中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040402

打火英雄

學校名稱：　臺北縣私立光仁高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳浩銘	翁立衛
高二 朱子豪	林麗卿
高二 劉俊宏	
高二 吳聖強	

關 鍵 詞：棋盤格的擴散問題、絕對值函數、遞迴關係

打火英雄

壹、前言

科學教育月刊第 77 期所刊載的第十七屆亞太數學競試試題中有一個有趣的問題：「在一個 n×n 正方形棋盤中，某點起火而擴散，欲撲滅著火點且一次只能撲滅一點，最有效防止火勢擴散方法爲何？」本研究即是由此延伸，著重在擴散之後所產生起火點總數，以及撲滅的可行性、順序與如何獲得最大安全區域等問題，並嘗試改變棋盤形狀與擴散條件。

貳、研究動機

打火英雄拼了命地救火，冒著被火蛇吞噬，葬身火窟的危險；防止祝融的擴散，拯救**最大安全區域**，考驗著英雄們的體力與智力。網路上，垃圾信件與詛咒信件的轉寄、病毒傳染、謠言擴散等都是常見的擴散與防堵問題，我們想將擴散和防堵問題「量化」與「座標化」，試著找出最有效的防堵策略來解決這一系列的擴散問題。

參、研究問題

一、改寫題目

時間 t=0 時，區域中某點(h,k)著火了，在每一單位時間之後，火勢擴散到其鄰域，這時打火兄弟要盡力救火，被撲滅的著火點將永遠不再著火，如果打火兄弟要殺出條生路，將著火點個數降到最少，避免身陷火海之中，他們應該如何防堵火勢？

先討論有界的正方形棋盤，有了基礎的認識之後，再討論**無界**的棋盤，以棋盤的單位圖形來分，討論**正方形**、**正三角形**棋盤以及**正六邊形**棋盤，其餘暫不討論。

研究問題是：

(一) [擴散] 由起火點擴散出去，在 t 時間內的**著火點總數**爲何？

(二)[救火] 依照滅火點的數目與位置討論，如果要包圍火勢，**滅火的順序**該如何？如何才能拯救**最大面積**，避免火勢波及？

(三)[座標] 被撲滅的起火點所形成的連線稱爲**防火牆**，在座標化之後，求出此防火牆方程式。

在本研究中，有以下假設：

(一)起火點只有一點。

(二)撲滅過的著火點將永遠不再起火。

(三)滅火點被包圍，救火過程即算失敗(可因特殊需要而被放寬)。

(四)每個方向擴散的速度相等(在推廣時被放寬)。

二、名詞定義

(一)棋盤名稱與座標

以棋盤的單位圖形來稱呼棋盤，正方形棋盤指的是由單位正方形所構成的棋盤，其他以此類推；正三角形棋盤簡稱跳棋棋盤，正六邊形簡稱蜂窩形棋盤。

將 $n\times n$ 個格子點所構成的棋盤稱之爲 $n\times n$ 的有界棋盤，以邊長來看，在本研究中 $n\times n$ 的有界棋盤亦可看成由 $(n-1)\times(n-1)$ 個單位正方形所構成的正方形棋盤中。在有界棋盤中，將原點(0,0)置於最左下方的角落，把最初起火點座標設爲(h,k)。在無界正方形棋盤中，把起火點設爲(0,0)。

(二)防火牆與安全區域

被撲滅的起火點所形成連線稱爲**防火牆**，在防火牆之後完全沒有著過火的點所形成區域稱爲**安全區域**。

肆、研究設備及器材

硬體：筆、紙、尺、棋盤

軟體：Microsoft　Word 文書軟體、GSP 繪圖軟體、小畫家

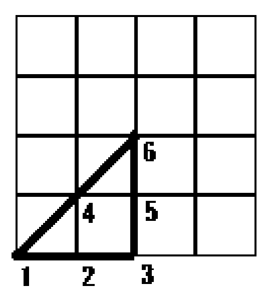
伍、研究過程

雖然撲滅是原題所探討的，但是我們認爲「欲撲滅，必先了解擴散」，因此本研究主要分爲兩大主軸，一、起火點擴散 t 時間內的著火點總數爲何？二、防堵火勢擴散所建立的防火牆方程式爲何？該如何撲救，才能拯救最大的安全區域？

一、有界正方形棋盤

(一) 對稱性

首先探討的是 $(n-1)\times(n-1)$ 個正方形所構成的有界正方形棋盤，由於**對稱**關係，可將原圖切成八塊**全等**的等腰直角三角形，只需探討這八塊的其中一塊，就可以推論出所有點的擴散問題。以右圖 5×5 的棋盤爲例，只要討論標有 1~6 的位置即可。



(二)著火點個數

發現起火點在第 t 個單位時間，會擴散出 4t 個點，因此在 t 時間內共擴散出 $4(1+2+3+\ldots+t)=2t^2+2t$ 個起火點(不包括初始的起火點)，但是在這有界區域中，若新增著火點燒到棋盤邊界而無法繼續擴散，則個數不再遵守 $2t^2+2t$ 這個式子。

(三) 搶救著火點

滅火的原則有幾個：

(1).不希望火勢往發展空間較廣的地方蔓延；

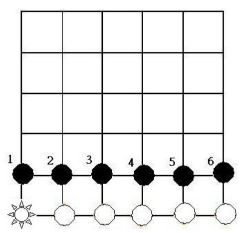
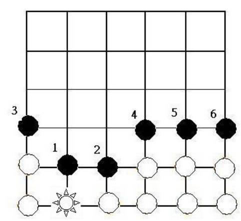
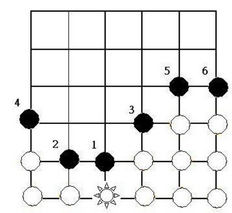
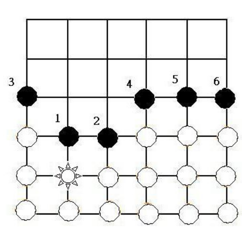
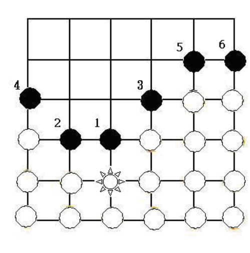
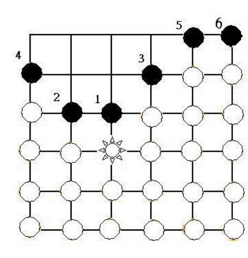
(2).密封的原則：防火牆最好沒有漏洞；

(3).平均的原則：不偏重某一方向防堵，而使另一方向自由擴散。

滅火方式：

第一點固定擺在起火點上方，因爲上方可發展空間較廣，不希望火勢往發展空間較廣的地方蔓延。**第二點**可在第一點的左方或右方，因兩邊可發展空間相等，假設選擇左方救火，右邊的火勢就會往上方發展。第二點一旦選定之後，**第三點**就必須放在第二點的右上方，將右邊向上發展的火勢往下壓。**第四點**因爲左方的火勢開始向上發展，將它擺在第三點的左方阻擋，接下來就**依序左右放置**直到完全阻擋火勢發展爲止。

限於篇幅，以 6×6 正方形棋盤爲例，說明防火牆方程式與火勢擴張的狀況。

			
折點	無折點	(1,1)，(2,1)，(3,2)	(1,1)，(2,1)，(4,3)
防火線方程式	y=1	$y=\frac{1}{2}(\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\lvert x-3\rvert-x+4)$	$y=\frac{1}{2}(\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\lvert x-4\rvert-x+5)$
比例	安：救：毀 =24：6：6	安：救：毀 =20：6：10	安：救：毀 =18：6：12
			
折點	(1,2)，(2,2)，(3,3)	(1,2)，(2,2)，(4,4)	(1,3)，(2,3)，(4,5)
防火線方程式	$Y=\frac{1}{2}(\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\lvert x-3\rvert-x+6)$	$y=\frac{1}{2}(\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\lvert x-4\rvert-x+7)$	$y=\frac{1}{2}(\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert-\lvert x-4\rvert-x+9)$
比例	安：救：毀 =14：6：16	安：救：毀 =12：6：18	安：救：毀 =6：6：24

(四)一般式

發現會因為初始起火點的位置不同，而有不同著火點個數，越中間，越多。撲滅次數以及防火牆方程式與圖形，則會因為所構成的格子點的奇、偶不同，而有所不同。

著火點個數總和：

火勢擴散所波及的著火點個數，和初始起火點的位置有關：

起火點在 (h , 0)時，著火點個數為 n＋(n－2)＋(n－4)＋…＋(n－2h)= $\sum_{t=0}^{h}(n-2t)$

起火點在 (h , k)時，著火點個數為 nk＋$\sum_{t=0}^{h}(n-2t)$ ＝nk＋(h＋1)(n－h (h、k≦ $\frac{1}{2}$n)

在有界棋盤內，均可控制火勢，但推廣到無界棋盤，就無法控制火勢，若要包圍火勢，滅火點個數也要增加，這是後續探討的課題。

撲滅的次數：

在 n×n 方格中，最多需要 n 次，可控制火勢。在奇數方格中，起火點位於正中間時，將有特例產生，n-1 次可以撲滅火勢。

防火牆方程式：

(1) n 為奇數

1. 起火點在(h,0)，h=1,2,3,… $\frac{n-3}{2}$ 折點有三個：

第一個滅火點在(h,1)

若第二個滅點選擇右邊(h+1,1)，則第三個折點為(2h+1, h+1)

方程式為： $y=\frac{1}{2}[|x-h|+|x-(h+1)|-|x-(2h+1)|-x+(2h+2)]$ (如圖一)

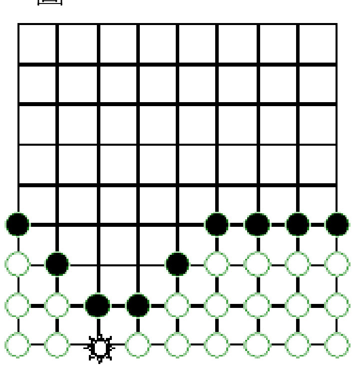
若第二個滅點選擇左邊(h-1,1)，則第三個折點為(2h,h+1)

方程式為： $y=\frac{1}{2}[|x-(h-1)|+|x-h|-|x-2h|-x+(2h+1)]$ (如圖二)

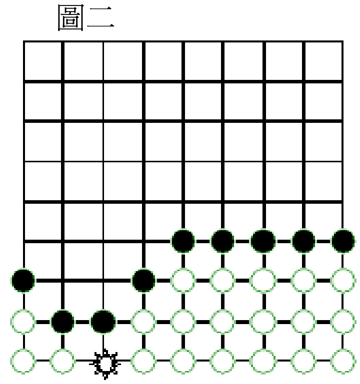
雖然防火牆方程式不同，但”安：救：毀”比例相同，防火效益相同。

以 n=9 為例

圖一



圖二



若選右邊爲第二個滅火點，防火牆方程式求法如下：

設 $y=a|x-h|+b|x-(h+1)|+c|x-(2h+1)|+dx+e$

x≥2h+1 斜率=0 ⇒ a+b+c+d=0

h+1≤x≤2h+1 斜率=1 ⇒ a+b-c+d=1

h≤x≤h+1 斜率=0 ⇒ a-b-c+d=0

x≤h 斜率=-1 ⇒ -a-b-c+d=-1

解聯立 得 a=$\frac{1}{2}$ b=$\frac{1}{2}$ c=$-\frac{1}{2}$ d=$-\frac{1}{2}$ 代入其中一個折點，得 e=h+1

當起火點在(h, k)，k=1,2,3,… $\frac{n-1}{2}$，則防火牆折線圖可從上述折線圖向上平移 k 單位而得到。

2. 當起火點在(h,0) (h=$\frac{n-1}{2}$) 圖形折點只有兩個：

第一個滅火點必在(h,1)

如果第二個滅火點選擇右邊 (h+1,1)，之後的滅火點就沿著 y=x－h 與 y=－x+h+1 的格子點往上延伸，不再有折點。折線方程式爲：$y=\frac{1}{2}(|x-h|+|x-(h+1)|+1)$

如果第二個滅火點選擇左邊 (h－1,1)，之後的滅火點就沿著 y=x+(－h+1)與 y=－x+h 的格子點往上延伸，不再有折點。折線方程式爲：$y=\frac{1}{2}(|x-(h-1)|+|x-h|+1)$

(2) n 爲偶數

起火點在(h,0)，h=1,2,3… $\frac{n-4}{2}$ 圖形的折點有三個；方程式相同於 n 爲奇數，起火點在(h,0)，h=1,2,3,… $\frac{n-3}{2}$ 的情況。

起火點在(h, k)，k=1,2,3,… $\frac{n-2}{2}$，則防火牆折線圖可從上述折線圖向上平移 k 單位而得。

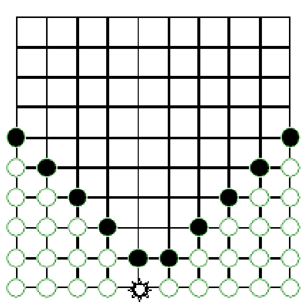
起火點在(h,0)，h=$\frac{n-2}{2}$，第二個滅火點有兩種選擇：

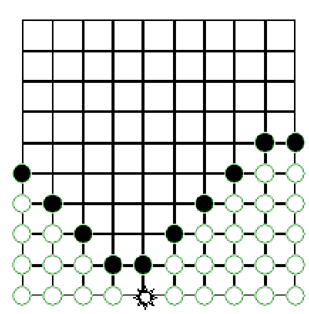
如果第二個滅火點選擇右邊 (h+1,1)，之後的滅火點就沿著 y=x－h 與 y=－x+h+1 的格子點往上延伸，不再有折點。折線方程：$y=\frac{1}{2}(|x-h|+|x-(h+1)|+1)$ (如下圖左)

如果第二個滅火點選擇左邊 (h－1,1)，則將會產生第三個折點(2h,h+1)，折線方程：

$y=\frac{1}{2}[|x-(h-1)|+|x-h|-|x-2h|-x+(2h+1)]$ (如下圖右)

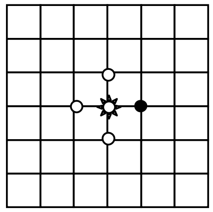
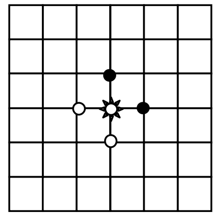
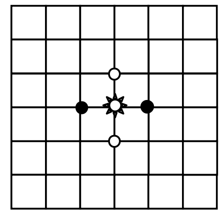
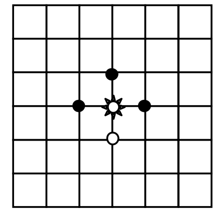
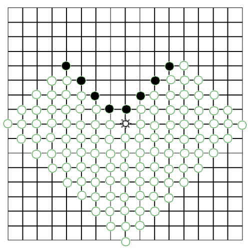
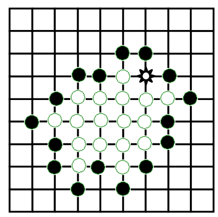
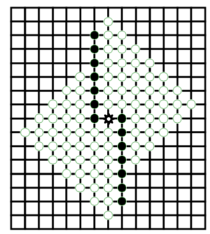
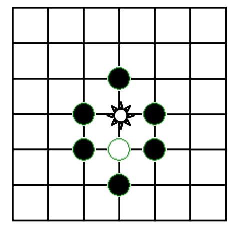
以 n=10 爲例



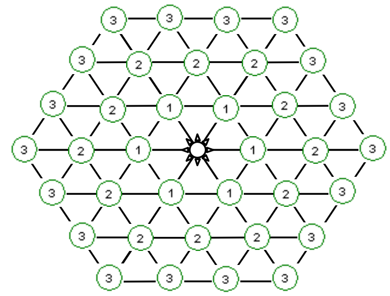


(五) 無界方格棋盤

這是我們所作的方格棋盤的整理，探討了一次滅一點、兩點、三點，其結果下列各圖。

	一次滅一點	一次滅兩點		一次滅三點
初始圖形				
著火點個數	$a_t=\frac{1}{2}（3t^2+3t）$	2、5、8、11、14、16、17、17	$a_1=2$、$a_2=6$、$a_3=12$ $a_t=2t^2-4t+6\ (t\geq 4)$	1
結果圖形				
滅火步數	無	第八步包圍火勢	無	第二步包圍火勢
防火牆方程式	$y=\frac{1}{2}(\lvert x+1\rvert+\lvert x\rvert+1)$	無	$x=1$，$y\leqq 0$ or $x=-1$，$y\geqq 0$	無

二、 跳棋棋盤　擴散加倍



現在把腦筋動到跳棋棋盤上，在跳棋棋盤上討論。

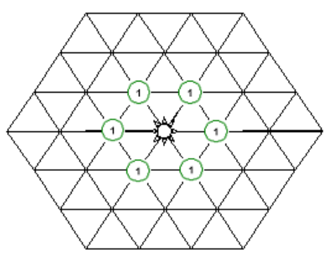
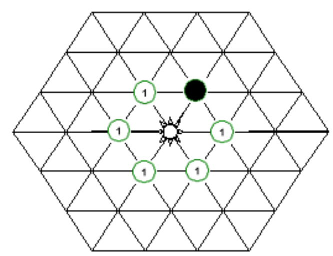
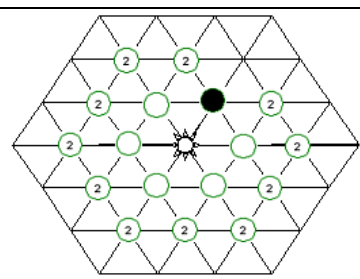
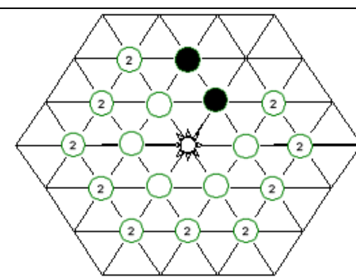
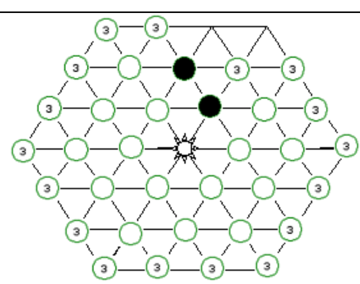
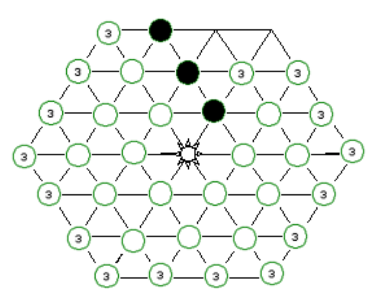
(一) 擴散

因不易定義棋盤大小，所以直接討論無界棋盤，發現起火點在第 t 個單位時間，會擴散 6t 個點，因此在 t 時間內共擴散出 $6(1+2+3+\ldots+t)= 3t^2+3t$ 個起火點(不包括初始的起火點)。

(二)　滅火

得知跳棋棋盤中的擴散形式，是以蜂窩形向外擴散。一次擴散出六個點。一次撲滅六點，等於就是直接將火源給撲滅；一次撲滅五點，在兩次就將火勢完全撲滅。因此不討論一次撲滅五點和六點的情況。以下是針對一次撲滅一、二、三及四點的情況來討論。

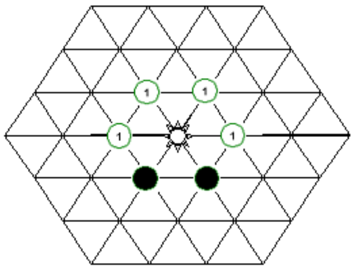
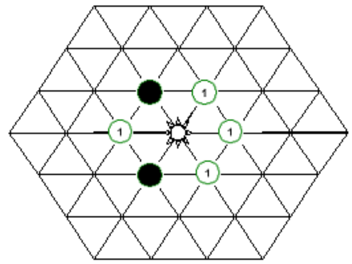
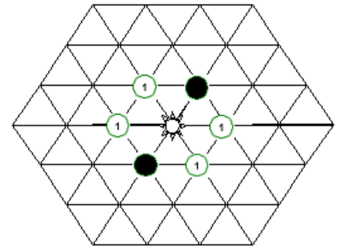
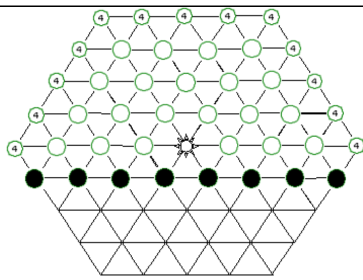
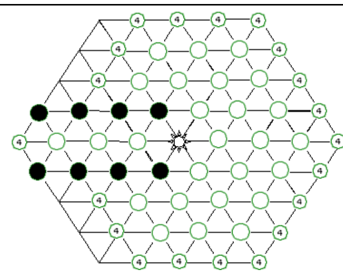
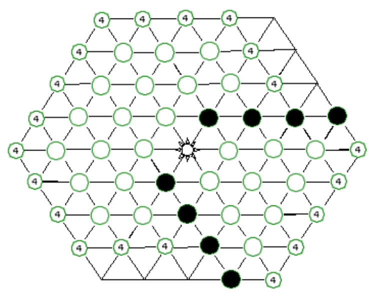
(1)每次撲滅一點的情況

	擴散	防堵
		
著火點	6	5
		
著火點	16	15
		
著火點	32	31

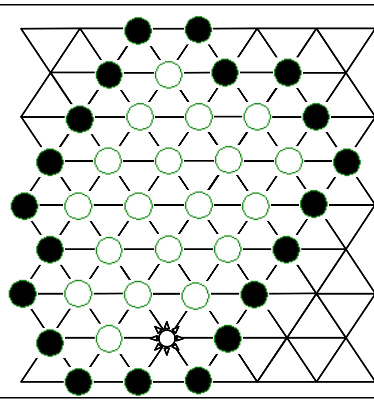
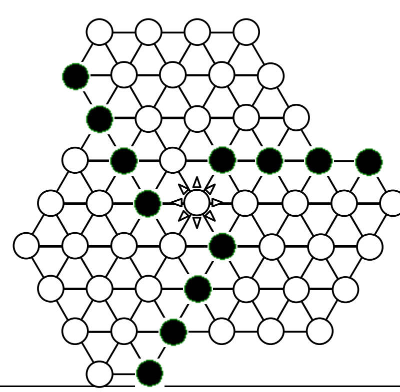
發現在第 t 次擴散後，著火點個數為：$(3t^2+3t)-(2t-1)=\mathbf{3t^2+t+1}$

註：圖中太陽狀的點爲初始起火點，白點及內部數字表第 t 次的燃燒擴散，**黑點**爲已撲滅的著火點。不把初始起火點列入著火點的計算中。

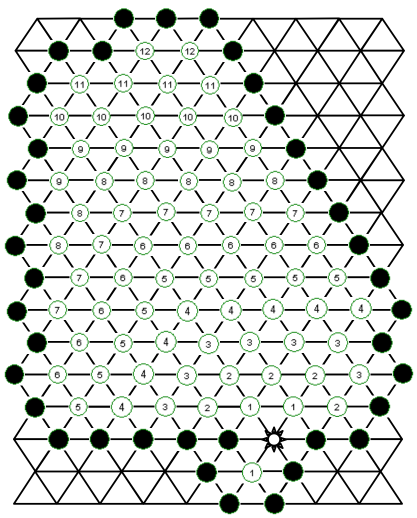
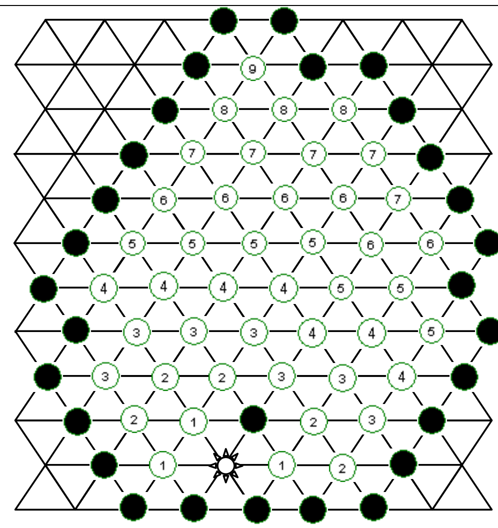
(2)撲滅兩點的情況

	兩點相鄰	隔一點	隔兩點
起始狀態			
前四次	4	4	
	4+7	4+(2-1)×2+1×6	
	4+7+10	4+(3-1)×2+(1+2)×6	
	4+7+10+13	4+(4-1)×2+(1+2+3)×6	
通式	$\frac{1}{2}(3t^2+5t)$	$3t^2-t+2$	
圖形			
狀況	一直線	兩平行射線	兩夾 60^0 射線

(3)撲滅三點的圖形及狀況

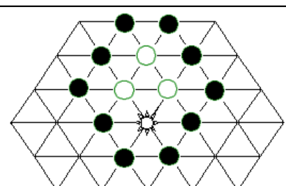
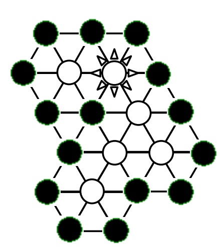
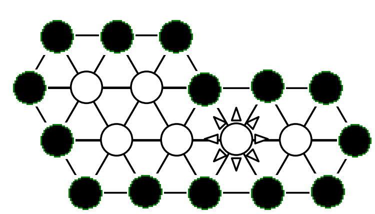
	完全相連	完全分離
著火點數	3,7,11,15,18,19	$a_{t=}$ $3(t^2-t+1)$
結果	第七步包圍	三夾 120^0 射線
圖形		

發現：滅火點在完全相連的情況，最後可將火勢包圍。滅火點完全分離的情況，火勢無法包圍，則是滅火點最後形成三條”突圍而出的”防火線。

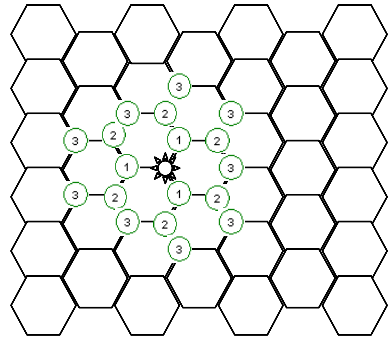
	滅三點 兩相鄰 另一點不相鄰	
	按照規則	犧牲一點
著火點數	3,5,7,8,9,9,9,8,7,5,4,2	3,5,7,7,7,6,5,3,1
結果	第十三步	第十步
圖形		

說明：按照規則的情況下(也就是滅火點不能被火勢包圍)，在初始起火時就必須先將一個擴散出去的方向撲滅，因此所花費的步數相對較多。犧牲一點的情況，在初始起火時不去顧慮在第一次滅火不相鄰的滅火點，直接撲滅其他方向的火勢，相對所花費步數較少。(過程請參見附錄一)

(4) 撲滅四點的圖形及狀況

	四點相鄰	三點相鄰一點分離	兩兩成雙
著火點數	2,3	2,5	2,4,5
結果	第三步包圍	第三步包圍	第四步包圍
圖形			

三、蜂窩棋盤　奇異的擴散



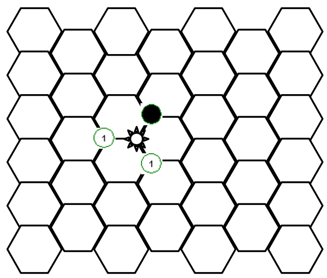
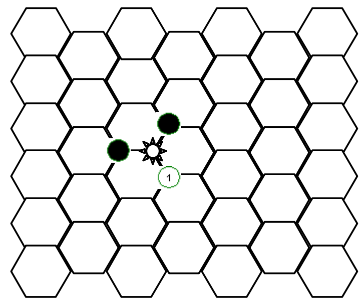
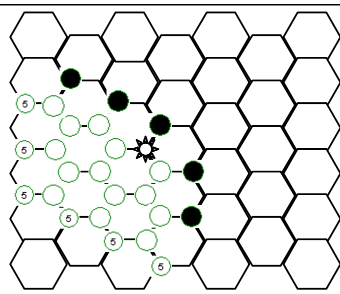
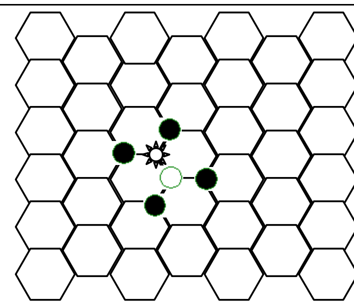
(一)　擴散

在第 t 個單位時間內，發現起火點個數的一般式為：

$a_t = \frac{1}{2}\ (3t^2+3t)$　　(不包括初始的起火點)。

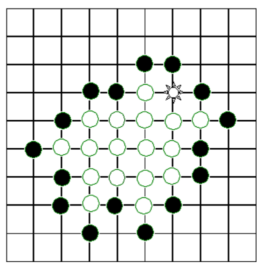
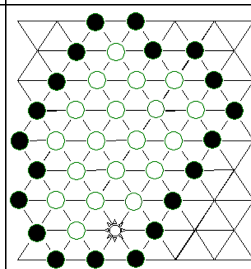
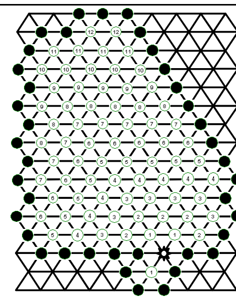
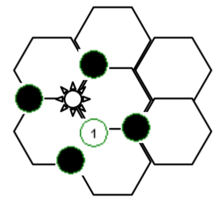
(二)　滅火

得知跳棋棋盤中的擴散形式，是以蜂窩形向外擴散，接下來討論的是滅火問題。

	滅一點	滅兩點
初始圖		
結果圖		
著火點個數	$\frac{1}{2}\ (t^2+3t)$	1

四、「二分之一」定理

在討論完三種無邊界的棋盤的滅火問題後，發現一個 n 邊形中，初始起火點可擴散出去的點有 n 個，而我們只要一次能夠滅 $\frac{n}{2}$ 個以上的點，就能完全將火勢控制住，如下：

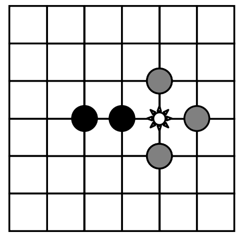
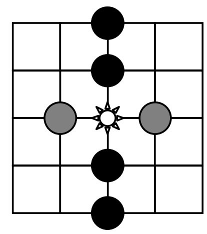
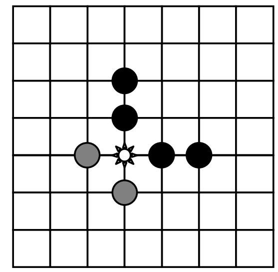
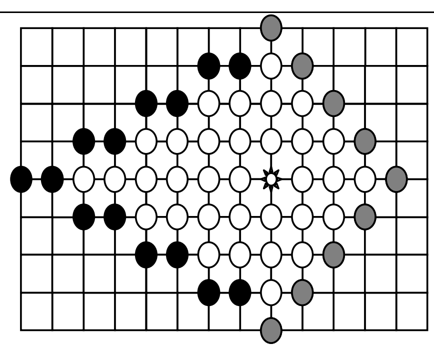
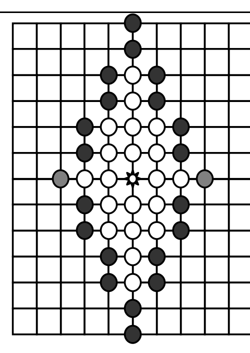
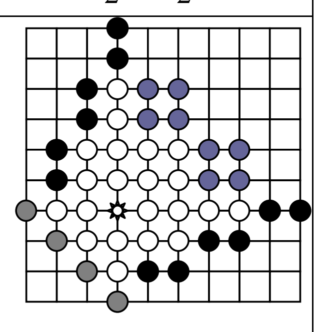
棋盤形狀	正方形	三角形		蜂窩形
滅火個數	2	3	3	2
滅火步數	8	7	13	2
圖示				

五、 變速擴散

本小節將探討棋盤中某幾個方向的擴散速度(或數量)加倍，蜂窩型棋盤，因其擴散方向爲折線，無法明確說明方向性，故暫不討論。以下是正方形及跳棋棋盤的變形擴散探討。

(一)方格棋盤的變速擴散

先討論某些方向擴散速度產生變化的問題。將問題分成兩個部分來討論，一個是軸上的擴散(也是就第一次擴散向外發展的四個方向所形成的軸)，另一個則是軸與軸之間區域內的擴散。

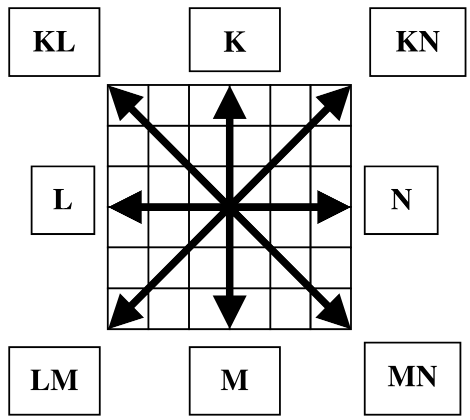
			三方向維持原速 一方向速度加倍	兩方向維持原速　兩方向速度加倍	
第一步的圖					
軸上的擴散	原速軸	數量	3	2	2
		單位時間擴散	1	1	1
		t 時間內總和	3t	2t	2t
	變速軸	數量	1	2	2
		單位時間擴散	2	2	2
		t 時間內總和	2t	4t	4t
區域內的擴散	原速區域	數量	2	0	1
		單位時間擴散	t-1	0	t-1
		t 時間內總和	$2\frac{t(t-1)}{2}$	0	$\frac{t(t-1)}{2}$
	變速區域	數量	2	4	3
		單位時間擴散	2(t-1)	2(t-1)	右上：4(t-1) 左上及右下：2(t-1)
		T 時間內總和	$4\frac{t(t-1)}{2}$	$8\frac{t(t-1)}{2}$	$8\frac{t(t-1)}{2}$
總計			$3t^2+2t$	$4t^2+2t$	$\frac{9}{2}t^2+\frac{3}{2}t$
第三步的圖					

總結：

假設四個方向擴散的速率分別增加變成原來的 K、L、M、N 倍(即每單位時間向該方向擴散 K、L、M、N 個)則擴散點數的總和為：

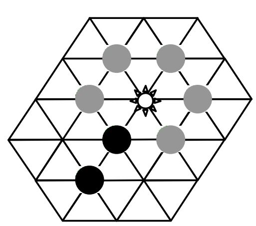
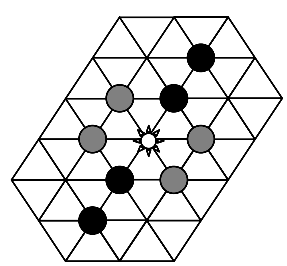
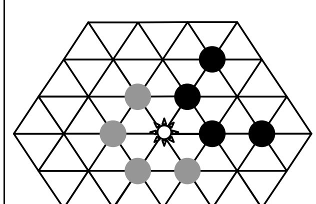
軸上的擴散點總和 + 四個區域的擴散點總和

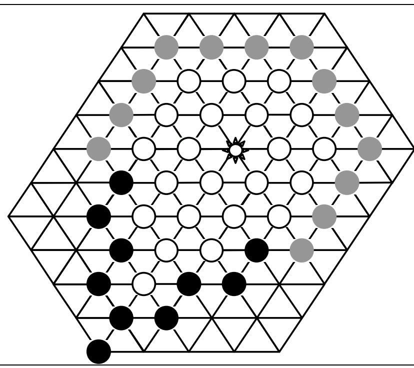
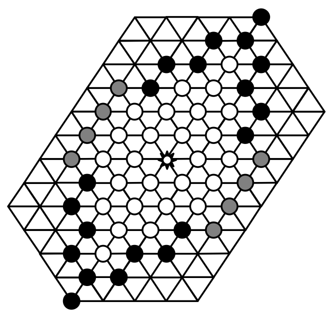
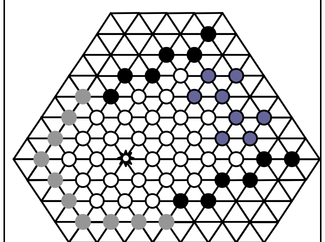
$$=(K+L+M+N)t+(KL+LM+MN+KN)\left(\frac{t(t-1)}{2}\right)$$



(二)三角形棋盤的擴散

有了先前正方形棋盤的經驗，我們亦將三角形棋盤的擴散問題，拆解成〝軸的擴散〞與〝區域內的擴散〞兩個部分來處理。

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>五方向維持原速
一方向速度加倍</td><td colspan="2">四方向維持原速
兩方向速度加倍</td></tr>
<tr><td colspan="3">第一步的圖</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">軸上的擴散</td><td rowspan="3">原速軸</td><td>數量</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>單位時間擴散</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>t 時間內總和</td><td>5t</td><td>4t</td><td>4t</td></tr>
<tr><td rowspan="3">變速軸</td><td>數量</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>單位時間擴散</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>t 時間內總和</td><td>2t</td><td>4t</td><td>4t</td></tr>
</table>

區域內的擴散	原速區域	數量	4	2	3
		單位時間擴散	t-1	t-1	t-1
		t 時間內總和	$4\frac{t(t-1)}{2}$	$2\frac{t(t-1)}{2}$	$3\frac{t(t-1)}{2}$
	變速區域	數量	2	4	3
		單位時間擴散	2(t-1)	2(t-1)	右上：4(t-1) 上及右下：2(t-1)
		t 時間內總和	$4\frac{t(t-1)}{2}$	$8\frac{t(t-1)}{2}$	$8\frac{t(t-1)}{2}$
總計			$4t^2+3t$	$5t^2+3t$	$\frac{11}{2}t^2+\frac{5}{2}t$
第三步的圖					

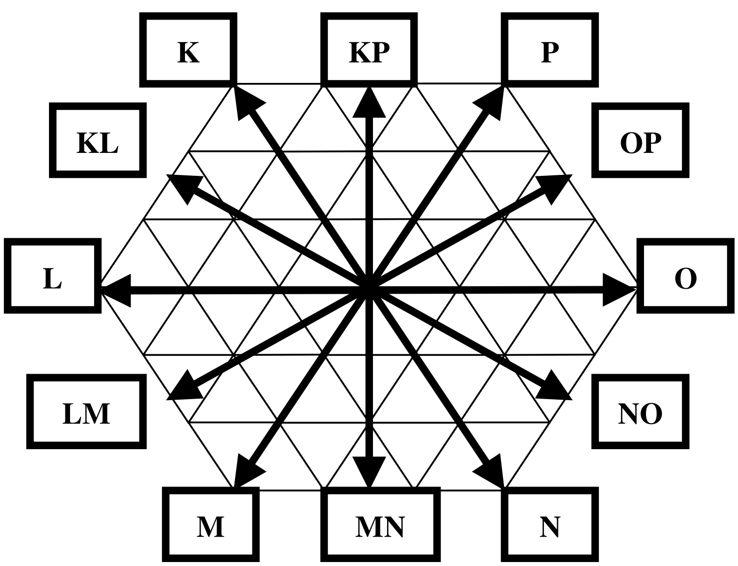
總結：

假設六個方向擴散的速率分別變成原來的 K、L、M、N、O、P 倍(即每單位時間向該方向擴散 K、L、M、N、O、P 個點)則擴散點數的總和爲：

軸上的擴散點總和 ＋ 六個區域的擴散點總和

$$=(K+L+M+N+O+P)t+(KL+LM+MN+NO+OP+KP)(\frac{t(t-1)}{2})$$

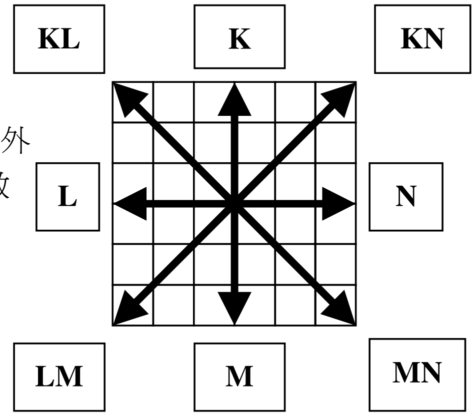
如下圖：



陸、研究結果

一、擴散問題的通式

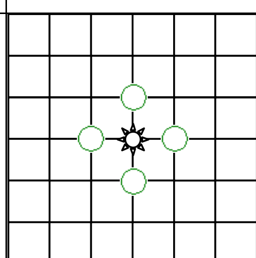
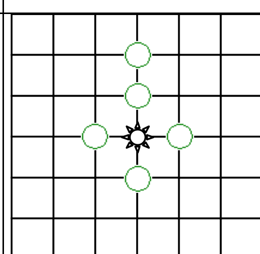
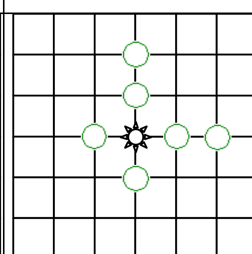
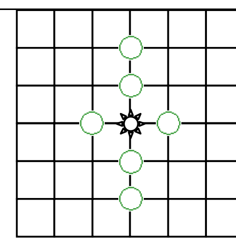
從有界到無界，從等速到變速，我們對於擴散問題的研究，較爲深入完整。我們把所有的擴散問題都拆解成”**軸的擴散**”與”**軸與軸之間的內部區域擴散**”兩個部分，在正方形棋盤中，如果四個方向分別以每單位時間向外擴散 K、L、M 及 N 個起火點(如圖)，則 t 時間內擴散點數總和爲：



軸上的擴散點總和 ＋ 四個區域內擴散點總和

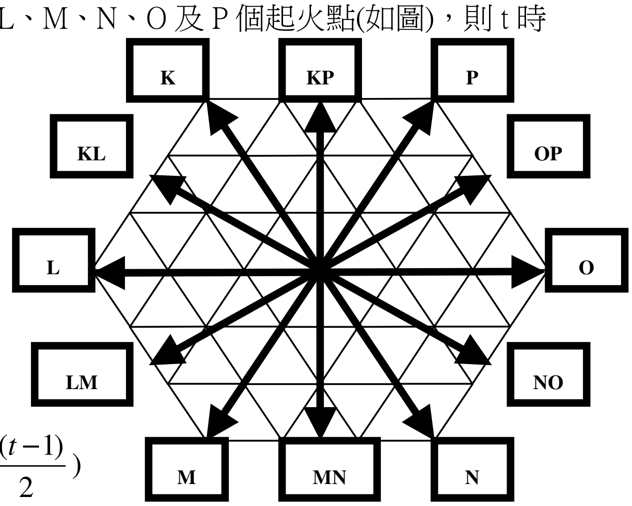
$=(K+L+M+N)t+(KL+LM+MN+KN)(\frac{t(t-1)}{2})$

利用上式，將正方形棋盤擴散問題的主要結果列之如下：

擴散速率 (N,K,L,M)	(1,1,1,1)	(1,2,1,1)	(2,2,1,1)	(1,2,1,2)
圖形				
著火點總數	$2t^2+2t$	$3t^2+2t$	$\frac{9}{2}t^2+\frac{3}{2}t$	$4t^2+2t$

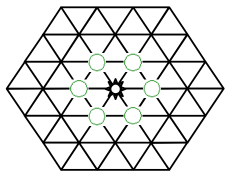
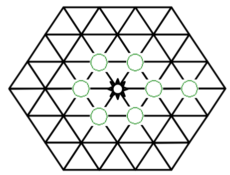
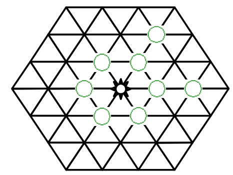
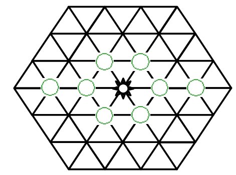
如果六個方向分別以每單位時間向外擴散 K、L、M、N、O 及 P 個起火點(如圖)，則 t 時間內的擴散點數總和爲：

軸上的擴散點總和 ＋ 六個區域的擴散點總和



$=(K+L+M+N+O+P)t+(KL+LM+MN+NO+OP+KP)(\frac{t(t-1)}{2})$

利用上式，將三角形棋盤擴散問題的主要結果列之如下：

擴散速率 (O,P,K,L,M,N)	(1,1,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1,1)	(2,1,1,2,1,1)
圖形				
著火點總數	$3t^2+3t$	$4t^2+3t$	$\frac{11}{2}t^2+\frac{5}{2}t$	$5t^2+3t$

二、防堵問題的結果

(一) 選擇撲滅火勢所考慮的原則

(1) 在有界棋盤中，不希望火勢往發展空間較大的地方蔓延，所以先撲滅可發展空間較大的著火點。在無界棋盤中，通常要撲滅位於火勢較外圍的點，因為這些點會新增較多的起火點。如果擴散速率改變，通常會撲滅速率增加較快的著火點。

(2) 密封的原則，即防火牆最好沒有漏洞，因為若是有漏洞，火勢將由此竄出，進而使得火勢擴散角度增大，增加滅火難度。

(3) 平均的原則，為了不偏重某一方向防堵，而使火勢從另一方向自由擴散出來包圍已滅火點，必須採用對稱(如一左一右或一上一下)的方式輪流平均擺放。

(二) 初次滅火點數需超過初次擴散的二分之一，火勢才有撲滅的可能

發現不管棋盤的形狀如何，初始起火點可擴散出 n 個點，而只要每次撲滅的點數大於或等於 $\frac{n}{2}$ ，就能完全將火勢控制住，使之不再擴散。

(三) 無法包圍火勢時，會形成防火牆

撲滅點數不滿足二分之一定理時，火勢將無法被包圍，而向外擴散出去，此時有可能構成兩種防火牆，一為**完全防火牆**，即可能保有棋盤中較大面積的安全區域，如方形棋盤格中一次滅一點及跳棋棋盤中一次滅相鄰兩點的例子(見下圖 1,2)；另一為**不完全防火牆**，即無法保有最大面積的安全區域，只能從中殺出一條逃生路線，如方形棋盤中一次滅分離的兩點、跳棋棋盤中一次滅一點的例子(見下圖 3,4)。

圖 1

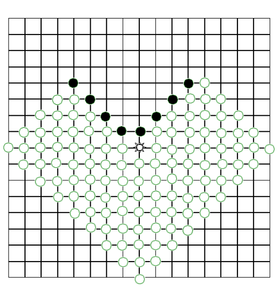


圖 2

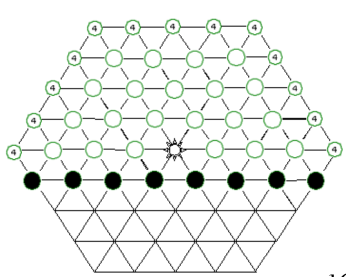


圖 3

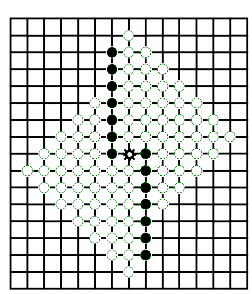
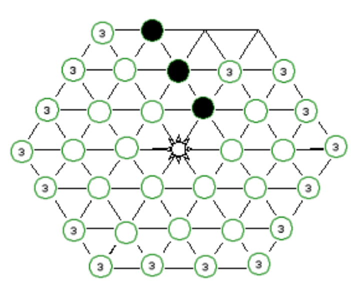


圖 4



三、擴散與防堵問題的應用

在「擴散和救火」的問題上我們有了新的構思，我們認爲此問題並不侷限於火勢的擴散及撲滅上，也可以將這種概念應用在其他方面，例如「H5N1」禽流感病毒的擴散與防堵；又或著網路上的「詛咒郵件」:「若是你沒有將這封信轉寄給 6 個人的話那麼你將會遭受到世界上最大的不幸」，有的人半信半疑將信件轉發給 6 個人，有的人覺得很無聊，不想理會而不轉寄，而在轉寄過程中也會有轉寄到重複的人手中，這種信件的轉寄相當於第一個議題「擴散」的問題，而有人不信邪刪掉信就相當於第二個議題「撲滅」的問題，而在轉寄過程中重複收到信的人就相當火勢重複燒到同一個點，只不過這類的擴散問題有可能傳回轉寄者身上。

柒、展望

受限於截稿時間，必須暫時做個結束，不過我們還是意猶未盡。討論過發現，有兩個可行的推廣。

一是三度空間的推廣，尤其是考慮一整排高樓大廈的救火問題時，火勢會 x,y,z 軸等六個方向擴散時，這一類的擴散與救火問題又該如何解決呢？我們初步認爲把二度空間中的擴散問題拆成”軸的擴散”與”軸間區域的擴散”的想法可以推廣至三度空間，也許要拆解成”(6 個)軸的擴散”、”(12 個)軸間的平面擴散“和”(8 個)軸間的卦限擴散”，不過這只是初步的想法，尚未落實。

二是在擴散問題中加入能量的觀點，這是繼改變擴散速率之後的另一個創舉，我們想讓這一類的問題更符合實際的需求。假設在擴散時，能量或威力隨之遞減，我們想知道經過 n 次傳遞之後，能量的變化關係，或是，可否把能量當成是一種指標，成爲滅火時的量化準則(消滅潛在能量最大的位置)？這樣在程式化的過程中，能成爲電腦判斷的依據。

我們透過管道，想請人將此次科展主題作成 Java Game，希望能放到網路讓大家玩，將紀錄各種條件中最少步數前幾名的撲滅路徑，和我們先前所做出來的答案相比較，希望能和各路高手競技，刺激求進步。

附錄(一) 三角形棋盤，(兩點在一起、一點分開)一次撲滅三點的情況

第一種情況：犧牲一點

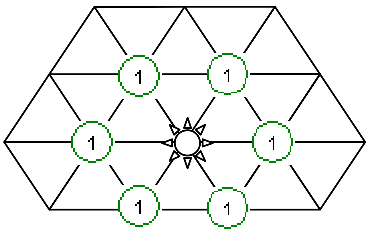
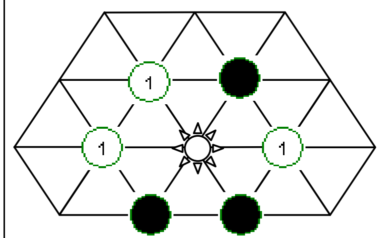
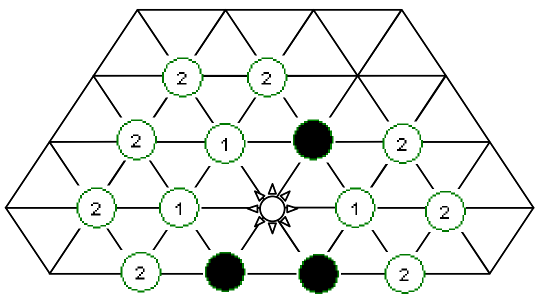
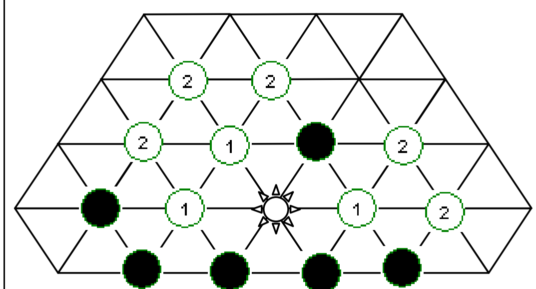
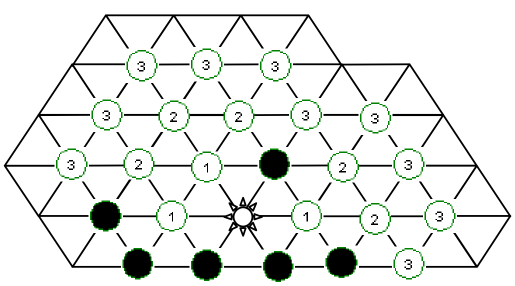
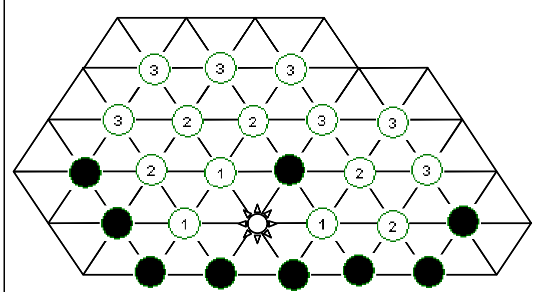
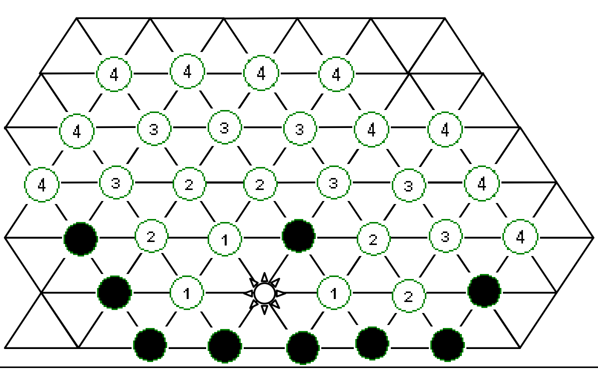
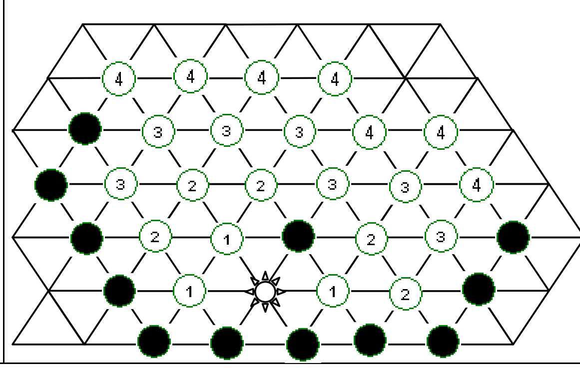
圖 1-1  向外擴散六點	圖 1-2  將兩個滅火點連在一起、一點分開
圖 2-1  第二次擴散，未滅的點向外擴散出八點	圖 2-2  爲使擴散範圍縮小，盡量將滅火點連在一起，形成一暫時防火牆，使火勢擴散角度漸漸變小
圖 3-1  第三次擴散，**但已經有一個滅火點被火勢包圍**	圖 3-2  在此次滅火中，犧牲一個滅火點，之後以相同的方式盡量將滅火點連在一起
圖 4-1 	圖 4-2 

圖 5-1

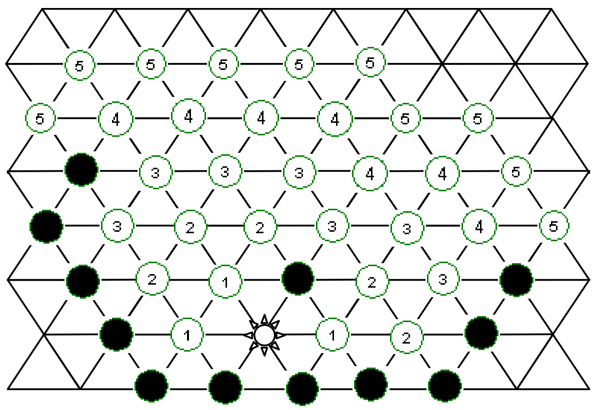


圖 5-2

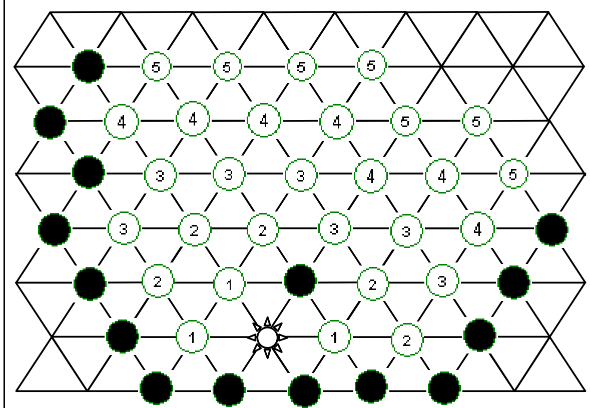


圖 6-1

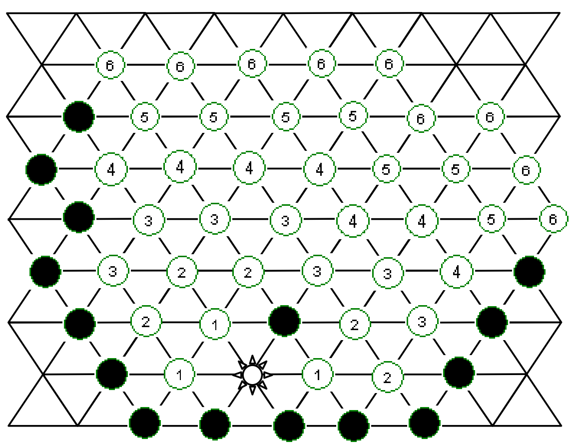


圖 6-2

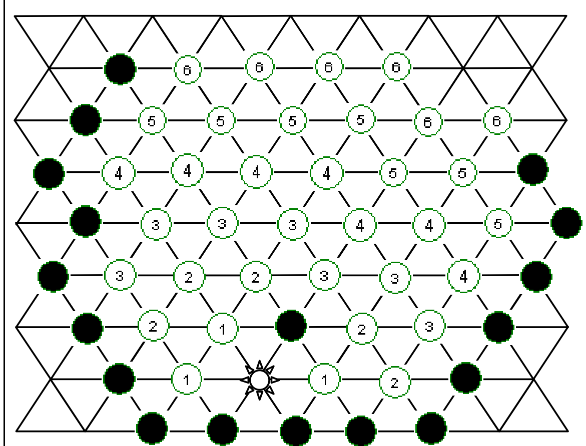


圖 7-1

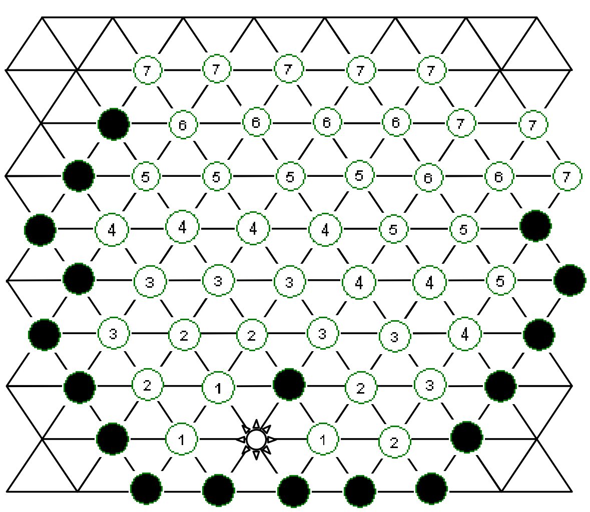


圖 7-2

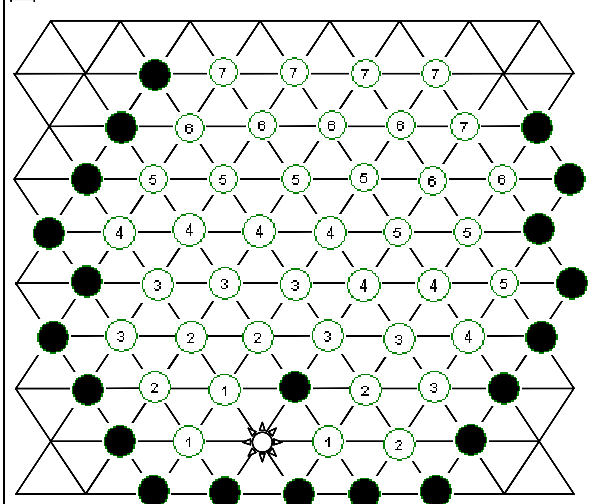
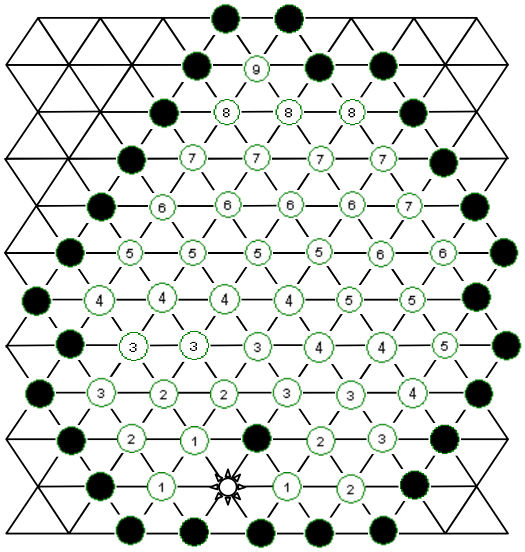


圖 8-1



第十次時，因為受到防火牆的抑制，火勢擴散的角度逐漸變小，最後，終於包圍，犧牲了一個滅火點，包含此滅火點共有 29 個滅火點，不含初始起火點，共有 44 個起火點。

有鑒於在第一種情況中，有一點被包圍，於是我們想出了第二種情況，在第二步時將三個滅火點的位置連在一起，沒有點被包圍，但有一步例外。

第二種情況：允許一點破例

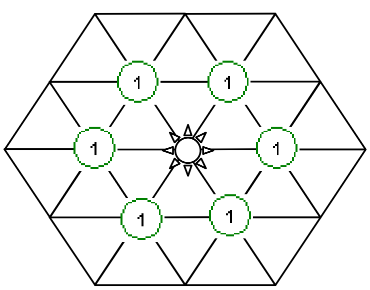
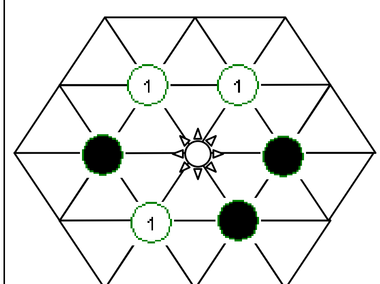
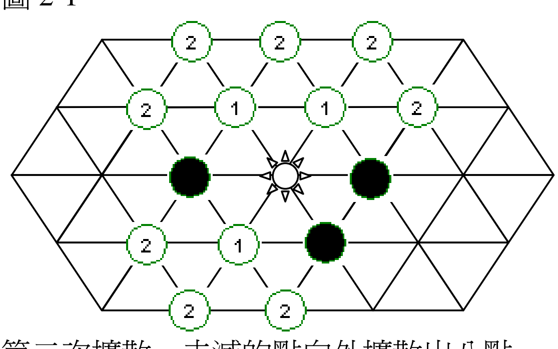
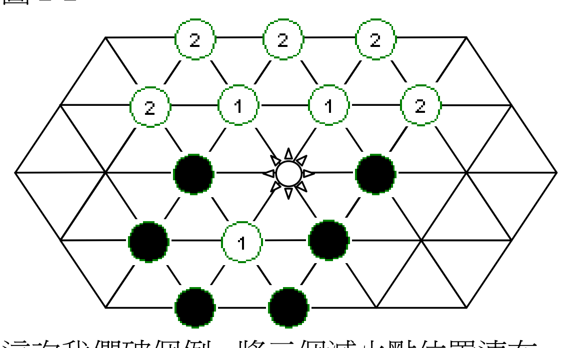
圖 1-1  火勢向外擴散六點	圖 1-2  將兩個滅火點連在一起、一點分開
圖 2-1  第二次擴散，未滅的點向外擴散出八點	圖 2-2  這次我們破個例，將三個滅火點位置連在一起**(沒有按照規則)**，馬上就形成了一個暫時防火牆，使火勢不至雙向分頭擴散

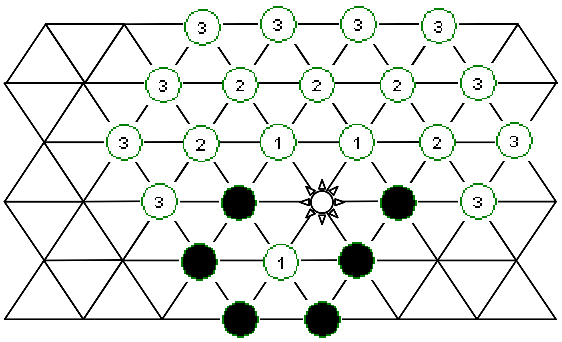
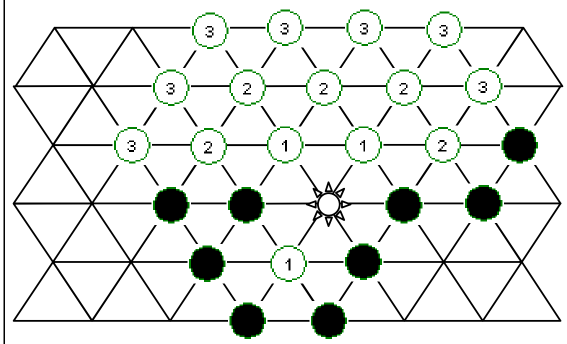
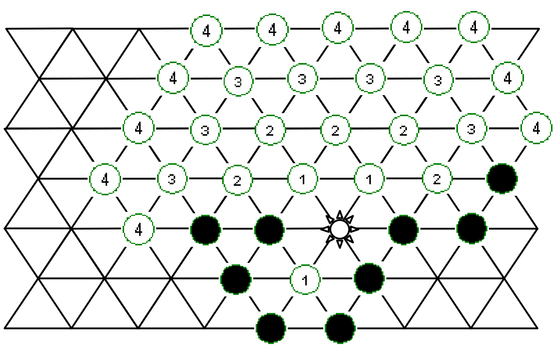
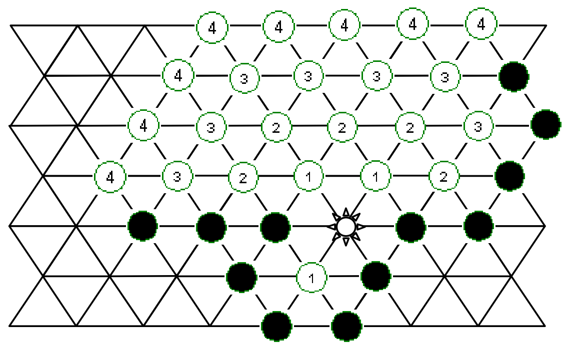
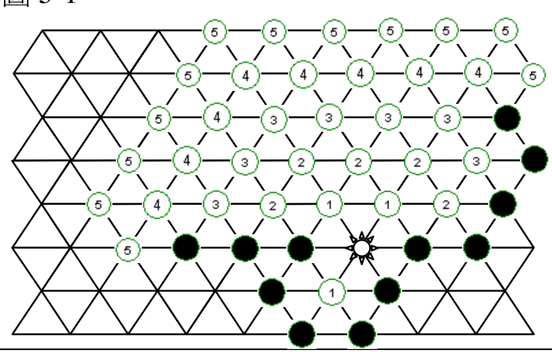
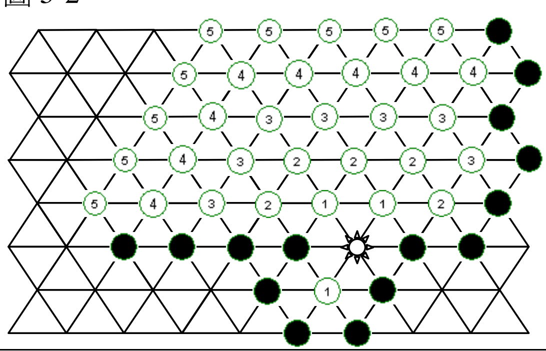
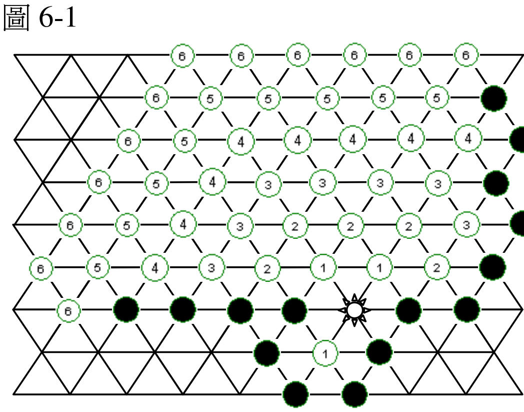
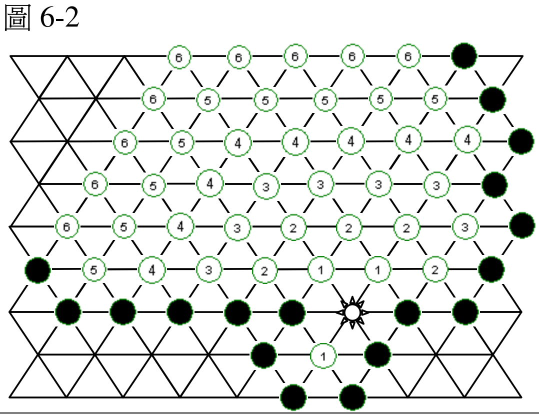
圖 3-1  第三次擴散，未滅的點向外擴散出十點	圖 3-2  為了不使滅火點被火勢包圍，我們盡量將滅火點連在一起，並縮減了火勢可擴散的角度
圖 4-1  第四次擴散，火勢擴散的角度又增大	圖 4-2  同理，除左右各放一點外，另外一點放在可能將擴散角度變大的起火點上(仍要遵守兩點一起、一點分開)，爾後，也以相同的方式滅火
圖 5-1 	圖 5-2 
圖 6-1 	圖 6-2 

圖 7-1

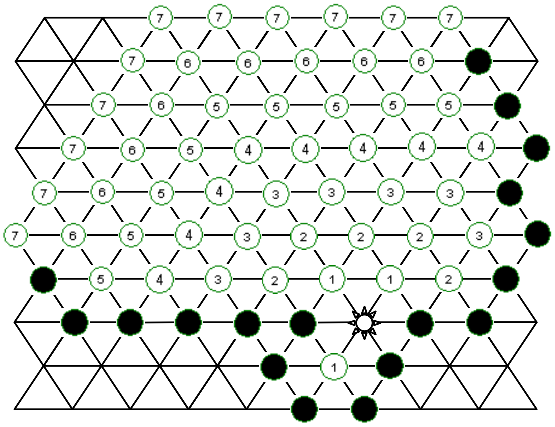


圖 7-2

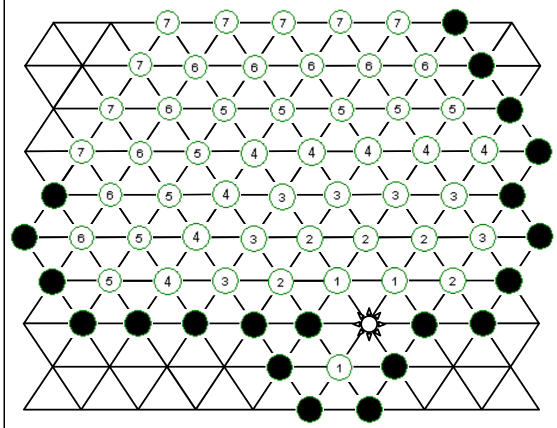
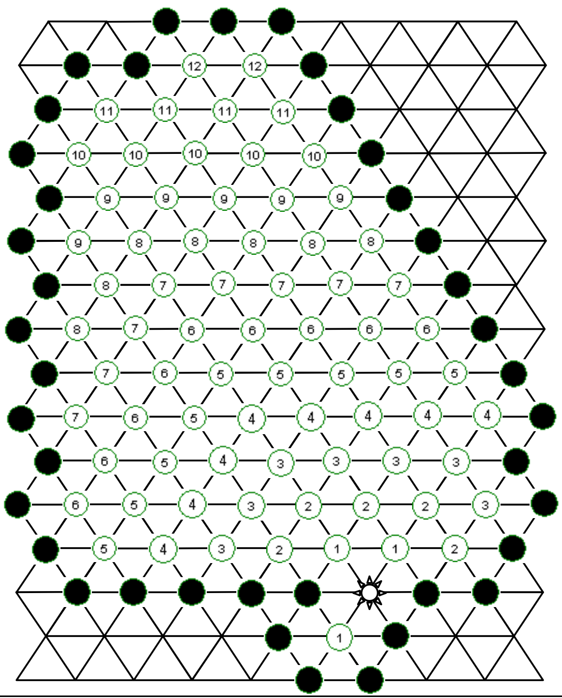


圖 8-1



第十三次，火勢終被包圍，共有 39 個滅火點，不含初始起火點，共有 73 個起火點

評　　　語

040402　打火英雄

1. 本作品適合動態展示。現場表現顯示作者懂得如何善用現代科技工具來實施這類的展示。

2. 不見任何參考資料。

3. 數學的探討有待加強。