中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030422

四邊形幾何拼圖遊戲

學校名稱：　雲林縣立土庫國民中學

作者：	指導老師：
國一　蔡逸倫	林秀玲
國一　張勝凱	
國一　楊上萱	
國一　王寶慶	

關 鍵 詞：四邊形、拼圖理論

壹、 摘要

本研究乃利用各種四邊形的幾何特性與關係，透過色紙實際剪貼去猜想圖形分割之特性，進一步運用電腦動畫著手模擬實驗，最後再用繪圖軟體繪製圖形、數學幾何學理加以驗證，以探討任一四邊形在四邊中點連線的設計架構下進行分割翻轉成其他各種四邊形之可行性與分割方法。假若因圖形本身之特殊性（如任意凹四邊形、折四邊形分割翻轉成其他各種四邊形）或者在此分割設計架構下限制條件過於嚴刻（如各種四邊形分割翻轉成正方形、各種四邊形分割翻轉成鳶形），造成前述方式無法一般化分割，則本研究乃採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先將任一四邊形剪貼成一可分割成其他各種四邊形的圖形，之後再透過它分割翻轉成其他各種四邊形。希望藉此建立四邊形幾何分割與拼圖之理論。

貳、 研究動機

國一上學期時，在「圖形的樣式與規律」這個單元中，我們曾學過：利用切割、拼湊的方法，將規則的多邊形化成「基本圖形」再計算它面積。學完後我們心中即產生一個疑問：是否任一多邊形間皆可利用切割、拼湊的方式互相翻轉成另外一個多邊形呢？

而爲了準備科學展覽，在圖書館找到「數學歷史之謎」這本書中（p184）提及任意長方形可重新排成一個正方形，而任意多邊形經由剪貼亦皆可合併成一個正方形，此立論已經由德國數學家希耳伯特（Hilbert,1862～1943）證明。邱冠霖（2000）在「有趣的三角形幾何翻轉變形魔術」中提到正三角形可分割設計翻轉成四邊形之推演申論，引申談到任一四邊形亦可分割設計翻轉成其他各種四邊形，但其並未嚴謹說明理由及討論，故本研究即以此爲課題進行研究。

參、 研究目的

一、探討任一四邊形分割設計翻轉成其他各種四邊形之可行性與分割方法。
二、以此建構四邊形幾何分割與拼圖理論，供日後的研究者應用。

肆、 研究設備及器材

色紙、美工用具、電腦軟體：PhotoImpact 10.0、Flash 8。

伍、 研究過程或方式

一、 理論基礎

四邊形乃意指爲在平面內，由不在同一直線上的四條線段首尾順次相接組成的圖形叫做四邊形。而本研究基本上將四邊形分爲兩大類：第一類是特殊四邊形、第二類是任意四邊形，之後將圖形定義與其特性分述如下表 1-1：

表 1-1 四邊形的分類及其定義

特殊四邊形	
平行四邊形	兩組對邊互相平行；兩組對角相等；兩組對邊相等；其對角線互相平分、但不等長、不垂直的四邊形。
長方形	四內角皆直角，兩組對邊相等；其對角線互相平分、等長但不垂直的四邊形。
菱形	四邊皆等長，兩組對角相等；其對角線互相垂直平分、但不等長的四邊形。
正方形	四內角皆直角，且四邊皆等長；其對角線互相平分、等長且垂直的四邊形。
梯形	只有一組對邊互相平行的四邊形，即稱之爲梯形。當不平行的對邊長相等時，且有兩組鄰角相等，而其對角線等長的四邊形稱之爲等腰梯形；最後直角梯形乃梯形中有一組鄰角相等且爲直角的四邊形。<u>由於研究範圍太大，故本研究省略直角梯形及等腰梯形分割翻轉爲其他各種四邊形而各種四邊形分割翻轉爲直角梯形及等腰梯形則有討論。</u>
鳶形	兩組鄰邊分別相等；一組對角相等；其對角線互相垂直、但不等長且只有一對角線被另一對角線平分的四邊形。
任意四邊形	
任意凸四邊形	係指兩條對角線都必在四邊形的內部而非第一類特殊四邊形之四邊形。
任意凹四邊形	係指一對角線在四邊形的內部、另一對角線在四邊形外部的四邊形。
折四邊形	係指兩對角線都必在四邊形外部的四邊形。<u>由於研究範圍太大，故本研究省略各種四邊形分割翻轉爲折四邊形而折四邊形分割翻轉爲其他各種四邊形則有討論。</u>

雖然各種四邊形形狀有很大的差異，但這些圖形彼此間卻存在如下圖 1-1 的關係，圖中兩個四邊形之間用「→」連接，表示下面的四邊形是上面四邊形的一種、而上面的四邊形不一定是下面四邊形的一種。各種四邊形彼此間有其「包含」的關係，藉此也提供我們四邊形可互相分割翻轉的理論根據。

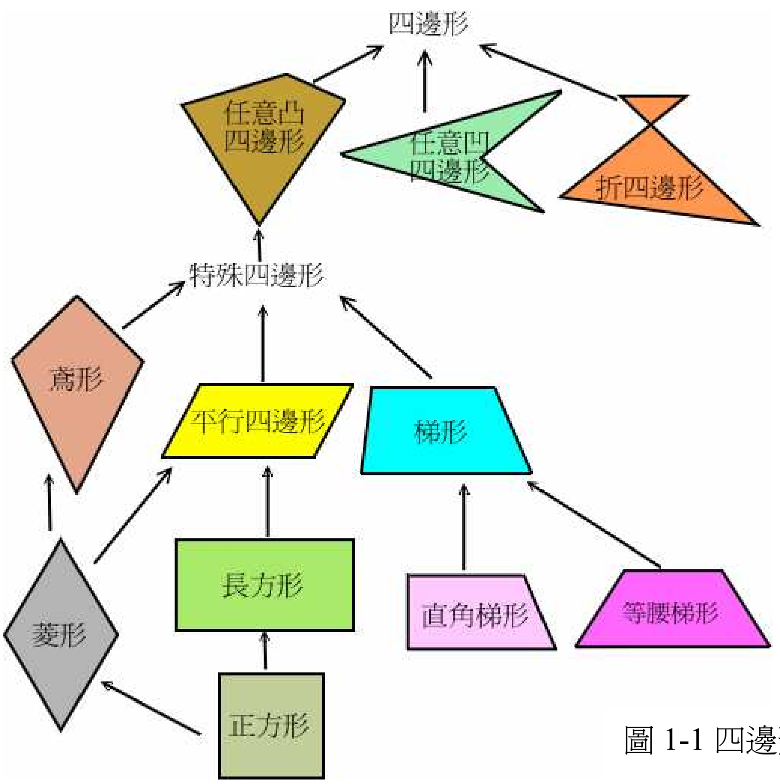


圖 1-1 四邊形的關係圖

爲使任一四邊形能分割翻轉成其他各種四邊形，本研究嘗試在各種四邊形四邊中點連線的設計架構下進行。鄭再添（2002）認爲在圖 1-2 中任意凸四邊形四邊中點連線將會形成內接平行四邊形 PQRS。如圖 1-3 若 $\overline{AC} \perp \overline{BD} \Rightarrow$ 四邊形 PQRS 是矩形。如圖 1-4 若 $\overline{AC} = \overline{BD} \Rightarrow$ 四邊形 PQRS 是菱形。如圖 1-5 若 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} = \overline{BD} \Rightarrow$ 四邊形 PQRS 是正方形。

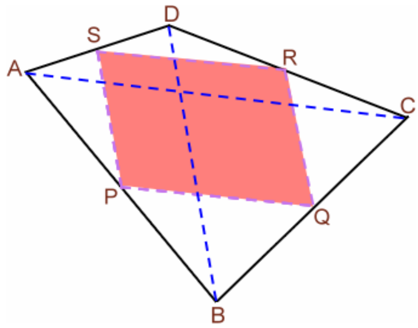


圖 1-2

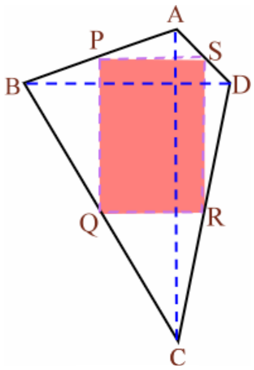


圖 1-3

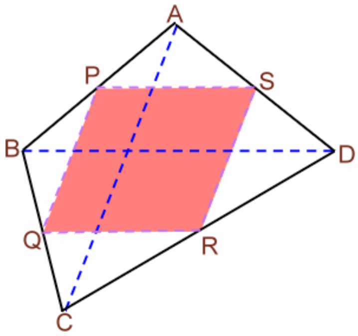


圖 1-4

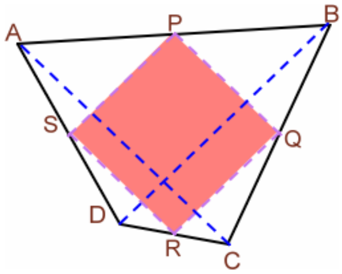


圖 1-5

大部份的凸四邊形在此架構下皆能分割翻轉，但有些凸四邊形則須在特定的狀況下才能分割翻轉，如預期分割翻轉爲鳶形只有在四邊中點爲內接長方形時才能分割翻轉；預期分割翻轉爲正方形只有在四邊中點爲內接正方形才能分割翻轉；除此，因圖形本身之特殊性如任意凹四邊形、折四邊形分割翻轉成其他各種四邊形，造成前述方式無法一般化分割，則本研究乃採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先將任一四邊形剪貼成一可分割成其他各種四邊形的圖形，之後再透過它分割翻轉成其他各種四邊形。

二、　任意凸四邊形分割設計翻轉成其他各種四邊形

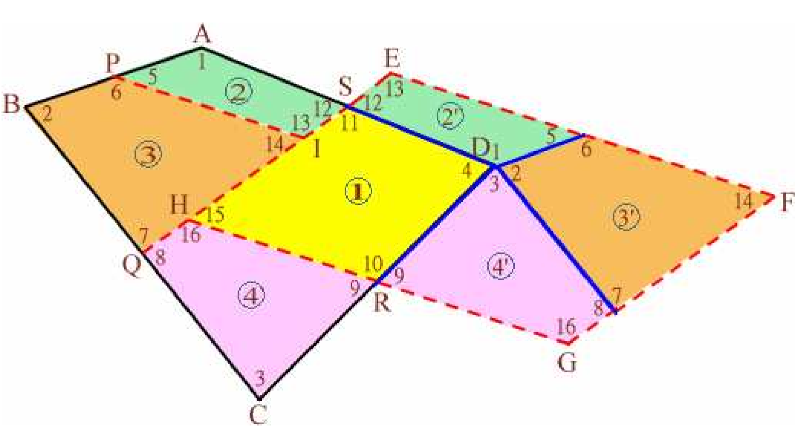


圖 2-1

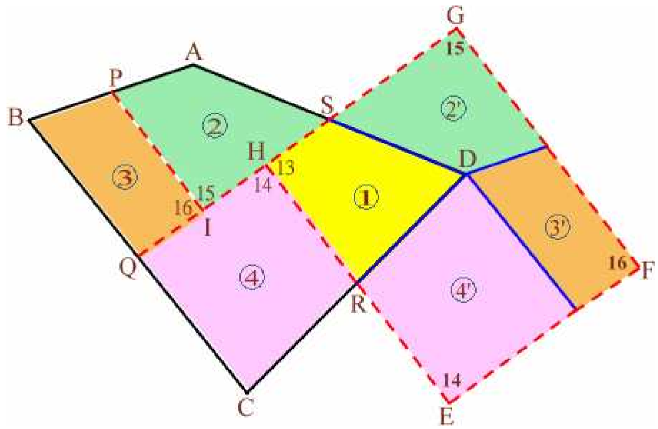


圖 2-2

(一) 任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形

表 2-1 任意凸四邊形拼成平行四邊形的充要條件、作圖要求、證明過程

1. 拼成平行四邊形的充要條件

(1) $\angle 5+\angle 6=\angle 7+\angle 8=\angle 9+\angle 10=\angle 11+\angle 12=\angle 13+\angle 14=\angle 15+\angle 16=180^0$
（直線上的鄰角）
(2) $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^0$（四邊形內角和定理）
(3) $\overline{AP}=\overline{BP}$ 、 $\overline{BQ}=\overline{CQ}$ 、 $\overline{CR}=\overline{DR}$ 、 $\overline{AS}=\overline{DS}$
（作 P、Q、R、S 分別是 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 之中點）
$\Rightarrow \overline{PS}//\overline{BD}//\overline{QR}$ 、 $\overline{PS}=½\overline{BD}=\overline{QR}$（四邊形四邊中點連線性質）
(1)～(3)本研究稱之爲拼成四邊形之充要條件。
(4)除了拼成四邊形之充要條件外，尙再加
$\overline{PI}//\overline{RH}$ 。

2. 拼成平行四邊形的作圖要求
在圖 2-1 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S，連接 $\overline{QS}$ ；以 P 點爲圓心、P 點到 $\overline{QS}$ 之垂線距離＜半徑＜ $\overline{PQ}$ 或 $\overline{PS}$（非端點，否則將會分割翻轉成三角形）、劃弧交 $\overline{QS}$ 於 I 點、連接之得 $\overline{PI}$ ；且以 R 點爲圓心、 $\overline{PI}$ 爲半徑作平行 $\overline{PI}$ 劃弧交 $\overline{QS}$ 於 H 點、連接之得 $\overline{RH}$ ；之後以 $\overline{QS}$ 、 $\overline{PI}$ 、 $\overline{RH}$ 爲分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割爲 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2'、3 翻轉到 3'、4 翻轉到 4'，則 1、2'、3'、4'即可組成平行四邊形 EFGH。
3. 拼成平行四邊形的證明過程
$\because \overline{PI}//\overline{RH} \therefore \angle 14=\angle 15$（內錯角相等）$\Rightarrow \angle 13=\angle 16$（等角的補角相等），因此四邊形 EFGH 爲兩組對角相等的平行四邊形。

(二) 任意凸四邊形分割翻轉成長方形

表 2-2 任意凸四邊形拼成長方形的充要條件、作圖要求、證明過程

1. 拼成長方形的充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尙再加， $\overline{PI}\perp\overline{QS}$ 且 $\overline{RH}\perp\overline{QS}$ 。
2. 拼成長方形的作圖要求
在圖 2-2 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S，連接 $\overline{QS}$ ；並自 P 點作垂線至 $\overline{QS}$ 交於 I 點、連接之得 $\overline{PI}$ ；且自 R 點作垂線至 $\overline{QS}$ 交於 H 點、連接之得 $\overline{RH}$ ；之後以 $\overline{QS}$ 、 $\overline{PI}$ 、 $\overline{RH}$ 爲分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割爲 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2'、3 翻轉到 3'、4 翻轉到 4'，則 1、2'、3'、4'即可組成長方形 EFGH。
3. 拼成長方形的證明過程
$\because \overline{PI}\perp\overline{QS}$ 且 $\overline{RH}\perp\overline{QS}$ $\therefore \angle 13=\angle 14=90^0$ 、 $\angle 15=\angle 16=90^0$ ，因此翻轉後四邊形 EFGH 爲四個角皆爲直角的長方形。

(三) 任意凸四邊形分割翻轉成菱形

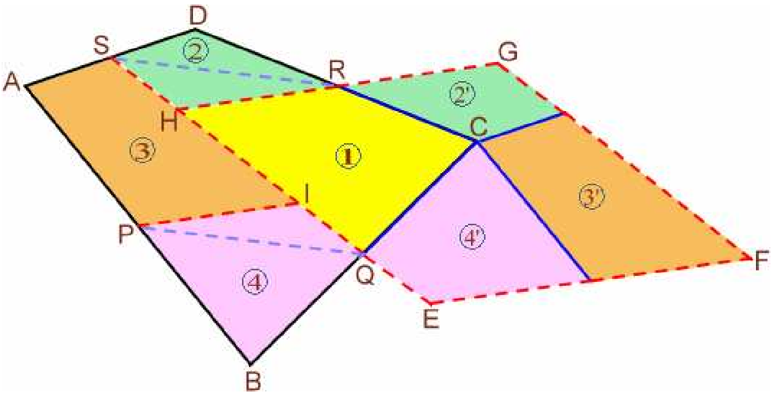


圖 2-3

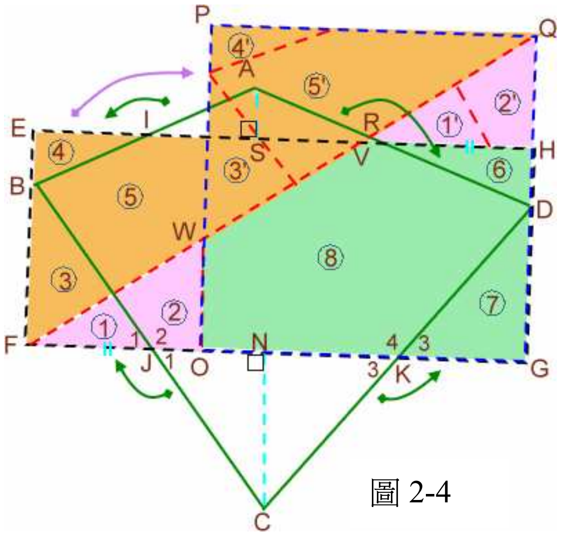


圖 2-4

表 2-3 任意凸四邊形拼成菱形的充要條件、作圖要求、證明過程

1. 拼成菱形的充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尚再加，$\overline{PI}=\overline{RH}=½\overline{QS}$。
2. 拼成菱形的作圖要求
在圖 2-3 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S，且連接 $\overline{QS}$（最長的兩邊中點連線）；以 P 點為圓心、½$\overline{QS}$ 為半徑劃弧交 $\overline{QS}$ 於 I 點、連接之得 $\overline{PI}$；且在 $\overline{QS}$ 任取 $\overline{SH}=\overline{QI}$，並連接 R 點、H 點得 $\overline{RH}$；之後以 $\overline{QS}$、$\overline{PI}$、$\overline{RH}$ 為分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割為 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2'、3 翻轉到 3'、4 翻轉到 4'，則 1、2'、3'、4'即可組成菱形 EFGH。
3. 拼成菱形的證明過程
(1)在△SHR 與△QIP 中，∵ $\overline{SR}//\overline{AC}//\overline{PQ}\Rightarrow$ ∠HSR=∠IQP（內錯角相等），又 $\overline{SR}=½\overline{AC}=\overline{PQ}$、$\overline{SH}=\overline{QI}$ ∴△SHR≅△QPI（SAS），則 $\overline{PI}=\overline{RH}=½\overline{QS}$（對應邊相等）。 (2)∵ $\overline{HE}=\overline{HQ}+\overline{QE}=\overline{HQ}+\overline{QI}=\overline{HQ}+\overline{SH}=\overline{QS}$；同理 $\overline{GF}=\overline{QS}$ 又 $\overline{HG}=\overline{HR}+\overline{GR}=½\overline{QS}+½\overline{QS}=\overline{QS}$；同理 $\overline{EF}=\overline{QS}$ 最後 $\overline{HE}=\overline{QS}=\overline{GF}=\overline{HG}=\overline{EF}$ ∴四邊形 EFGH 為菱形。

(四) 任意凸四邊形分割翻轉成正方形

由於任意凸四邊形分割翻轉成正方形在四邊形四邊中點連線的設計架構下進行是一種條件限制非常嚴格的（只有在四邊中點為內接正方形才能分割翻轉），故為求分割之一般化，在圖 2-4 任意凸四邊形 ABCD 中，首先我們取得 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$、$\overline{DC}$、$\overline{BC}$ 四邊之中點為 R 點、I 點、K 點、J 點且連接 $\overline{IR}$、$\overline{JK}$，並以 A 點、C 點為頂點分別對 $\overline{IR}$、$\overline{JK}$ 作垂線得 $\overline{AS}$、$\overline{CN}$ 且以 $\overline{IR}$、$\overline{JK}$、$\overline{AS}$、$\overline{CN}$ 為分割線，則可將任意凸四邊形 ABCD 分割為△ASI、△ASR、六邊形 IRDKJB、△CNJ、△CNK 五部份。

因 K、J 為任意凸四邊形 ABCD 各邊的中點，得 $\overline{DK}=\overline{CK}$、$\overline{CJ}=\overline{BJ}$、又

$\angle 1+\angle 2=180^0$ 、 $\angle 3+\angle 4=180^0$ ，則可將△CNJ、△CNK 放置於 $\overleftrightarrow{KJ}$ 而分別將其翻轉至△BFJ、△DGK；同理△ASI 翻轉至△BEI、△ASR 翻轉至△DHR；又因 $\overline{IR}\perp\overline{AS}$ 、 $\overline{JK}\perp\overline{CN}$ ，則∠ASI=∠ASR=90^0、∠JNC=∠KNC=90^0，翻轉後∠BEI=∠BFJ=∠DGK=∠DHR=90^0，最後△BFJ、△DGK、△BEI、△DHR、六邊形 IRDKJB，即可形成一個長方形 EFGH。

之後本研究採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式（請參照長方形分割翻轉爲正方形的模式），在長方形 EFGH 中，將其分割成△FOW、△EFV 與五邊形 VWOGH 三部份。最後△EFR 向上挪，△FOW 嵌入五邊形 VWOGH 的上部，即可形成正方形 POGQ。

(五) 任意凸四邊形分割翻轉成梯形

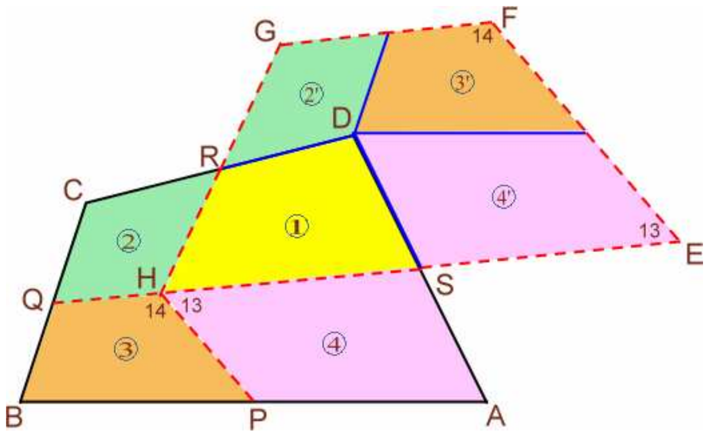


圖 2-5

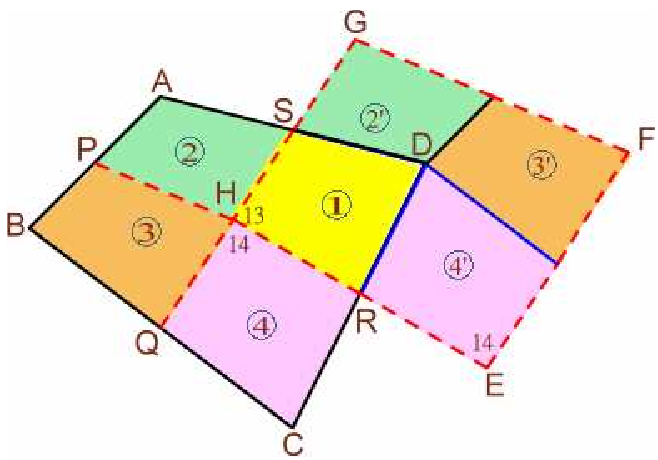


圖 2-6

表 2-4 任意凸四邊形拼成梯形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.　拼成梯形的充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尚再加，H 點爲 $\overline{QS}$ 上的一點。
2.　拼成梯形的作圖要求
在圖 2-5 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S、連接 $\overline{QS}$ ；在 $\overline{QS}$ 任找一點 H（非 $\overline{QS}$ 、 $\overline{PR}$ 之交點，否則將分割翻轉成平行四邊形），以之連接 P 點、R 點得 $\overline{PH}$ 、 $\overline{RH}$ ；之後以 $\overline{QS}$ 、 $\overline{PH}$ 、 $\overline{RH}$ 爲分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割爲 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2’、3 翻轉到 3’、4 翻轉到 4’，則 1、2’、3’、4’即可組成梯形 EFGH。
3.　拼成梯形的證明過程
$\because \angle 13+\angle 14=180^0$ ，翻轉後同側內角互補 $\Rightarrow \overline{GF}\,//\,\overline{HE}$ ，因此四邊形 EFGH 爲一組對邊互相平行的的梯形。

(六) 任意凸四邊形分割翻轉成直角梯形

表 **2-5** 任意凸四邊形拼成直角梯形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.　拼成直角梯形的充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尚再加 $\overline{HR} \perp \overline{QS}$ 。
2.　拼成直角梯形的作圖要求
在圖 2-6 任意凸四邊形 ABCD 中，取四邊中點 P、Q、R、S、連接 $\overline{QS}$ ；自 R 點作垂線至 $\overline{QS}$ 交於 H 點、連接之得 $\overline{RH}$ ；且與 P 點連接之得 $\overline{PH}$ ；之後以 $\overline{QS}$ 、 $\overline{RH}$ 、 $\overline{PH}$ 爲分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割爲 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2'、3 翻轉到 3'、4 翻轉到 4'，則 $\because \angle 13 + \angle 14 = 180^0$ 且 $\overline{HR} \perp \overline{QS} \Rightarrow \overline{GH} // \overline{EF}$ ， $\angle 13 = \angle 14 = 90^0$ ，因此 1 、2' 、3' 、4'即可組成直角梯形 EFGH。
3.　拼成直角梯形的證明過程
$\because \angle 13 + \angle 14 = 180^0$ 且 $\overline{HR} \perp \overline{QS} \Rightarrow \overline{GH} // \overline{EF}$，$\angle 13 = \angle 14 = 90^0$ $\therefore$其爲有一組鄰角爲直角的直角梯形 EFGH

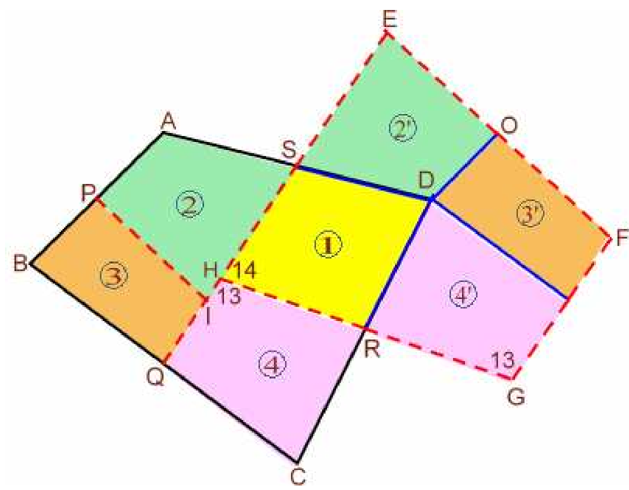


圖 2-7

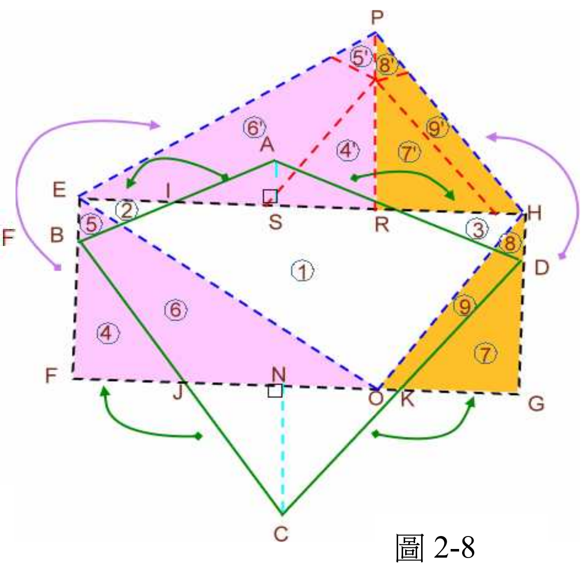


圖 2-8

(七) 任意凸四邊形分割翻轉成等腰梯形

表 **2-6** 任意凸四邊形拼成等腰梯形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.　拼成等腰梯形的充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尚再加， $\overline{PI} = \overline{RH}$ 且 $\overline{PI}$ 不平行 $\overline{RH}$ 。
2.　拼成等腰梯形的作圖要求
在圖 2-7 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S、連接 $\overline{QS}$ ；以 P 點爲圓心、P 點到 $\overline{QS}$ 之垂線距離＜半徑＜ $\overline{PQ}$ 或 $\overline{PS}$ （非端點）、劃弧交 $\overline{QS}$ 於 I 點、連接之得 $\overline{PI}$ ；且以 R 點爲圓心、 $\overline{PI}$ 長爲半徑作不平行 $\overline{PI}$ 劃弧交 $\overline{QS}$ 於 H 點、連接之得 $\overline{RH}$ ；之後以 $\overline{QS}$ 、 $\overline{PI}$ 、 $\overline{RH}$ 爲分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割爲 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2'、3 翻轉到 3'、4 翻轉到 4'，則 1、2'、3'、4'即可組成等腰梯形 EFGH。
3.　拼成等腰梯形的證明過程
(1) $\because \angle 13 + \angle 14 = 180^0 \therefore \overline{GF} // \overline{HE}$ （翻轉後同側內角互補） (2) $\because \overline{PI} = \overline{HR}$ ，又 $\overline{HR} + \overline{RG} = \overline{HG} = 2\overline{HR}$ 、 $\overline{EO} + \overline{FO} = \overline{EF} = 2\overline{PI}$ （翻轉前後的邊） $\Rightarrow \overline{HG} = \overline{EF}$ ，則梯形 EFGH 爲有一組不平行的對邊長相等的等腰梯形 EFGH。

(八) 任意凸四邊形分割翻轉成鳶形

表 2-7 任意凸四邊形拼成鳶形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	由於任意凸四邊形分割翻轉成鳶形，在四邊形四邊中點連線的設計架構下進行是一種條件限制非常嚴格的（只有在四邊中點為內接長方形時才能分割翻轉），故為求分割之一般化，在圖 2-8 任意凸四邊形 ABCD 中，我們先依圖 2-4 的任意凸四邊形分割翻轉為長方形的方式分割，得長方形 EFGH。
2.	之後我們再將長方形 EFGH 分割翻轉為鳶形，在長方形 EFGH 中，在寬 $\overline{FG}$ 上（非中點）任取一點 O 點，連接 $\overline{EO}$ 、 $\overline{HO}$ 並以之為分割線，將其分割為 1、2、3、4、5、6、7、8、9 九部份，之後因∠F=∠G=90^0、 $\overline{EF}=\overline{HG}$ 、 $\overline{FO}+\overline{GO}=\overline{FG}=\overline{EH}$ ，所以△EFO 與△HGO 可水平放置於 $\overline{EH}$ ，則可將 4、5、6、7、8、9 翻轉至 4’、5’、6’、7’、8’、9’，又因 $\overline{HO}=\overline{HP}$ 、 $\overline{EO}=\overline{EP}$ ，而 1、2、3、4’、5’、6’、7’、8’、9’即可重新組成一個鳶形 PEOH。

(九) 任意凸四邊形分割翻轉成任意凹四邊形

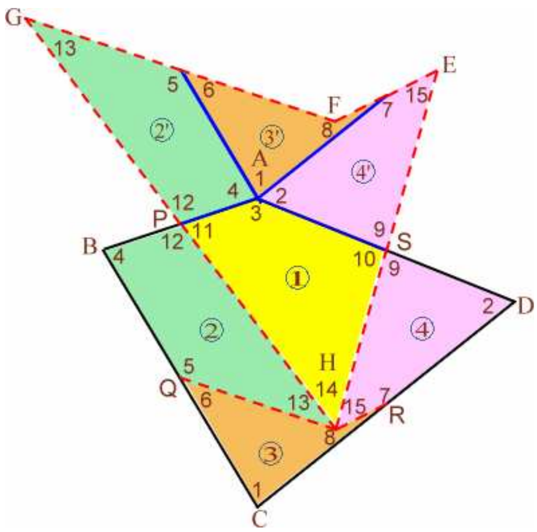


圖 2-9

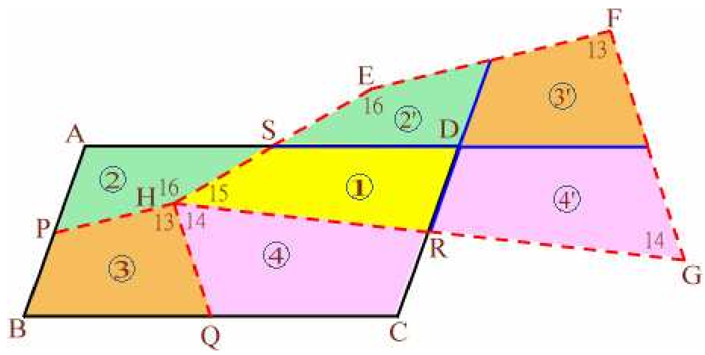


圖 3-1

表 2-8 任意凸四邊形拼成任意凹四邊形的充要條件、作圖要求、證明過程

1. 拼成任意凹四邊形的充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尚再加，在任意凸四邊形 ABCD 內、四邊形 PQRS 外任意取一點。
2. 拼成任意凹四邊形的作圖要求
在圖 2-9 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S，並在任意凸四邊形 ABCD 內、四邊形 PQRS 外任意取一點 H，且以 H 點連接 P、Q、R、S 四點，得 $\overline{HP}$ 、 $\overline{HQ}$ 、 $\overline{HR}$ 、 $\overline{HS}$ 並以之為分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割為 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2’、3 翻轉到 3’、4 翻轉到 4’，則 1、2’、3’、4’即可組成任意凹四邊形 EFGH。
3. 拼成任意凹四邊形的證明過程
$\because \angle 13+\angle 14+\angle 15<180^0$（∠13+∠14+∠15 為△QHR 的內角）$\Rightarrow 360^0-(\angle 13+\angle 14+\angle 15)$ $=\angle QHR>180^0$、翻轉後∠QHR=∠GFE$>180^0$，則其必為一任意凹四邊形。

三、　平行四邊形分割設計翻轉成其他各種四邊形

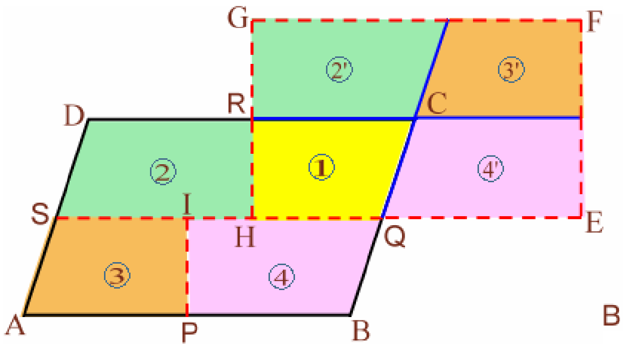


圖 3-2-1
平行四邊形分割翻轉成長方形

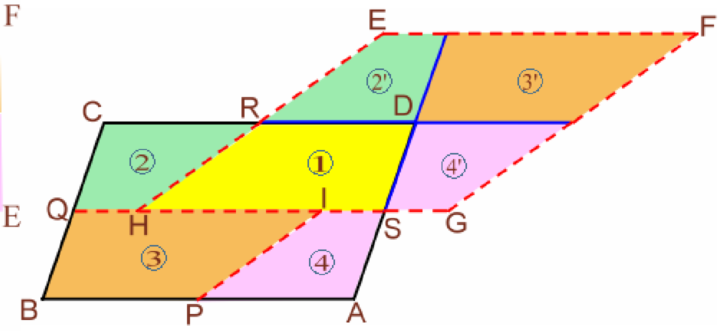


圖 3-2-2
平行四邊形分割翻轉成菱形

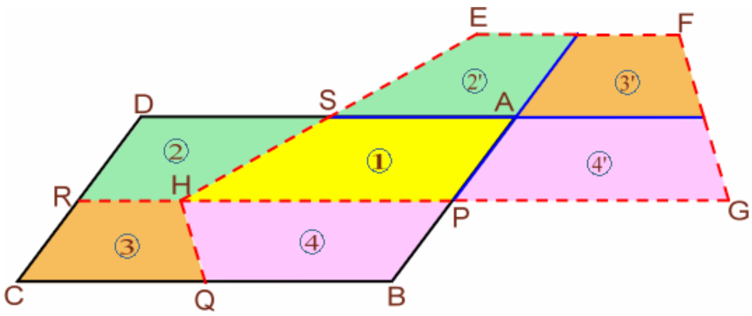


圖 3-2-3
平行四邊形分割翻轉成梯形

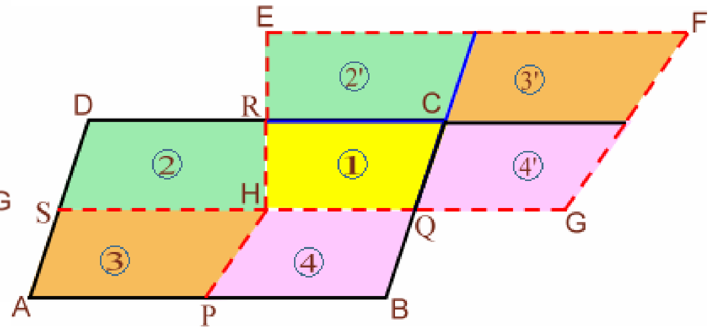


圖 3-2-4
平行四邊形分割翻轉成直角梯形

(一) 平行四邊形分割翻轉成任意凸四邊形

表 3-1 平行四邊形拼成任意凸四邊形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.　拼成的任意凸四邊形充要條件
除了拼成四邊形之充要條件外尚再加，分割點只須在內接四邊形 PQRS 內之任一點且非 $\overline{QS}$ 、$\overline{PR}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 線上的點，否則將分割翻轉成特殊四邊形。
2.　拼成任意凸四邊形的作圖要求
在圖 3-1 任意凸四邊形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 與 $\overline{AD}$ 四邊中點 P、Q、R、S，在內接四邊形 PQRS 內任找一點 H，並以 H 點連接 P、Q、R、S 四點得 $\overline{PH}$ 、$\overline{QH}$ 、$\overline{RH}$ 、$\overline{SH}$，之後以 $\overline{RH}$ 、$\overline{PH}$ 、$\overline{SH}$ 與 $\overline{QH}$ 為分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割為 1、2、3、4，最後將 2 翻轉到 2'、3 翻轉到 3'、4 翻轉到 4'，則 1、2'、3'、4'即可組成任意凸四邊形 EFGH。
3.　拼成任意凸四邊形的證明過程
∵ $\angle 13 < 180^0$、$\angle 14 < 180^0$、$\angle 15 < 180^0$、$\angle 16 < 180^0$（$\angle 13$、$\angle 14$、$\angle 15$、$\angle 16$ 分別為 △PHQ、△QHR、△SHR、△PHS 的內角⇒三角形之內角小於 180^0），又翻轉後 $\angle 13 + \angle 14 + \angle 15 + \angle 16 = 360^0$ 則其必為一任意凸四邊形 EFGH。

(二) 平行四邊形分割翻轉成長方形、菱形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形

因其分割方式與任意凸四邊形分割翻轉成長方形、菱形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形的充要條件，作圖與證明過程一致，故本研究只列出圖形提供參考。

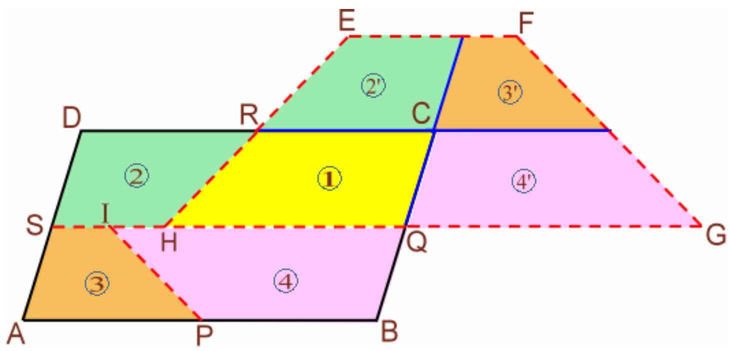


圖 3-2-5

平行四邊形分割翻轉成等腰梯形

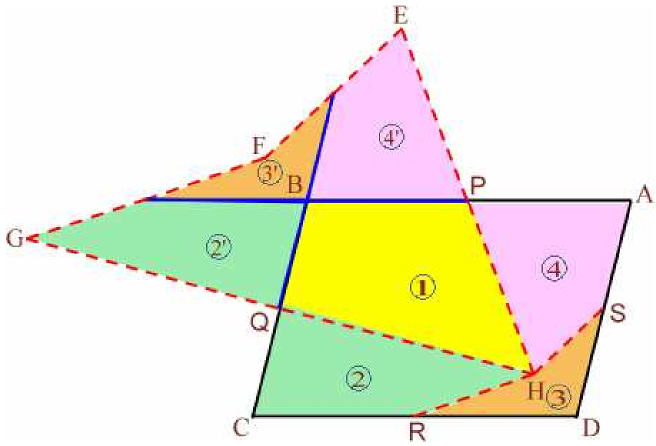


圖 3-2-6

平行四邊形分割翻轉成任意凹四邊形

(三) 平行四邊形分割翻轉成正方形

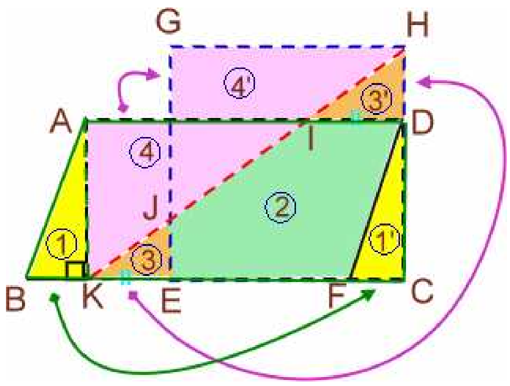


圖 3-3

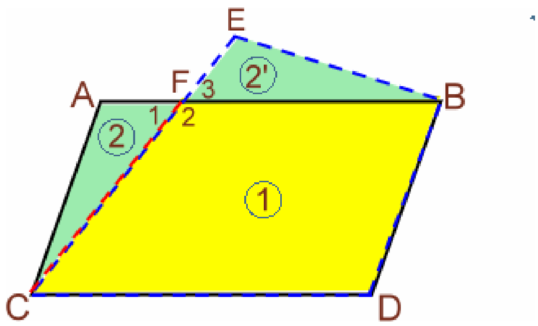


圖 3-4

表 3-2 平行四邊形拼成正方形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	平行四邊形分割翻轉成正方形是比較嚴謹且爲求分割之一般化，故本研究採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先在圖 3-3 的平行四邊形 ABCD 中，以 A 點爲頂點對 $\overline{BC}$ 作垂線交 $\overline{BC}$ 於 K 點，連接 $\overline{AK}$ 並以之爲分割線則可將平行四邊形 ABCD 分割爲△ABK 與梯形 AKFD，因 $\overline{AB}=\overline{DF}$（平行四邊形對邊相等）、又∠B＋∠DFE=$180^0$=∠DFE＋∠DFC，則可將△ABK 翻轉至△DFC，而△DFC 與梯形 AKFD 即可重新組成一個長方形 AKCD。
2.	之後我們依循長方形分割翻轉爲正方形的模式（請參照長方形分割翻轉爲正方形的模式），在長方形 AKCD 中，將其分割成 1’、2、3 與 4 四部份。最後 4 向上挪，3 嵌入 2、1’的上部，最後 1’、2、3’與 4’即可形成邊長爲 $\sqrt{\overline{AK}\times\overline{AD}}=\overline{CE}$ 的正方形 HGEC。

(四) 平行四邊形分割翻轉成鳶形

表 3-3 平行四邊形拼成鳶形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	在圖 3-4 平行四邊形 ABDC 中，分別以 C 點、B 點為圓心 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BD}$ 劃弧，兩弧相交於 E 點並連接 C 點、B 點得 $\overline{EC}$ 與 $\overline{BE}$、交 $\overline{AB}$ 於 F 點並以 $\overline{FC}$ 作為分割線將平行四邊形 ABDC 分割為 1、2 部份。
2.	之後因∠1=∠3（對頂角相等）、∠A＝∠D（平行四邊形的對角）＝∠E（鳶形有一組對角相等）、$\overline{AC}=\overline{BD}$（平行四邊形對邊相等）＝$\overline{BE}$（鳶形鄰邊相等），因此△AFC≅△EFB（AAS），故 $\overline{CF}=\overline{BF}$（對應邊相等），又∠1+∠2=∠2+∠3=$180^0$∴$\overline{CF}$ 可水平放置於 $\overline{AB}$ 上，最後將 2 翻轉至 2'，而 1 與 2'即可形成一個鳶形 ECDB。

四、 長方形分割設計翻轉成其他各種四邊形

(一) 長方形分割翻轉成任意凸四邊形、平行四邊形、菱形、任意凹四邊形

因其分割方式與平行四邊形分割翻轉成任意凸四邊形；任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形、菱形、任意凹四邊形的充要條件，作圖與證明過程一致，故本研究只列圖。

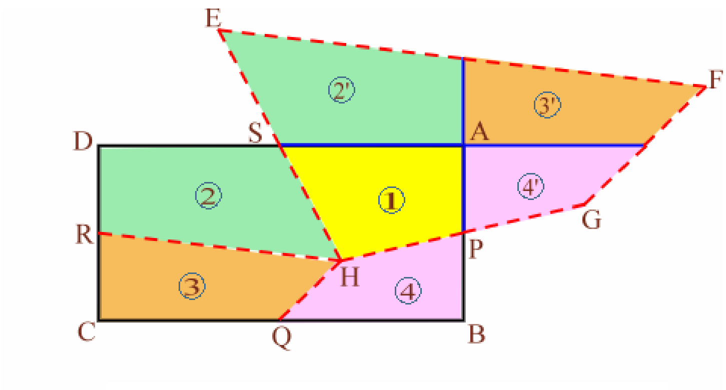


圖 4-1-1
長方形分割翻轉成任意凸四邊形

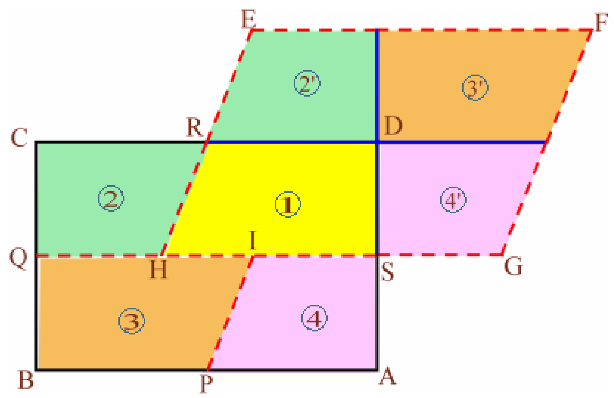


圖 4-1-2
長方形分割翻轉成平行四邊形

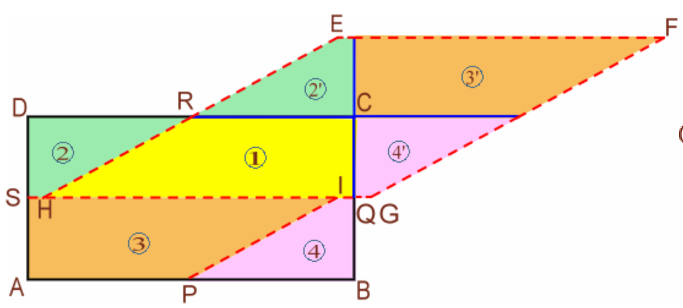


圖 4-1-3
長方形為分割翻轉成菱形

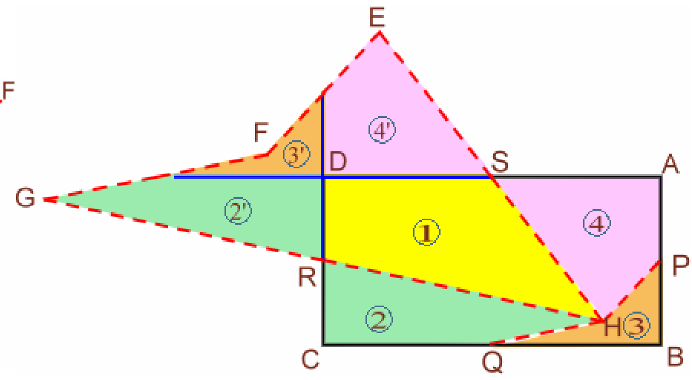
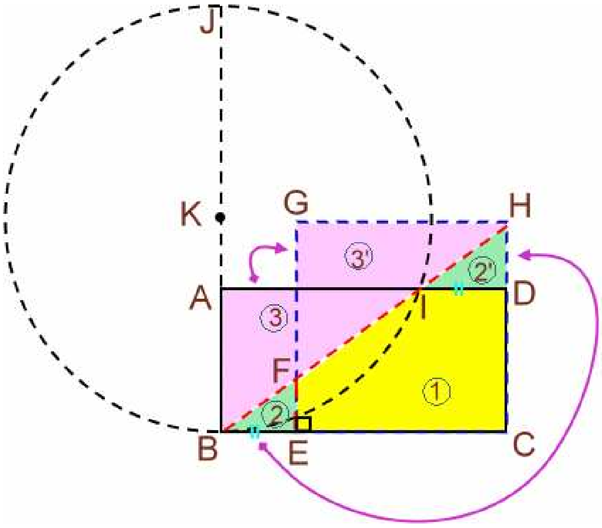


圖 4-1-4
長方形分割翻轉成任意凹四邊形

(二) 長方形分割翻轉成正方形



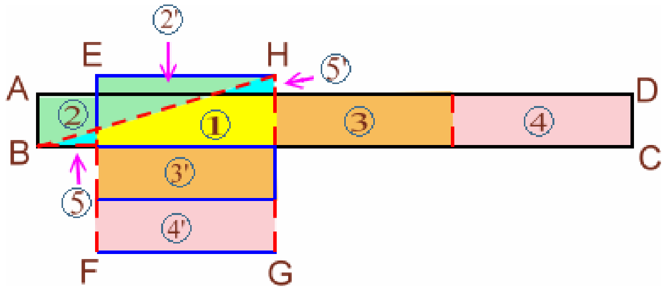


圖 4-2-1　　　　　　　　圖 4-2-2

藤春幸三郎與田村三郎（1996）指出在如圖 4-2-1 長方形 ABCD 中，將長爲 $\overline{AD}$ ＝a、寬爲 $\overline{AB}$ ＝b 且 $\overline{AD}$ ＞ $\overline{AB}$ 的長方形，延長 $\overline{AB}$ 使 $\overline{BJ}$ ＝ $\overline{AD}$ ＋ $\overline{AB}$ ＝a＋b，再以 $\overline{BJ}$ ＝a＋b 爲直徑、K 點爲圓心劃一半圓，交 $\overline{AD}$ 於 I 點而 $\overline{AI}=\sqrt{ab}$ 。連接 $\overline{BI}$ 並以 B 點爲頂點、 $\overline{ID}$ 爲長劃弧交 $\overline{BC}$ 於 E 點，且以 E 點爲頂點對 $\overline{BI}$ 作垂線交 $\overline{BI}$ 於 F 點且連接 $\overline{EF}$，之後以 $\overline{BI}$、$\overline{EF}$ 爲分割線則可將長方形 ABCD 分成△ABI、△BEF 與五邊形 FECDI 三部份。而△ABI 向上挪，△BEF 嵌入五邊形 FECDI 的上部，即可形成正方形 GECH。

若從長邊 $\overline{AD}$ 切取 $\sqrt{ab}$ 後的長度若比 $\sqrt{ab}$ 長時，則無法構成正方形。所以在圖 4-2-2 中，此時只要從右端切取寬爲 a、長爲 $\sqrt{ab}$ 的長方形，使剩下的長比 $2\sqrt{ab}$ 短時，再按照前述切法即可。因此，當 $n^2a<b\leqq(n+1)^2a$ 時，可以 n＋2 個部份重新排成正方形。

(三) 長方形分割翻轉成梯形、直角梯形、等腰梯形

表 4-1 長方形分割翻轉成梯形、直角梯形、等腰梯形

1.	在圖 4-3-3 長方形 ABCD 中，P、Q、R、S 分別爲 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ ， $\overline{AD}$ 之中點，連接 $\overline{SQ}$ ，並在 $\overline{SQ}$ 上的任取一點 H，連接 P 點、R 點，得 $\overline{PH}$ 、 $\overline{RH}$ ，且以 $\overline{SQ}$ 、 $\overline{PH}$ 、 $\overline{RH}$ 爲分割線將長方形 ABCD 分割爲 1、2、3、4 四部份。之後因長方形是線對稱圖形， $\overline{SQ}$ 是它的對稱軸，且在△PHR 中 $\overline{SQ}$ 爲其中垂線，又 $\overline{PH}=\overline{RH}$ 故其爲等腰三角形，∴∠1=∠3（∵等腰三角形底邊的中垂線亦是其頂角的角平分線）。又因∠1+∠2=180^0∴ $\overline{EF}\,//\,\overline{GH}$ (同側內角互補)，翻轉之後將得到一兩底角相等的等腰梯形 EFGH，而非一般梯形。
2.	在圖 4-3-1 中長方形分割翻轉成梯形因前述原因，故不能像任意凸四邊形分割翻轉成一般梯形的方式分割，而是要在 $\overline{SQ}$ 上任取兩點 I 點、H 點連接 $\overline{PI}$ 、$\overline{HR}$，之後因∠1+∠2=$180^0\Rightarrow\overline{GF}\,//\,\overline{EH}$ (同側內角互補)，翻轉後必爲梯形 EFGH。
3.	在圖 4-3-2 長方形 ABCD 中，其四邊中點連線爲菱形而菱形之對角線互相垂直，故其作圖要求與證明過程如下：取四邊中點 P、Q、R、S、連接 $\overline{QS}$；自 R 點作垂線至 $\overline{QS}$ 交於 H 點、連接之得 $\overline{RH}$ ；連接 P 點得 $\overline{PH}$ ；之後以 $\overline{QS}$ 、 $\overline{RH}$ 、 $\overline{PH}$ 爲分割線將任意凸四邊形 ABCD 分割爲 1、2、3、4 四部份，最後∵ $\angle 13+\angle 14=180^0$ 且 $\overline{HR}\perp\overline{QS}\Rightarrow\overline{EH}\,//\,\overline{GF}$ ， $\angle 13=\angle 14=90^0$ ∴1、2’、3’、4’即可組成直角梯形 EFGH。

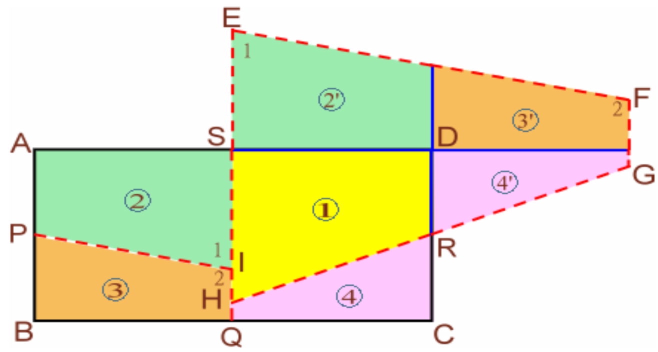


圖 4-3-1

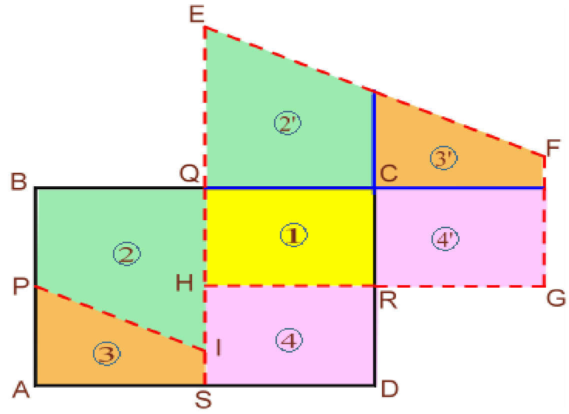


圖 4-3-2

長方形分割翻轉成直角梯形

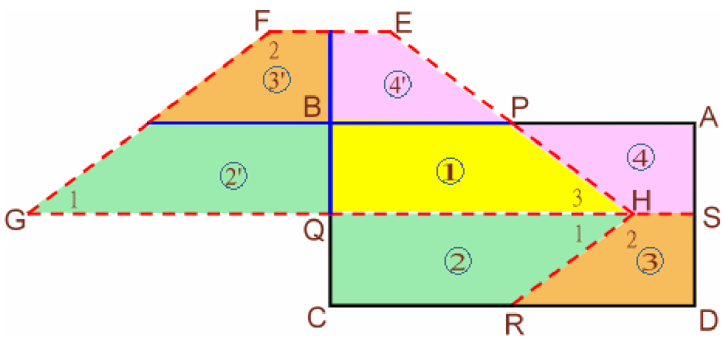


圖 4-3-3

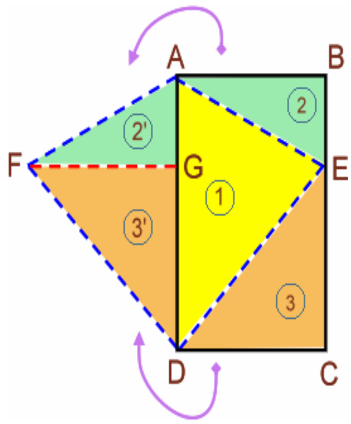


圖 4-4

(四) 長方形分割翻轉成鳶形

在圖 4-4 長方形 ABCD 中，在$\overline{BC}$任取一點（非中點）E 點，連接$\overline{AE}$、$\overline{DE}$並以之爲分割線，將其分割爲 1、2、3 三部份，之後因∠B=∠C=90^0；$\overline{BE}+\overline{CE}=\overline{BC}=\overline{AD}$，所以 2'與 3' 翻轉後可水平放置於$\overline{AD}$，則將 2 翻轉至 2'；3 翻轉至 3'，最後又因$\overline{AE}=\overline{AF}$、$\overline{DF}=\overline{DE}$（翻轉前後的邊），故 1、2'、3'即可重新組成一個鳶形 AEDF。

五、 菱形分割設計翻轉成其他各種四邊形

(一) 菱形分割翻轉成任意凸四邊形、平行四邊形、長方形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形

因其分割方式與平行四邊形分割翻轉成任意凸四邊形；任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形、長方形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形的充要條件，作圖與證明過程一致，故本研究只列圖。

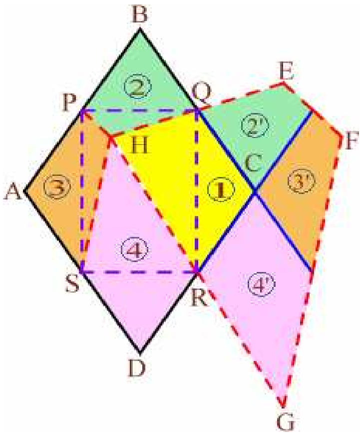


圖 5-1-1
菱形分割翻轉成任意凸四邊形

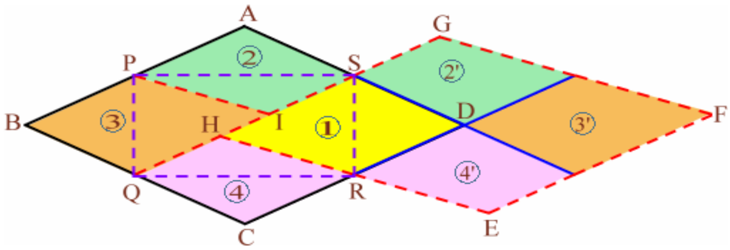


圖 5-1-2
菱形分割翻轉成平行四邊形

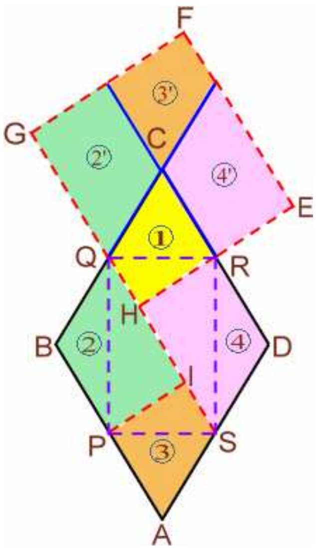


圖 5-1-3
菱形分割翻轉成長方形

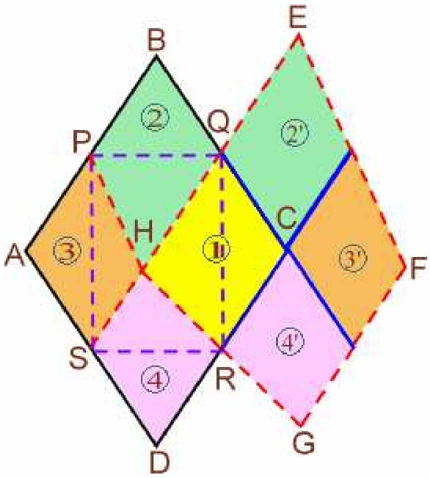


圖 5-1-4
菱形分割翻轉成梯形

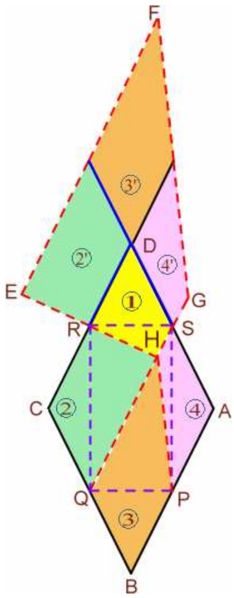


圖 5-1-5
菱形分割翻轉成直角梯形

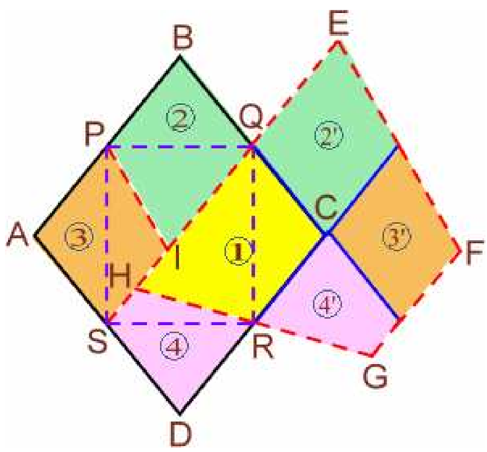


圖 5-1-6
菱形分割翻轉成等腰梯形

(二)　菱形分割翻轉成正方形

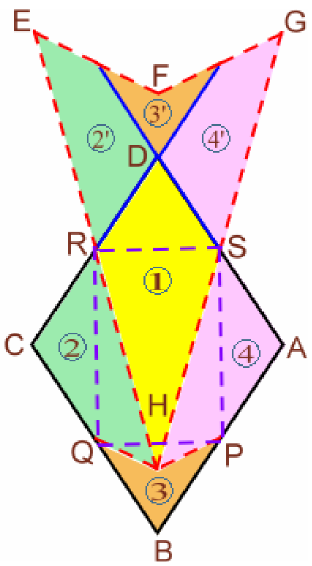


圖 5-1-7
菱形分割翻轉成任意凹四邊形

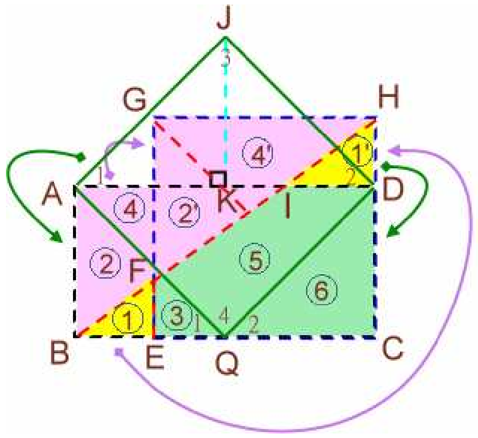


圖 5-2

表 5-1 菱形拼成正方形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	菱形分割翻轉成正方形是比較嚴謹且為求分割之一般化，故本研究採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先在圖 5-2 菱形 AJDQ 中，連接菱形 $\overline{AD}$ 、$\overline{JK}$（K 點為其兩對角線之交點）並以之為分割線，將菱形 AJDQ 分割為△AKJ、△DKJ、△AQD 三部份，之後則可將△AKJ 翻轉至△ABQ；△DKJ 翻轉至△DCQ，而△ABQ、△DCQ、△AQD 即可重新組成一個邊長為 $\overline{AB}$ 、$\overline{AD}$ 的長方形 ABCD。理由呢？因菱形四邊相等⇒ $\overline{AJ}=\overline{AQ}=\overline{QD}=\overline{JD}$ ，又∠3=∠4（菱形對角相等）⇒∠1+∠2+∠3=∠1+∠2+∠4=180^0，外加 $\overline{AK}+\overline{KD}=\overline{AD}=\overline{BQ}+\overline{CQ}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=\overline{KJ}=\overline{CD}$ ，而且菱形之兩對角線互相垂直平分⇒ $\overline{AD}\perp\overline{JK}$ ，故∠AKJ=∠DKJ=∠ABQ=∠C=90^0，最後即可形成長方形 ABCD。
2.	之後我們依循長方形分割翻轉為正方形的模式（請參照長方形分割翻轉為正方形的模式），在長方形 ABCD 中，將其分割成△ABI、△BEF 與五邊形 IFECD 三部份。最後△ABI 向上挪，△BEF 嵌入五邊形 IFECD 的上部，即可形成正方形 HGEC。

(三)　菱形分割翻轉成鳶形

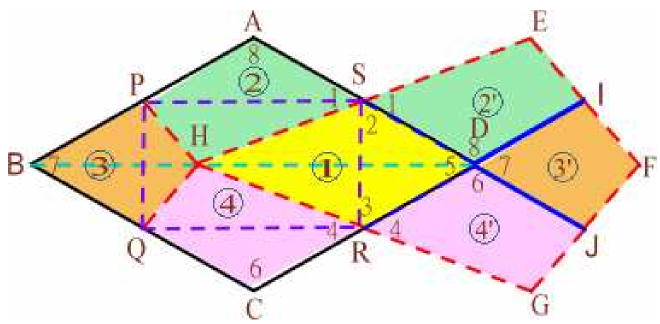


圖 5-3

表 5-2 菱形拼成鳶形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	在圖 5-3 菱形 ABCD 中，首先我們取得 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{DC}$、$\overline{AD}$ 四邊之中點爲 P 點、Q 點、R 點、S 點，並∵菱形爲一線對稱圖形且 $\overline{BD}$ 爲其對稱軸，故在內接矩形 PQRS 中 $\overline{BD}$ 上任取一點 H 點（非中點，否則將分割翻轉成菱形），連接 $\overline{PH}$、$\overline{QH}$、$\overline{HR}$、$\overline{HS}$，則 $\overline{PH}=\overline{QH}$、$\overline{RH}=\overline{SH}$（對稱軸即對稱點之中垂線，∴中垂線線上任一點到線段兩端點等距離），且以之爲分割線，將菱形 ABCD 分割 1、2、3、4。
2.	之後因菱形四邊相等且 P 點、Q 點、R 點、S 點爲中點 $\overline{AP}=\overline{BP}$、$\overline{BQ}=\overline{CQ}$、$\overline{CR}=\overline{DR}$、$\overline{AS}=\overline{DS}$，$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180^0$、$\angle 5+\angle 6=\angle 7+\angle 8=360^0$，則可將 2 翻轉至 2'；3 翻轉至 3'；4 翻轉至 4'，又因 $\overline{HS}+\overline{SE}=\overline{HE}=2\overline{HS}$、$\overline{HR}+\overline{RG}=\overline{HG}=2\overline{HR} \Rightarrow \overline{HE}=\overline{HG}$；$\overline{EI}+\overline{IF}=\overline{EF}=2\overline{PH}$、$\overline{FJ}+\overline{JG}=\overline{FG}=2\overline{QH} \Rightarrow \overline{EF}=\overline{FG}$，故 1、2'、3'、4'即可重新組成一個兩鄰邊相等鳶形 EFGH。

六、 正方形分割設計翻轉成其他各種四邊形

(一) 正方形分割翻轉成任意凸四邊形、平行四邊形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形

因其分割方式與平行四邊形分割翻轉成任意凸四邊形；任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形、任意凹四邊形；長方形分割翻轉成梯形、直角梯形、等腰梯形的充要條件，作圖與證明過程一致，故本研究只列圖。

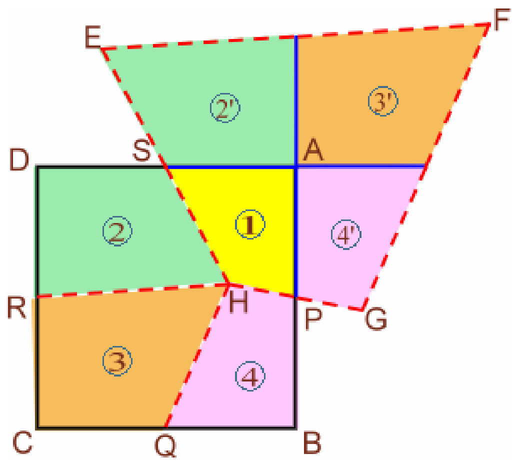


圖 6-1-1
正方形分割翻轉成任意凸四邊形

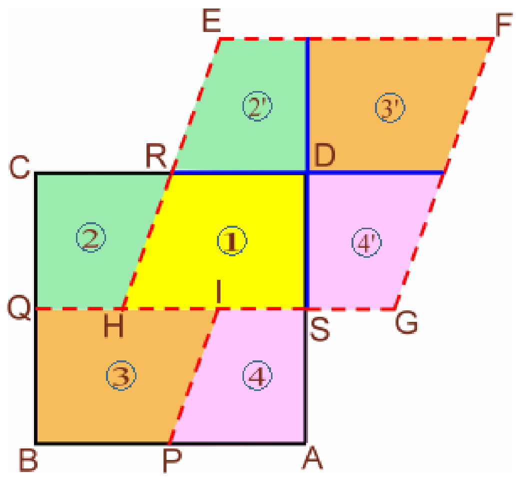


圖 6-1-2
正方形分割翻轉成平行四邊形

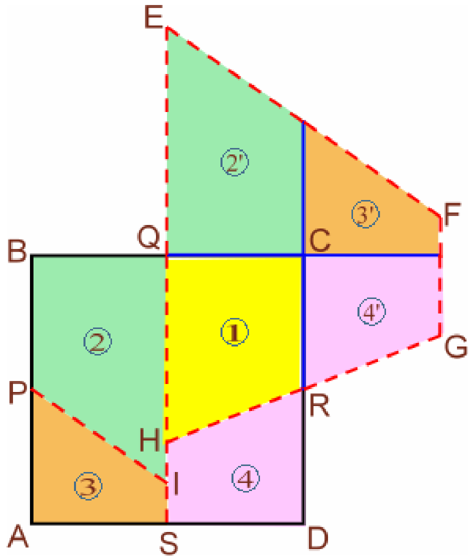


圖 6-1-3
正方形分割翻轉成梯形

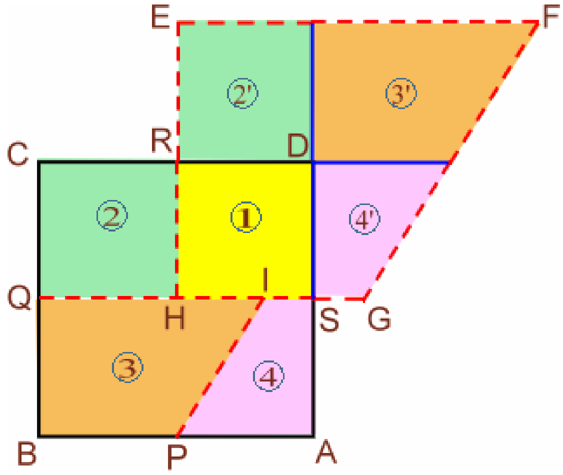


圖 6-1-4
正方形分割翻轉成直角梯形

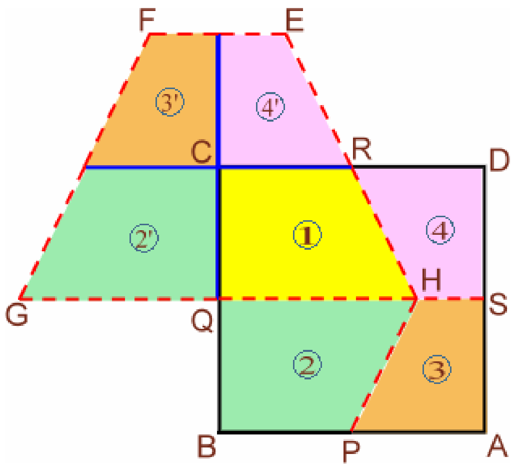


圖 6-1-5
正方形分割翻轉成等腰梯形

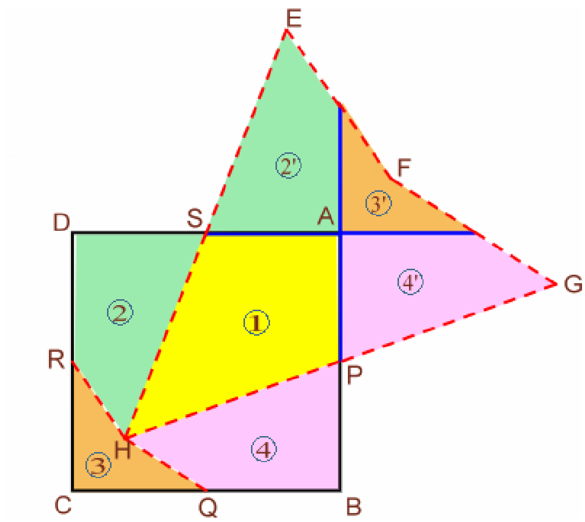


圖 6-1-6
正方形分割翻轉成任意凹四邊形

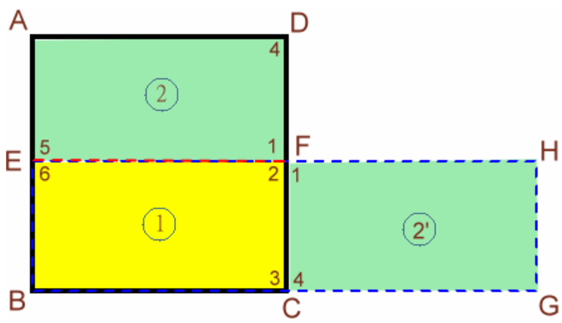


圖 6-2

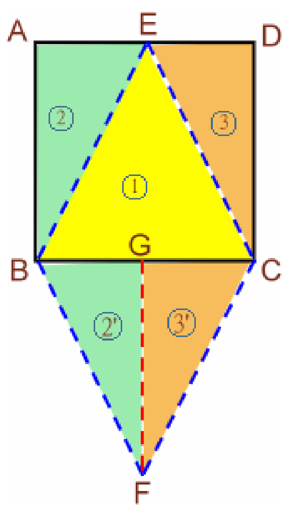


圖 6-3

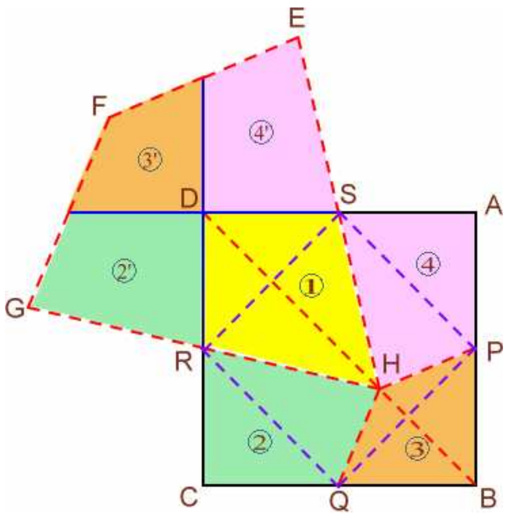


圖 6-4

表 **6-1** 正方形分割翻轉成長方形、菱形、鳶形

(二)正方形分割翻轉成長方形
在圖 6-2 正方形 ABCD 中，取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$ 之中點 E 點、F 點，連接成 $\overline{EF}$ 並以之分割線則可將其分割為 1 與 2 二部份。因 F 點為 $\overline{DC}$ 之中點，所以 $\overline{CF}=\overline{DF}$ 、又∠1+∠2=∠3+∠4 =180^0，則可將 2'水平放置於 $\overrightarrow{BC}$ ，且 $\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$ ，故∠G=∠H=∠6=∠B=90^0，故 1、2'即可重新組成一個長方形 EBGH。
(三)正方形分割翻轉成菱形
在圖 6-3 正方形 ABCD 中，在 $\overline{AD}$ 上取中點 E 點，連接 $\overline{BE}$、$\overline{CE}$ 並以之為分割線則可將正方形 ABCD 分割為 1、2 與 3 三部份，之後因 $\overline{DE}=\overline{AE}$（E 點為 $\overline{AD}$ 之中點）、 $\overline{AB}=\overline{CD}$（正方形對邊相等）、又∠A=∠D=$90^0$，故△AEB≅△DEC（SAS），則可知 $\overline{CE}=\overline{BE}$ （對應邊相等），翻轉前因∠A =∠D=90^0、 $\overline{AE}+\overline{DE}=\overline{AD}=\overline{BG}+\overline{CG}=\overline{BC}$ ，所以 2'與 3'可水平放置於 $\overline{CB}$ 。最後將 2 翻轉至 2'；3 翻轉至 3'，而 $\overline{CE}=\overline{BE}=\overline{BF}=\overline{CF}$ 即可得由 1、2'、3'組成的菱形 EBFC。
(四)正方形分割翻轉成鳶形
在圖 6-4 正方形 ABCD 中，因為預期分割翻轉為鳶形只有在四邊中點為內接長方形才可，而正方形四邊中點為內接正方形（也是長方形的一種），因此正方形可分割翻轉為鳶形，其充要條件，作圖與證明過程與菱形分割翻轉為鳶形一致，故本研究只列圖。

七、 梯形分割設計翻轉成其他各種四邊形

(一) 梯形分割翻轉成任意凸四邊形、平行四邊形、長方形、菱形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形

因其分割方式與平行四邊形分割翻轉成任意凸四邊形；任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形、長方形、菱形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形的充要條件，作圖與證明過程一致，故本研究只列圖。

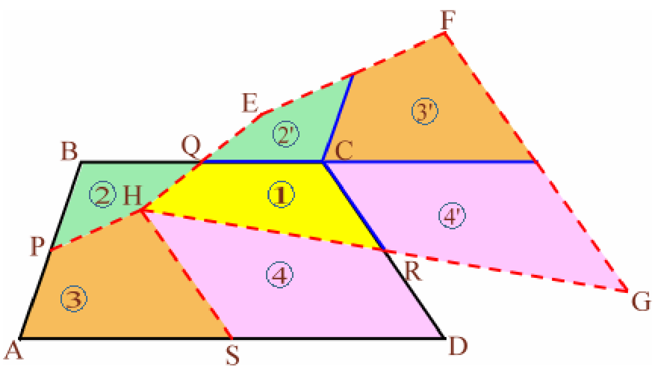


圖 7-1-1
梯形分割翻轉成任意凸四邊形

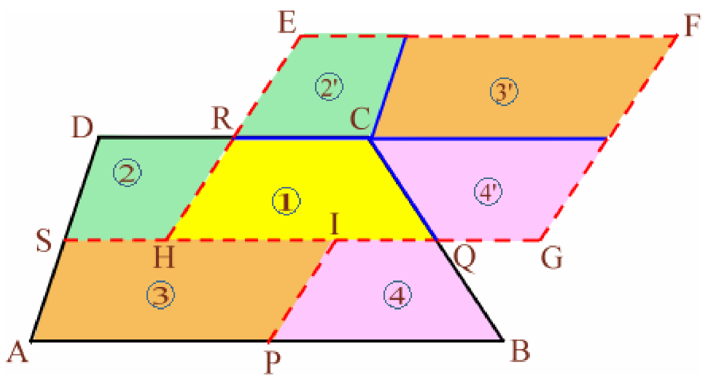


圖 7-1-2
梯形分割翻轉成平行四邊形

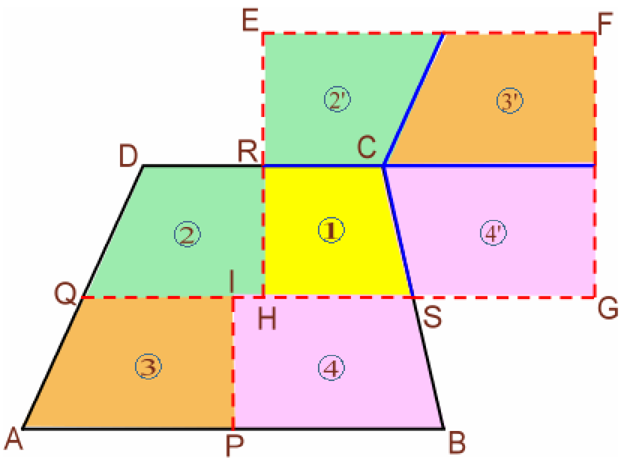


圖 7-1-3
梯形分割翻轉成長方形

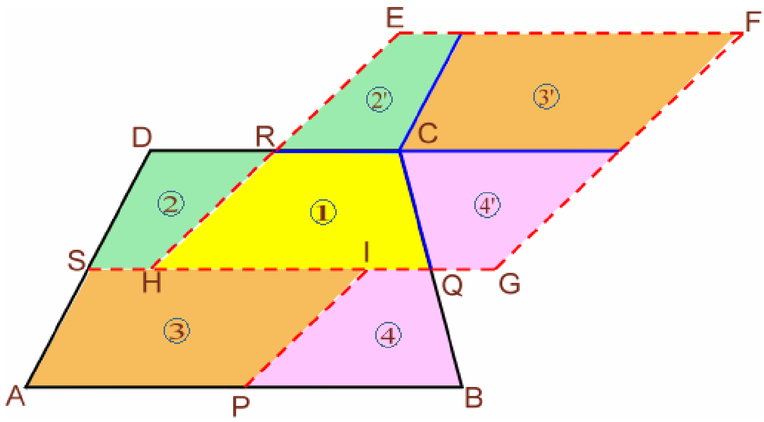


圖 7-1-4
梯形分割翻轉成菱形

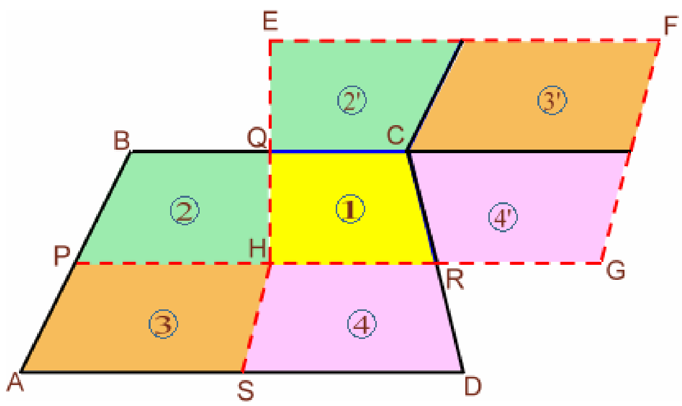


圖 7-1-5
梯形分割翻轉成直角梯形

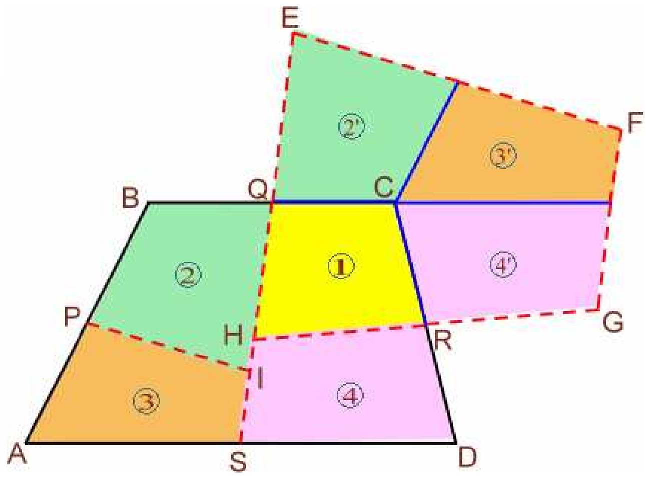


圖 7-1-6
梯形分割翻轉成等腰梯形

(二) 梯形分割翻轉成正方形

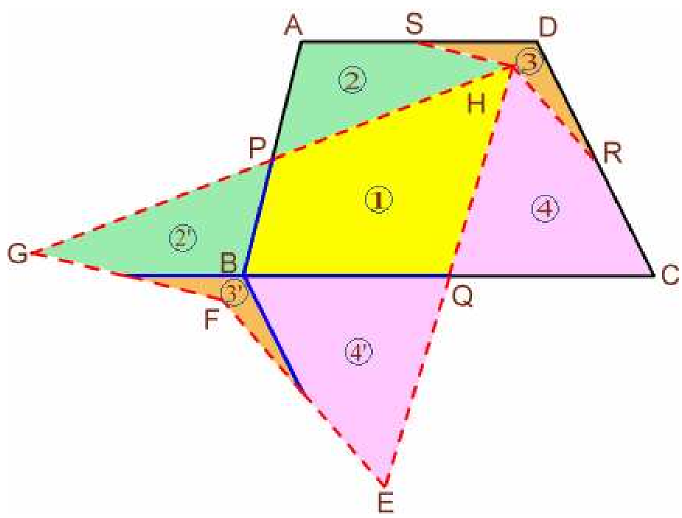


圖 7-1-7 梯形分割翻轉成任意凹四邊形

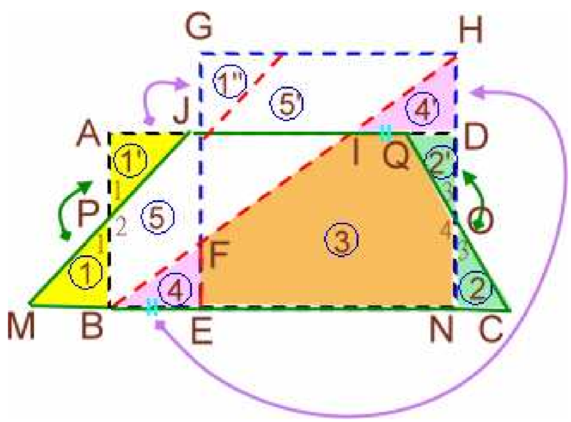


圖 7-2

表 7-1 梯形拼成正方形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	梯形分割翻轉成正方形是比較嚴謹且爲求分割之一般化，故本研究採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先在圖 7-2 的梯形 JMCQ 中，沿梯形 JMCQ 之兩腰 $\overline{JM}$ 、$\overline{QC}$ 取中點，得 P 點與 O 點，並以 P 點、O 點爲頂點對 $\overline{MC}$ 做垂線分別交 B 點與 N 點，連接得 $\overline{BP}$ 、 $\overline{ON}$ ，且以之分割線將梯形 ABCD 分割爲 1、2 與六邊形 JPBNOQ 三部份，之後因 $\overline{JM}$ 、$\overline{QC}$ 之中點 P 點與 Q 點，得 $\overline{MP}=\overline{JP}$、$\overline{CO}=\overline{QO}$、∠1+∠2=∠3+∠4=$180^0$，又因∠PBM =$90^0$、∠CNO=$90^0$ ⇒ ∠PAJ=∠PBE=∠ENO=∠ODQ=90^0，則可將 1 翻轉至 1'；2 翻轉至 2'，而 1'、2'與六邊形 JPBNOQ 即可重新組成一個長方形 ABND。
2.	之後我們依循長方形分割翻轉爲正方形的模式，在長方形 ABND 中，將其分割成△ABI、△BEF 與五邊形 IFEND 三部份。最後△ABI 向上挪，△BEF 嵌入五邊形 IFEND 的上部，即可形成正方形 HGEN。

(三) 梯形分割翻轉成鳶形

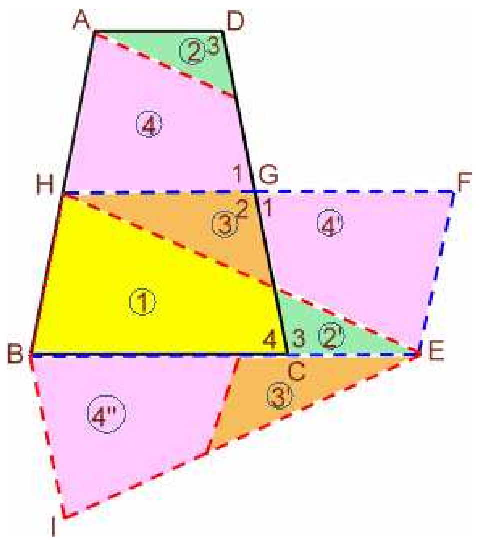


圖 7-3

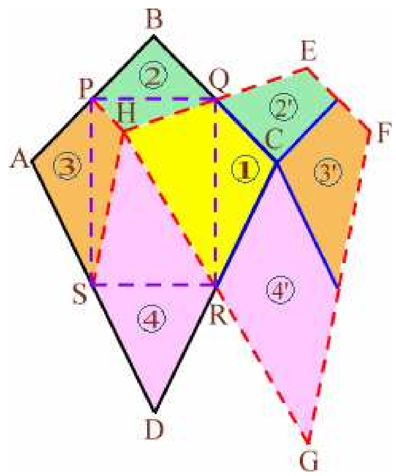


圖 8-1-1
鳶形分割翻轉成任意凸四邊形

表 7 -2 梯形拼成鳶形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	在圖 7-3 梯形 ABCD 中，沿梯形 ABCD 之兩腰 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$ 取中點，得 H 點與 G 點，並連接之得 $\overline{HG}$ 且以之分割梯形 ABCD 爲梯形 AHGD 與梯形 HBCG 兩部份，之後因 G 點爲 $\overline{DC}$ 中點，得 $\overline{DG}=\overline{CG}$ 、又∠1+∠2=∠3+∠4=180^0，所以可將梯形 AHGD 翻轉至梯形 GCEF，又因 $\overline{BH}=\overline{AH}=\overline{EF}$ 、½$(\overline{AD}+\overline{BC})=\overline{HG}$（梯形兩腰中點連線性質） ⇒ $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BC}=\overline{BE}$=2$\overline{HG}=\overline{HG}+\overline{GF}=\overline{HF}$，而梯形 HBCG 與梯形 GCEF 即可重新組成一個平行四邊形 EFHB。
2.	之後將連接平行四邊形 EFHB 之對角線得 $\overline{HE}$，以其爲分割線將其分割爲 1、2'、3、4'四部份。最後因 $\overline{HF}=\overline{BE}$，所以可將 3 翻轉至 3'；4'翻轉至 4"，又因 $\overline{BH}=\overline{EF}=\overline{BI}$ 、 $\overline{HE}=\overline{IE}$ 則 1、2'、3'、4"即可重組成一鳶形 HEIB。

八、　　鳶形分割設計翻轉成其他各種四邊形

（一）鳶形分割翻轉成任意凸四邊形、平行四邊形、長方形、菱形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形

因其分割方式與平行四邊形分割翻轉成任意凸四邊形；任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形、長方形、菱形、梯形、直角梯形、等腰梯形、任意凹四邊形的充要條件，作圖與證明過程一致，故本研究只列圖。

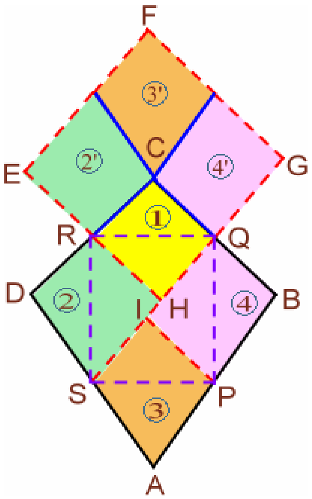


圖 8-1-2
鳶形分割翻轉成平行四邊形

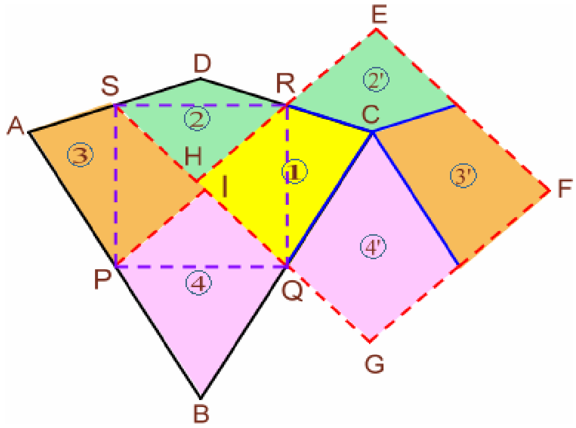


圖 8-1-3
鳶形分割翻轉成長方形

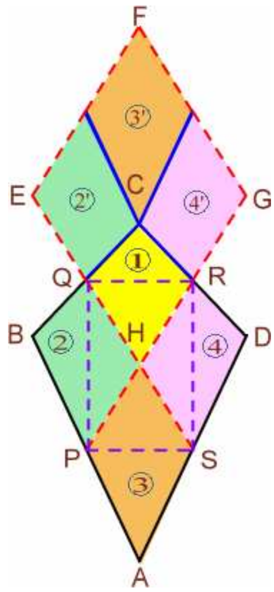


圖 8-1-4
鳶形分割翻轉成菱形

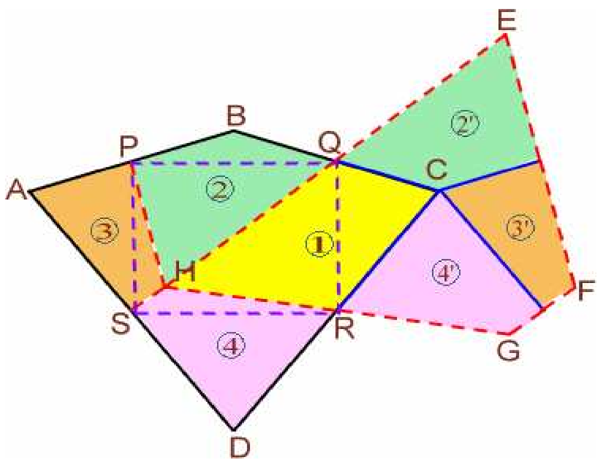


圖 8-1-5
鳶形分割翻轉成梯形

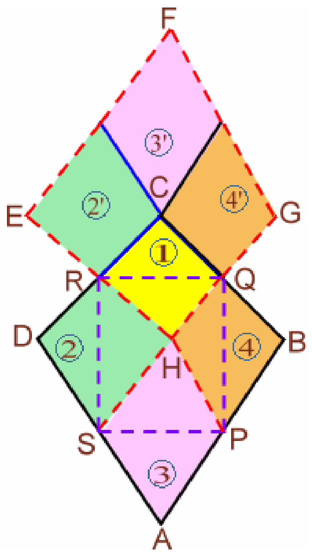


圖 8-1-6
鳶形分割翻轉成直角梯形

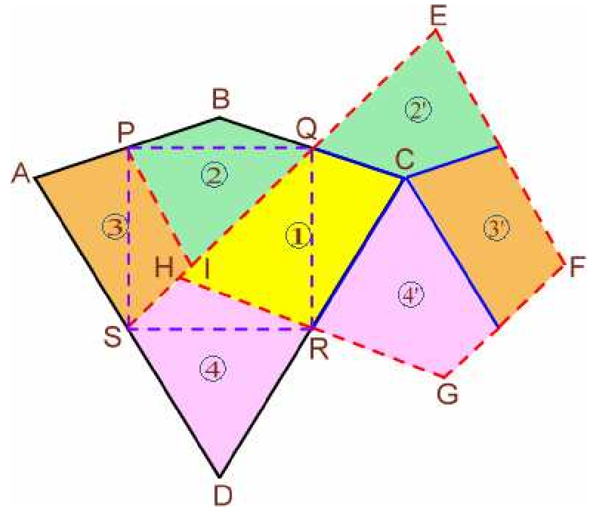


圖 8-1-7
鳶形分割翻轉成等腰梯形

(一) 鳶形分割翻轉成正方形

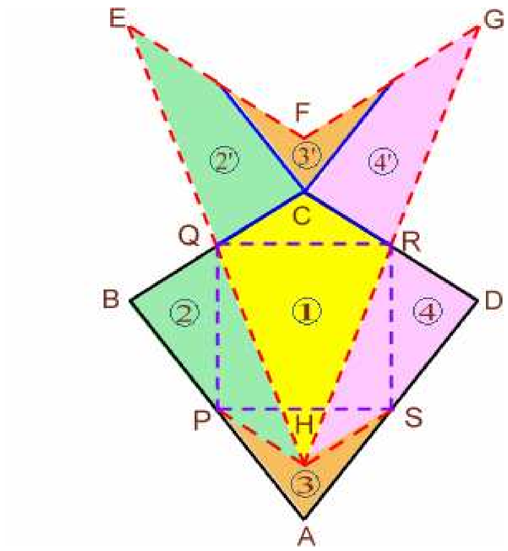


圖 8-1-8
鳶形分割翻轉成任意凹四邊形

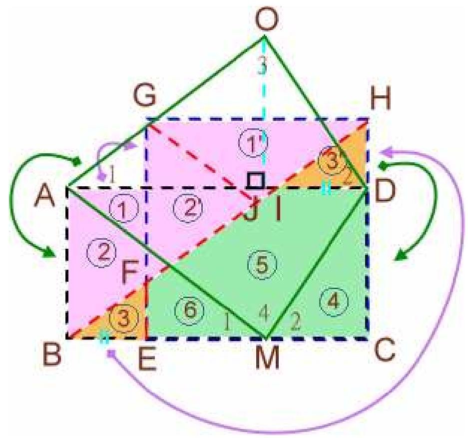


圖 8-2

鳶形分割翻轉成正方形是比較嚴謹且為求分割之一般化，故本研究採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先在圖 8-2 鳶形 AMDO 中，連接 $\overline{AD}$ 、$\overline{OJ}$（J 點為其兩對角線之交點）並以之為分割線，將鳶形 AMDO 分割為△OJA、△OJD、△AMD 三部份，之後則可將△OJA 翻轉至△ABM；△OJD 翻轉至△DCM，而△ABM、△DCM、△AMD 即可重新組成一個長方形 ABCD。理由呢？因鳶形兩組鄰邊相等⇒$\overline{DO}=\overline{DM}$ 、$\overline{AO}=\overline{AM}$ ，又∠3=∠4（鳶形對角相等）⇒∠1+∠2+∠3=∠1+∠2+∠4=180^0，又因 $\overline{AJ}+\overline{DJ}=\overline{AD}$ 、$\overline{AB}=\overline{OJ}=\overline{CD}$ 且鳶形之兩對角線互相垂直 $\overline{AD}\perp\overline{OJ}$ ⇒∠OJA=∠OJD=∠ABM=∠C=90^0，

最後即可形成長方形 ABCD。

之後我們依循長方形分割翻轉為正方形的模式，在長方形 ABCD 中，將其分割成△ABI、△BEF 與五邊形 IFECD 三部份。最後△ABI 向上挪，△BEF 嵌入五邊形 IFECD 的上部，即可形成正方形 HGEC。

九、 任意凹四邊形分割設計翻轉成其他各種四邊形

(一) 任意凹四邊形分割翻轉成任意凸四邊形

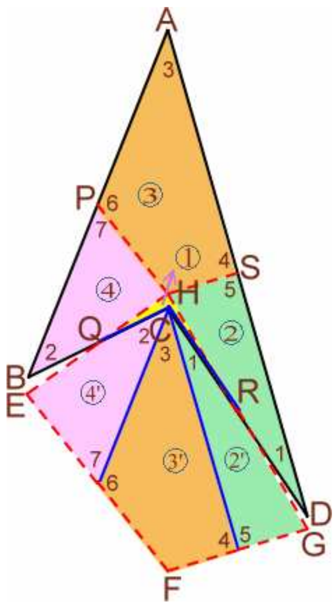


圖 9-1

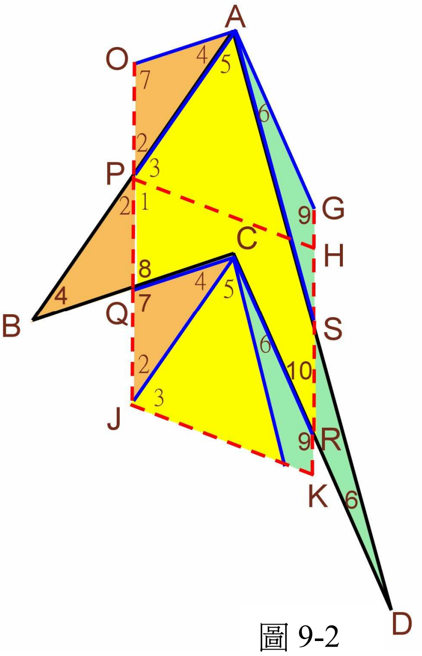


圖 9-2

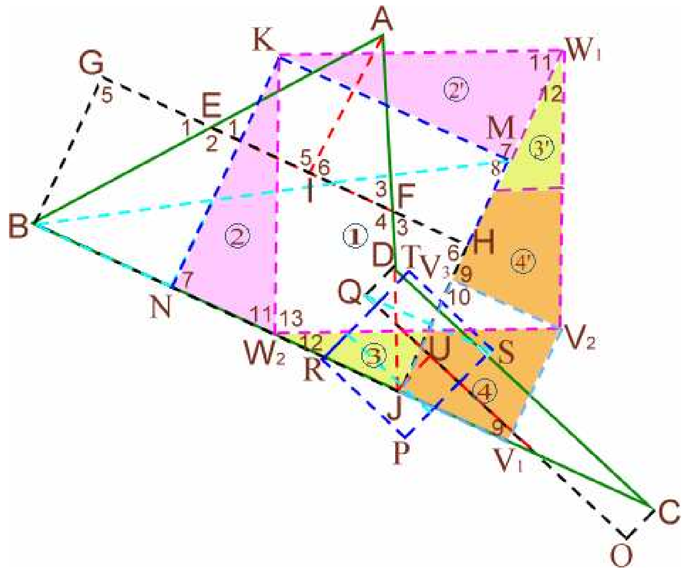


圖 9-3-1

在圖 9-1 任意凹四邊形 ABCD 中，P、Q、R、S 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{AD}$ 之中點，在內接四邊形 PQRS 中任找一點 H 點(非 $\overline{PR}$、$\overline{QS}$、$\overline{AC}$ 線上的點)，連接 $\overline{PH}$ 、$\overline{SH}$ 、$\overline{QH}$ 、$\overline{RH}$ 並以之為分割線，將任意凹四邊形分割為 1、2、3、4 四部份，之後將將 2 翻轉至 2'；3 翻轉至 3'；4 翻轉至 4'，故 1、2'、3'、4'即可重新組成一個任意凸四邊形 EFGH。原因：$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle QCR=360^0$、$\angle 6+\angle 7=\angle 4+\angle 5=180^0$ 又$\angle$PHQ、$\angle$PHS、$\angle$SHR、$\angle$QHR 分別為△PHQ、△PHS、△SHR、△QHR 之內角，故$\angle$QHR、$\angle$G、$\angle$F、$\angle$E 的角度皆小於 $180^0$$\therefore$EHGF 為一任意凸四邊形。

既然任意凹四邊形可採用四邊形四邊中點連線的分割模式分割翻轉成任意凸四邊形，同理任意凹四邊形分割翻轉成其他各種四邊形亦可依任意凸四邊形分割翻轉成平行四邊形、長方形、菱形、梯形、直角梯形、等腰梯形的方式分割。但此法仍有很大的限制條件，假若任意凹四邊形其四邊長相距甚大，則此分割法將不適用。

(二) 任意凹四邊形分割翻轉成平行四邊形

由於前述原因，故本研究乃在圖 9-2 任意凹四邊形 ABCD 中，取 P 點、Q 點、R 點、S 點分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ ，$\overline{AD}$ 之中點，連接 $\overline{PQ}$ 、$\overline{SR}$ 且以之為分割線，並將△PQB 翻

轉到△POA（∵ $\overline{AP}=\overline{BP}$ 、∠1+∠2+∠3=180^0）；同理△SRD 翻轉到△SGA，將可得六邊形 AOQCRG，之後連接 $\overline{PH}$ 並以之爲分割線（只要過或超過 C 點，任作一線段即可），最後將五邊形 AOPHG 往下翻轉到五邊形 CQJKR，即得平行四邊形 PJKH。原因：∵∠4+∠5+∠6+∠QCR=360^0⇒分割出來的圖形可置於同一平面，又∠7+∠8=∠9+∠10=180^0、而∠1+∠2+∠3=180^0⇒ $\overline{PH}//\overline{JK}$ ，且 $\overline{PH}=\overline{JK}$ ∴四邊形 PJKH 即爲平行四邊形。但此法仍有限制即六邊形 AOQCRG 其凹邊亦不能太凹，否則拼出來的圖形並不是平行四邊形。

(三) 任意凹四邊形分割翻轉成正方形

表 8-1 任意凹四邊形拼成正方形的充要條件、作圖要求、證明過程

1.	既然前述的分割方法都有其限制條件，故本研究乃採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式一般化分割。首先在任意凹四邊形 ABCD 中，延長 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 J 點，並以 $\overline{DJ}$ 爲分割線，即可得△ABJ 和△CJD。之後在△ABJ 中取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AJ}$ 之中點 E 點、F 點，連接之得 $\overline{EF}$ ，並過 A 點作 $\overline{EF}$ 之垂線交於 I 點，並以 $\overline{AI}$ 、 $\overline{EF}$ 爲分割線，將△ABP 分割爲△AIE、△AIF 與四邊形 EBJF，又因∠1+∠2=∠3+∠4=180^0、 $\overline{AE}=\overline{BE}$ 、 $\overline{AF}=\overline{JF}$ ，故△AIE 可翻轉至△BGE，△AIF 可翻轉至△JHF，最後因∠5=∠6=90^0⇒ $\overline{BG}//\overline{JH}$ ， $\overline{BG}=\overline{AI}=\overline{JH}$ ，所以四邊形 BGHJ 爲長方形。之後依循長方形分割翻轉成正方形的模式分割，將長方形 BGHJ 分割翻轉成正方形 KNJM。同理可將△CJD 分割翻轉成長方形 COQD，之後再將其分割翻轉成正方形 TRPS 並將其翻轉放置在正方形 KNJM 旁邊得正方形 $V_1V_2V_3$J。
2.	最後利用證明畢氏定理方式將大正方形 KNJM 與小正方形 $V_1V_2V_3$ J 分割合併成一大正方形 $V_2W_1KW_2$。爲何可分割合併成正方形的理由如下：首先取 $\overline{NW_2}=\overline{V_1V_2}$ 、 $\overline{V_1W_2}=\overline{KN}$ ，連接 $\overline{KW_2}$ 、 $\overline{W_2V_2}$ ，因∠7+∠8=180^0、 $\overline{KN}=\overline{KM}$ ，所以 2 可翻轉至 2'；又∠9+∠10=180^0、 $\overline{V_3V_2}=\overline{V_1V_2}$ 所以 3、4 可翻轉至 3'、4'；而 $\overline{MJ}+\overline{MW_1}=\overline{JV_3}+\overline{V_3W_1}$ ，又因△KNW_2、△$V_1V_2W_2$ 爲直角三角形∴ $\sqrt{\overline{KN}^2+\overline{NW_2}^2}=\overline{KW_2}$ 、 $\sqrt{\overline{V_1V_2}^2+\overline{V_1W_2}^2}=\overline{W_2V_2}$ ⇒ $\overline{KW_2}=\overline{W_2V_2}=\overline{KW_1}=\overline{W_1V_2}$ ，最後∠13=∠11+∠12 =90^0，故四邊形 $KW_2V_2W_1$ 爲正方形。

(四) 任意凹四邊形分割翻轉成長方形、菱形

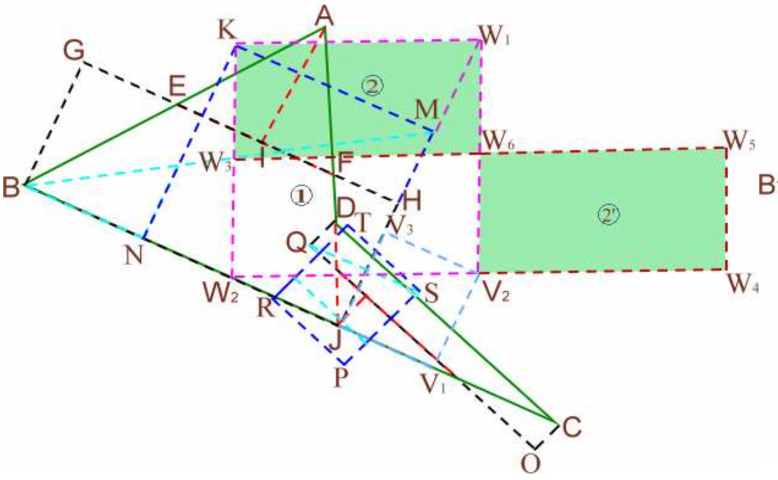


圖 9-3-2 任意凹四邊形分割翻轉成長方形

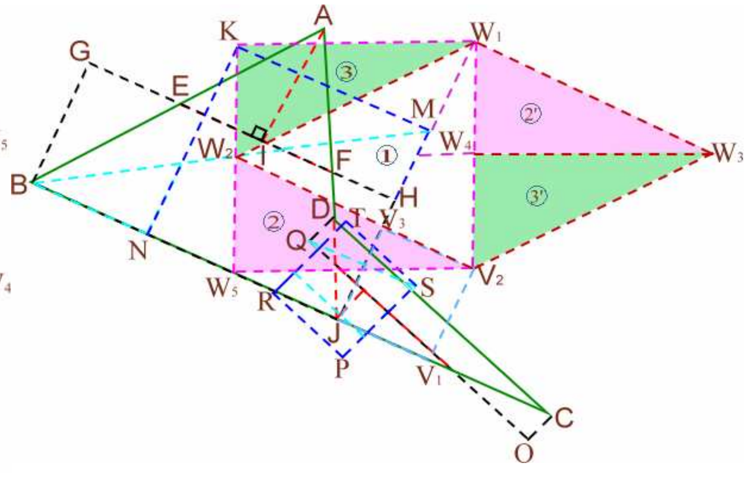


圖 9-3-3 任意凹四邊形分割翻轉成菱形

在圖 9-3-2、圖 9-3-3 中，本研究先依任意凹四邊形分割翻轉成正方形模式分割，之後再利用正方形分割翻轉成長方形或菱形的模式將其予以分割得長方形 $W_2W_3W_5W_4$ 及菱形 $W_1W_2V_2W_3$。

(五) 任意凹四邊形分割翻轉成梯形

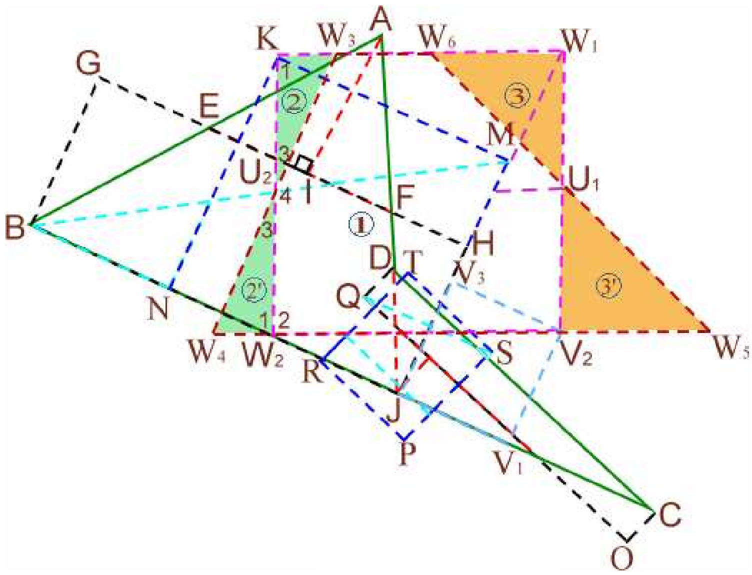


圖 9-3-4

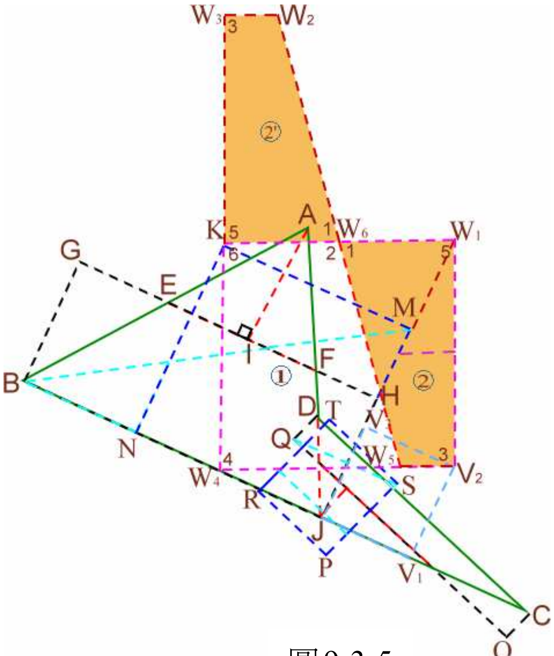


圖9-3-5

在圖 9-3-4 中，本研究先將任意凹四邊形分割翻轉成正方形 $V_2W_1KW_2$，之後在正方形 $V_2W_1KW_2$ 中，取 $\overline{KW_2}$ 、$\overline{V_2W_1}$ 之中點 U_2、U_1 且在 $\overline{KW_1}$ 任取二點 W_3、W_6，連接之 $\overline{U_2W_3}$ 、$\overline{U_1W_6}$ ，並以之爲分割線將其分割為 1、2、3。又因 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180^0$，$\overline{KU_2}=\overline{U_2W_2}$ ，所以 2 可翻轉至 2'；同理 3 可翻轉至 3'，而 $\overline{W_3W_6}\,//\,\overline{V_2W_2}\,//\,\overline{W_4W_5}$ 最後即可得梯形 $W_3W_6W_5W_4$。

(六) 任意凹四邊形分割翻轉成直角梯形

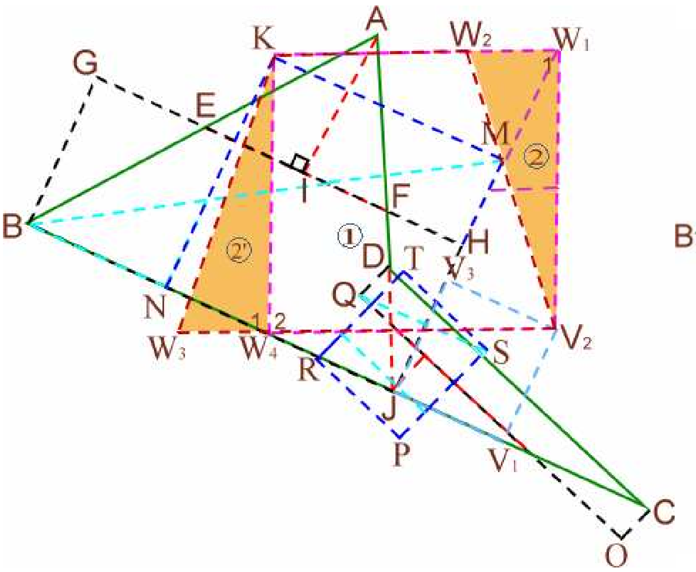


圖9-3-6

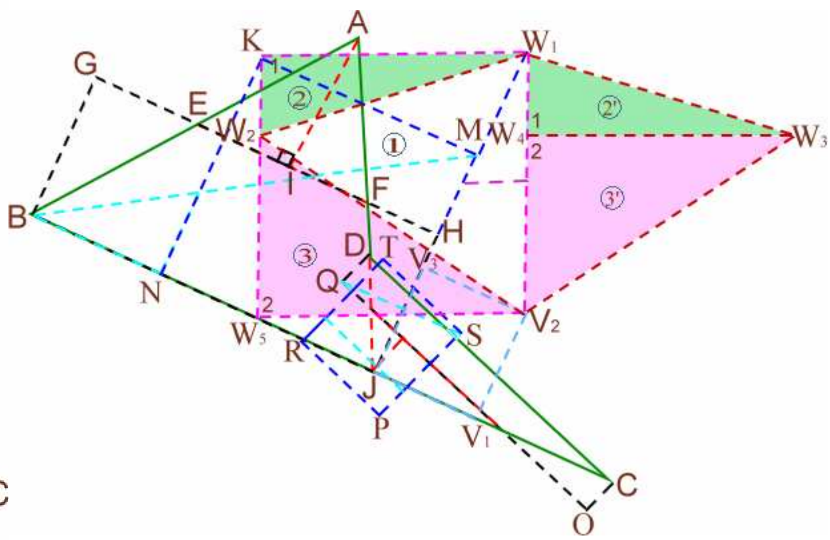


圖9-3-7

在圖 9-3-5 中，本研究先將任意凹四邊形分割翻轉成正方形 $V_2W_1KW_4$，之後在正方形 $V_2W_1KW_4$ 中，取 $\overline{KW_1}$ 之中點 W_6 且在 $\overline{V_2W_4}$ 任取一點 S，連接之得 $\overline{SW_6}$ ，並以之爲分割線

將其分割爲 1、2。又因$\angle 1+\angle 2=\angle 5+\angle 6=180^0$，$\overline{W_1W_6}=\overline{KW_6}$ ，所以 2 可翻轉至 2’，而$\angle 3=\angle 4=90^0$、$\overline{KW_6}\,//\,\overline{W_4W_5}\,//\,\overline{W_3W_2}$ 最後即可得直角梯形 $SW_2W_3W_4$。

(七) 任意凹四邊形分割翻轉成等腰梯形

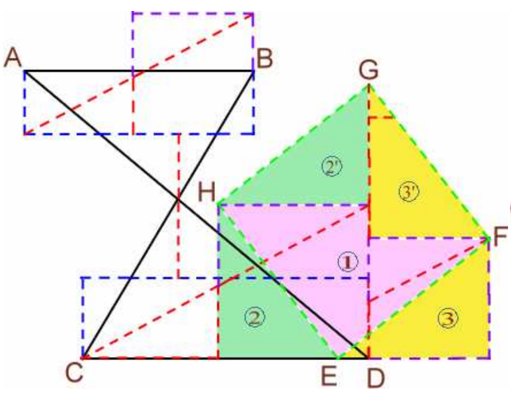
在圖 9-3-6 中，本研究先將任意凹四邊形分割翻轉成正方形 $V_2W_1KW_4$，之後在正方形 $V_2W_1KW_4$ 中，$\overline{KW_1}$ 任取一點 W_2，連接之得$\overline{V_2W_2}$ 並以之爲分割線，又因$\angle 1+\angle 2=180^0$、$\overline{KW_4}=\overline{W_1V_2}$ 則$\triangle W_1V_2W_2$ 可翻轉至$\triangle KW_3W_4$ ，最後$\overline{KW_3}=\overline{V_2W_2}$ 且$\overline{KW_2}\,//\,\overline{W_4V_2}\,//\,\overline{W_3V_2}$ ∴四邊形 $KW_2V_2W_3$ 爲等腰梯形。

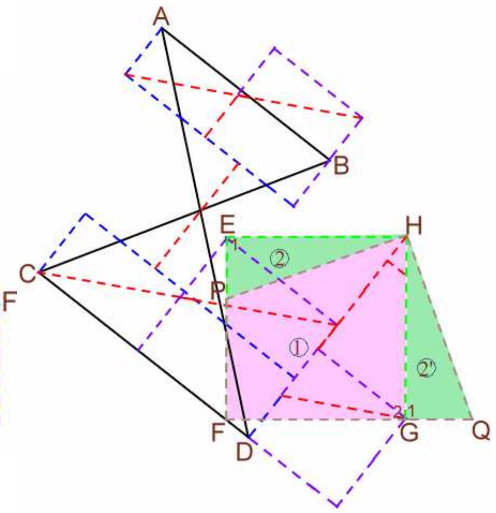
(八) 任意凹四邊形分割翻轉成鳶形

在圖 9-3-7 中，本研究先將任意凹四邊形分割翻轉成正方形 $V_2W_1KW_5$，之後在正方形 $V_2W_1KW_5$ 中，$\overline{KW_5}$ 任取一點 W_2（非中點），連接之得$\overline{W_1W_2}$ 、$\overline{V_2W_2}$ 並以之爲分割線，又因$\angle 1+\angle 2=180^0$ 又$\overline{KW_2}+\overline{W_2W_5}=\overline{KW_5}=\overline{W_1V_2}$，則可將 2、3 翻轉至 2’、3’，最後因$\overline{W_1W_2}=\overline{W_1W_3}$、$\overline{V_2W_2}=\overline{W_3V_2}$ ∴四邊形 $W_2V_2\,W_3W_1$ 爲鳶形。

十、　折四邊形分割設計翻轉成其他各種四邊形

(一) 折四邊形分割翻轉成正方形





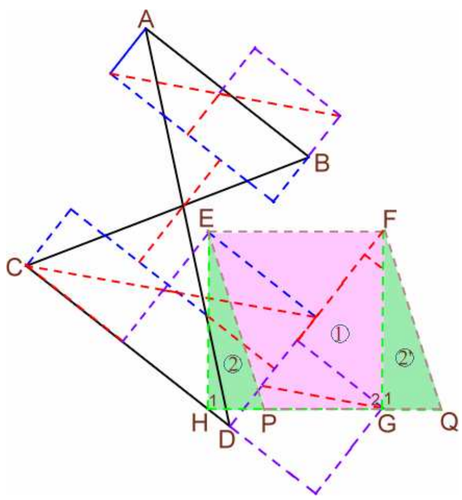


圖 10-1　　　　圖 10-2　　　　圖 10-3

在圖 10-1 折四邊形分割翻轉成正方形的課題中，本研究爲求分割一般化，故乃採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式，先將折四邊形 ABCD 分割成△ABH、△CDH；之後再透過三角形分割翻轉成長方形的模式分割；其次依循長方形分割翻轉成正方形的模式分割。最後利用證明畢氏定理方式將大正方形與小正方形分割合併成正方形 EFGH。

(二) 折四邊形分割翻轉成任意凸四邊形

在圖 10-2 中，本研究先將折四邊形 ABCD 分割翻轉成正方形 EFGH。之後在正方形 EFGH 中，$\overline{EF}$ 中任取一點 P，連接$\overline{PH}$ 並以之爲分割線，則可將其分割爲 1、2 兩部份。又因$\angle 1+\angle 2=180^0$、$\overline{EH}=\overline{HG}$，所以 2 可翻轉至 2’，最後 1、2’可變成任意凸四邊形 PHQF。

(三) 折四邊形分割翻轉成平行四邊形

在圖 10-3 中，本研究先將折四邊形 ABCD 分割翻轉成正方形 EFGH。之後在正方形

EFGH 中，$\overline{HG}$ 中任取一點 P，連接 $\overline{PE}$ 並以之爲分割線，則可將其分割爲 1、2 兩部份。又因∠1+∠2=180^0、 $\overline{EH}=\overline{FG}$ ，所以 2 可翻轉至 2'，最後因 $\overline{EF} // \overline{PG} // \overline{PQ}$ 、 $\overline{EF}=\overline{HG}=\overline{HP}+\overline{PG}=\overline{GQ}+\overline{PG}=\overline{PQ}$ ，1、2'可變成平行四邊形 EFQP。

(四) 折四邊形分割翻轉成長方形、菱形、梯形

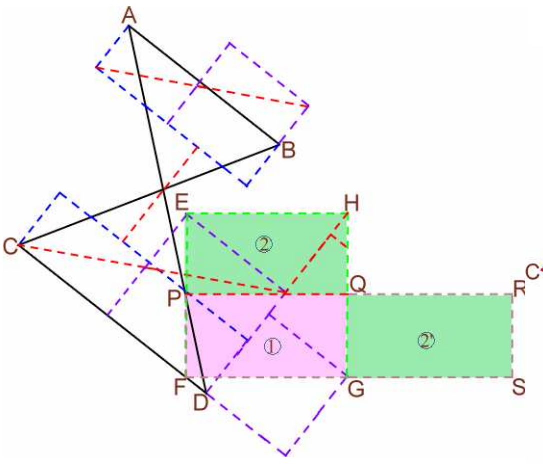


圖 10-4-1

折四邊形分割翻轉成長方形

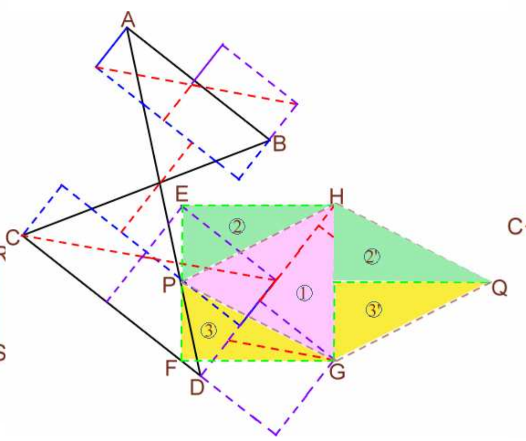


圖 10-4-2

折四邊形分割翻轉成菱形

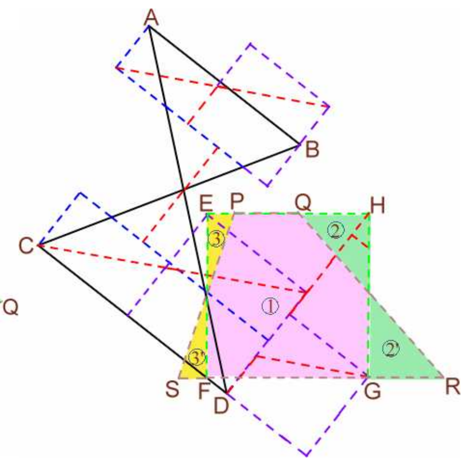


圖 10-4-3

折四邊形分割翻轉成梯形

在圖 10-4-1、10-4-2、10-4-3 中，本研究先將折四邊形 ABCD 分割翻轉成正方形 EFGH。之後再利用正方形分割翻轉成長方形（菱形、梯形）的模式分割即可得長方形 PFSR、菱形 HPGQ、梯形 PSRQ。

(五) 折四邊形分割翻轉成直角梯形

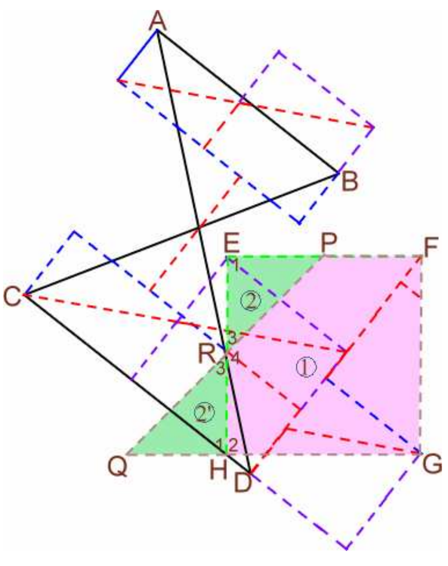


圖 10-5

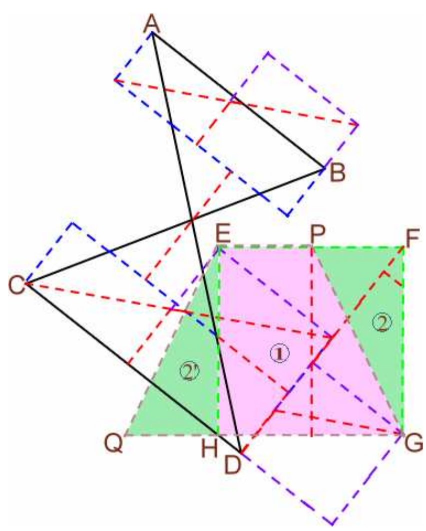


圖 10-6-1

折四邊形分割翻轉成等腰梯形

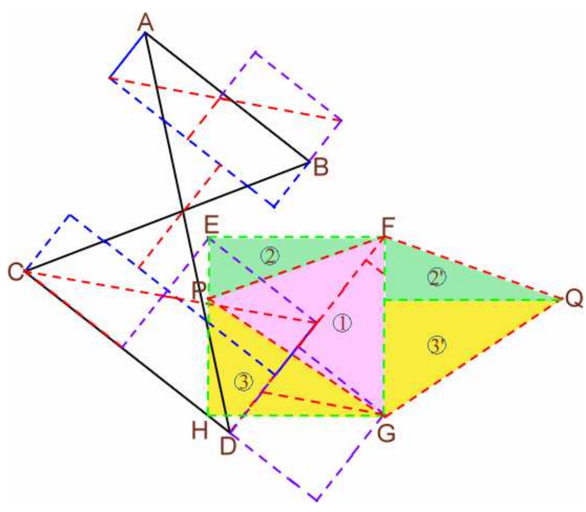


圖 10-6-2

折四邊形分割翻轉成鳶形

在圖 10-5 中，本研究先將折四邊形 ABCD 分割翻轉成正方形 EFGH。之後在正方形 EFGH 中，$\overline{EF}$ 中任取一點 P，$\overline{EH}$ 取中點 R，連接 $\overline{PR}$ 並以之爲分割線，則可將其分割爲 1、2 兩部份。又因∠1+∠2=∠3+∠4=180^0、 $\overline{ER}=\overline{RH}$ ，所以 2 可翻轉至 2'，最後因

$\overline{PF} // \overline{HG} // \overline{QG}$ 、∠PFG=∠FGH=90^0，所以 1、2’可變成直角梯形 PFGQ。

(六) 折四邊形分割翻轉成等腰梯形、鳶形

在圖 10-6-1、10-6-2 中，本研究先將折四邊形 ABCD 分割翻轉成正方形 EFGH。之後再利用正方形分割翻轉成等腰梯形(鳶形)的模式分割即可得等腰梯形 EPGQ、鳶形 FPGQ。

(七) 折四邊形分割翻轉成任意凹四邊形

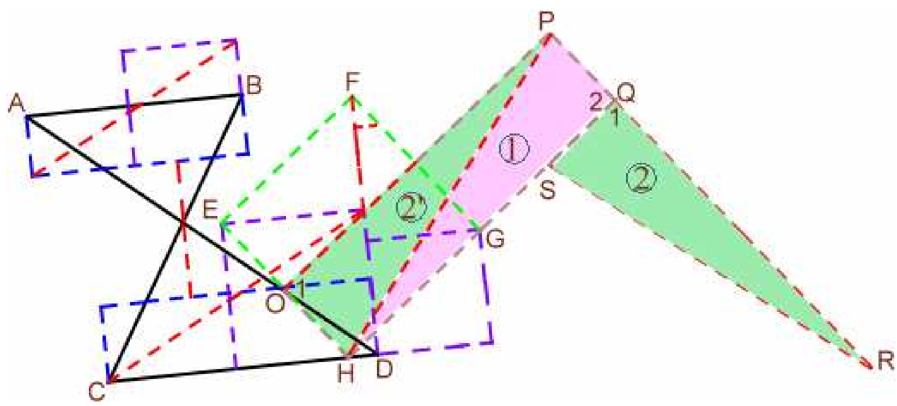


圖 10-7

在圖 10-7 中，本研究先將折四邊形 ABCD 分割翻轉成正方形 EFGH。之後依正方形分割翻轉為長方形的模式分割；最後在長方形 POHQ 中連接其對角線 $\overline{PH}$ 並以之為分割線將其分割為 1、2 兩部份，又因∠1+∠2=180^0、∠RSQ+180^0=∠HSR＞180^0，所以將 2 可翻轉至 2’，而 1、2’可變成任意凹四邊形 PHSR。

陸、 研究結果與結論

本研究認為任一四邊形分割翻轉成其他各種四邊形之過程中，可從預期分割翻轉成的各種四邊形幾何圖形的特性及其圖形間的關係，去發現一些分割翻轉規則，本研究發現如下：任一四邊形在四邊中點連線的設計架構下進行分割翻轉成其他各種四邊形之過程中，可從分割頂點之位置去發現其規律性。若以其分割頂點在四邊形 ABCD 之位置可分為：在內接四邊形 PQRS 內任一點將可分割成凸四邊形，而在四邊形 ABCD 內、四邊形 PQRS 外將可分割成任意凹四邊形；最後邱冠霖（2000）已證實若分割頂點在四邊形 PQRS 邊上，其將分割成三角形，而這並不是本研究所要探討的主題。除此，利用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的一般化分割翻轉方式亦有其價值性與探討性，故將本研究結果歸納如下表 9-1：

表 9-1 各種四邊形預期分割翻轉成任一四邊形之研究結果

一、各種四邊形預期分割翻轉成任意凸四邊形方面：
1.在四邊形四邊中點所形成之內接四邊形內任取一點（非在內接四邊形對角線上、非在原本四邊形之對角線上）並以之連接四邊之中點且作為分割線，將可分割翻轉成任意凸四邊形。2.任意凹四邊形、折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較為簡單的正方形分割翻轉為任意凸四邊形的模式分割翻轉即得。

二、　各種四邊形預期分割翻轉成平行四邊形方面：
1.兩相對之中點分別對其所面對內接四邊形之對角線作平行之直線交對角線於兩點，並以其與對角線作爲分割線，最後則可分割翻轉成平行四邊形。2.任意凹四邊形、折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較爲簡單的正方形分割翻轉爲平行四邊形的模式分割翻轉即得。
三、　各種四邊形預期分割翻轉成長方形方面：
1.兩相對之中點對其所面對內接四邊形對角線作垂線，並以其及對角線作爲分割線，分割翻轉成長方形。2.任意凹四邊形、折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較爲簡單的正方形分割爲長方形的模式分割翻轉即得。
四、　各種四邊形預期分割翻轉成菱形方面：
1.以內接四邊形最長對角線一半長爲半徑，兩相對之中點爲圓心，對其所面對之對角線作弧得兩交點並連接之，且以之與對角線作爲分割線，最後分割翻轉成菱形。2.任意凹四邊形、折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較爲簡單的正方形分割爲菱形的模式分割翻轉即得。
五、　各種四邊形預期分割翻轉成正方形
1.利用藤春幸三郎與田村三郎（1996）長方形分割翻轉成正方形的模式分割，而當 $n^2a < b \leqq (n+1)^2a$ 時，則其可分割爲 n＋2 塊以拼出正方形；而其他七種四邊形則利用剪貼的方式先行分割翻轉成長方形，之後再透過長方形分割翻轉爲正方形的模式分割。2.而折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後再利用證明畢氏定理方式將大正方形與小正方形分割合併成一大正方形。
六、　各種四邊形預期分割翻轉成梯形、直角梯形、等腰梯形方面：
1.　作兩相對之中點與其所面對內接四邊形對角線上任取一點(非中點)之連線並以之及對角線爲分割線，即可分割翻轉成梯形；但在長方形或正方形中依此方式則分割爲等腰梯形，因此在這些圖形中則作兩相對之中點與其對角線上任取兩點之連線（不平行之直線）並以之及對角線作爲分割線，即可分割翻轉成梯形。直角梯形則以一中點對其所面對之內接四邊形對角線作垂線，並將垂足與另一對中點連線，最後以垂線、對角線及垂足與中點之連線作爲分割線分割翻轉成直角梯形。但在長方形或正方形中因其內接四邊形之對角線互相垂直，故須以一中點對其所面對之內接四邊形對角線作垂線，並作另一中點與垂線不平行交對角線於一點之直線，且以其及垂線、對角線作爲分割線即可分割翻轉成直角梯形。等腰梯形則以兩相對之中點分別對其所面對內接四邊形之對角線作等長但不平行交其對角線於兩點之直線、且以之與對角線爲作分割線即可分割翻轉成等腰梯形，但在長方形或正方形中則在其內接四邊形之對角線上任取一點並以之連接相對之兩中點且以其及對角線作爲分割線，將可分割翻轉成等腰梯形。 2.　任意凹四邊形、折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較爲簡單的正方形分割翻轉爲梯形、直角梯形、等腰梯形的模式分割翻轉即得。
七、　各種四邊形預期分割翻轉成鳶形方面：
1.平行四邊形因鳶形有二組鄰邊相等，故以作兩對角之頂點爲圓心、平行四邊形之兩鄰邊長爲半徑劃弧，兩弧相交於一點，連接之且以之作爲分割線分割翻轉即得。2.在長方形中則在寬上任取一點（非中點），以其連接對邊之兩頂點並以其連線爲分割線分割翻轉即得。3.菱形、正方形則在內接四邊形中、對稱軸上任找一點(非中點)，連接四邊中點且以之爲分割線分割翻轉即得。

4.梯形（任意凸四邊形）利用剪貼的方式先行分割成平行四邊形（長方形），之後再透過較為簡單的平行四邊形（長方形）分割為鳶形的模式分割翻轉即得。5.任意凹四邊形、折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較為簡單的正方形分割為鳶形的模式分割翻轉即得。
八、　各種四邊形預期分割翻轉成任意凹四邊形方面：
1.在四邊形 ABCD 內、四邊形 PQRS 外任取一點，並以之連接四邊之中點且作為分割線，將可分割翻轉成任意凹四邊形。2.折四邊形則先行分割翻轉成三角形，其次將三角形分割翻轉成長方形，之後再將長方形分割翻轉成正方形，最後透過較為簡單的長方形分割為任意凹四邊形的模式分割翻轉即得。

柒、 討論與應用

本篇研究範圍與限制包括如下：大多的凸四邊形在任一四邊形四邊中點連線的分割設計架構下以翻轉出其他各種四邊形；假若因圖形本身之特殊性（如任意凹四邊形、折四邊形分割翻轉成其他各種四邊形）或者在此分割設計架構下限制條件過於嚴刻（如各種四邊形分割翻轉成正方形只限定在四邊中點連線為正方形、各種四邊形分割翻轉成鳶形只限定在四邊中點連線為長方形），造成前述方式無法一般化分割，則本研究乃採用藤春幸三郎與田村三郎（1996）的方式先將任一四邊形剪貼成一可分割成其他各種四邊形的圖形，之後再透過它分割翻轉成其他各種四邊形，經本研究發現在此方式下各種四邊形皆能分割翻轉為正方形、鳶形、任意凹四邊形、折四邊形。除此本研究未談論到直角梯形、等腰梯形分割翻轉成其他各種四邊形；其他各種四邊形分割翻轉成折四邊形亦是美中不足之處！

藤春幸三郎與田村三郎（1996）認為各種多邊形皆可設計分割翻轉成任一四邊形；反之任一四邊形亦皆可設計分割翻轉成各種多邊形，只是深入研究後，發現題目太大，且有更多的限制條件！這只能留待未來有更充裕的時間來努力。

最後本研究成果可以應用於生活中：以分割翻轉特性製成數學幾何拼圖教學模型與教材；設計成幾何教學電腦拼圖動畫與軟體。

捌、 參考資料及其他

1.邱冠霖著，2000，有趣的幾何變形魔術（正三角形分割翻轉變形成正方形之迷思與演繹探討），香港第三十三屆聯校科學展覽會
http://steiner.math.nthu.edu.tw/disk6/intel-isef/hk-2000/hk-2000.html

2.昌爸工作坊 http://www.mathland.idv.tw/

3.蔣聲著，幾何變換，凡異出版社，p47~60，1994/3

4.施威銘著，FLASH MX 2004 躍動的網頁，旗標出版股份有限公司，2003/12/22

5.清大數學系全任重教授的幾何網站 http://www.math.nthu.edu.tw/gc/chuan/gc.html

6.鄭再添著，凸四邊形的分類，2002 http://www.hs.ntnu.edu.tw/~math/news.html

7.蕭文強、馮振業著，方圓曲直、疑幻疑真一教室裡的幾何世界，2006/03/04
http://www.hkame.org.hk/act/4_mar_06_talk/FUNG%20CI%20(20060304).ppt

8.藤春幸三郎、田村三郎著　張昭譯，數學歷史之謎，牛頓出版有限公司，p176~190，1996

評　　語

030422　四邊形幾何拼圖遊戲

有系統地整理了相關結果，且以圖形呈現分割與拼湊情形，清楚明瞭，惟數學內容可望再加深，且新意稍嫌不足。