+2+3+\cdots+(n-1)) = 2 + 3n(n-1)(n \geq 2)$

(二).圓內接正方形：

1 圓內接一個正方形　　2 圓內接兩個正方形　　3 圓內接三個正方形

推測：

n代表正方形的數目,M代表區塊的最多數目

$n=1 \to \mathrm{M}=2, n=2 \to \mathrm{M}=10, n=3 \to \mathrm{M}=26, n=4 \to \mathrm{M}=50, n=5 \to M=82$

由上面可得知:$a_n = a_{n-1} + 2*4(n-1)$,n ≥ 2,$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 8$

$a_3 = a_2 + 16$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + 8(n-1)$

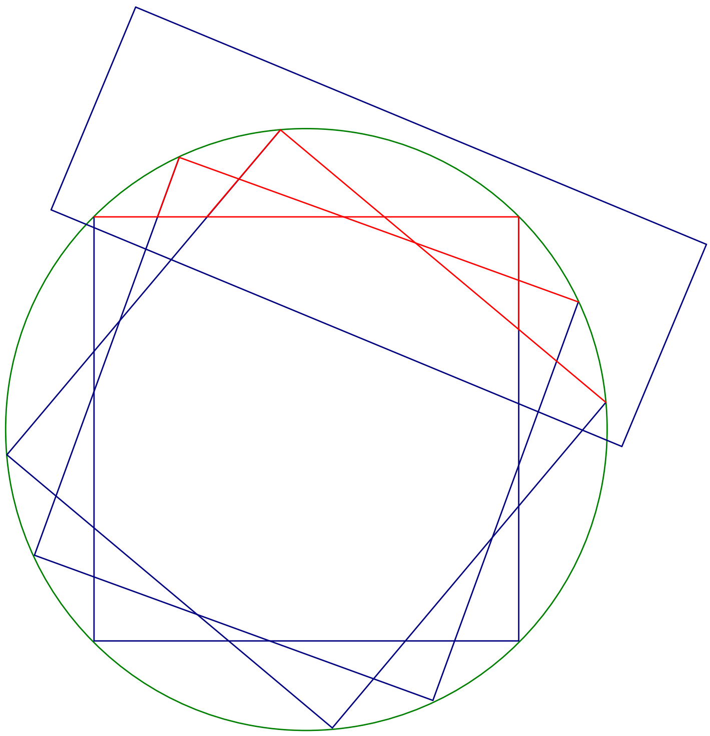
將上列式子相加可得:$a_n = a_1 + 8(1+2+3+\cdots+(n-1)) = 2 + 4n(n-1)(n \geq 2)$

(三).歸納：正α邊形有 m 個，則最多可將依平面切成α m(m-1)+2 個區塊。

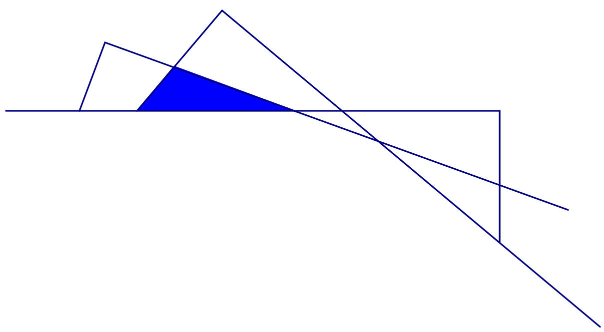
(四).證明：

1 圓內接三個正方形：

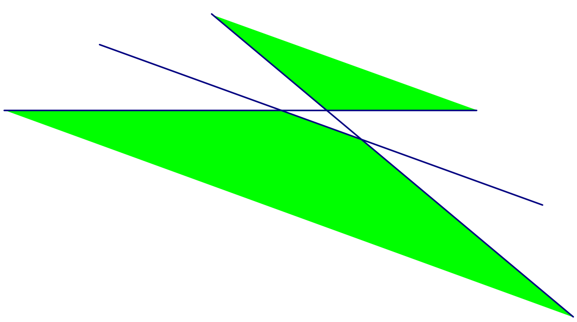
圖(3)



圖(4)是由圖(3)的紅色線段抽出的放大圖



圖(5)是三條直線在平面上切割的情形

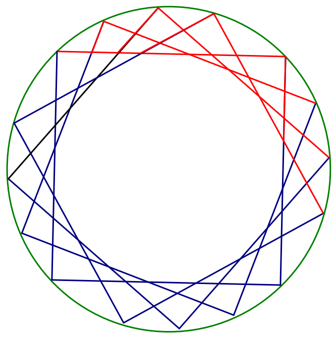


由圖(5)得知三條直線最多可將平面切成$\frac{(n-1)\times n}{2}+1=\frac{3\times 4}{2}+1$區塊

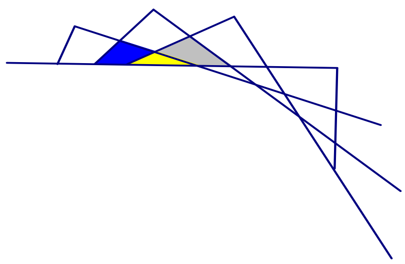
圖(4)比圖(5)多出藍色區塊,少綠色區塊$\therefore$多1-2=-1個區塊

2 圓內接四個正方形：

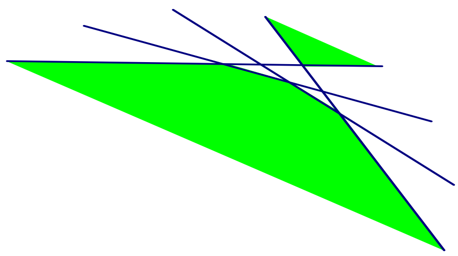
圖(6)



圖(7)是由圖(6)的紅色線段抽出的放大圖



圖(8)是四條直線在平面上切割的情形



由圖(8)得知四條直線最多可將平面切成$\frac{4\times 5}{2}+1$區塊

圖(7)比圖(8)多出藍色.黃色.灰色區塊,少綠色區塊$\therefore$多1+2-2=1個區塊

3 推論：設 m 代表有 m 個相同的正α多邊形，M 爲正α多邊形其中一邊長所分割的最多平面比 m 條直線所分割的最多區塊多出的部分：

當 m=3 時，M=1(藍色)-2(綠色)

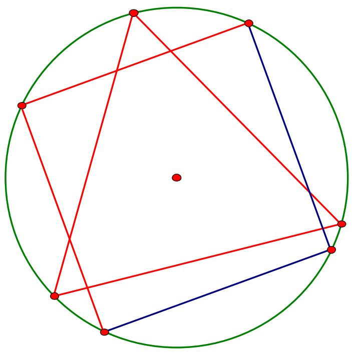
當 m=4 時，M=1(藍色)+2(黃色.灰色)-2(綠色)

4 規律：正α多邊形疊 m 個，其中一邊長所分割的最多平面比 m 條直線所分割的最多區塊多出的部分爲 1+2+3+……+m-2 再加 2 $\longrightarrow$ (m-1)(m-2)/2 再減 2，又 m 條直線分割的最多區塊爲 m(m+1)/2 再加 1 所以其中一邊長所分割的最多區塊爲 (m-1)(m-2)/2 –2+m(m+1)/2 +1 = m(m-1)

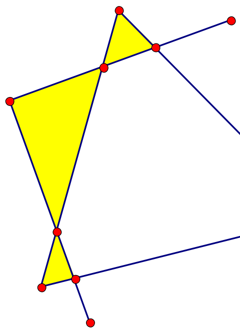
5 結論：正α邊形其中一邊長最多可將一個平面分成 m(m-1)區塊，有α個邊，所以爲 αm(m-1)，又還有內外的部分，所以再加 2 $\longrightarrow$ αm(m-1)+2，故得証。

二、平面上兩種不同圖形之疊合：

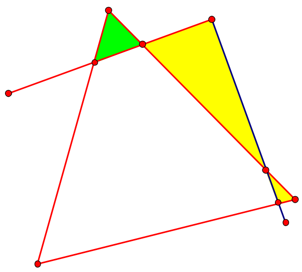
1.圖(9)爲三角形及四邊形



圖(10)是由圖(9)的紅色線段抽出的放大圖



圖(11)爲圖(9)的右半部



2.結論：當正α邊形有 m 個，正β邊形有 n 個($\beta > \alpha$)則最多將平面切成

αm(m-1)+βn(n-1)+2αｍｎ+2 個區塊。

3.證明：當多邊形重疊時正m多邊形其中一邊多出來的平面爲圖(10)的黃色區塊

∵　有α個邊，所以爲３α，但當算其右半邊時會重複圖(11)的綠色部分

∵有α個邊，所以會重複α個

∴總共有３α－α＝２α個

故每個正α多邊形可使每個正β多邊形切出２α個平面，n 個正β多邊形共可被切出２αｎ個

∴當正α邊形有 m 個的時候被共切出 2+２αｍｎ個平面

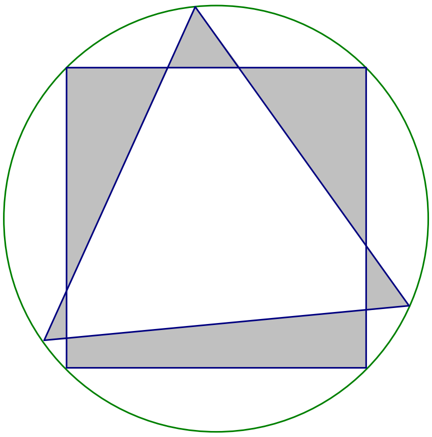
又 m 個正α多邊形可自己截出 2+αm(m-1)，n 個正β邊形可自己截出 2+βn(n-1)，2 爲內外的部分

∴３個式子相加，２不必重複加

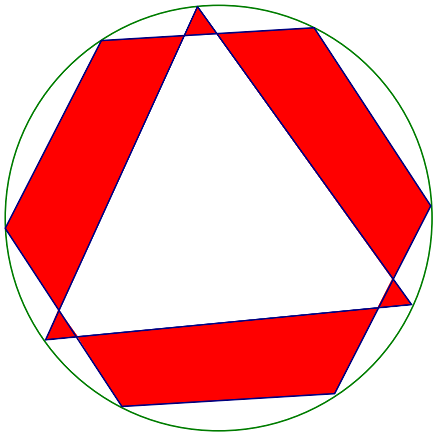
∴2+αm(m-1)+βn(n-1)+2αｍｎ，故得証。

三、平面上三個圖形之疊合：

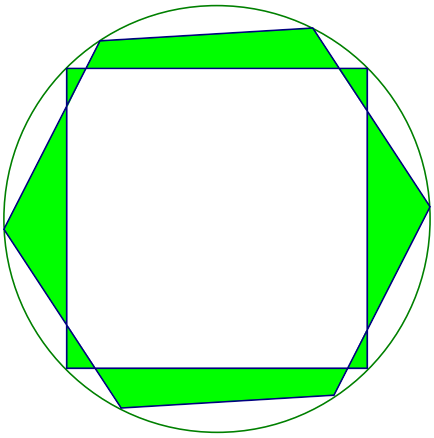
1.



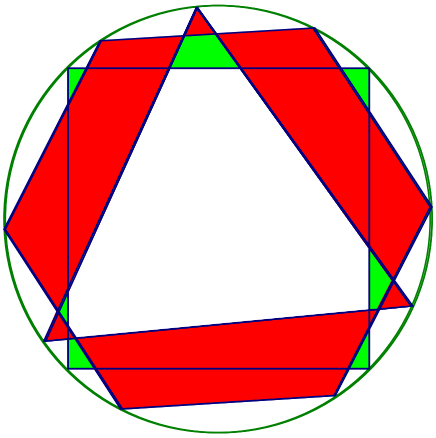
圖(12)



圖(13)



圖(14)



圖(15)

2.結論：

設正α邊形.正β邊形.正γ邊形之個數各有m.n.k個($\alpha<\beta<\gamma$)

則其切割區塊數量爲$2+\alpha m(m-1)+\beta n(n-1)+\gamma k(k-1)+2\alpha mn+2\alpha mk+2\beta nk$

3.證明：由圖(12)及二的結論可知

當正三角形與正四邊形個數均爲 1 時，其區塊=2x3x1x1=6

同理圖(13)的區塊=2x3x1x1=6

同理圖(14)的區塊=2x4x1x1=8

∵做法上不使其邊重合

∴圖(12)(13)(14)不會有全等的切割圖形

又重疊時不會有重疊的區塊

∴重疊時各自的區塊不會消失

∴區塊總數量$=2+\alpha m(m-1)+\beta n(n-1)+\gamma k(k-1)+2\alpha mn+2\alpha mk+2\beta nk$，故得証

四、平面上 h 個圖形的之疊合：

性質(二)：若正α邊形有１個，正β邊形有１個，$\beta>\alpha$，將其疊合，則可切割最多區塊為$2+2\alpha$。

證　明：若正α邊形有１個，正β邊形有１個，若以正β邊形而言，其每一邊將會與正α邊形有２個交點，故將其疊合會有2α個交點，則會多出2α個平面。

性質(三)：若正α邊形有m個，正β邊形有ｎ個將正α邊形與正β邊形疊合，$\beta>\alpha$，則根據性質二可知會有$2\alpha mn$個交點，故最多可多出$2+2\alpha mn$個區塊。

證　明：若正α邊形有m個為$k_1.k_2\ldots\ldots k_m$，正β邊形有ｎ個$h_1.h_2\ldots\ldots h_n$，則k_1與h_1會有2α個交點，k_2與h_2有α個交點・・・・・・則將其疊合會有$2\alpha mn$個交點，故最多可多出$2\alpha mn$個平面。

1.結論：

若有n_1個正α_1邊形,n_2個正α_2邊形$\cdots$ n_h個正α_h邊形,且$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h$

則最多可將平面切割的區塊數量為

$$
\begin{aligned}
M &= 2+\alpha_1 n_1(n_1-1)+\alpha_2 n_2(n_2-1)+\cdots+\alpha_h n_h(n_h-1)\\
&\quad +2\alpha_1 n_1(n_2+n_3+\cdots n_h)+2\alpha_2 n_2(n_3+n_4+\cdots n_h)+\cdots+2\alpha_{h-1}n_{h-1}n_h\\
&= 2+\sum_{i=1}^{h}\alpha_i n_i(n_i-1)+2\times\sum_{j=1}^{h-1}[\alpha_j n_j(\sum_{i=j+1}^{h}n_i)]
\end{aligned}
$$

2.證明：根據性質(三)，當正α_1邊形有n_1個.正α_2邊形有n_2個・・・正α_h有n_h個，

$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h$

，將其兩兩比較：

當α_1為最小邊的情況：$2\alpha_1 n_1 n_2+2\alpha_1 n_1 n_3+2\alpha_1 n_1 n_4+\cdots+2\alpha_1 n_1 n_h$

$=2\alpha_1 n_1(n_2+n_3+n_4+\cdots+n_h)$

當α_2為最小邊的情況：$2\alpha_2 n_2 n_3+2\alpha_2 n_2 n_4+2\alpha_2 n_2 n_5+\cdots+2\alpha_2 n_2 n_h$

$=2\alpha_2 n_2(n_3+n_4+n_5+\cdots+n_h)$

$\vdots$

當α_{h-1}為最小邊的情況：$2\alpha_{h-1}n_{h-1}n_h$

將上列的式子相加可得$2\alpha_1 n_1(n_2+n_3+\cdots n_h)+2\alpha_2 n_2(n_3+n_4+\cdots n_h)+\cdots+2\alpha_{h-1}n_{h-1}n_h$

又各自可切出$2+\alpha_1 n_1(n_1-1)+\alpha_2 n_2(n_2-1)+\cdots+\alpha_h n_h(n_h-1)$

則將上列兩式相加可得$2\alpha_1 n_1(n_2+n_3+\cdots n_h)+2\alpha_2 n_2(n_3+n_4+\cdots n_h)+\cdots+2\alpha_{h-1}n_{h-1}n_h$

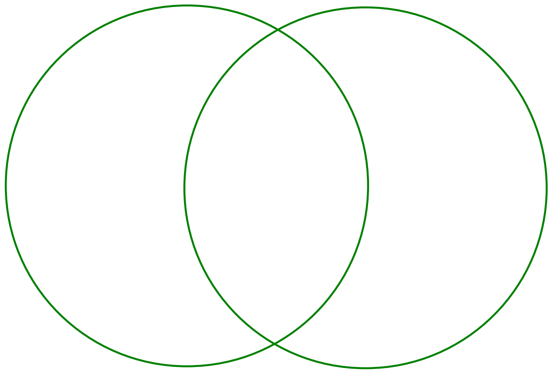
$+2+\alpha_1 n_1(n_1-1)+\alpha_2 n_2(n_2-1)+\cdots+\alpha_h n_h(n_h-1)$

公式：$M=2+\sum_{i=1}^{h}\alpha_i n_i(n_i-1)+2\times\sum_{j=1}^{h-1}[\alpha_j n_j(\sum_{i=j+1}^{h}n_i)]$

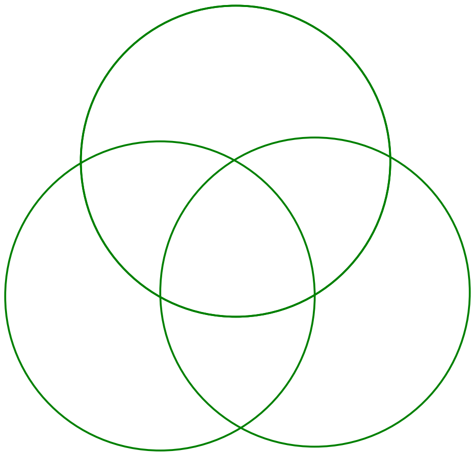
五、圓錐曲線：

(一).圓形：

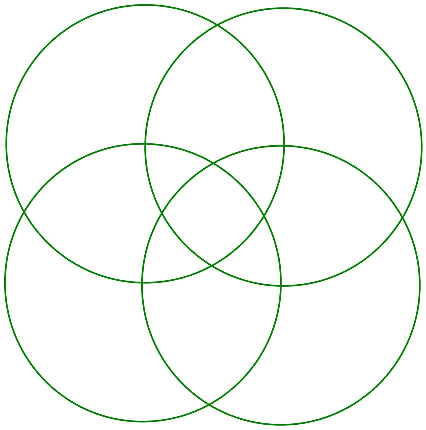
圖(15)兩個圓形：



圖(16)三個圓形：



圖(17)四個圓形：



1.作法：假設要做 x 個圓的重疊圖形，則先畫出一個正 x 邊形，取其頂點圓心，其半徑要不等於其正 x 邊形外接圓半徑，也要大於其正 x 多邊形邊長的一半畫出 x 個圓，即爲其圖形。

2.推測：

x代表圓的數目,M代表區塊的最多數目

$x=1\rightarrow M=2, x=2\rightarrow M=4, x=3\rightarrow M=8, x=4\rightarrow M=14, x=5\rightarrow M=22$

由上面可得知:$a_x=a_{x-1}+2(x-1) \quad x\geq 2 \quad a_1=2$

$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+4$

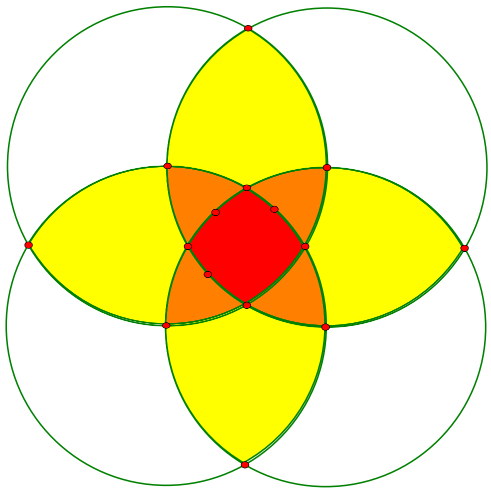
$\vdots$

$a_x=a_{x-1}+2(x-1)$

將上列式子相加可得:

$a_x=a_1+2(1+2+3+\cdots+(x-1))=2+x(x-1) \quad (x\geq 2)$

3.結論：當同大小的圓形有 x 個的時候，其總區塊=2+x(x-1)



4.想法：

如圖,設從左上方順時真依序爲$a_1.a_2.a_3.a_4$

紅色區塊爲四個連續的圓重疊的區塊=1

橘色區塊爲三個連續的圓重疊的區塊=4$((a_1.a_2.a_3),(a_2.a_3.a_4),(a_3.a_4.a_1),(a_4.a_1.a_2))$

黃色區塊爲二個連續的圓重疊的區塊=4$((a_1.a_2),(a_2.a_3),(a_3.a_4),(a_4.a_1))$

剩下的區塊爲一個圓單獨所截的區塊=4

圖形外面的區塊=1

$\therefore$ 總區塊=1+4+4+4+1=2+4$\times$3

$\therefore$ 當有x個圓時

x個連續的圓所重疊的區塊=1

x-1個連續的圓所重疊的區塊=x

$((a_1.a_2.a_3\ldots a_{x-1}),(a_2.a_3a_4\ldots a_x),(a_3.a_4\ldots a_x.a_1)\ldots(a_xa_1.a_2\ldots a_{x-2}))$

x-2個連續的圓所重疊的區塊=x

$((a_1.a_2.a_3\ldots a_{x-2}),(a_2.a_3a_4\ldots a_{x-1}),(a_3.a_4\ldots a_{x-1}.a_x)\ldots(a_xa_1.a_2\ldots a_{x-3}))$

$\vdots$

1個單獨的圓所截出的區塊=x

圖形外的區塊=1

$\therefore$ 總區塊=1+(x+$\cdots$+x)(x-1個)+1=2+x(x-1)

5.證明：內外兩區塊=2

x 個圓任取 2 個圓的方法= C_2^x ，又兩兩圓之間最多 2 個交點，所以多 $2\times C_2^x$ 個區塊。

$\therefore$ 總區塊=2+ $C_2^x\times 2$=2+x(x-1)

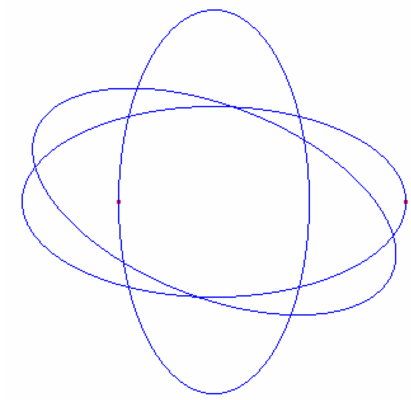
(二).橢圓：

y 個橢圓最多可將平面分割成多少個區塊?

y代表橢圓的數目,M代表區塊的最多數目

$y=1\rightarrow \mathrm{M}=2, y=2\rightarrow \mathrm{M}=6, y=3\rightarrow \mathrm{M}=14, y=4\rightarrow \mathrm{M}=26, y=5\rightarrow \mathrm{M}=42$

1.推測：



$$
\begin{aligned}
a_y &= 2+4+8+12+16+......+4(y-1)\\
&= 2+4\left[1+2+3+.....+(y-1)\right]\\
&= 2+4\frac{y(y-1)}{2}\\
&= 2+2y(y-1)
\end{aligned}
$$

2.證明：兩橢圓之間，每多一個交點(不可相切)，會多一個區塊，兩橢圓最多 4 個交點，因此多出 4 個區塊。

$$\therefore a_y = a_{y-1}+4(y-1)$$

$$\therefore a_1 = 2$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1+4(2-1)\\
a_3 &= a_2+4(3-1)\\
a_4 &= a_3+4(4-1)\\
&\vdots\\
a_y &= a_{y-1}+4(y-1)
\end{aligned}
$$

相加得 $a_y = 2+4+8+......+4(y-1) = 2y(y-1)+2$

故得証

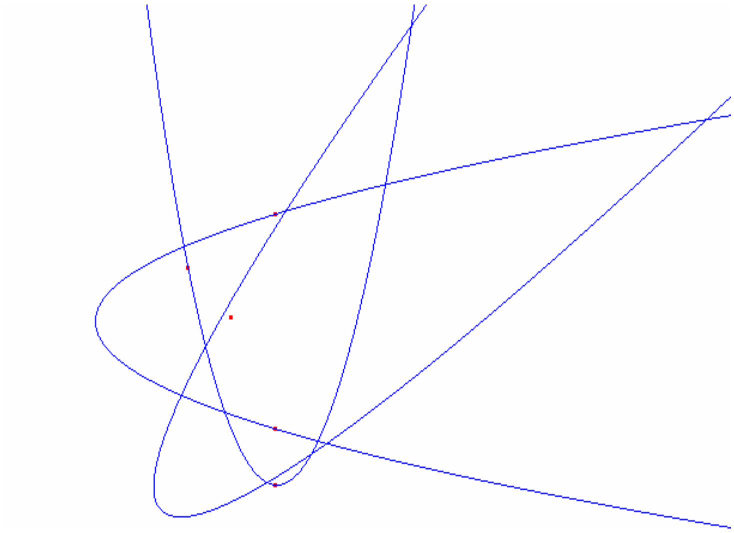
(三).拋物線：

z 個拋物線最多可將平面分割成多少個區塊?

z代表拋物線的數目,M代表區塊的最多數目

$z=1\rightarrow \mathrm{M}=2, z=2\rightarrow \mathrm{M}=7, z=3\rightarrow \mathrm{M}=16, z=4\rightarrow \mathrm{M}=29, z=5\rightarrow \mathrm{M}=46$

1.推測：



$$\begin{aligned} a_z &= 2+5+9+13+17+\ldots\ldots \\ &= 2+\frac{(z-1)\left[2\times 5+4(z-2)\right]}{2} \\ &= 2+(z-1)(2z+1) \\ &= 2z^2-z+1 \end{aligned}$$

2.證明：兩拋物線之間，每多一個交點(不可相切)，會多一個區塊，兩拋物線最多 4 個交點，因此多出 4 個區塊，但拋物線可無限延伸，因此每多一個拋物線會再多一個區塊。

$$\begin{aligned} &\therefore a_z = a_{z-1}+4(z-1)+1 \\ &\therefore a_1 = 2 \\ &a_2 = a_1+4(2-1)+1 \\ &a_3 = a_2+4(3-1)+1 \\ &a_4 = a_3+4(4-1)+1 \\ &\quad\vdots \\ &a_z = a_{z-1}+4(z-1)+1 \end{aligned}$$

相加得$a_z = 2+4+8+\ldots\ldots+4(z-1)+(z-1) = 2+2z(z-1)+z-1 = 2z^2-z+1$

故得証

(四).雙曲線：

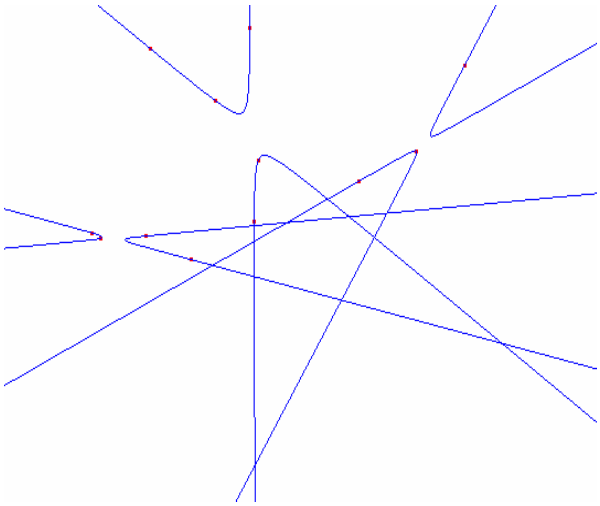
d 個雙曲線最多可將平面分割成多少個區塊?

d代表雙曲線的數目,M代表區塊的最多數目

$d=1\rightarrow \mathrm{M}=3, d=2\rightarrow \mathrm{M}=9, d=3\rightarrow \mathrm{M}=19, d=4\rightarrow \mathrm{M}=33, d=5\rightarrow \mathrm{M}=51$

1.推測：

$$
\begin{aligned}
a_d &= 4\times[1+2+3+4+5+6+......+(d-1)]+2d+1 \\
&=1+\frac{d(d-1)}{2}\times 4+2d \\
&=1+2d^2-2d+2d \\
&=1+2d^2
\end{aligned}
$$



2.證明：兩雙曲線之間，每多一個交點(不可相切)，會多一個區塊，兩雙曲線最多 4 個交點，因此多出 4 個區塊，但雙曲線可無線延伸，又還有另 1 個分支，因此每多一個雙曲線會多兩個區塊。

$$
\begin{aligned}
&\therefore a_d = a_{d-1}+4(d-1)+1+1 \\
&\therefore a_1 = 3 \\
&a_2 = a_1+4(2-1)+1+1 \\
&a_3 = a_2+4(3-1)+1+1 \\
&a_4 = a_3+4(4-1)+1+1 \\
&\quad\vdots \\
&a_d = a_{d-1}+4(d-1)+1+1
\end{aligned}
$$

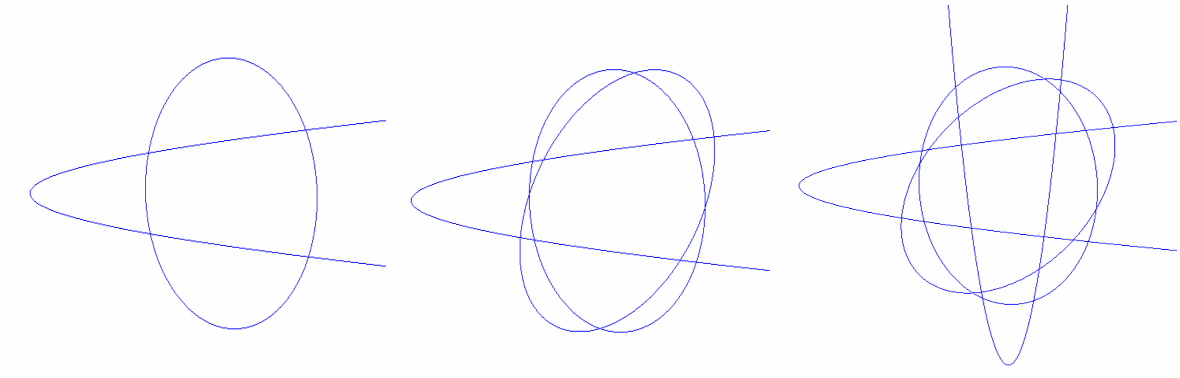
相加得$a_d = 3+4+8+......+4(d-1)+(d-1)+(d-1) = 3+2d(d-1)+2(d-1) = 2d^2+1$

故得証

六、圓錐曲線的疊合：

(一)拋物線和橢圓的疊合：z 個拋物線跟 y 個橢圓最多可切出幾個區塊?

1.



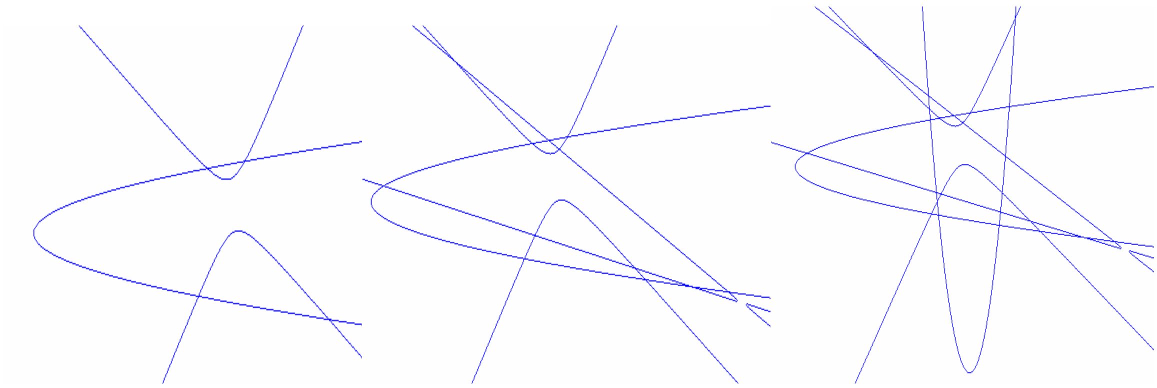
圖(1)為 1 拋物線及 1 橢圓　圖(2)為 1 拋物線及 2 橢圓　圖(3)為 2 拋物線及 2 橢圓

2.結論：當拋物線有 z 個，橢圓有 y 個，則最多將平面切成 2+(z-1)(2z+1)+2y(y-1)+4yz 個區塊。

3.證明：當拋物線跟橢圓疊合時，除了各自截出的區塊，最多會有 4 個交點，會多 4 個區塊，而當有 z 個拋物線 y 個橢圓時，每個拋物線和每個橢圓最多都有 4 個交點，最多多出 4yz 個區塊。

(二)拋物線和雙曲線的疊合：z 個拋物線跟 d 個雙曲線最多可切出幾個區塊?

1.



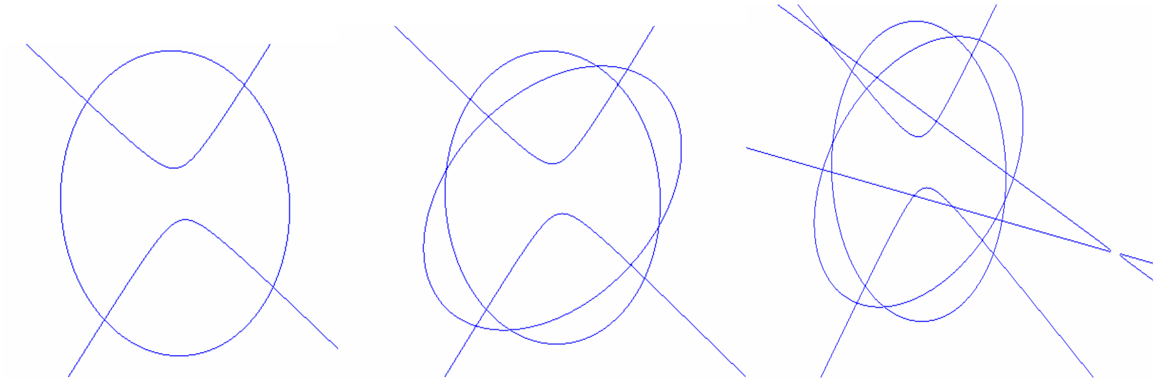
圖(1)為 1 拋物線及 1 雙曲線　圖(2)為 1 拋物線及 2 雙曲線　圖(3)為 2 拋物線及 2 雙曲線

2.結論：當拋物線有 z 個，雙曲線有 d 個，則最多將平面切成 $2+(z-1)(2z+1)+2d^2+4dz$ 個區塊。

3.證明：當拋物線跟雙曲線疊合時，除了各自截出的區塊，最多會有 4 個交點，會多 4 個區塊，而當有 z 個拋物線 d 個雙曲線時，每個拋物線和每個雙曲線最多都有 4 個交點，最多多出 4dz 個區塊。

(三)雙曲線和橢圓的疊合：d 個雙曲線跟 y 個橢圓最多可切出幾個區塊?

1.



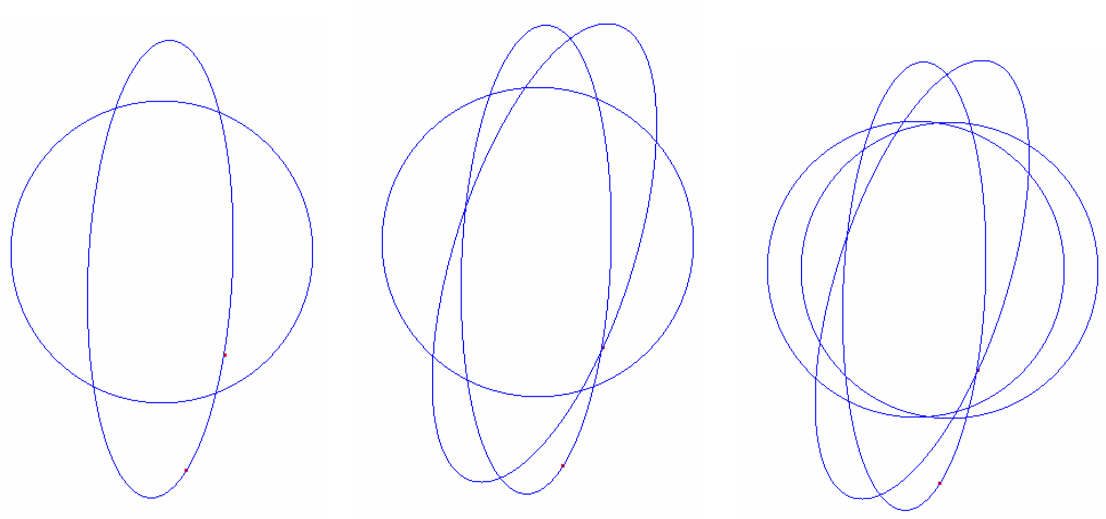
圖(1)爲 1 雙曲線及 1 橢圓　圖(2)爲 1 雙曲線及 2 橢圓　圖(3)爲 2 雙曲線及 2 橢圓

2.結論：當雙曲線有 d 個，橢圓有 y 個，則最多將平面切成 $1+2d^2+2y(y-1)+4dy$ 個區塊。

3.證明：當雙曲線跟橢圓疊合時，除了各自截出的區塊，最多會有 4 個交點，會多 4 個區塊，而當有 d 個雙曲線 y 個橢圓時，每個雙曲線和每個橢圓最多都有 4 個交點，最多多出 4dy 個區塊。

(四)橢圓和圓的疊合：y 個橢圓跟 x 個圓最多可切出幾個區塊?

1.



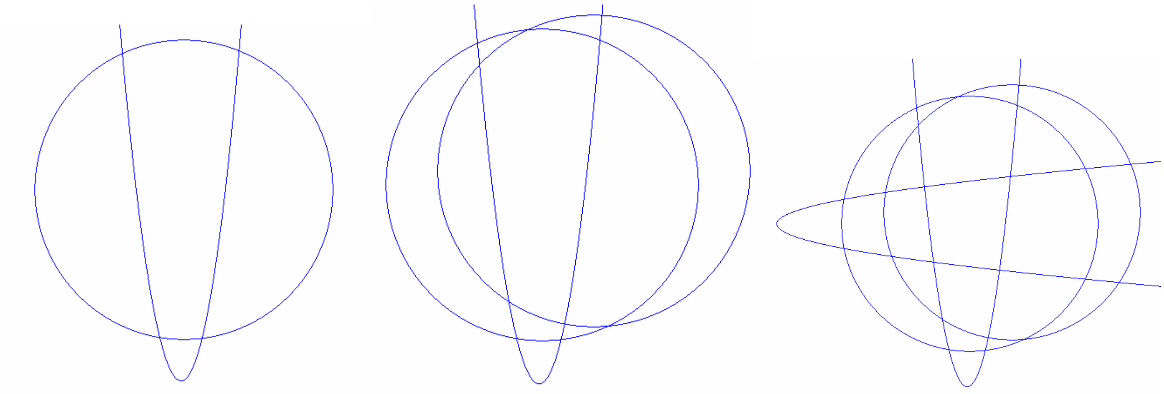
圖(1)爲 1 圓及 1 橢圓　圖(2)爲 1 圓及 2 橢圓　圖(3)爲 2 圓及 2 橢圓

2.結論：當橢圓有 y 個，圓有 x 個，則最多將平面切成 $2+x(x-1)+2y(y-1)+4xy$ 個區塊。

3.證明：當圓跟橢圓疊合時，除了各自截出的區塊，最多會有 4 個交點，會多 4 個區塊，而當有 x 個圓 y 個橢圓時，每個圓和每個橢圓最多都有 4 個交點，最多多出 4xy 個區塊。

(五)拋物線和圓的疊合：z 個拋物線跟 x 個圓最多可切出幾個區塊?

1.



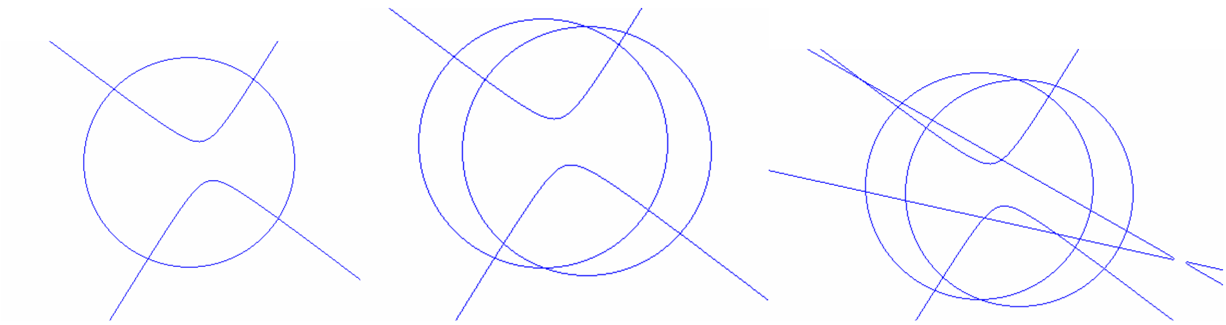
圖(1)爲 1 拋物線及 1 圓　　圖(2)爲 1 拋物線及 2 圓　　圖(3)爲 2 拋物線及 2 圓

2.結論：當拋物線有 z 個，圓有 x 個，則最多將平面切成 2+(z-1)(2z+1)+x(x-1)+4xz 個區塊。

3.證明：當拋物線跟圓疊合時，除了各自截出的區塊，最多會有 4 個交點，會多 4 個區塊，而當有 z 個拋物線 x 個圓時，每個拋物線和每個圓最多都有 4 個交點，最多多出 4xz 個區塊。

(六)雙曲線和圓的疊合：d 個雙曲線跟 x 個圓最多可切出幾個區塊?

1.



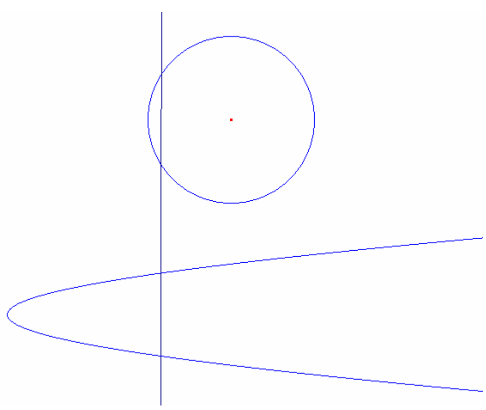
圖(1)爲 1 雙曲線及 1 圓　　圖(2)爲 1 雙曲線及 2 圓　　圖(3)爲 2 雙曲線及 2 圓

2.結論：當雙曲線有 d 個，圓有 x 個，則最多將平面切成 $1+2d^2+x(x-1)+4dx$ 個區塊。

3.說明：當雙曲線跟圓疊合時，除了各自截出的區塊，最多會有 4 個交點，會多 4 個區塊，而當有 d 個雙曲線 x 個圓時，每個雙曲線和每個圓最多都有 4 個交點，最多多出 4dx 個區塊。

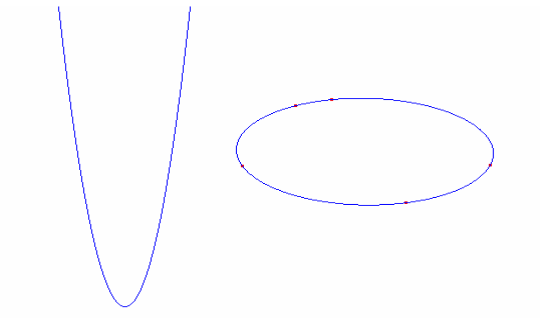
性質(四)

如圖,由於圓是一封閉圖形,而拋物線是一開放圖形,作一直縣與其相交,則比較其右半部,當直線與圓交於兩點時,其右半部恰好多出兩區塊,但是,當直縣與拋物線相交於兩點時,其右半部卻多出兩區塊,這是由於拋物線的右端是無限延伸,將其右半邊分成兩塊（不包括其內部）,但圓其右半部是一封閉的圖形,所以將其右半部分成一塊（不包括其內部）,所以當圓與其他圓錐曲線作疊合時,會比拋物線與圓錐曲線疊合的情形少一塊

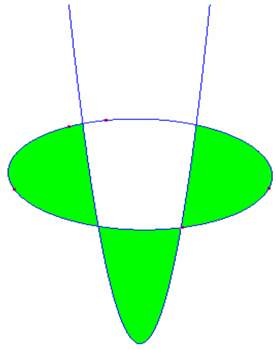


(七)說明：

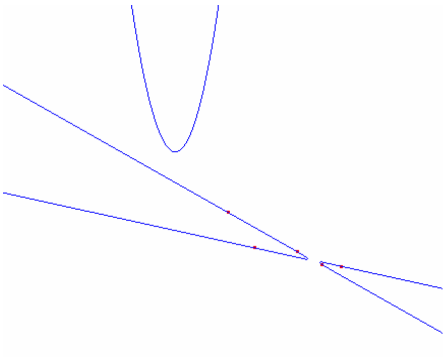
1.



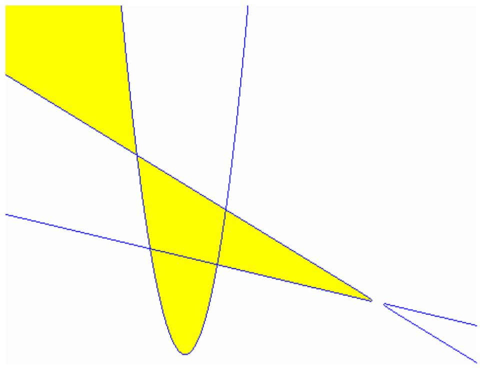
圖(18)



圖(19)



圖(20)



圖(21)

2.說明：

圖(18)爲分離的兩圖形，其區塊 M=2(橢圓)+2(拋物線)-1(外面)，圖(19)中，其無色的三個區塊爲圖(18)中演變而來，其綠色的三個區塊爲此兩圖形相交所切出的區塊(共創)，根據性質四得橢圓爲封閉性的圖形，所以在做疊合時，切割出的區塊會少一塊。但如圖(21)，其無色的區塊是由圖(20)演變而來，其黃色區塊爲兩圖形相交時所切割出的區塊，根據性質四得拋物線與雙曲線同爲開放性的圖形，所以多切割出左上角的區塊，故不必減１。

(八)證明：由（七）之說明可得下列結論！

（分離：分離時共切割區塊；共創：兩者合併時共同產生的區塊）

一	拋物線	橢圓	分離	共創	合計
圍成區塊	$2+(2z^2-z-1)$[A]	$2+(2y^2-2y)$[B]	A+B-1	4yz-1	2+(z-1)(2z+1)+2y(y-1)+4yz
二	拋物線	雙曲線	分離	共創	合計
圍成區塊	2+(z-1)(2z+1)[A]	$1+2d^2$[C]	A+C-1	**4dz**	$2+(z-1)(2z+1)+2d^2+4dz$
三	橢圓	雙曲線	分離	共創	合計
圍成區塊	2y(y-1)[B]	$1+2d^2$[C]	B+C-1	4dy-1	$1+2y(y-1)+2d^2+4dy$
四	圓	橢圓	分離	共創	合計
圍成區塊	2+x(x-1)[D]	2y(y-1)[B]	D+B-1	4xy-1	2+x(x-1)+2y(y-1)+4xy
五	圓	拋物線	分離	共創	合計
圍成區塊	2+x(x-1)[D]	2+(z-1)(2z+1)[A]	D+A-1	4xz-1	2+x(x-1)+(z-1)(2z+1)+4xz
六	圓	雙曲線	分離	共創	合計
圍成區塊	2+x(x-1)[D]	$1+2d^2$[C]	D+C-1	4dx-1	$1+x(x-1)+2d^2+4dx$

七、球體的切割：

（一）理想狀態：

C_0^n爲n個球取0個球之區塊(外部)，C_1^n爲n個球取1個球的區塊(內部)

C_2^n爲只有兩個球包含的部分…以此類推

所以理想狀態爲 $a_n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots C_n^n = 2^n$

（二）實際狀態：

n=1 時，$a_1 = C_0^1 + C_1^1 = 2^1 = 2$，合於實際區塊

n=2 時，$a_2 = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 = 2^2 = 4$，合於實際區塊

n=3 時，$a_3 = C_0^3 + C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 = 2^3 = 8$，合於實際區塊，如圖(22)

n=4 時，$a_4 = C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4 = 16$，合於實際區塊，如圖(23)

圖(22)

圖(23)

n=5 時，$a_5 = C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 2^5 = 32$，不合於實際區塊 30 個

因爲有些區塊會被重疊，所以 $a_n < 2^n$

（三）上限的進一步研究：

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

$a_3 = 8$

$a_4 = 16$

$a_5 = 2^5 - 2$,（少了中心及外圍）

$a_6 \leq 2^6 - (2+4)$,（第6個球,對於第4.5個球,均少兩個區塊）

$a_7 \leq 2^7 - (2+4+6)$

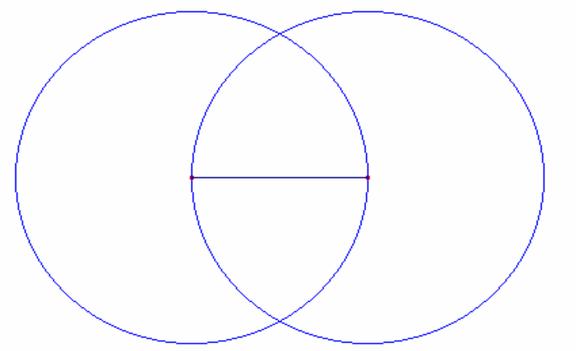
$\vdots$

$a_n \leq 2^n - [2+4+6+\cdots+2(n-4)] = 2^n - (n-3)(n-4)$

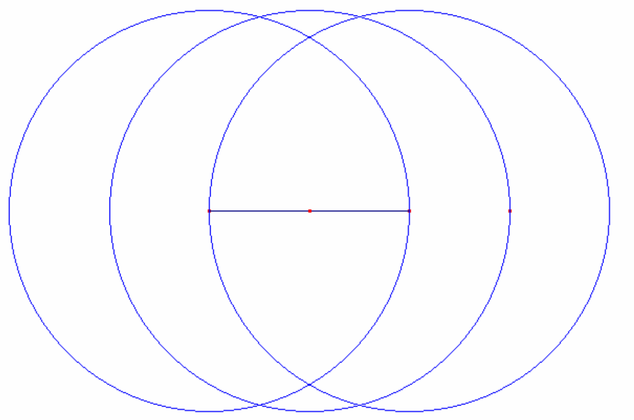
（四）另外的猜想：

平面圓的作法：若要做 n 個圓的圖形，就將一個線段分成 n-1 個等份，以線段長為半徑以等分點與端點為圓心，畫圓可截出最多。這種二維空間的圖形等價於將圓心置於一維空間的一線段上；所以推想三維空間的圖形，球心可至於二維空間的圖形上。已知 4 個球以正 4 面體頂點為球心可截出最多區塊，則其中三個球心會在正四面體的其中一個正三角形上，則可將第 4 個點置於正三角形的稜邊上。

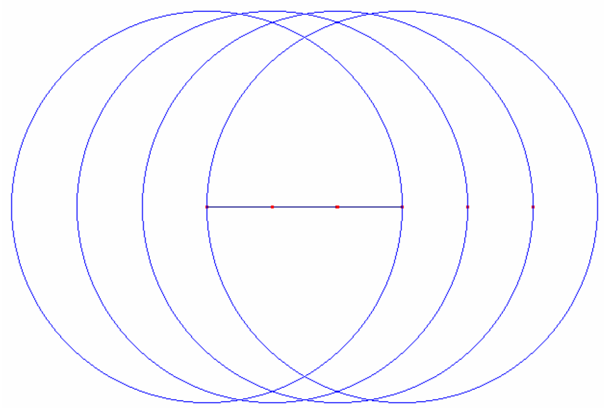
（五）證明平面中圓的切法：



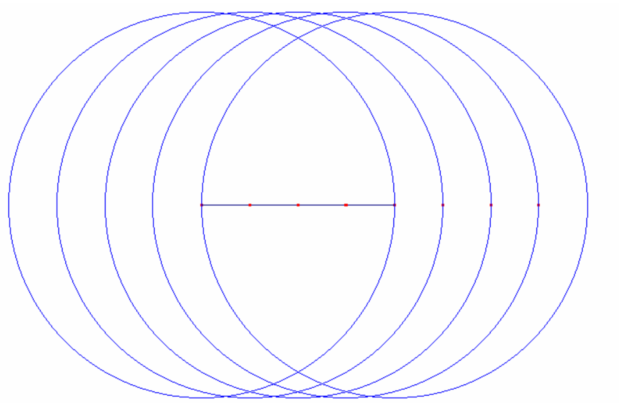
圖（24）



圖（25）



圖（26）



圖（27）

如圖（24）兩個圓相交時會交出 1+(2-1)個區塊；圖（25）中第三個圓和前面兩圓相交時會多出 2(3-1)；圖（26）中第四個圓相交時會多出 2(4-1)；五個時會多出 2(5-1)以此類推。則

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + 2(2-1)$$
$$a_3 = a_2 + 2(3-1)$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

將上列式子相加可得：$a_n = 2 + n(n-1)$

（六）第三種想法：

1. 考慮平面中圓的另外一種切割方法：

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

$a_3 = 8$

$a_4 = a_3 + (C_1^3 + 3)$……第四個圓和各圓再截出C_1^3個區塊.和相鄰兩圓再截出3個區塊

$a_5 = a_4 + C_1^4 + 4$……第五個圓和各圓再截出C_1^4個區塊.和相鄰兩圓再截出4個區塊

$a_6 = a_5 + (C_1^5 + 5)$……第六個圓和各圓再截出C_1^5個區塊.和相鄰兩圓再截出5個區塊

⋮

$a_n = 2 + 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2(n-1) = 2 + n(n-1)$

2. 以此方法推論空間中的球體：

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 2$

$a_3 = a_2 + 4$

$a_4 = a_3 + 8$

$a_5 = a_4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4$……第五個球和各球再截出$C_1^4$個區塊.和相鄰兩球再截出$C_2^4$ 個區塊和相鄰三球再截出C_3^4個區塊

$a_6 = a_5 + C_1^5 + (C_2^5 - 1) + (C_3^5 - 4)$……第六個球和各球再截出$C_1^5$個區塊.和相鄰兩球再截出($C_2^5$-1)個區塊和相鄰三球再截出($C_3^5$-4)個區塊

$a_7 = a_6 + C_1^6 + (C_2^6 - 3) + (C_3^6 - 12)$……第七個球和各球再截出$C_1^6$個區塊.和相鄰兩球再截出($C_2^6$-3)個區塊和相鄰三球再截出($C_3^6$-12)個區塊

$a_8 = a_7 + C_1^7 + (C_2^7 - 6) + (C_3^7 - 25)$……第八個球和各球再截出$C_1^7$個區塊.和相鄰兩球再截出($C_2^7$-6)個區塊和相鄰三球再截出($C_3^7$-25)個區塊

$a_9 = a_8 + C_1^8 + (C_2^8 - 10) + (C_3^8 - 44)$……第九個球和各球再截出$C_1^8$個區塊.和相鄰兩球再截出($C_2^8$-10)個區塊和相鄰三球再截出($C_3^8$-44)個區塊

⋮

$$a_n = a_{n-1} + C_1^{n-1} + (C_2^{n-1} - x) + (C_3^{n-1} - y)$$

$$a_n = 2 + 2 + 4 + 8 + (C_1^4 + C_1^5 + C_1^6 + \cdots + C_1^{n-1}) + [(C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + \cdots + C_2^{n-1}) - (0+1+3+6+10+\cdots+\frac{(n-4)(n-5)}{2})]$$

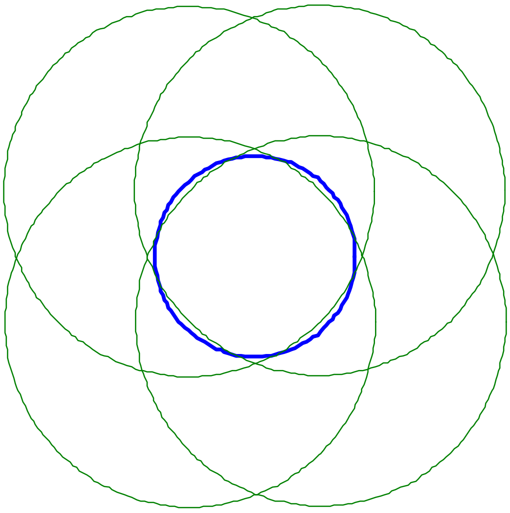
$$+[(C_3^4 + C_3^5 + C_3^6 + \cdots + C_3^{n-1}) - (4+12+25+44+\cdots+\frac{(n+2)(n-3)(n-5)}{6})]$$

$$=16+\frac{(n+3)(n-4)}{2}+[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-4-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}]+[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}-1-\frac{n^4-6n^3-13n^2+114n-120}{24}]$$

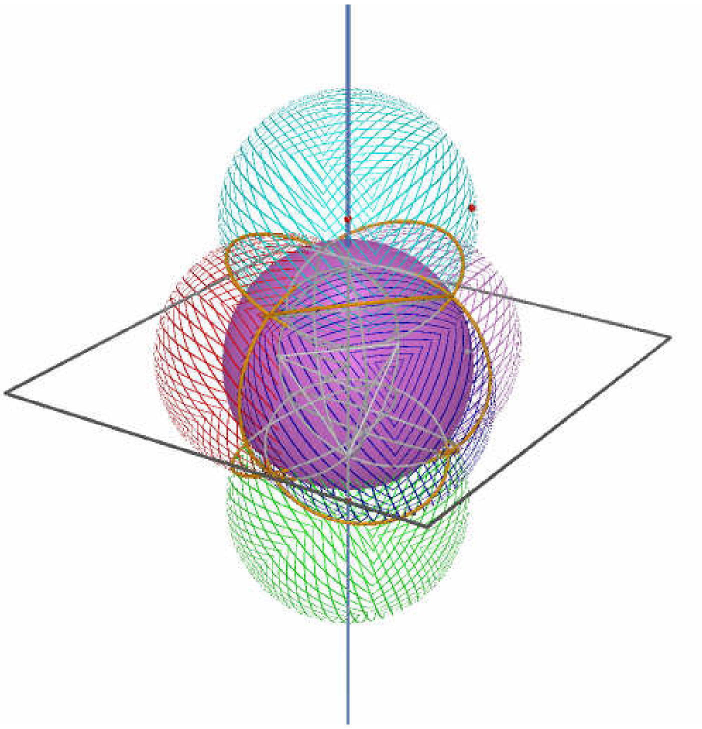
$$=16+\frac{(n+3)(n-4)}{2}+\frac{3n^2-15n+20}{2}-4+(n^2-5n+4)$$

$$=3n^2-13n+20$$

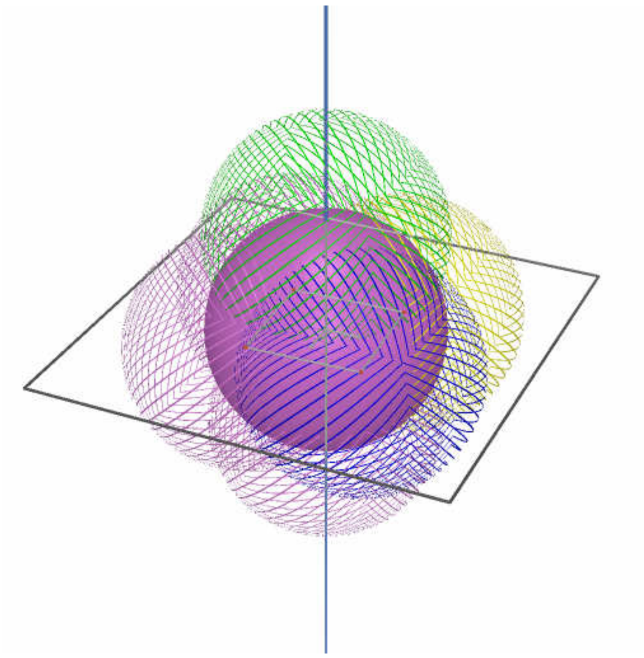
3. 作法：在同 1 平面 E 上放置正 n-3 多邊形，以其 n-3 個頂點爲球心，以大於此正 n-3 多邊形外接圓的半徑畫球，自其上方與下方各放入 1 球，使其在平面 E 上有 1 交圓 (如俯視圖的藍圓)，使其產生最多交點，可產生最多空間，再將第 n 個球放入中間，可產生如下的圖形。



俯視圖



六個球



七個球

4.說明：

n	n-1	x	對角線總數	y	n-3	C_3^{n-3}	2×對角線總數
6	5	1	$=1+0 \Rightarrow \frac{3(3-3)}{2}$	4	= 3	+ 1	+ 2x0
7	6	3	$=1+2 \Rightarrow \frac{4(4-3)}{2}$	12	= 4	+ 4	+ 2x2
8	7	6	$=1+5 \Rightarrow \frac{5(5-3)}{2}$	25	= 5	+10	+ 2x5
9	8	10	$=1+9 \Rightarrow \frac{6(6-3)}{2}$	44	= 6	+20	+ 2x9
10	9	15	$=1+14 \Rightarrow \frac{7(7-3)}{2}$	70	= 7	+35	+ 2x14
11	10	21	$= 1+20 \Rightarrow \frac{8(8-3)}{2}$	104	= 8	+56	+ 2x20

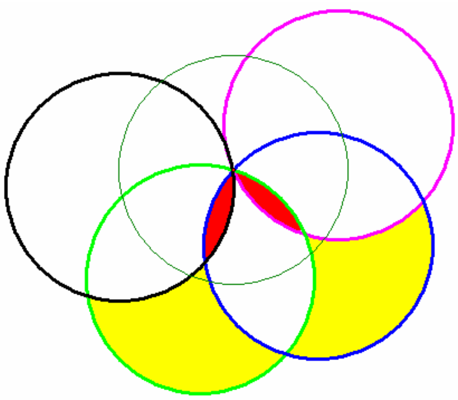
(1)消失的空間：

$x=1+\frac{(n-3)(n-6)}{2}$ (n-1 顆球取 2 顆球的相交空間，且第 n 顆球出現時截不到的空間)

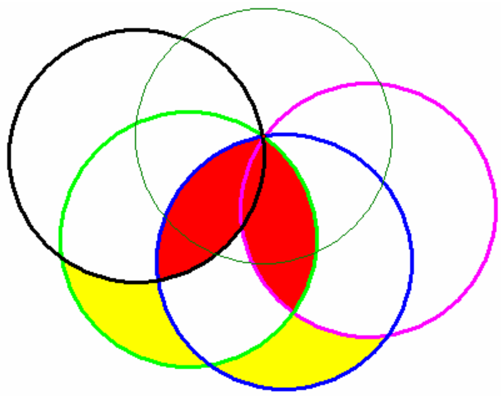
$y=n-3+C_3^{n-3}+2\times\frac{(n-3)(n-6)}{2}$ (n-1 顆球取 3 顆球的相交空間，且第 n 顆球出現時截不到的空間)

(I) 1：上下兩顆球截出的空間，因爲在第 n 個球的內部，所以一定切不到。

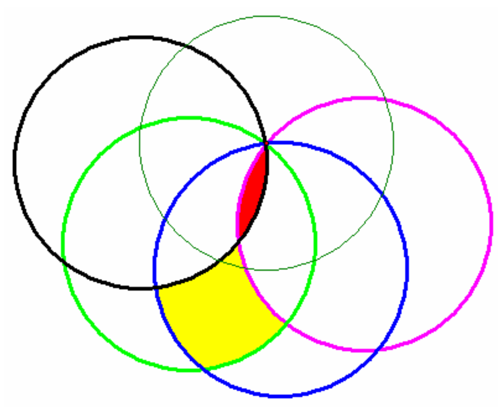
(II) $\frac{(n-3)(n-6)}{2}$ ：同一平面上 n-3 顆球取不相鄰之兩球的獨立空間，也就是中間正 n-3 多邊形的對角線個數，是第 n 顆球出現時，無法截出的空間。($\because n\leq 6$ 時，紅色區塊在第 n 顆球的內部，$n\geq 7$ 時，球變密集，相隔 1 球的兩顆球【黑圓跟藍圓】或是相隔 2 球的兩顆球【黑圓跟紫圓】…以此類推，他們相交的空間【紅色區塊】有可能跑到第 n 顆球的外部，會多空間，但與 C_1^{n-3} 截出的空間會消失【黃色區塊】，互相抵消【如圖(28)至圖(29)與圖(30)至圖(31)】)



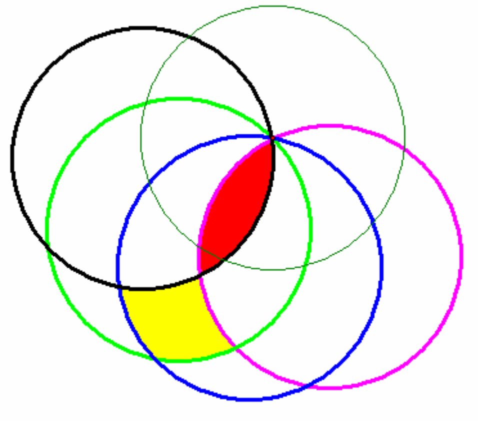
圖(28)



圖(29)



圖(30)



圖(31)

(III) n-3： C_1^{n-3} ，上下 2 顆球都取，中間 n-3 顆球取 1 顆跟上下兩顆共同的空間。(∵上下兩球

相交的空間已在第 n 個球的內部，∴多 C_1^{n-3} 個空間)

(IV) C_3^{n-3} ：上下 2 顆球都不取同(2)的想法，只要取到對角線的兩球就無法被第 n 個球截出空間，當在同一平面上的 n-3 顆球取 3 個球時，必產生正多邊形的對角線關係，∴ C_3^{n-3} 的空間都是無法截出的空間。

(V) $2\times\dfrac{(n-3)(n-6)}{2}$ ：上下 2 顆球只取其 1，∴有兩種選擇，又∵對角線關係的兩球不被第 n 個球切割，∴再從中間同一平面的 n-3 顆球取對角線關係的兩球與上或下其中 1 顆球的共同空間必不被第 n 個球切割，∴會多 $2\times\dfrac{(n-3)(n-6)}{2}$ 個空間。

（七）證明：

1. 平面中的圓截出最多區塊：

將每個圓視做一個『點』，則每增加一個『點』就增加一個區塊，且 n-1 個點所形成的 n-1 邊形就會增加一個『邊』，即增加一個區塊，所以

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2\\
a_2 &= a_1 + 2(2-1)\\
a_3 &= a_2 + 2(3-1)\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + 2(n-1)
\end{aligned}
$$

將上列式子相加可得：$a_n = 2 + n(n-1)$

2. 空間中的球體截出最多區塊：

以四個球體截成最多區塊的立體圖形做基礎，將每個球體視做一個『點』，則此圖形可形成一正四面體：

(1) 每增加一個球體，即增加一個『點』，就增加一個區塊

(2) 每增加一個球體，即增加三條『線』，就增加三個區塊

(3) 每增加一個球體，即增加三個『面』，但減少一個『面』，所以只增加兩個區塊

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 2$

$a_3 = a_2 + 4$

$a_4 = a_3 + 8$

$a_5 = a_4 + 4(\text{點}) + 6(\text{線}) + 4(\text{面})$

$a_6 = a_5 + 5(\text{點}) + 9(\text{線}) + 6(\text{面})$

$a_7 = a_6 + 6(\text{點}) + 12(\text{線}) + 8(\text{面})$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + (n-1) + 3(n-3) + 2(n-3)$

將上列式子相加可得：$a_n = 16 + \sum_{k=5}^{n}(6k-16)$

$= 16 + \sum_{k=1}^{n}(6k-16) - \sum_{k=1}^{4}(6k-16)$

$= 16 + (6\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 16) - (6\sum_{k=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 16)$

所以，$= 16 + (6 \times \frac{n(n+1)}{2} - 16n) - (60 - 64)$

$= 3n^2 - 13n + 20$

陸、結論：設正α邊形.正β邊形.正γ邊形之個數分別爲m.n.k個

一、若有 m 個正α邊形，則最多可切出：$2+\alpha m(m-1)$個區塊。

二、若有 m 個正α邊形，n 個正β邊形則最多可切出：
$2+\alpha m(m-1)+\beta n(n-1)+2\alpha mn$ 個區塊。

三、若有 m 個正α邊形，n 個正β邊形，k 個正γ邊形，則最多可切出：
$2+\alpha m(m-1)+\beta n(n-1)+\gamma k(k-1)+2\alpha mn+2\alpha mk+2\beta nk$.個區塊。

四、若有n_1個正α_1邊形,n_2個正α_2邊形$\cdots n_h$個正α_h邊形,且$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_h$，

則最多可切出：$2+\sum_{i=1}^{h}\alpha_i n_i(n_i-1)+2\times\sum_{j=1}^{h-1}[\alpha_j n_j(\sum_{i=j+1}^{h} n_i)]$個區塊。

伍、有 x 個圓形，則最多可切出：$2+x(x-1)$ 個區塊。

六、y 個橢圓，則最多可切出：$2+2y(y-1)$個區塊。

七、若有 z 個拋物線，則最多可切出：$2z^2 - z + 1$ 個區塊。

八、若有 d 個雙曲線，則最多可切出：$2d^2 + 1$ 個區塊。

九、若有 n 個球，則可切出：$a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 8$，$a_4 = 16$，$a_n = 3n^2 - 13n + 20 \quad (n \ge 5)$

柒、展望：空間中的切割不易想像，比起平面的切割耗費我們更多的心力，我們以電腦軟體盡力去算出它的切割狀態，也輔助以實物製作來觀察，終於求出球體的切割區塊，讓這段時間不眠不休的研究終於有苦盡甘來的喜悅。空間中的切割很複雜，但非常有趣，值得我們繼續努力研究。

捌、參考資料：康熙版數學第三冊第四章・第四冊第一章

評　　語

040403　千刀萬剮

1. 參考資料只附上一本教科書的名稱。在搜查資料如此快速的今天，可以不必閉門造車，應該多多上網查詢別人是否進行過類似的研究。

2. 雖然抽象思維對於數學研究很重要，在完成本作品時，作者必定感覺到：具體的圖像更為重要。

3. 猶如 Kepler 猜測一般，即使是三維空間的球體，其最小包裝問題有可能將研究帶入陷阱。但願本研究不至於那麼的不幸。