中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030423

拿破崙三角形與畢氏定理的聯想

學校名稱： 基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳致安	林耀南
國三 朱建威	劉興敬
國三 陳揚叡	

關 鍵 詞：拿破崙三角形、畢氏定理、切線三角形

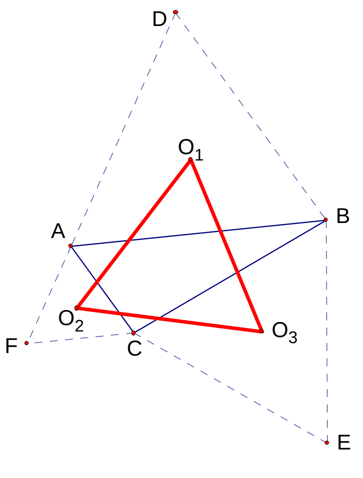
拿破崙△與畢氏定理的聯想

壹、摘要：

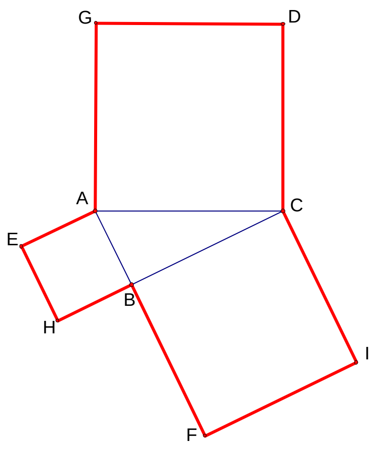
以任意△三邊為直徑的半圓，依相同圓心角所畫出來的三切線相交所成的△必與原△相似，不論這些半圓同時向外畫或同時向內畫或內外混雜著畫，所作出來的△一定都與原△相似。對任一直角△，若兩股的半圓往外畫，斜邊的半圓向內畫，取圓心角為 30°時，所作出來的切線△與原△的邊長比值恆為$\frac{1}{2}$，本文掌握它的逆向作圖法，因此對任一直角△，若按此法連續作 n 次，即可得 2^n 倍的相似△，反之可得$(\frac{1}{2})^n$倍的相似△。 外拿破崙△與內拿破崙△的面積差恆與原△的面積相等，這是一個著名的拿破崙△性質，本文發現了一個同樣有趣的性質：在同圓心角的條件下，向外與向內切線△的對應邊長和，恆為圓心角是 0°時的邊長的兩倍。

貳、研究動機：

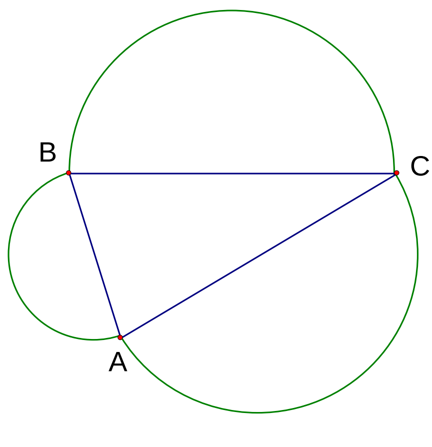
在一篇數學課外文章中提到著名的拿破崙△，如圖(1)，以任一△的三邊為邊長分別往外畫正△，再分別連接這三個正△的中心點，結果會發現△$O_1O_2O_3$仍為正△，而內外兩拿破崙△的面積差恆等於原△的面積。又畢達哥拉斯發現，以任一直角△的三邊長為邊長分別往外畫正方形，結果會發現那兩個小正方形的面積會等於最大的那個正方形面積，如圖(2)。由於正△、正方形都是正多邊形，當它們畫在△的三邊上都有意外的發現，而正多邊形當邊數無限增多時可看成近似一個圓，因此我們想嘗試在一般△的三邊上，分別畫出半圓，如圖(3)，希望也能發現一個有特點的性質。



圖(1)



圖(2)



圖(3)

參、研究目的：

利用幾何知識探討如圖(3)的一個有特色的幾何性質

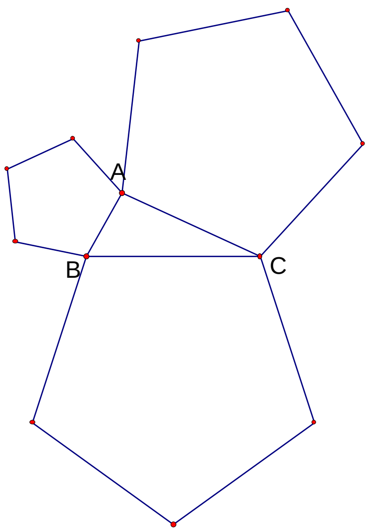
肆、研究設備器材：

紙、尺、筆、圓規、GSP 軟體。

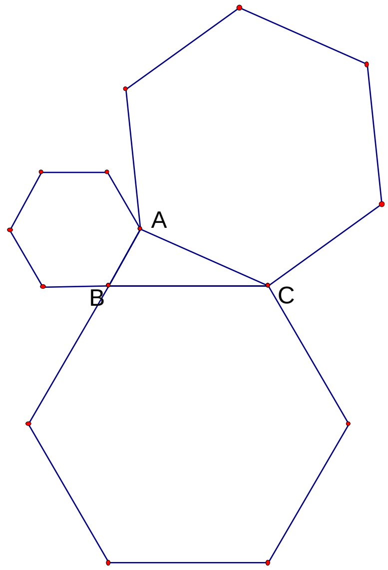
伍、研究過程：

首先我們要再解釋研究動機中的圖（3）靈感是怎麼來的，觀察圖（1）的拿破崙△的圖形構造是由三角形的三邊各自往外畫一個正△，而在圖（2）的構造是由直角△的三邊各自往外畫正方形. 按此道理擴展下去應該也可以往外畫正五邊形, 如圖(4)、正六邊形, 如圖(5)……

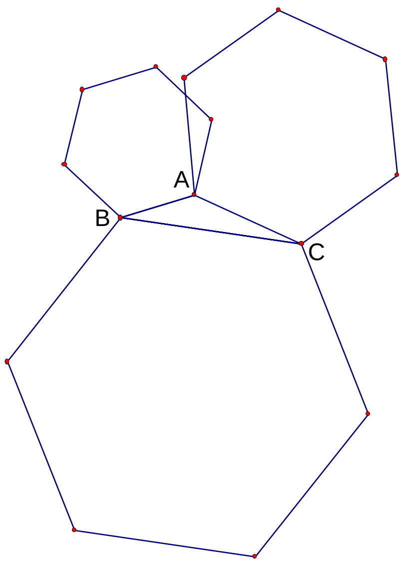
等，但這有些先天上的問題缺陷，就是那些正多邊形會漸漸重疊，如圖（6），若要不使它們重疊，則母△要越來越特殊才行，也就是說最後很可能母△都要變成正△時，圖形才像個樣。但我們知道當邊數愈來愈多時，正多邊形就越接近圓形，且為了使母△不要特殊化成正△，如圖（7），我們設計了三邊各自往外畫半圓的圖形架構，如圖（3）。如此一來，對任一鈍角△、直角△或銳角△來說，以三邊為直徑各自往外畫半圓所形成的圖形就顯得較自然了。



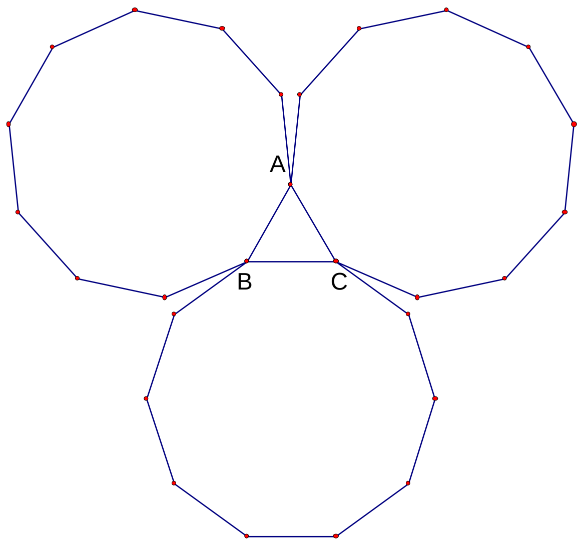
圖(4)



圖(5)

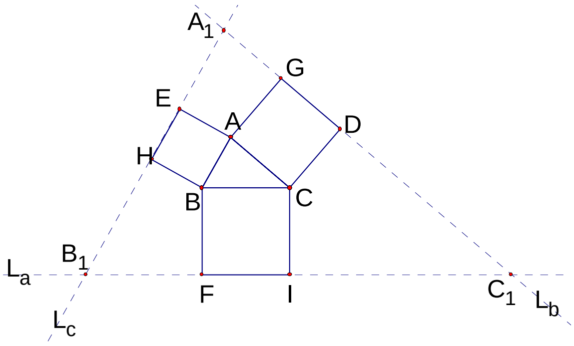


圖(6)

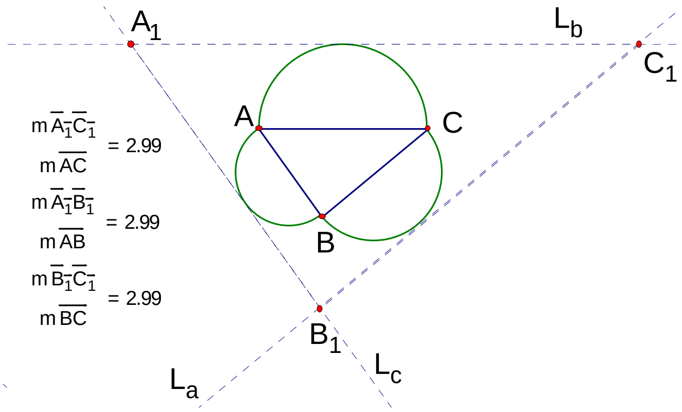


圖(7)

接下來另一條重要的線索是在圖（2）的畢氏圖中若分別延長 $\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{FI}$ 得直線 L_b、L_c、L_a，各交於 A_1、B_1、C_1 點，如圖（8），則明顯的我們可以得知，△$A_1B_1C_1$ △ABC，因此我們自然的就能想到若我們在圖（3）的三個半圓弧上分別畫出切線 L_b、 L_c、 L_a，設三切線各自平行原△的對應邊，且三交點各為 A_1、B_1、C_1，則明顯的△$A_1B_1C_1$ △ABC，如圖(9)。

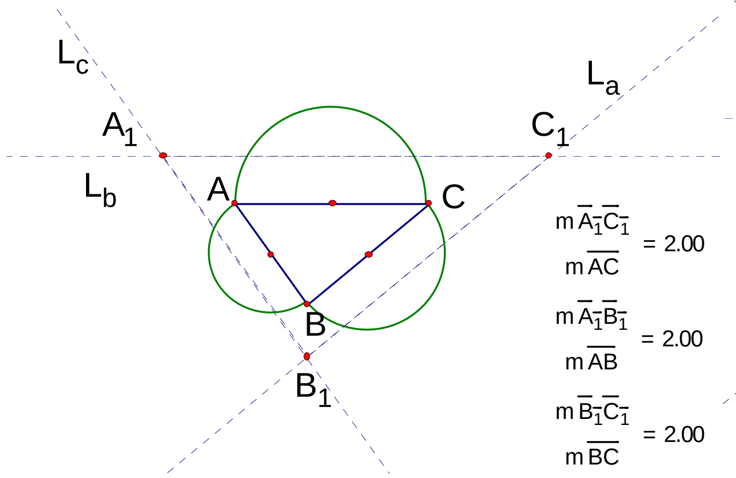


圖（8）

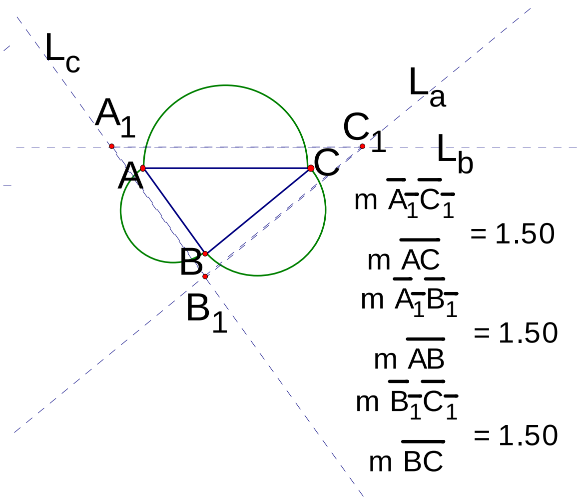


圖（9）

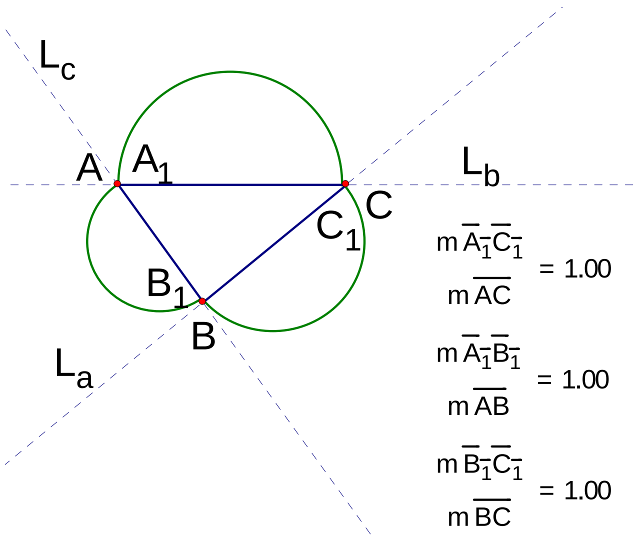
而當 L_b、L_c、 L_a 逐漸向內平移成為割線時，我們顯然可以得知，$\triangle A_1B_1C_1$　△ABC，如圖（10）、圖（11）、圖（12），其中割線與各自對應邊長的距離分別為 $\frac{1}{2}r$、$\frac{1}{4}r$、0r(r 表半徑)。由相似形概念，可推得邊長比值分別為 2、1.5 和 1。



圖（10）



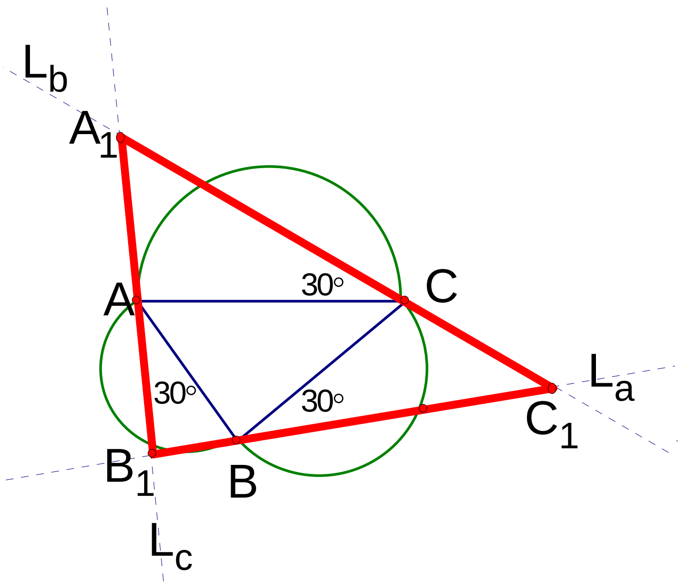
圖（11）



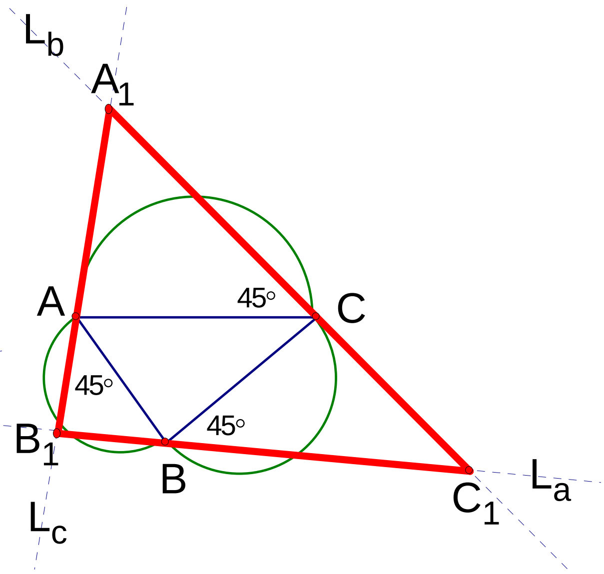
圖（12）

在圖（12）中，L_a、L_b、 L_c 已分別和原△三邊重合，當然$\triangle A_1B_1C_1$　△ABC，經由這個

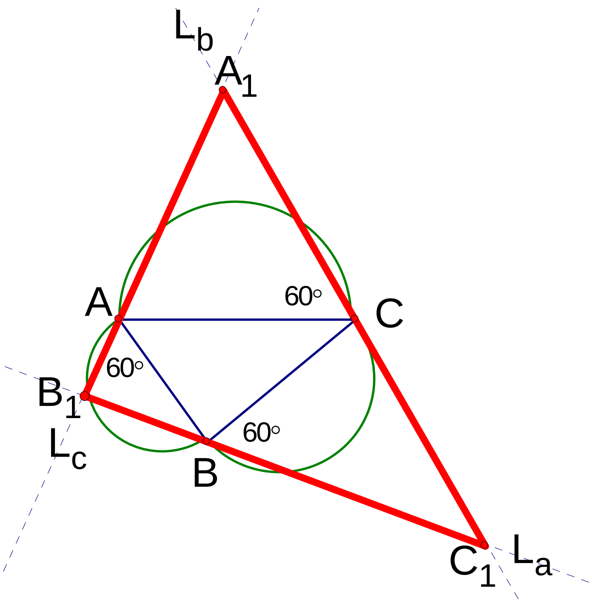
圖我們聯想到將三割線的一端若固定在原△的一頂點上，如圖（13)、(14)、(15)、(16)，而各取圓周角 30°、45°、60°、90°時，這時△$A_1B_1C_1$仍會相似△ABC 嗎？



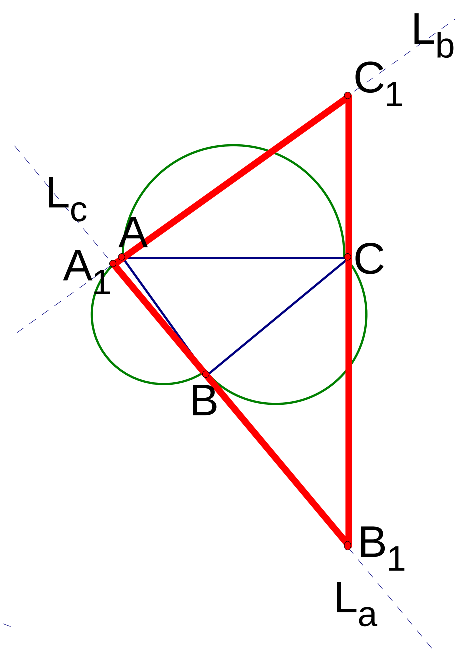
圖（13）



圖（14）



圖（15）



圖（16）

以圖（13）為例，三割線 L_a、 L_b、 L_c與對應三邊長的圓周角為 30°。

則∠B_1AC =∠AA_1C +∠ACA_1

即 30°+∠BAC=∠AA_1C +30°

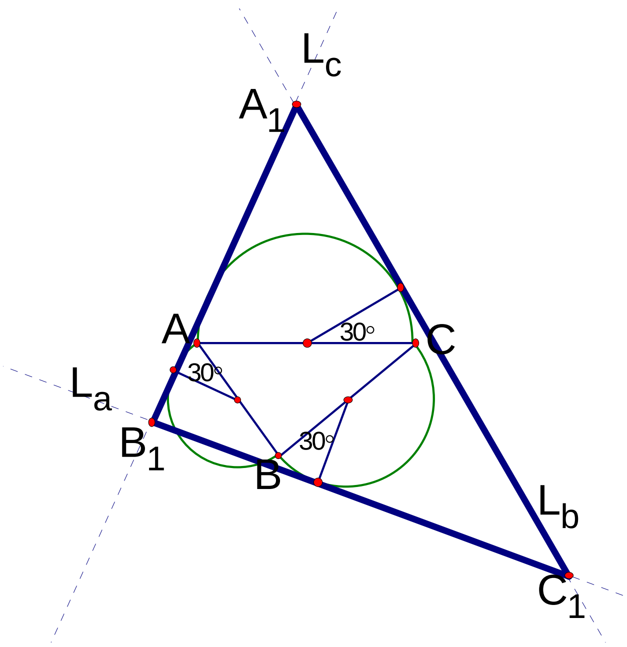
∴∠BAC=∠AA_1C

同理∠ABC=∠B_1　　∠ACB=C_1

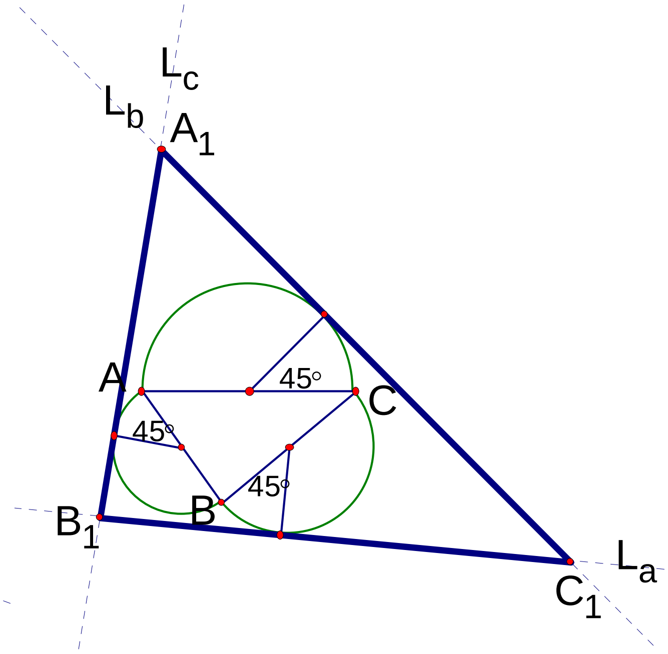
∴△$A_1B_1C_1$　△ABC（AA 相似）

注意圖（16）中，當圓周角為 90°時，其實 L_a、 L_b、 L_c已變為切線了，而圓周角其實已變為弦切角，此弦是半圓的直徑，這又引起我們更進一步的聯想，我們若將三切線的切點沿

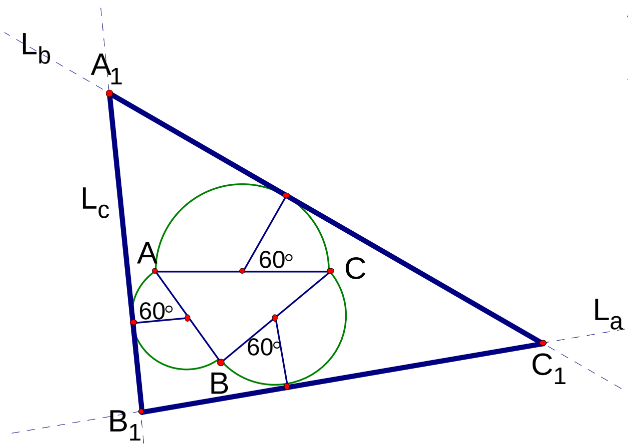
著半圓弧移動並觀察圓心角為 0°、45°、60°、90°、120°……時三切線交成的△ $A_1B_1C_1$(之後都簡稱為切線△)，則它與原△ABC 是否相似呢？如圖（17)、(18)、(19)、(20)，這就形成了研究動機中圖（3）的架構了。我們的研究重點將從此處展開！



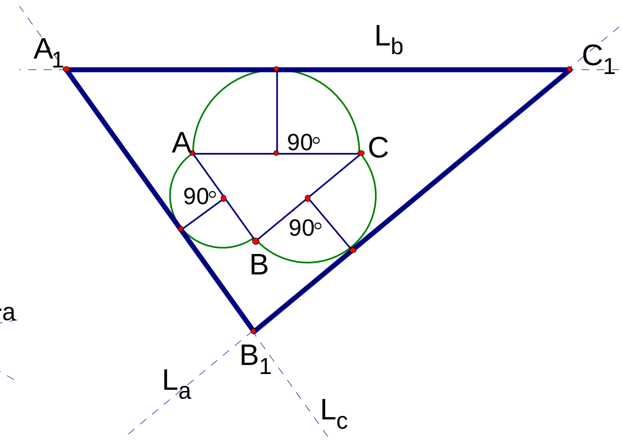
圖（17)



圖（18)

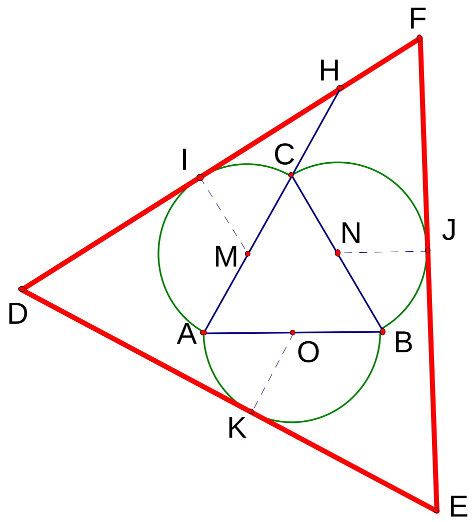


圖（19)



圖（20)

為簡化此架構，先從最簡單的正△開始著手。也就是說若在圖(3)中的△ABC 為正△時，則同圓心角的切線三角形是否和原△ABC 相似呢？又邊長比值要如何計算？



圖(21)

說明如下：

已知：如圖(21)，M、N、O 各為正△ABC 三邊上的中點，$\overline{MI}$、$\overline{OK}$、$\overline{NJ}$ 皆為半徑且∠CMI=∠AOK=∠BNJ，再分別過 I、J、K 做其切線相交於 D、E、F

試證：△DEF~△ABC

證明：(1)設三邊中點為 O、N、M，三切線依次為 K、J、I

(2) 設∠CMI=∠JNB=∠KOA= a°(圓心角)

(3) 延長 $\overrightarrow{AC}$，交 $\overline{DF}$ 於 H

(4)在△HIM 中，∠CHF=90°+a°(外角性質)

(5)∠HCN=120°，∠JNC=180°-a°，∠NJF=90°

(6) 在 CNJFH 中，∠F=540°-∠CHF-∠HCN-∠JNC-∠NJF

=540°-(90°+a°)-120°-(180°-a°)-90°

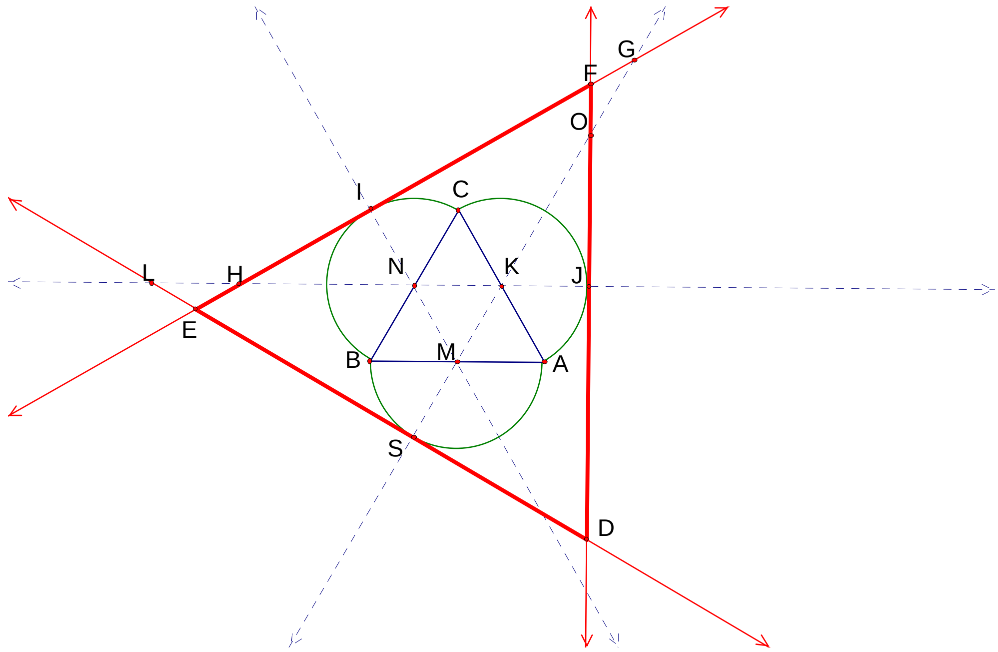
=540°-90°- a°-120°-180°+ a°-90°

= 60°=∠ACB-①

(7) 同理∠D=∠CAB-②

(8) 由①、②得△ABC ~△DEF(AA 相似)

證明此作圖法做出的△會和原來的正△相似後，我們並進一步計算當圓心角為特殊角度的相似正△與原正△的邊長的比值，我們以圓心角為 60°的為例，如圖(22)。



圖(22)

計算如下：

(1) 設 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$ =2a

(2) ∵N、M、K 分別為正△ABC 的三中點，∴△MKN 亦為正△

(3) 延長 $\overrightarrow{NK}$ 交 $\overline{EF}$ 、 $\overrightarrow{DE}$ 於 H、L

(4) 延長 $\overrightarrow{MK}$ 交 $\overline{FD}$、 $\overrightarrow{EF}$ 於 O、G

(5) ∵∠INH=60°，又∠HIN=90°，∴△HNI 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{IN}$ =a、 $\overline{IH}=\sqrt{3}$ a

(6) ∵∠IMG=60°，又∠GIM=90°，∴△GMI 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{IM}$ =2a、 $\overline{IG}$ =2 $\sqrt{3}$ a

(7) 在△LSK 與△GIM 中，∵ $\overline{KS}=\overline{MI}$ =2a，∠LKS=∠GMI，∠KSL=∠MIG

∴△LSK≅△GIM(ASA 全等)，∴ $\overline{LK}=\overline{GM}$

(8) 在△INH 與△JKO 中，∵ $\overline{IN}=\overline{KJ}$ =a，∠INH=∠JKO，∠NIH=∠KJO

∴△INH≅△JKO(ASA 全等)，∴ $\overline{HN}=\overline{KO}$

(9)∵ $\overline{LK}=\overline{GM}$ ，又 $\overline{HN}=\overline{KO}$、 $\overline{NK}=\overline{MK}$ ，∴ $\overline{LK}-\overline{HN}-\overline{NK}=\overline{GM}-\overline{KO}-\overline{MK}$ ，∴ $\overline{LH}=\overline{OG}$

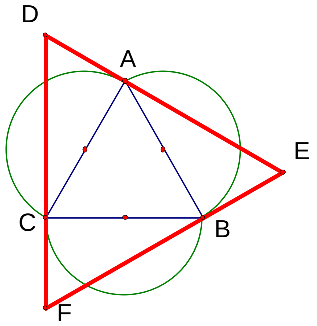
(10)在△LEH 與△GFO 中，∵∠HLE=∠OGF=30°，∠LHE=∠GOF=30°， $\overline{LH}=\overline{OG}$

∴△LEH≅△GFO(ASA 全等)，∴ $\overline{EH}=\overline{FG}$

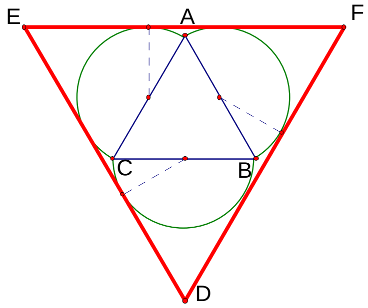
(11)∵ $\overline{EH}=\overline{FG}$，∴ $\overline{EF}=\overline{EH}+\overline{HF}=\overline{FG}+\overline{HF}=\overline{IH}+\overline{IG}=\sqrt{3}$ a+2 $\sqrt{3}$ a=3 $\sqrt{3}$ a

∴ $\overline{EF}$ ： $\overline{BC}$ =3 $\sqrt{3}$ a：2a= $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

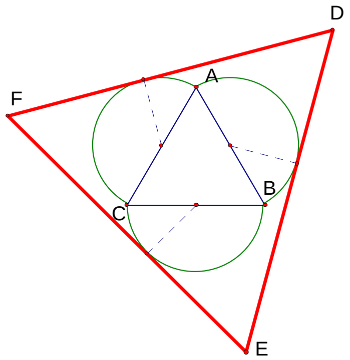
我們也畫出其他特殊角度的圓心角之圖形，並算出其比值列成下表(1)



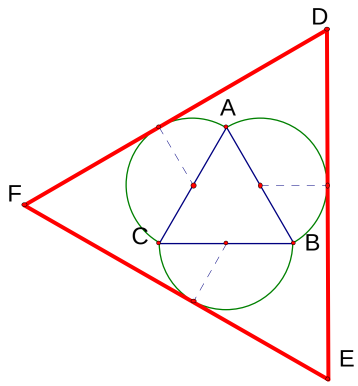
圓心角 0°，圖(23)



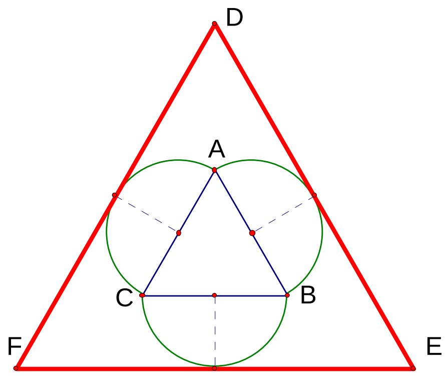
圓心角 30°，圖(24)



圓心角 45°，圖(25)



圓心角 60°，圖(26)



圓心角 90°，圖(27)

圓心角	0°	30°	45°	60°	90°
邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}+1$

表(1)

當將半圓往外的討論完以後，我們也想進一步嘗試將半圓往內作是否有可能得到類似的情形呢？我們的嘗試如下：

已知：如下圖(28)，M、N、P 各為正△ABC 三邊上的中點， $\overline{MN}$、 $\overline{NP}$、 $\overline{PM}$ 皆為半徑，且∠AMP=∠BNM=∠CPN=60°，分別過 M、N、P 的三切線相交於 D、E、F

試證：△DEF~△ABC

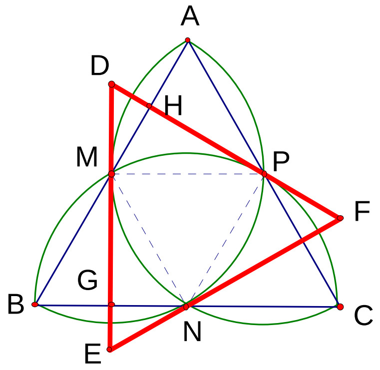
證明：(1)∵圓心角為 60°，∴∠APM=∠BNM=∠CPN=60°，∴ $\overline{MN}=\overline{MB}=\overline{NB}$

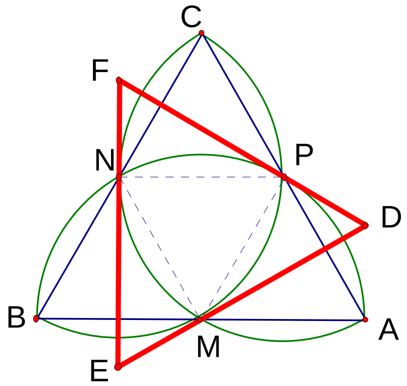
(2)∵△MNB 為正△，∴∠MNB=60°，設 $\overline{DE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G

(3)∵∠MGN=90°，又∠MNG=60°，∴∠GMN=30°
(4)∵∠GMN=30°，∴∠GMB=∠DMA=30°

(5)設$\overline{DF}$交$\overline{AB}$於 H

(6)∵∠DMA=30°，又∠DHM=90°，∴∠MDH=60°=∠A-①
(7)同理∠DFE=∠C-②
(8) 由①、②得△ABC ~△DEF(AA 相似)





圖(28) 圖(29)

我們進一步算出圓心角為特殊角度的△DEF 和△ABC 的對應邊長的比值，我們以圓心角為 60°的為例，如圖(29)。計算如下：

(1)設$\overline{EM}$為 a，則$\overline{MN}$為$\sqrt{3}$a，$\overline{NE}$為 2a

(2)$\overline{MN}=\overline{NP}=\overline{PM}=\sqrt{3}$a

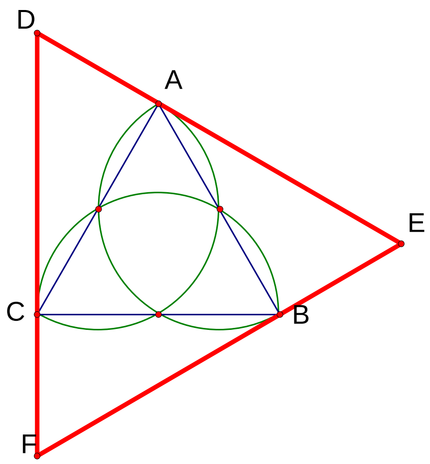
(3) ∵$\overline{NP}=\sqrt{3}$a，∴$\overline{FN}$=a

(4) $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{EN}+\overline{NF}$=2a+a=3a

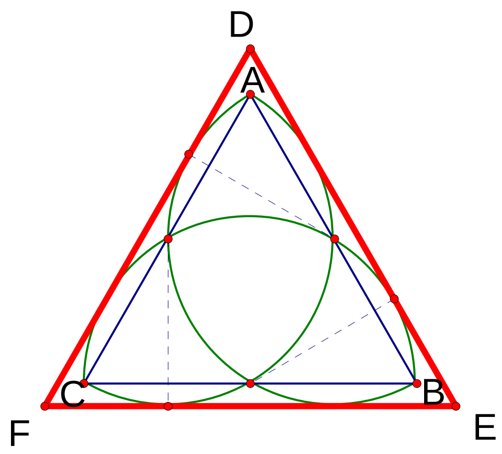
(5)由$\overline{MN}=\sqrt{3}$a，$\overline{AB}$=2$\sqrt{3}$a

(6) 得$\overline{DE}$：$\overline{AB}$=3a：2$\sqrt{3}$a=3：2$\sqrt{3}$=3$\sqrt{3}$：6=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

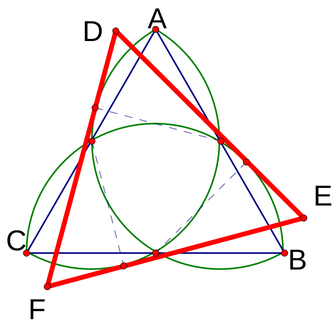
同樣地我們也畫出其他特殊角度的圓心角之圖形，並算出其比值列成下表(2)

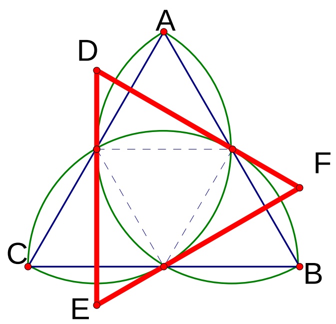


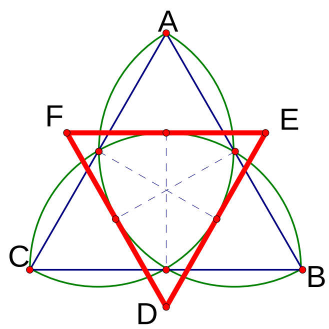
圓心角 0°，圖(30)



圓心角 30°，圖(31)





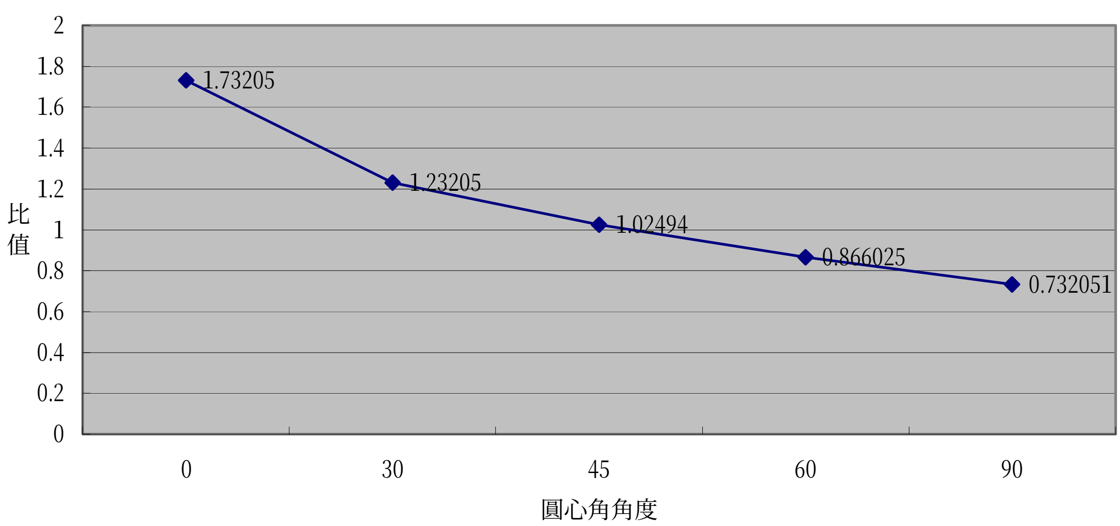


圓心角 45°，圖(32)　圓心角 60°，圖(33)　圓心角 90°，圖(34)

圓心角	0°	30°	45°	60°	90°
邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}-1$

表(2)

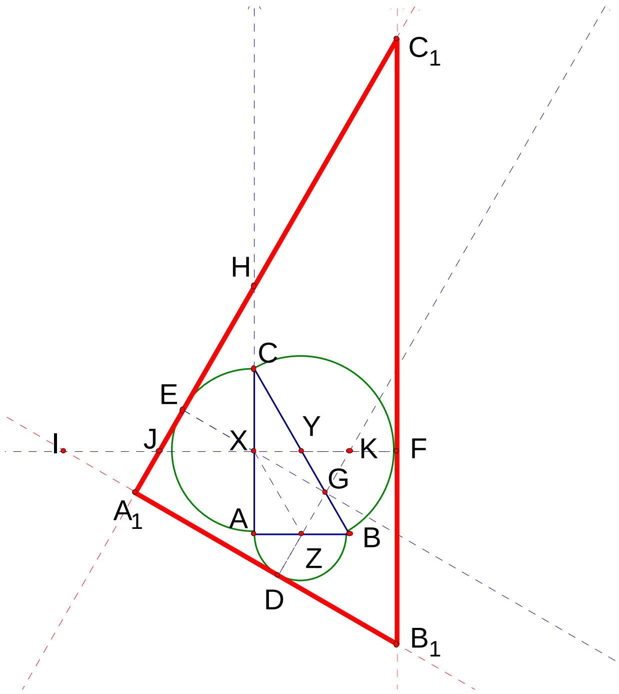
為觀察上表中邊長比值的變化，我們利用 EXCELL 軟體繪製出這曲線圖來，如下



接下來將正△改成較常見的 30°-60°-90°△試試看，看看是否也有相同的結果？

已知：如圖（35)，△ABC 為直角△，∠A=90°，∠B=60°，∠C=30°，半圓往外畫，三邊中點各為 X、Y、Z，取圓心角∠CXE=∠BYF=∠AZD，分別過 D、E、F 作三切線，相交於 A_1、B_1、C_1

試證：$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$



圖(35)

證明：(1)設 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中點分別為 X、Y、Z

(2) 設∠EXC 為 a°(即為圓心角角度)，則∠FYB=∠DZA 為 a°

(3) 延長 $\overrightarrow{EX}$，設交 $\overline{BC}$ 於 G，延長 $\overrightarrow{AC}$，設交 $\overline{A_1C_1}$ 於 H

(4)∵∠ACB 為 30°，∴∠HCY 為 180°-30°=150°

(5)∵∠HEX =90°，∴$\angle C_1HC$=90°+a°

(6)∵∠FYB=a°，∴∠CYF=180°-a°

(7)在 C_1HCYF 中，$\angle C_1=540°-\angle C_1HC-\angle HCY-\angle CYF-\angle YFC_1$

=540°-(90°+a°)-(150°)-(180°-a°)-90°

=540°-90°-a°-150°-180°+a°-90°

= 30°=∠ACB-①

(8) 同理$\angle B_1$=∠ABC-②

(9) 由①、②得$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (AA 相似)

我們以圓心角 60°為例，圖(35)，計算出切線△與原△對應邊長的比值為$\frac{11\sqrt{3}}{6}$，其它的圓心角作圖見圖(36)~(40)

已知：如圖（35)，△ABC 為直角△，∠A=90°，∠B=60°，∠C=30°，半圓往外畫，三邊中點各為 X、Y、Z，取圓心角為 60°，分別過 D、E、F 作三切線，相交於 A_1、B_1、C_1

試求：切線△與原△對應邊長的比值

(1)延長 $\overrightarrow{FY}$、$\overrightarrow{DZ}$，交 $\overline{A_1C_1}$、$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{XY}$ 於 I、J、K

(2)設 $\overline{AZ}$ =a

(3)∵△ABC 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{XY}=\overline{DZ}$ =a， $\overline{FY}=\overline{XZ}$ =2a

(4)∵△HJX 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{JX}$ =2a

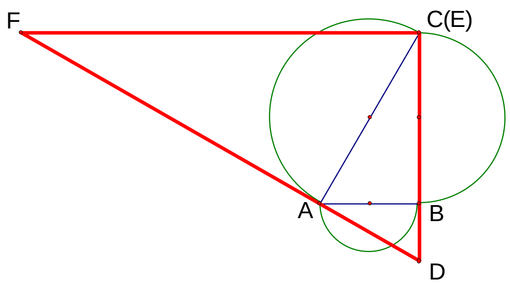
(5)∵△C_1JF 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{C_1F}$ =5$\sqrt{3}$a

(6)∵△KXZ 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{ZK}=\overline{XZ}$ 2a

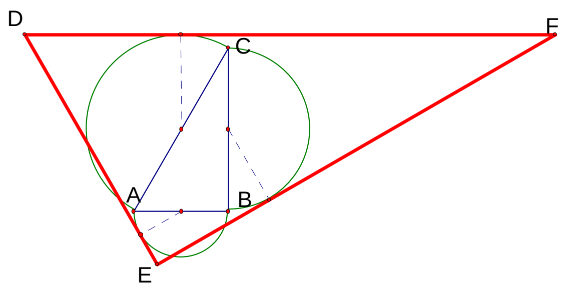
(7)∵△JKD 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{IK}$ =6a

(8)∵△IFB_1為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{FB_1}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$a

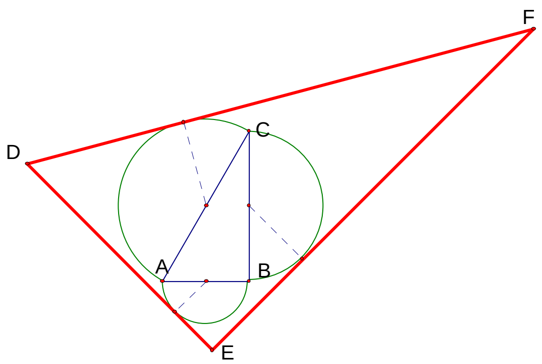
(9) $$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{FC_1}+\overline{FB_1}}{\overline{BC}}=\frac{5\sqrt{3}a+\dfrac{7\sqrt{3}}{3}a}{4a}=\frac{\dfrac{15\sqrt{3}+7\sqrt{3}}{3}}{4}=\frac{22\sqrt{3}}{12}=\frac{11\sqrt{3}}{6}$$



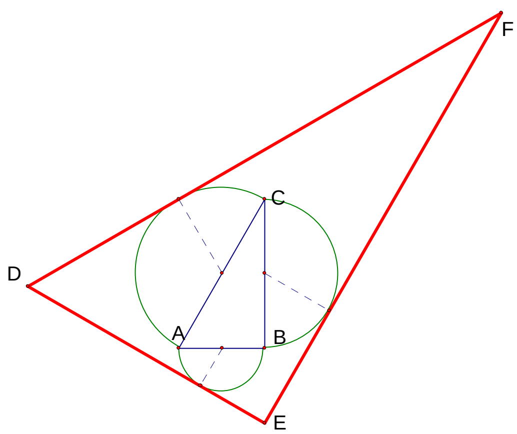
圓心角 0°，圖(36)



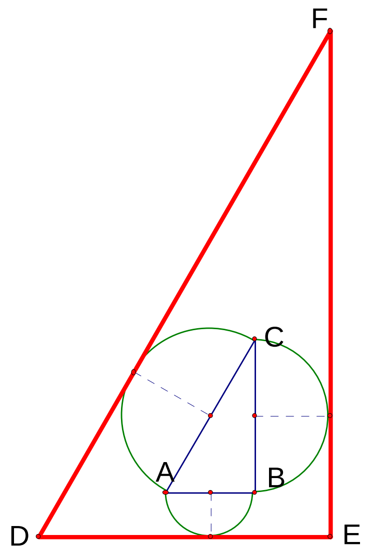
圓心角 30°，圖(37)



圓心角 45°，圖(38)



圓心角 60°，圖(39)

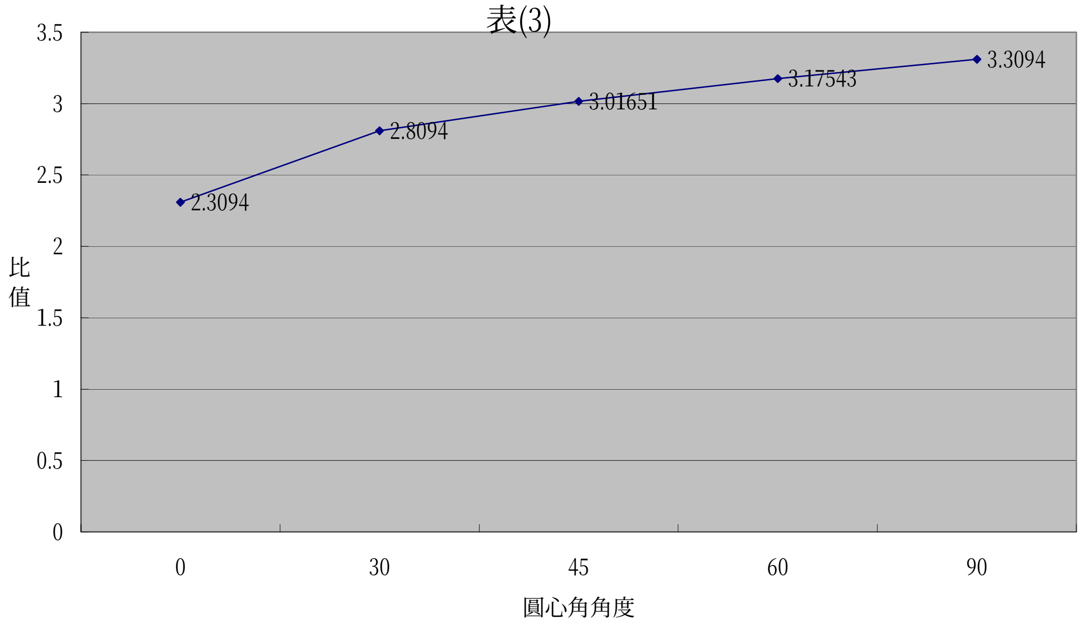


圓心角 90°，圖(40)

這種作圖法皆可得到相似△，我們也將它的邊長比值列成下表(3)，並繪製成曲線圖。

圓心角	0°	30°	45°	60°	90°
邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$

表(3)



接下來我們也將 30°-60°-90°的△往內作半圓，並計算其邊長的比值，過程如下：

已知：△ABC 為直角△，利用上述作圖法作圖

試證：△ABC ~△DEF，如圖(41)

證明：(1)設圓心角角度為 x°，則∠AOI=∠CNK=∠BMN=x°

(2)∵∠AOI=∠QOI=∠CNK=x°，又∠OTQ=∠NTC，∴∠NCT=∠OQT=90°

(3)∵ $\overline{FE}$ 為切線，∴∠NKE=90°，又∠OQT=90°，∴ $\overline{FE}//\overline{SP}$

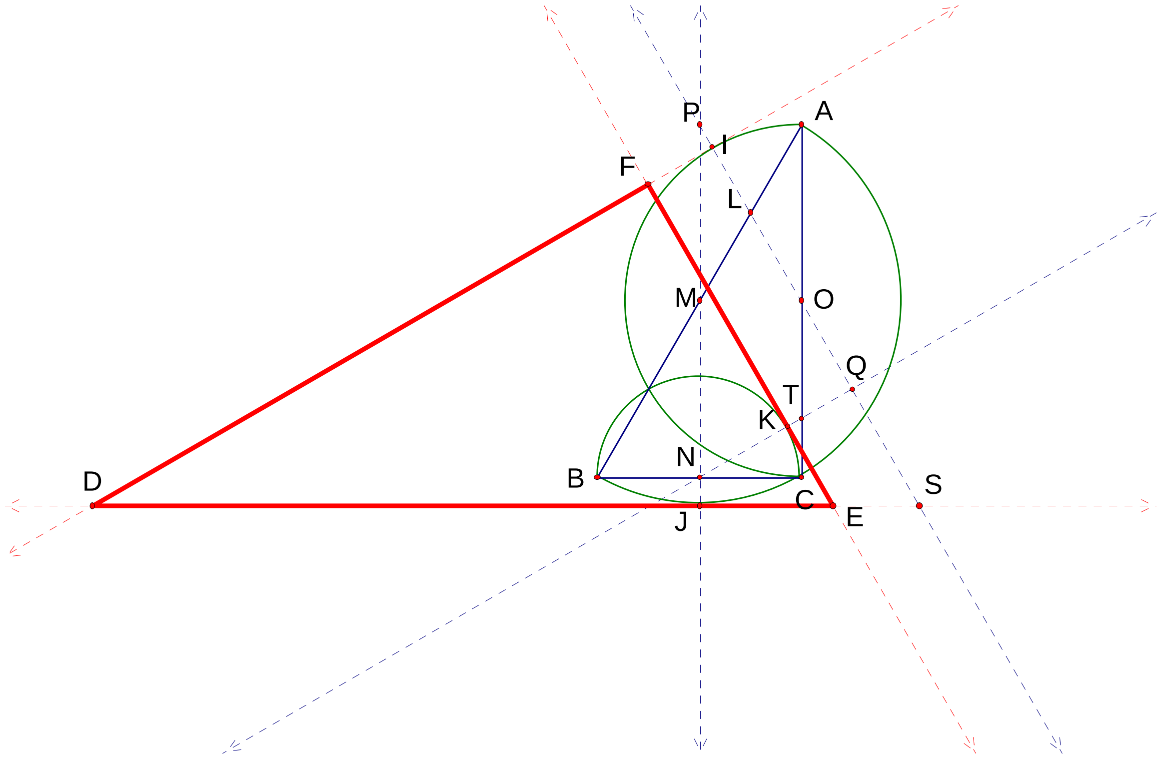
(4) ∵ $\overline{FE} // \overline{SP}$ ∴∠SIF=∠EFD=90°-①

(5) ∵∠PML=∠AOL=x°，又∠PLM=∠ALO，∴∠LPM=∠LAO

(6)∵∠LPM=∠LAO，又∠ACB=∠PJS=90°，∴∠ABC=∠PSJ

(7) ∵ $\overline{FE} // \overline{SP}$，∴∠PSJ=∠FED，又∠ABC=∠PSJ，∴∠ABC=∠FED-②

(8)由①、②得△ABC ~△DEF(AA 相似)



圖(41)

我們取圓心角為 60°的當作範例來計算相似△DEF 與原△ABC 邊長的比值，計算如下，如圖(42)

(1)設 M、N、P 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，且 $\overline{BN}=\overline{NA}$=a

(2)∵ $\overline{PN}$ 為中點連線∴ $\overline{BC} // \overleftrightarrow{NP}$ ∴∠CBA=∠QNA=60°

(3)∵△ABC 為直角△，又 M 為 $\overline{BC}$ 中點，∴M 為△ABC 的外心，∴ $\overline{MB}=\overline{MA}$

(4)∵ $\overline{MB}=\overline{MA}$，又∠QNA=60°，∴△QNA 為正△，∴∠PQR=∠AQS=60°

(5)∵∠QAS 為切角=90°，又∠AQS=60°，∴△QAS 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{QS}$ =2a

(6)∵∠EQS 為切角=90°，又∠FED=60°，∴△QSE 為 30°-60°-90°△，∴ $\overline{QE}=\frac{\overline{QS}}{\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$a

(7)∵∠QSE=∠DEF=30°，∴ $\overleftrightarrow{DF} // \overleftrightarrow{QS}$

(8) $\because \overleftrightarrow{DF} // \overleftrightarrow{QS}$，又∠PRD=90°，∴∠RPQ=90°

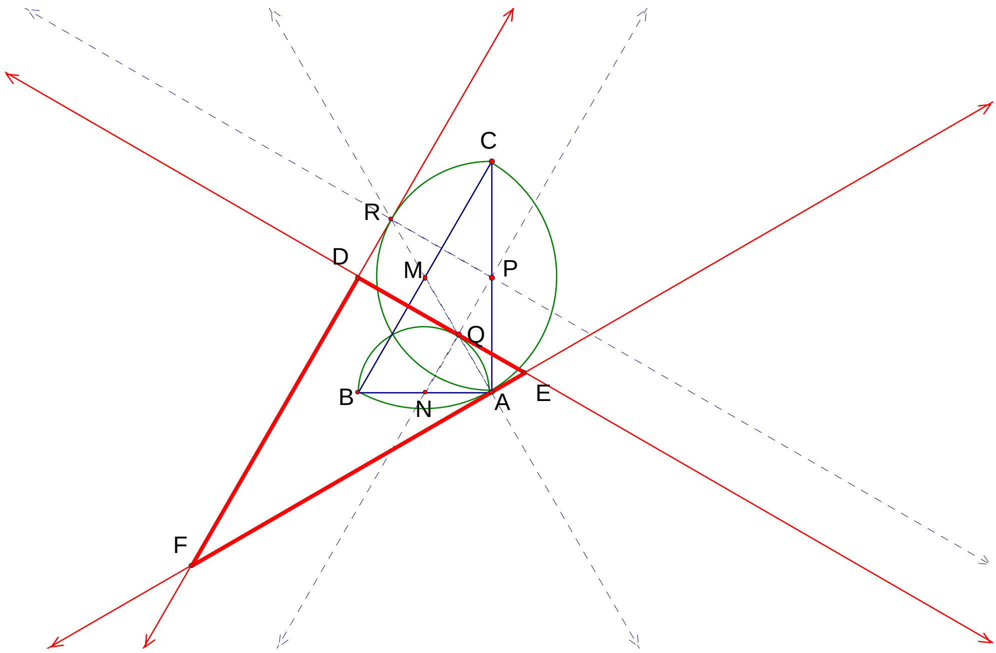
(9) ∵∠RPQ=90°，又∠PQM=60°，∴△PQR 為 30°-60°-90°△

(10) $\because \overline{PN}$ 為一中點連線，$\therefore \overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 4a$ =2a，又 $\overline{QN}$ =a，$\therefore \overline{PQ}=\overline{PN}-\overline{QN}$ =2a- a= a

(11) ∵△RQP 為 30°-60°-90°△，$\therefore \overline{PR}=\sqrt{3}$ a

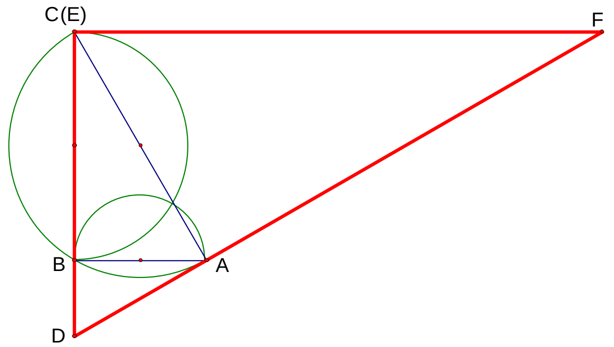
(12) ∵∠RPQ=∠PQD=90°，$\therefore \overleftrightarrow{PR} // \overleftrightarrow{PQ}$，又 $\overleftrightarrow{DF} // \overleftrightarrow{QS}$，$\therefore \overline{DQ}=\overline{RP}=\sqrt{3}$ a

(13) $\overline{DE}$ ： $\overline{AB}=\overline{DQ}+\overline{QE}$ ： $\overline{AB}=\sqrt{3}$ a+$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a：2a=$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ a：2a=$\frac{5\sqrt{3}}{6}$

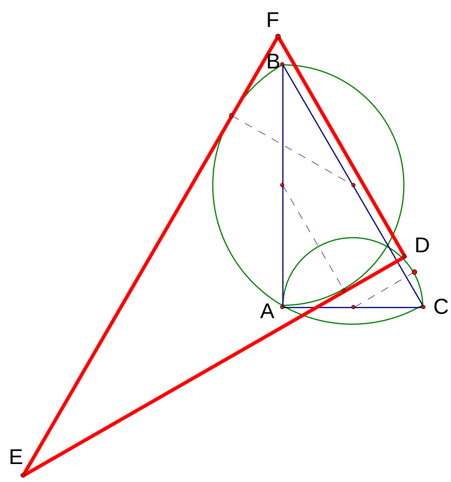


圖(42)

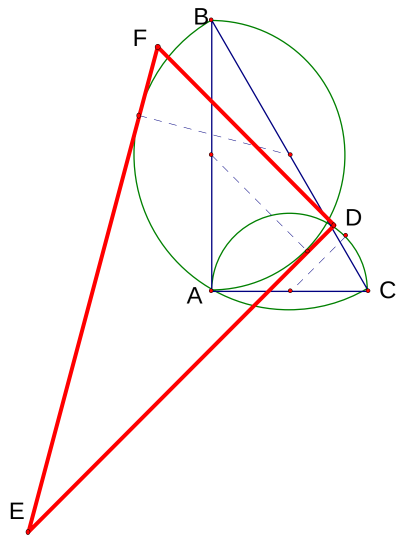
同樣做過圓心角 60°後，我們也變動圓心角試試，並列出邊長比值如下表(4)



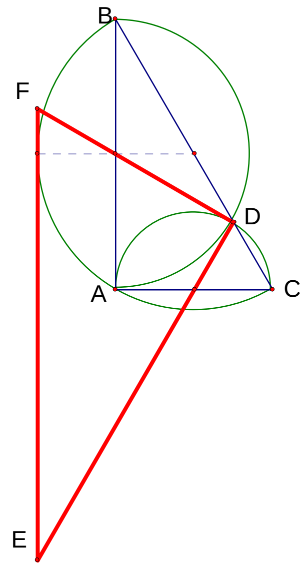
圓心角 0°，圖(43)



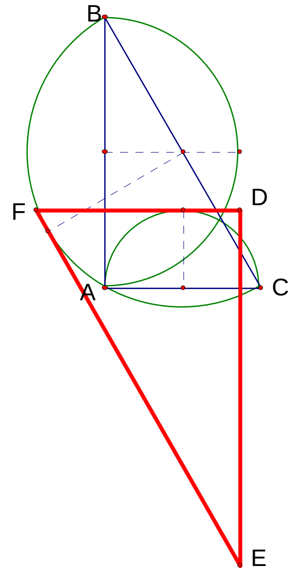
圓心角 30°，圖(44)



圓心角 45°，圖(45)



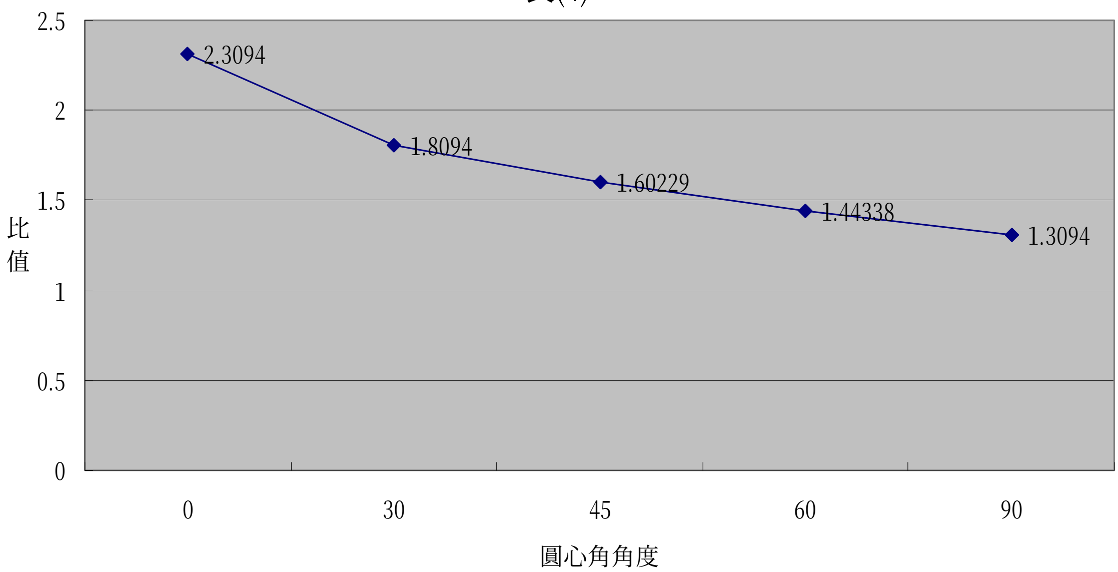
圓心角 60°，圖(46)



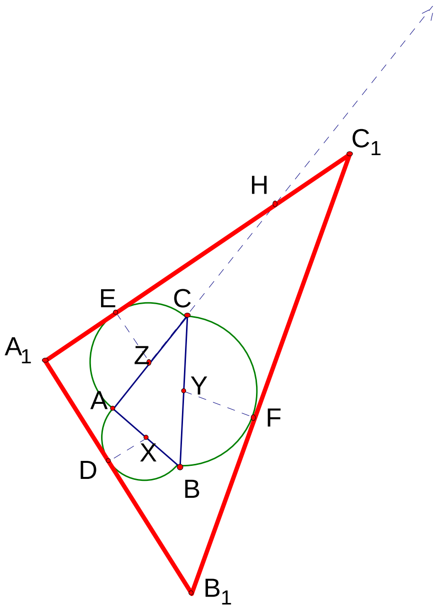
圓心角 90°，圖(47)

圓心角	0°	30°	45°	60°	90°
邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$

表(4)



難道只有正△及直角△才有這種現象嗎？我們嘗試一般△也來操作看看，也許會有意外的發現，做法如下圖(48)：



圖(48)

已知： X、Y、Z 各為△ABC 的三中點，半徑$\overline{DX}$、$\overline{FY}$、$\overline{EZ}$分別作其切線$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$交於 A_1、B_1、C_1

試證：$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

證明：

(1)設$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中點分別為 X、Y、Z

(2)設半徑分別交$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$於 D、F、E

(3)設∠EZC 為 a°(即半徑的角度)，則∠FYB=∠DXA=a°

(4)設長$\overline{EC}$，設交$\overline{A_1C_1}$於 H

(5)設∠ACB 為 b°，則∠HCY 為 180°－b°

(6) ∵∠HEZ=90°，∴$\angle CHC_1$＝90°＋a°

(7)由∠FYB 為 a°，推得∠CYF＝180°－a°

(8)∵$CYFC_1H$ 為一個五邊形，∴內角和為 540°

(9)$\angle C_1$＝540°－$\angle CHC_1$－∠HCY－∠CYF－$\angle YEC_1$

＝540°－(90°＋a°)－(180°－b°)－(180°－a°)－90°

＝540°－90°－a°－180°＋b°－180°＋a°－90°

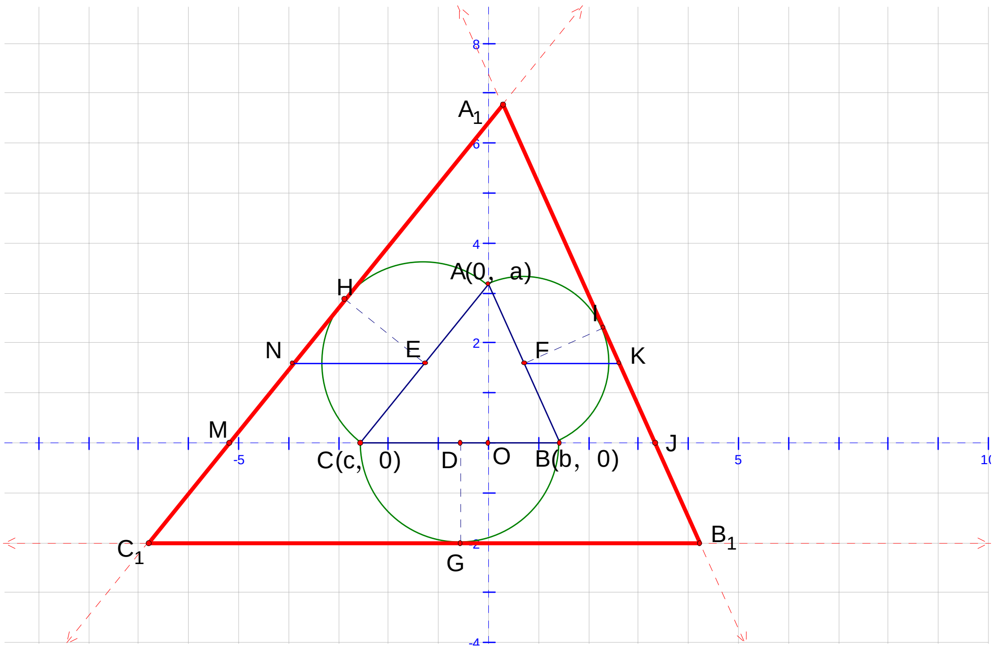
＝b°=∠C-①

(10)同理$\angle B_1$=∠B-②

(11) 由①、②得$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (AA 相似)

我們有了這種相似圖形的新畫法後，不能每次都用特殊△才能算出邊長比值(例如：正△或直角△)因此，我們用上了國中學到的座標求直線方程式的方法，將任一△放在座標平面上，用一般式算出切線△的頂點座標，並進而算出對應邊長比值，以 90°圓心角為例，敘述如

下：



圖(49)

已知：在平面座標上△ABC，A(0，a)、B(b，0)、C(c，0)，往外各做一個半圓，D、E、F 分別為其圓心，G、H、I 的三切線兩兩相交於 A_1、B_1、C_1，此時△$A_1B_1C_1$~△ABC，我們想要以 a、b、c 表示兩相似△的對應邊長往內的切線△比例，即 $\overline{B_1C_1}$ ： $\overline{BC}$ 的比值，如圖(49)。

作法大綱：(1)求出 $\overleftrightarrow{AB}$、 $\overleftrightarrow{AC}$ 直線方程式

(2)分別作 $\overline{FK}\,//\,\overline{BJ}$， $\overline{EN}\,//\,\overline{CM}$， 各交切線△於K、N

(3) $\overline{A_1C_1}$、$\overline{A_1B_1}$可視為分別由 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 平移而來的直線，平移的長度分別為 $\overline{FK}$ 和 $\overline{EN}$ 長

(4)將 $\overleftrightarrow{AC}$ 向左平移 $\overline{EN}$ 單位長後即可得 $\overleftrightarrow{A_1C_1}$

(5) 將 $\overleftrightarrow{AB}$ 向右平移 $\overline{EN}$ 單位長後即可得 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$

(6)分別求出 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$和 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 的交點B_1及 $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ 和 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 的交點C_1

(7)計算 $\overline{B_1C_1}$ ： $\overline{BC}$ 的比值即得

計算施行如下：

D($\frac{b+c}{2}$，0)、G($\frac{b+c}{2}$，-$\frac{b-c}{2}$)、$\overleftrightarrow{B_1C_1}$：y=-$\frac{b-c}{2}=\frac{c-b}{2}$，F($\frac{b}{2}$，$\frac{a}{2}$)

$\overline{FI}=\overline{FB}=\sqrt{(b-\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

由△AOB~△FIK知$\overline{FK}$ ：$\overline{FI}=\overline{AB}$ ：$\overline{AO}$，∴$\overline{FK}$ ：$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$ ：a

∴a× $\overline{FK}=\frac{a^2+b^2}{2}$，∴$\overline{FK}=\frac{a^2+b^2}{2a}$，又$\overleftrightarrow{AB}$方程式為$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}$=1，ax+by=ab

將$\overleftrightarrow{AB}$向右平移$\overline{FK}$單位長，得$\overleftrightarrow{AB}$為a(x-$\frac{a^2+b^2}{2a}$)+by=ab，∴ax-$\frac{a^2+b^2}{2}$+by=ab

∴ax+by=ab+$\frac{a^2+b^2}{2}$，∴ax+by=$\frac{(a+b)^2}{2}$

現在可以求$\overleftrightarrow{A_1B_1}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$的交點 B_1的座標了：

ax+by=$\frac{(a+b)^2}{2}$ -①，且 y=$\frac{c-b}{2}$ -②，將②帶入①得 ax+$\frac{bc-b^2}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}$

ax=$\frac{a^2+2ab+b^2-bc+b^2}{2}$，∴x=$\frac{a^2+2ab+2b^2-bc}{2a}$，故 B_1($\frac{a^2+2ab+2b^2-bc}{2a}$，$\frac{c-b}{2}$)

同理我們可以計算 C_1座標如下：E($\frac{c}{2},\frac{a}{2}$)，$\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2}$

由△EHN~△AOC 知$\overline{EH}$ ：$\overline{EN}=\overline{AO}$ ：$\overline{AC}$，∴ $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2}$ ：$\overline{EN}$ =a：$\sqrt{c^2+a^2}$

∴ a$\overline{EN}=\frac{a^2+c^2}{2}$，∴$\overline{EN}=\frac{a^2+c^2}{2a}$，又$\overleftrightarrow{AC}$方程式為$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}$=1 即 ax+cy=ac

將$\overleftrightarrow{AC}$向左平移$\overline{EN}$單位長即為直線$\overleftrightarrow{A_1C_1}$，因此$\overleftrightarrow{A_1C_1}$方程式為 a(x+$\frac{a^2+c^2}{2a}$)+cy=ac

ax+$\frac{a^2+c^2}{2}$+cy=ac，ax+cy=ac-$\frac{a^2+c^2}{2}$=-$\frac{(a-c)^2}{2}$

現在可以求$\overleftrightarrow{A_1C_1}$與$\overleftrightarrow{B_1C_1}$的交點 C_1的坐標

ax+cy=-$\frac{(a-c)^2}{2}$ -③，且 y=$\frac{c-b}{2}$ -④，由④帶入③ ax+$\frac{c^2-bc}{2}$=-$\frac{(a-c)^2}{2}$

∴ax=$\frac{-a+2ac-c^2-c^2+bc}{2}$，∴x=$\frac{-a^2+2ac-2c^2+bc}{2a}$，故 C_1($\frac{-a^2+2ac-2c^2+bc}{2a}$，$\frac{c-b}{2}$)

到此我們可以計算$\overline{B_1C_1}=\frac{a^2+2ab+2b^2-bc}{2a}$ - $\frac{-a^2+2ac-2c^2+bc}{2a}$

$$=\frac{a^2+2ab+2b^2-bc+a^2-2ac+2c^2-bc}{2a}$$

$$=\frac{2a^2+2b^2+2c^2+2ab-2ac-2bc}{2a}$$

$$=\frac{(a+b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2a}$$

因此 $\overline{B_1C_1}$ ： $\overline{BC}$ 的比值為 $\dfrac{(a+b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2a}$ ：(b-c)= $\dfrac{(a+b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2a(b-c)}$

驗證 P8 表(1)中的 $\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}=\sqrt{3}+1$

∵原△ABC 為正△，設邊長為 4

∴取 A(0，$2\sqrt{3}$)、B(2，0)、C(-2，0)，∴按上述公式 a=$2\sqrt{3}$，b=2，c=-2

代入上文 $\overline{B_1C_1}$ ： $\overline{BC}$ 的比值=$\dfrac{(2\sqrt{3}+2)^2+4^2+(2\sqrt{3}+2)^2}{4\sqrt{3}\times 4}$

$$=\frac{12+8\sqrt{3}+4+16+12+8\sqrt{3}+4}{16\sqrt{3}}$$

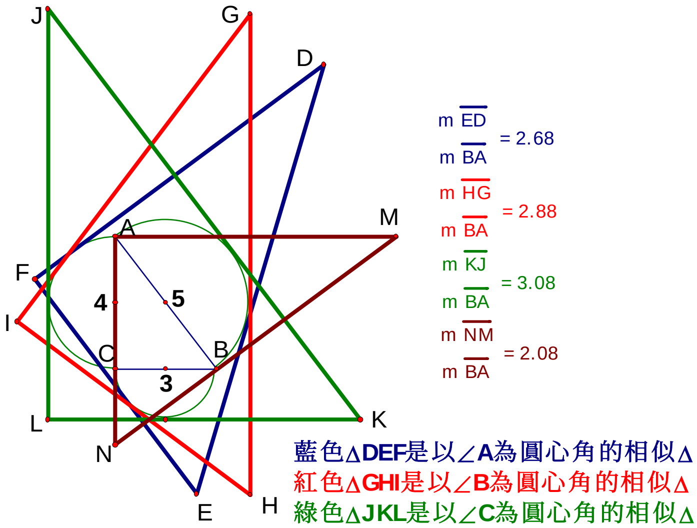
$$=\frac{48+16\sqrt{3}}{16\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1+\frac{3}{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$ 真的正確！

我們除了用特殊角度當圓心角做切線△，還試著用三邊長為整數倍的直角△，分別以圓心角為∠A、∠B、∠C、0°往外作出切線△，我們發現他們的比值有一些特殊的關係，因為母△的三邊皆為整數，所以算出的比值不會帶有根號，而且比值分別為 0°比值+$\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$，以三邊長為 3：4：5 為例，如圖(50)，我們將比值列成下表，其他的邊長為整數倍的直角△見附件一

圓心角(往外)	0°	∠A	∠B	∠C
$\dfrac{\text{切線}\Delta\text{邊長}}{\text{原}\Delta\text{邊長}}$比值	$\dfrac{25}{12}$	$\dfrac{161}{60}=\dfrac{25}{12}+\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{173}{60}=\dfrac{25}{12}+\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{37}{12}=\dfrac{25}{12}+\dfrac{5}{5}$

表(5)

表(5)中，這些比值的特色是若將圓心角為∠A、∠B、∠C 所算出的比值分別減掉 0°的比值後，可以化簡為與原△三邊長相同的比值，例如，3：4：5。這表示這些比值與 0°時的比值有相當大的關係。



圖(50)

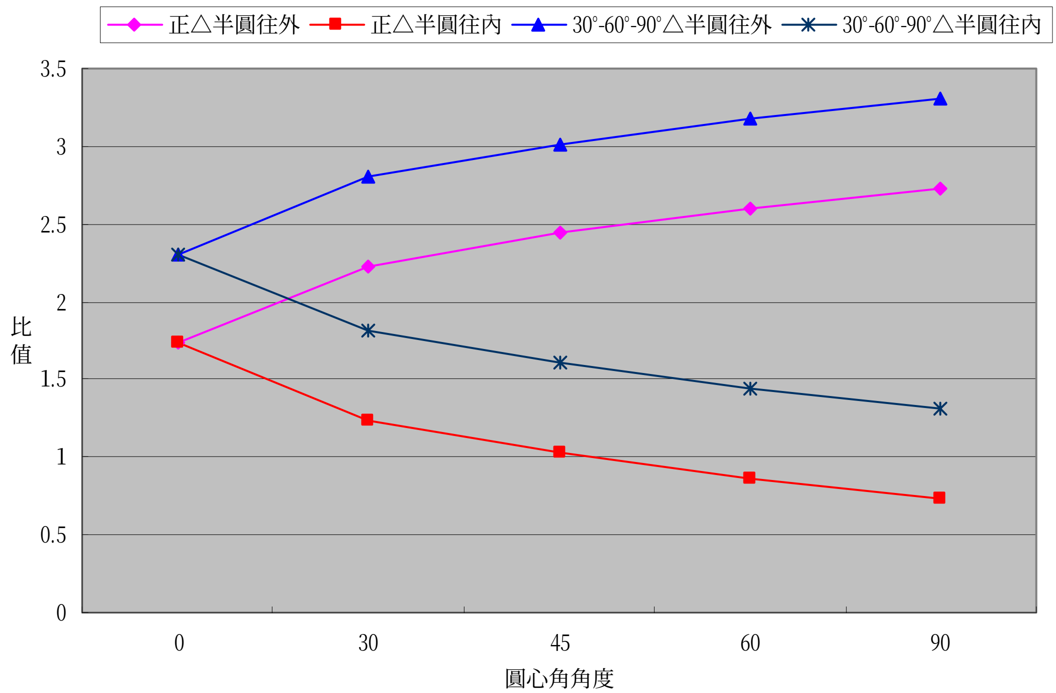
更進一步的我們將先前做的正△與 30°-60°-90△的邊長比值表與它的折線圖放在一起綜合比較，發現有一個足以媲美拿破崙內外△的面積差永遠等於原△的面積著名性質的特殊的性質，就是**任意△在同圓心角的條件下，向外與向內切線△的對應邊長和，恆為圓心角是 0°時的邊長的兩倍**，從表(6)、(7)及其折線圖中就能明顯地看出來。

圓心角(母△為正△)	0°	30°	45°	60°	90°
半圓往外畫相似△與原△的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}+1$
半圓往內畫相似△與原△的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}-1$

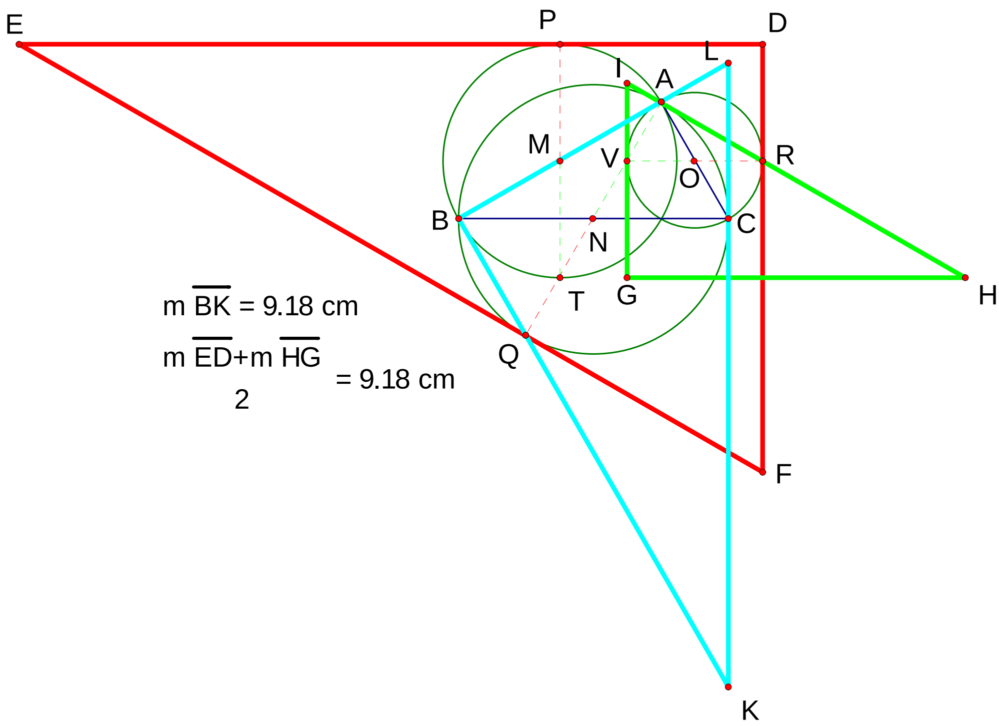
表(6)

圓心角(母△為 30°-60°-90°△)	0°	30°	45°	60°	90°
半圓往外畫相似△與原△的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$
半圓往內畫相似△與原△的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$

表(7)



如上折線圖，我們可發現在相同的圓心角下，往外畫相似△，與往內畫相似△的比值有對稱的關係，是線對稱圖形，也印證了上述性質。我們進一步取 30°-60°-90°△，圓心角為 60°的作為例子來證明這個性質，證明如下：



圖(51)

已知：如圖(51)，△ABC 為原△，△DEF 與△GHI 分別為圓心角取 60°向外與向內畫出的相似△，△BKL 為圓心角取 0°所畫出的相似△

試證：在同圓心角的條件下，向外與向內切線△的對應邊長和，為圓心角是 0°時的邊長的兩倍

證明：(1)設 $\overline{AB}$=a

(2)利用上表(3)，得 $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AB}}=\dfrac{11\sqrt{3}}{6}$，$\therefore \overline{ED}=\dfrac{11\sqrt{3}}{6}$a-①

(3)利用上表(4)，得 $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{AB}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$，$\therefore \overline{HG}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$a-②

(4)利用上表(3)，得 $\dfrac{\overline{BK}}{\overline{AB}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \overline{BK}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$a

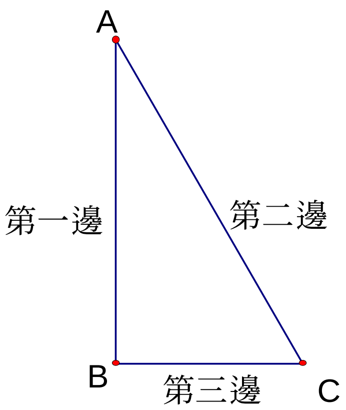
(5)由①、②得 $\overline{ED}+\overline{HG}=\dfrac{11\sqrt{3}}{6}\text{a}+\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\text{a}=\dfrac{16\sqrt{3}}{6}\text{a}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\text{a}$

$\therefore \dfrac{\overline{ED}+\overline{HG}}{2}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\text{a}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\text{a}=\overline{BK}$ 得證

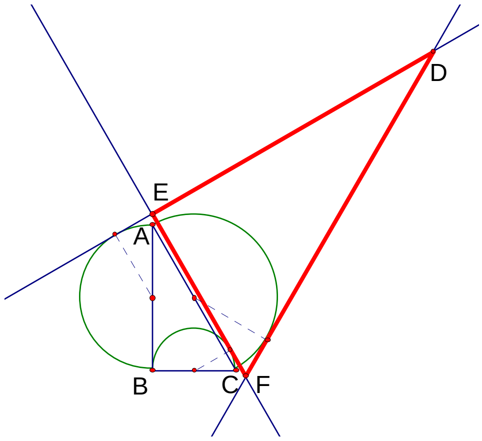
這個的性質的發現有助於我們去計算用這種作圖法所畫出來的相似△與原△的比值，也就是說只要我們知道圓心角為 0°時的相似△及圓心角為任意度時向內或向外所畫出的相似△與原△的邊長比值中的其中兩項資料，就能輕易的算出第三項的資料。

經過以上種種作圖嘗試及計算研究後，我們對這種相似△的作圖法已有了相當的把握，美中不足的是比起傳統的相似△作法，若我們在事前要指定求作出某個整數倍的相似△，目前新畫法還有些困難，為了突破這困境，大夥兒傷透腦筋，嘗試了千百種方法，日以繼夜的衝刺了一個多月，終於讓我們找到了一個線索，敘述如下：

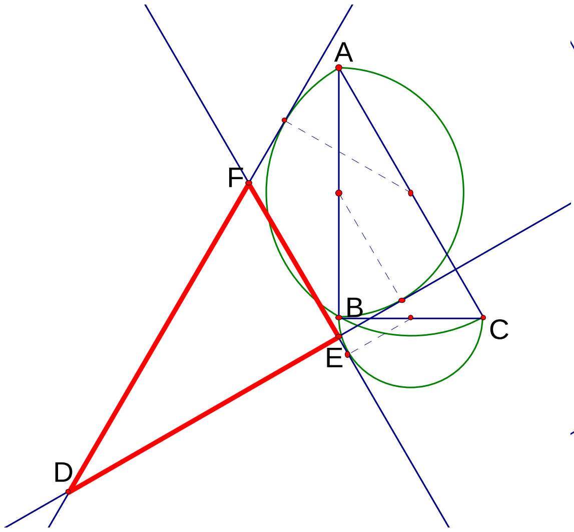
我們先將往外畫切線△和往內畫切線△混合應用，這樣共搭配出 6 種組合，如圖(53)~圖(58)分別是①(外,外,內)、②(內,內,外)、③(內,外,外)、④(外,內,內)、⑤(外,內,外)⑥(內,外,內)，其中內外排列對應的邊長次序見圖(52)。範例：



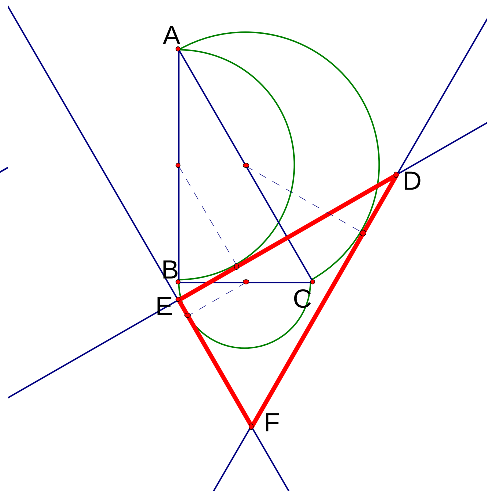
(一，二，三)，圖(52)



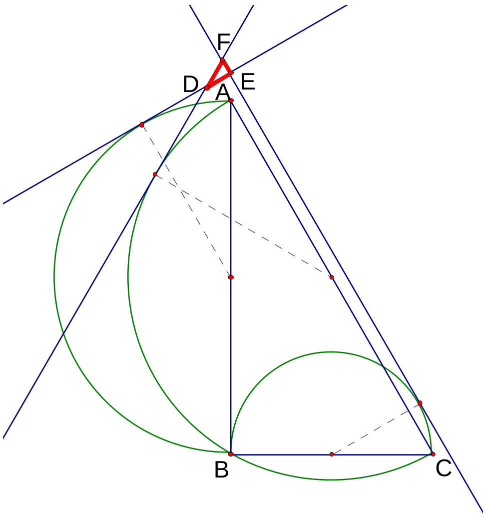
圖(53)，(外，外，內)



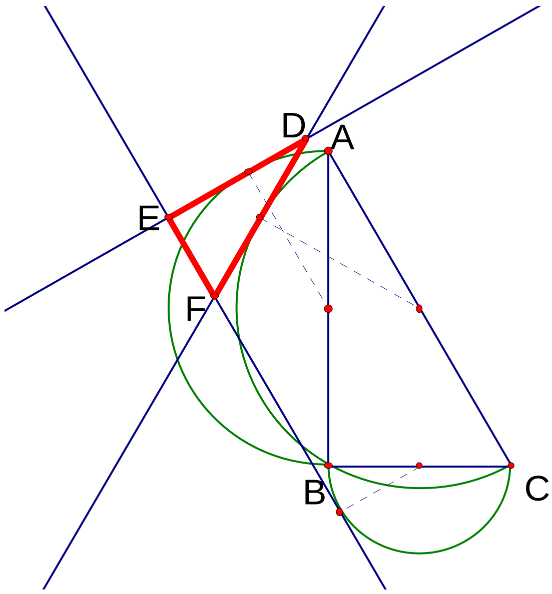
圖(54)，(內，內，外)



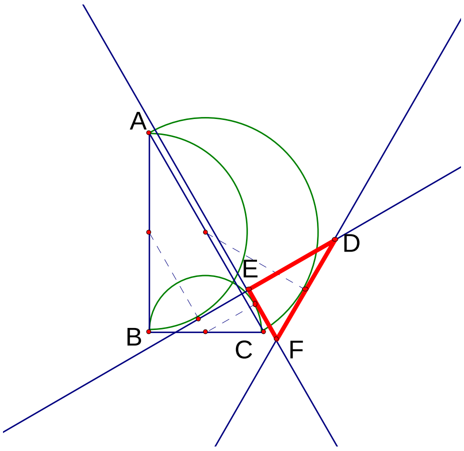
圖(55)，(內，外，外)



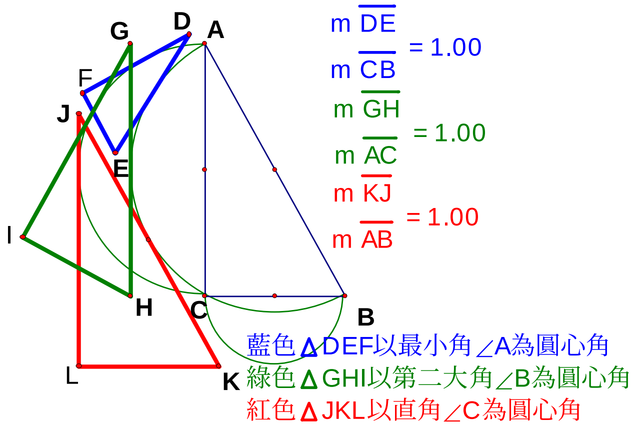
圖(56)，(外，內，內)



圖(57)，(外，內，外)



圖(58)，(內，外，內)



圖(59)，(外，內，外)作圖法

上述六種組合作圖法我們發現三個特色。

特色一：當任意直角△的半圓用(外，內，外)的順序來做圖時，如圖(59)，若當圓心角取原△中的最小角∠A 來做切線△時，則切線△DEF 的斜邊 $\overline{DE}$ 長度等於原直角△的勾 $\overline{CB}$ 長，當圓心角取原△中的第二大角∠B，則切線△GHI 的斜邊 $\overline{GH}$ 長度等於原直角△的股 $\overline{AC}$ 長，同樣的當圓心角取原△中的直角∠C，則切線△JKL 的斜邊 $\overline{JK}$ 長度等於原直角△的弦 $\overline{AB}$ 長。

特色二：這六種組合再配上圓心角 0°、30°、45°、60°、90°還可畫出 30 個切線△，分別將比值列於表(8)、表(9)，詳細作圖參考附件二、附件三。

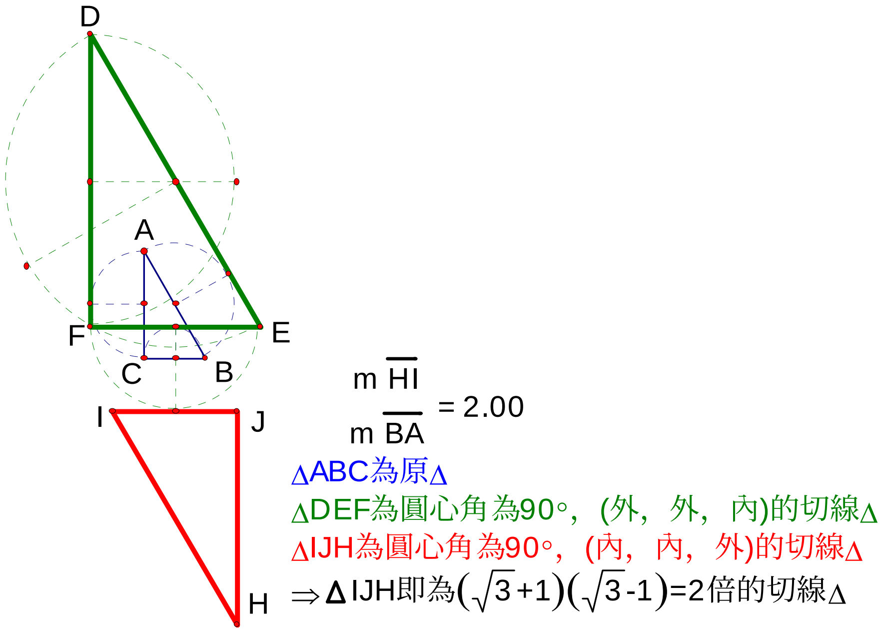
正△	外外內	內內外	內外外	外內內	外內外	內外內
0°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\sqrt{3}}{3}+1$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+1$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+1$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

表(8)

30°-60°-90°△	外外內	內內外	內外外	外內內	外內外	內外內
0°	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0(交於一點)	0(交於一點)
30°	$\sqrt{3}+\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90°	$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{3}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}+1$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	1

表(9)

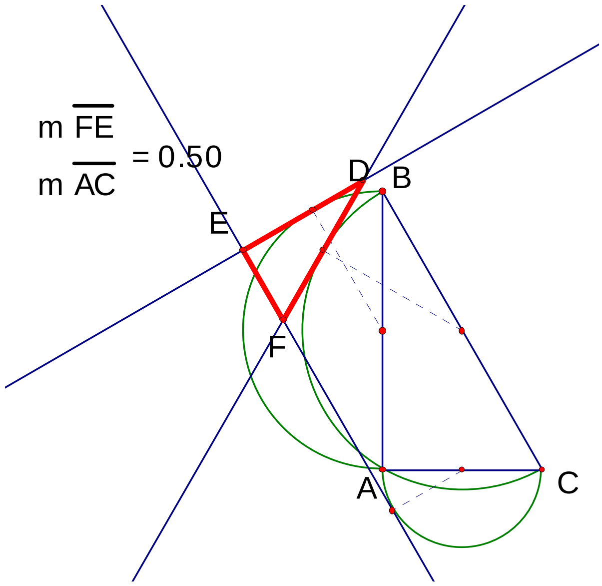
則其中具有一件**整數倍**的特色，敘述如下：將表中的比值配為整數倍來畫，例如取表(9)中，圓心角為 90°(外，外，內)和(內，內，外)，其比值相乘$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=3-1=2$，即為整數倍，故我們只要先作(外，外，內)再作(內，內，外)即可得到原△的 2 倍放大圖，如圖(60)。



圖(60)，2 倍作圖法

特色三：從表(9)中，我們發現 30°-60°-90°△或其它直角△，作(外，內，外)或(內，外，內)，取圓心角 30°，就能正作出$\frac{1}{2}$倍的切線△，再利用逆推作圖法就能反作出 2 倍的切線△。

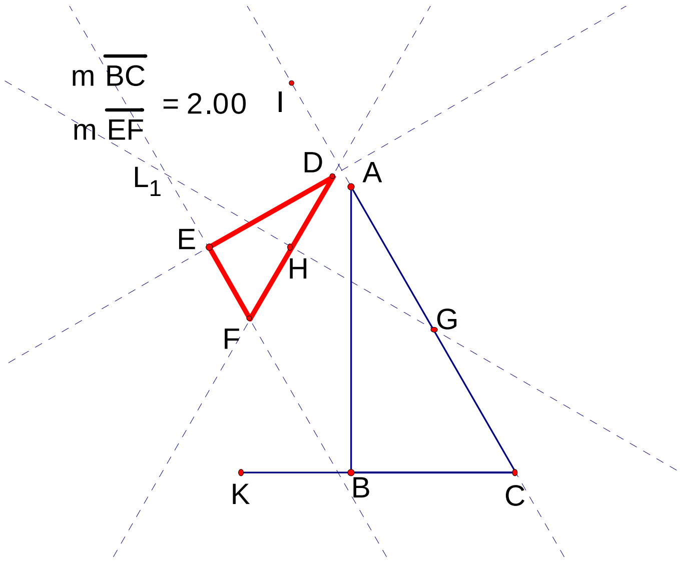
$\frac{1}{2}$**倍作圖法**：已知△ABC 為直角△，∠A＝90°，兩股線段$\overline{AB}$，線段$\overline{AC}$往外作半圓，斜邊往內作半圓，取圓心角為 30°，作三切線，得△DEF，如圖(61)。



圖(61)，$\frac{1}{2}$倍作圖法

求證：△DEF 與△ABC 對應邊長的比值為$\frac{1}{2}$，證明：略。

逆推作圖法：我們利用正作的性質，能從切線△DEF 反推回原△ABC，即 2 倍，如圖(62)。



圖(62)，逆推作圖法

作法如下：

(1)作斜邊上的中點 H(由正作性質可推出 H 為中點)

(2)過 H，作 $L_1 \perp \overline{DF}$

(3)以 H 為圓心，斜邊 $\overline{DF}$ 為半徑，向外畫弧，設交 L_1 於 G

(4)作∠IGH＝30°(因為正作時圓心角取 30°)，並延長 $\overline{IG}$

(5)以 G 為圓心，斜邊 $\overline{DF}$ 為半徑，畫圓，設交 $\overline{IG}$ 於 A、C

(6)作∠KCA＝60°，並在 $\overline{KC}$ 上作 $\overline{BC}=\overline{DF}$

(7)連 $\overline{AB}$，則△ABC 即為 2 倍的切線△。

我們將**特色二**(比值相乘法)或**特色三**(逆推作圖法)連續重複使用，就能做出我們指定作的 2^n 倍的相似△，若將其它比值作適當的搭配，必能找出更多的整數倍切線△。

陸、結論

一、我們創造出一個相似△的新畫法，敘述如下：

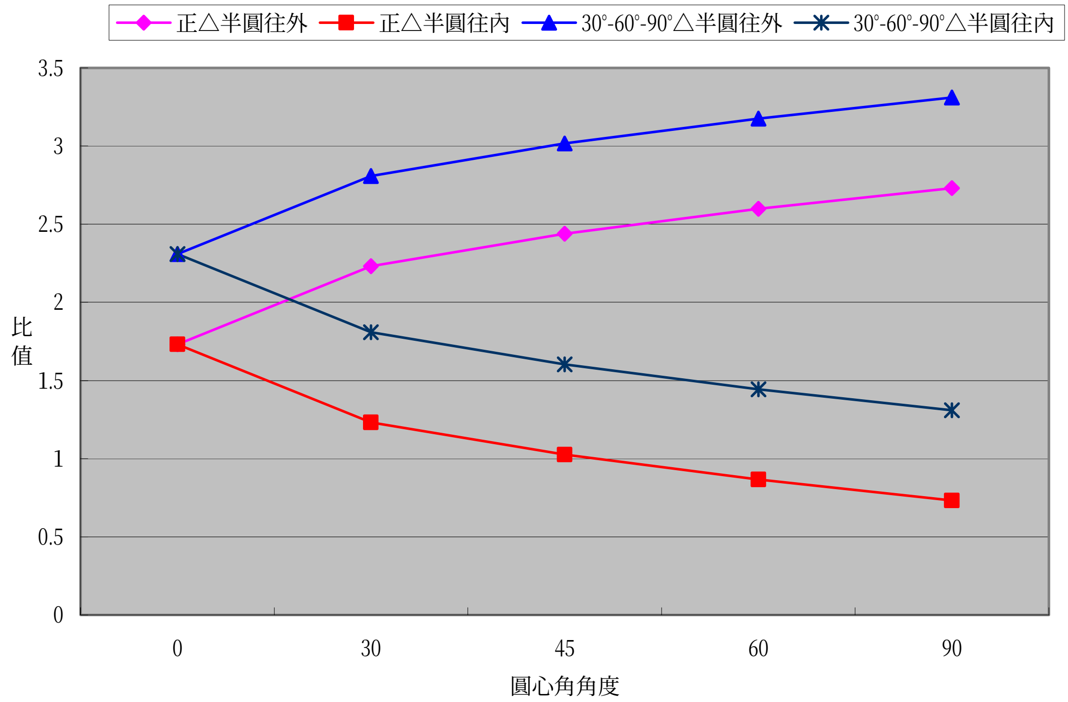
在△ABC 的三邊上以各邊長為直徑，往外作半圓，並在三個半圓上，依順時針或逆時針取相同的圓心角，而在圓心角的半徑上作切線，此時三切線的交點所形成的三角形必與原三角形相似，往內作半圓也有相同的現象，又即使內外混合也能相似。

二、當原△三邊為整數倍的直角△，圓心角分別取 0°、∠A、∠B 和∠C，半圓皆往外畫，所得的切線△與原△的邊長比值恆為 0°的比值加上 $\frac{\text{對邊長}}{\text{斜邊長}}$。如下表所示：

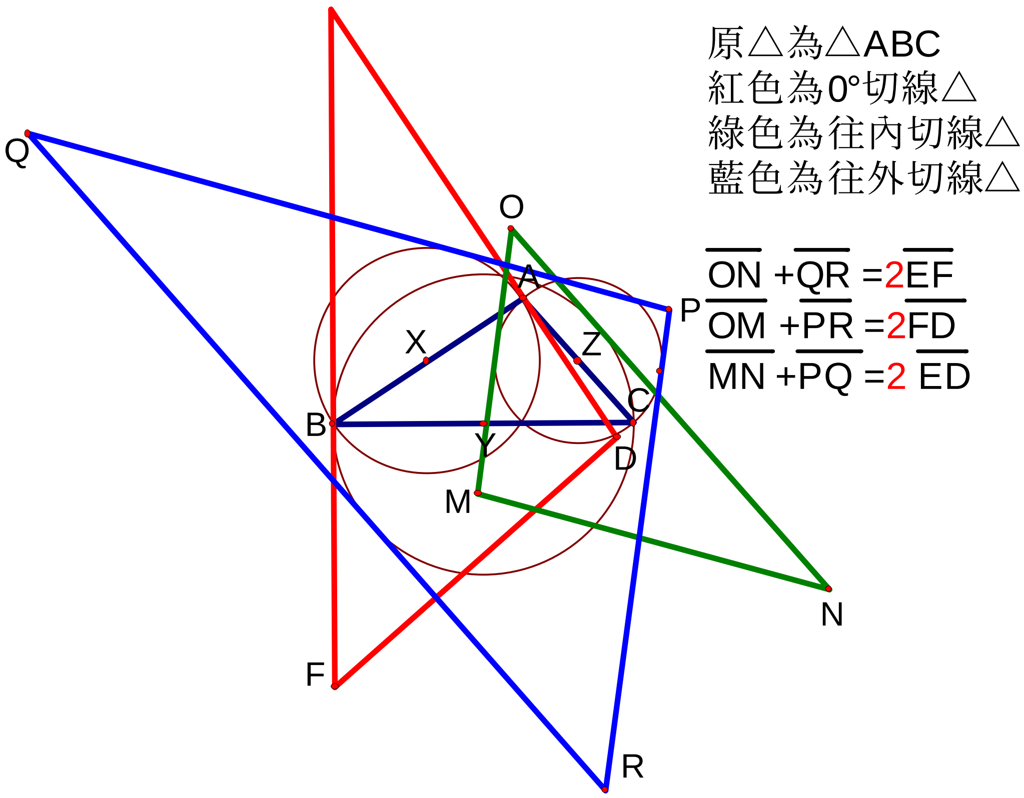
外外外	0°	∠A(最小角)	∠B	∠C(直角)
3-4-5△	$\frac{25}{12}$	$\frac{161}{60}=\frac{25}{12}+\frac{3}{5}$	$\frac{173}{60}=\frac{25}{12}+\frac{4}{5}$	$\frac{37}{12}=\frac{25}{12}+\frac{5}{5}$
5-12-13△	$\frac{169}{60}$	$\frac{2497}{780}=\frac{169}{60}+\frac{5}{13}$	$\frac{2917}{780}=\frac{169}{60}+\frac{12}{13}$	$\frac{229}{60}=\frac{169}{60}+\frac{13}{13}$
8-15-17△	$\frac{289}{120}$	$\frac{5873}{2040}=\frac{289}{120}+\frac{8}{17}$	$\frac{6713}{2040}=\frac{289}{120}+\frac{15}{17}$	$\frac{409}{120}=\frac{289}{120}+\frac{17}{17}$
7-24-25△	$\frac{625}{168}$	$\frac{16801}{4200}=\frac{625}{168}+\frac{7}{25}$	$\frac{19657}{4200}=\frac{625}{168}+\frac{24}{25}$	$\frac{793}{168}=\frac{625}{168}+\frac{25}{25}$

三、當圓心角為 0°、30°、45°、60°、90°，半圓往內或往外畫，所得的切線△與原△的邊長比值恆有對稱性，在折線圖上，它們是以 0°比值為對稱軸的線對稱圖形。

正△	0°	30°	45°	60°	90°
半圓往外畫相似△與原△的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}+1$
半圓往內畫相似△與原△的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}-1$
30°-60°-90°△	0°	30°	45°	60°	90°
半圓往外畫相似△與原△的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$
半圓往內畫相似△與原△的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}-1$



四、我們獲得一個可媲美拿破崙內外△的面積差永遠等於原△的面積的性質，即「任意△在同圓心角的條件下，向外與向內切線△的對應邊長和，恆為圓心角是 0°時的邊長的兩倍。」如下圖(63)



圖(63)

五、**特色一**：當任意直角△的半圓用(外，內，外)的順序來做圖時，如圖(59)，若當圓心角取原△中的最小角∠A 來做切線△時，則切線△DEF 的斜邊 $\overline{DE}$ 長度等於原直角△的勾 $\overline{CB}$ 長，

當圓心角取原△中的第二大角∠B，則切線△GHI 的斜邊 $\overline{GH}$ 長度等於原直角△的股 $\overline{AC}$ 長，

同樣的當圓心角取原△中的直角∠C，則切線△JKL 的斜邊 $\overline{JK}$ 長度等於原直角△的弦 $\overline{AB}$ 長，

如圖(59)。

六、**特色二**：將表(8)、表(9)中的比值配為整數倍來畫，例如圖(60)為 2 倍作圖。**特色三**：從表(9)中，我們發現 30°-60°-90°△或其它直角△，作(外，內，外)或(內，外，內)，取圓心角 30°，就能正作出 $\frac{1}{2}$ 倍的切線△，再利用逆推作圖法就能反作出 2 倍的切線△，如圖(61)、圖(62)。

七、我們將**特色二**(比值相乘法)或**特色三**(逆推作圖法)連續重複使用，就能做出我們指定作的 2^n 倍的相似△，可參考附件四。若將上表其它比值作適當的搭配，必能找出更多的整數倍切線△。

柒、參考資料：

一、黃家禮 幾何明珠 一版 台北市信義路 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓 九章出版社 P175~181 2001 年 10 月

二、考克塞特、格雷策 初版 新竹市建新路 22 號 幾何學的新探索 凡異出版社 P66~72 2002 年 8 月

三、出光正則 畢達哥拉斯的禮物 初版 台北市萬安街 21 巷 11 號 3 樓 益智工房 P21~28 2002 年 5 月

四、GSP(The Geometer’s Sketchpad)軟體說明書

評　　語

030423　拿破崙三角形與畢氏定理的聯想

1. 題材具趣味性。

2. 圖形、解說清楚有條理。

3. 計算求出一些情況下圓心角與邊長比值的關係，並予列表、作圖，是有意思的結果，值得作更一般化的探討。