中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳創意獎

030421

化整為零

學校名稱： 高雄縣立忠孝國民中學

作者：	指導老師：
國二 曾兆年	姚文仁 田佳立

關 鍵 詞：化整為零、ㄇ字型圖、立方數

化整為零

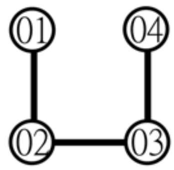
壹、摘要

在二年級時，老師曾在黑板上出了一道題目 ……

$$\left\{ A = 1^2\square 2^2\square 3^2\square\cdots\square 2003^2\square 2004^2\square 2005^2 \geq 0 \text{ ，□內任意填入＋或－，則求A的最小非負整數值爲何？} \right\}$$

，但由於 2004 個□中，光是正負符號的填入方式就共有 2^{2004} 種，所以第一步我們決定先找出連續正整數之 n 次方值間的加減符號規律（$n\in N$），使進行加減法運算後所得之結果爲零。藉此可縮小所應討論的範圍。

[其加減符號規律如下]



n=1 時 ， $1^1-2^1=-1$ ，$-3^1+4^1=1$ $\Rightarrow$ $1^1-2^1-3^1+4^1=0$

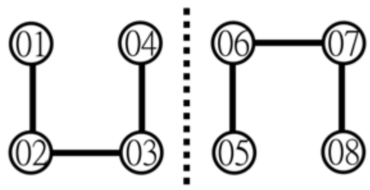
由上式我們發現兩數一組，兩組相消

n=2 時 ， $1^2-2^2-3^2+4^2=4$ ， $-5^2+6^2+7^2-8^2=-4$

$\Rightarrow$ $1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2=0$

由上式我們發現四數一組，兩組相消

⋮



接著我們針對題目 ……

$$\left\{ A = 1^2\square 2^2\square 3^2\square\cdots\square (T_2-2)^2\square (T_2-1)^2\square T_2^{\,2} \geq 0 \text{ ，□內任意填入＋或－，則求A的最小非負整數值爲何？} \right\}$$

去探討後發現觀念甲：當 T_2 被 4 除後餘 1 或 2 時，A 的最小值不可能爲 0【參閱附件二】，於是我們分類型去探討，發現在八種情況之下，其所對應之最小 A 值非 1 即 0？

最後，我們再進一步將原題目推廣至 ……

$$\left\{ A = 1^3\square 2^3\square 3^3\square\cdots\square (T_3-2)^3\square (T_3-1)^3\square T_3^{\,3} \geq 0 \text{ ，□內任意填入＋或－，則求A的最小非負整數值爲何？} \right\}$$

值得一提的是 — 事實上，我們不只可以知道其 A 的最小非負整數值爲何，甚至於可以找出一組其加減運算過程中□內的＋、－符號的排列順序。

貳、研究動機

在二年級時，老師曾在黑板上出了一道題目，它是一道看似簡單卻又讓你摸不著頭緒的題目，有不少同學看到就不想算了，但我喜歡這類較具有挑戰性的題目，所以我想趁著這次科展的機會，對此題進行深入的探討，看看能否將題目推廣，並且找到更有系統的方式來解決這樣的題目！

參、研究目的

一、連續正整數之 n 次方值間的加減符號規律(n 為正整數)，使進行加減法運算後所得之結果為〝零〞。

二、針對題目：【 $A = 1^2\square2^2\square3^2\square\cdots\cdots\square(T_2-2)^2\square(T_2-1)^2\square T_2^{\,2} \geqq 0$，□內任意填入〝＋〞或〝－〞進行加減法運算，求出 A 的最小值？(其中正整數 T_2 為定值)】，利用數字相消的性質，將解題方式作系統性的呈現。

三、針對題目：【 $A = 1^3\square2^3\square3^3\square\cdots\cdots\square(T_3-2)^3\square(T_3-1)^3\square T_3^{\,3} \geqq 0$，□內任意填入〝＋〞或〝－〞進行加減法運算，求出 A 的最小值？(其中正整數 T_3 為定值)】，利用數字相消的性質，將解題方式作系統性的呈現方式。

肆、研究設備及器材

筆記型電腦、工程用計算機、計算軟體 Microsoft Office Excel 2003、
繪圖軟體 PhotoImpact 8、筆、紙

伍、研究過程或方法

一、找出連續正整數之平方值間的加減符號規律，使進行加減法運算後所得之結果爲〝零〞，亦即做到「化整爲零」的功夫，並將之推展至 n 次方(n 爲正整數)：

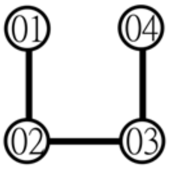
(一)、利用〝嘗試錯誤的方法〞及計算軟體-Excel 2003 的輔助去猜出「化整爲零」時所需之「加減符號規律」

1、「化整爲零」時，連續正整數之一次方值間的「加減符號規律」：

$1^1-2^1=-1$，$-3^1+4^1=1$ $\Rightarrow$ $1^1-2^1-3^1+4^1=0$

由上式我們不難發現兩數一組，兩組相消。

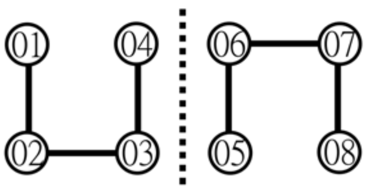
其「加減符號規律」爲(＋,—,—,＋)，同時爲了方便找尋「加減符號規律」我們將(＋,—,—,＋)之規律用圖形加以表示，如下圖。



我們稱之爲開口向上的〝一次方ㄇ字型圖〞。其上所示之數字(01,02,03,04)爲我們所欲拿來進行運算的連續正整數且其順序一致爲：由左開始且一筆畫完成。又運算時之「加減符號規律」爲〝ㄇ字型圖〞之上方爲加法；下方爲減法。

2、「化整爲零」時，連續正整數之二次方值間的「加減符號規律」：

由於有了上面一次方時的運算經驗了，所以在此我們想將原來的〝一次方ㄇ字型圖〞再搭配上將〝一次方ㄇ字型圖〞垂直翻轉所形成之圖形，最後得到〝二次方ㄇ字型圖〞(即ㄩ+ㄇ)，如下圖，進而去嘗試找出連續正整數之二次方值間的「加減符號規律」。



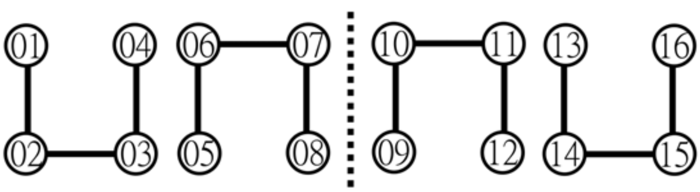
其運算時之「加減符號規律」亦爲圖形之上方爲加法；下方爲減法。再者，左圖(二次方ㄇ字型圖)中所示之數學算式$1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2$經軟體-Excel 2003 計算後發現其值爲零。又如再進一步分析上式可發現：

$1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2=0$ $\Rightarrow$ $1^2-2^2-3^2+4^2=4$ ， $-5^2+6^2+7^2-8^2=-4$

亦即〝四數一組，兩組相消〞。

3、「化整爲零」時，連續正整數之三次方值間的「加減符號規律」：

由於有了上述兩次的運算經驗了，所以在此我們更大膽地想將原來的〝二次方ㄇ字型圖〞再搭配上將排成一列之〝二次方ㄇ字型圖〞垂直翻轉所形成之圖形，最後得到〝三次方ㄇ字型圖〞，如下圖，進而去嘗試找出連續正整數之三次方值間的「加減符號規律」。



其運算時之「加減符號規律」亦為圖形之上方為加法；下方為減法。再者，上圖(三次方ㄇ字型圖)中所示之數學算式如下：

$1^3-2^3-3^3+4^3-5^3+6^3+7^3-8^3-9^3+10^3+11^3-12^3+13^3-14^3-15^3+16^3$，其值經軟體-Excel 2003 計算後發現其值為零。又如再進一步分析上式可發現：

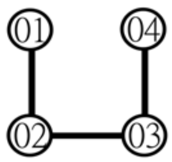
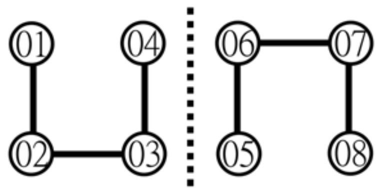
$$1^3-2^3-3^3+4^3-5^3+6^3+7^3-8^3-9^3+10^3+11^3-12^3+13^3-14^3-15^3+16^3=0$$

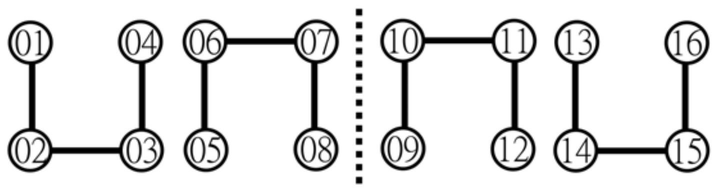
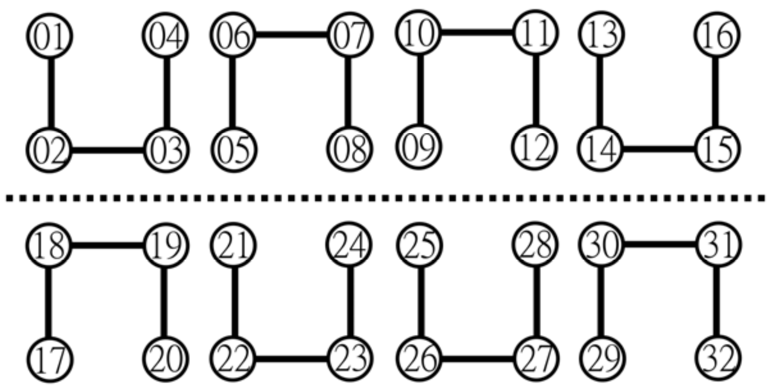
$$\Rightarrow\ 1^3-2^3-3^3+4^3-5^3+6^3+7^3-8^3=-48，-9^3+10^3+11^3-12^3+13^3-14^3-15^3+16^3=48$$

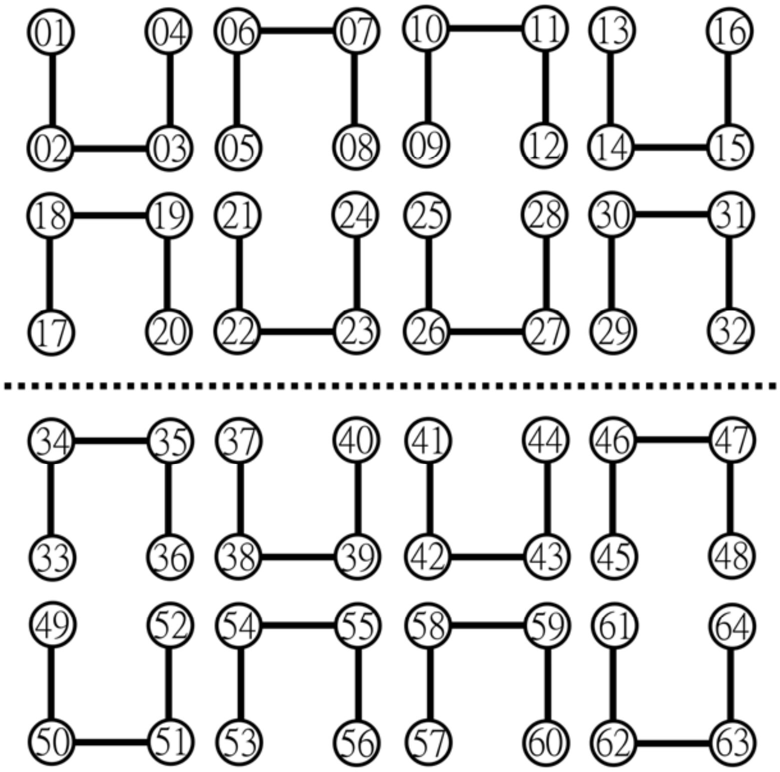
亦即〝八數一組，兩組相消〞。

4、「化整為零」時，連續正整數之 n 次方值間的「加減符號規律」，n 為正整數今將結果整理如下表(一)

表(一)

n	加減符號規律	n	加減符號規律
1		2	

n	加減符號規律
3	
4	

5	
n為大於5的整數	⋮ 依照先前之所述規律： ①將原來的〝(n-1)次方ㄇ字型圖〞再搭配上將排成一列之〝(n-1)次方ㄇ字型圖〞垂直翻轉所形成之圖形，最後得到〝n 次方ㄇ字型圖〞 ②圖形上所示之數字為我們所欲拿來進行運算的連續正整數且其順序一致為：由左開始且一筆畫完成。 ③運算時之「加減符號規律」為〝ㄇ字型圖〞之上方為加法；下方為減法。 將 n 推展至所有大於 5 之整數，並將圖畫出。 當我們將〝n 次方ㄇ字型圖〞畫出之後，我們不難發現： 2^{n+1}個連續整數 n 次方後依〝n 次方ㄇ字型圖〞所示之規律進行加減法運算後，其值為 0　(n 為正整數)

二、利用〝數學歸納法〞證明先前所找到的連續正整數 n 次方值間的加減符號規律確實能達到「化整爲零」的工夫(n 爲正整數)：

$\left\{\right.$ 2^{n+1} 個連續整數 n 次方後依〝n 次方ㄇ字型圖〞所示之規律進行加減法運算後，其值爲 0 (n 爲正整數) $\left.\right\}$

証明：【參閱附件一】

三、試圖利用〝n 次方ㄇ字型圖〞所示之規律去解出下題，並加以推廣：

設 $A = 1^2 \square 2^2 \square 3^2 \square \cdots \square (T_2-2)^2 \square (T_2-1)^2 \square T_2^{\,2} \geqq 0$，$T_2 \in N$，若在上式空格中任意填入加減符號使 A 值爲最小，則求 A 的最小值爲何?

(一)、針對 T_2=2005 時，探討解法：

1、我們於求解的過程中發現－

當 T_2 被 4 除後餘 1 或 2 時，A 的最小值不可能爲 0 (稱之爲觀念甲)

証明：【參閱附件二】

因此，由觀念甲可知：當 T_2=2005 時，A 的最小值不可能爲 0

2、此題既然無法使 A 的最小值爲 0，則退而求其次，希望能使 A 的最小值爲 1 因此我們希望藉著依〝二次方ㄇ字型圖〞所示之規律進行加減法運算，能使其值爲零，但可惜的是 2005 不是 8 的倍數，所以現在想利用〝四數一組，兩組相消〞的觀念(如下式)來解決此一問題。

$1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2=0 \Rightarrow 1^2-2^2-3^2+4^2=4$ ， $-5^2+6^2+7^2-8^2=-4$

事實上，當 a 爲正整數時 ⋯⋯

$a^2-(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2=4$ ，$-(a)^2+(a+1)^2+(a+2)^2-(a+3)^2=-4$ 。

爲了使其解法能有系統地陳述，我們將分步驟來加以說明：

Step1.

將 2005 個平方數連續 4 個分一組，共可分成 501 組餘 1 個平方數

因爲這 501 組中，每一組的值依 $a^2-(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2=4$ ，$-(a)^2+(a+1)^2+(a+2)^2-(a+3)^2=-4$ 算法之不同，可以爲 4、亦可以爲-4

若我們有辦法使這 501 組湊成偶數組，則此 501 組進行加減法運算後，其值即可爲零，當然最後還餘的那 1 個平方數即爲 A 的最小值，而我們如果讓那 1 個平方數爲 1^2 的話，那 A 的最小值不就是 1 了嗎？

Step2.

在進行第二步之前，我們想在此先行介紹三個觀念：

一爲：連續 8 個正整數的平方和必爲 4 的奇數倍 (稱之爲觀念乙)

二爲：連續 4 個正整數的平方和再加 2 必爲 4 的偶數倍 (稱之爲觀念丙)

三爲：連續 12 個正整數的平方和再加 2 必爲 4 的奇數倍 (稱之爲觀念丁)

回歸正題，所以由觀念乙可知：

我們須從這 501 組中抽出兩組 $2^2,3^2,4^2,5^2$ 和 $6^2,7^2,8^2,9^2$ 出來，所以還剩 499 組。

又 $2^2,3^2,4^2,5^2$ 和 $6^2,7^2,8^2,9^2$ 所有數的總值爲 284，且 284 這個值又需要

284÷4=71 組(每組總值爲 4)方可抵消。所以最後還剩 499－71＝428 組 (偶數組)

3、將 step1 和 step2 的寫法以數學式子表示：

①2005÷4=501 組 … 餘 1 個平方數=1^2=1

②從 501 組中抽出兩組 $2^2,3^2,4^2,5^2$ 和 $6^2,7^2,8^2,9^2$，所以剩 501－2＝499 組

又 $2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2$＝284 可轉換爲 284÷4=71 組

∴499 組－71 組＝428 組(偶數)，**故 A 的最小值爲** 1

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲(71+2)x4+1=293**

(二)、針對上述題目中 T_2 值之不同推廣出八種類型：

【型一：T_2 ÷4=偶數組 … 餘 1 個平方數】EX：T_2=2001

①2001÷4=500 組 … 餘 1 個平方數=1^2=1

②500 組即爲偶數組，**故 A 的最小值爲** 1

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲 2x4+1=9**

【型二：T_2 ÷4=偶數組 … 餘 2 個平方數】EX：T_2=2002

①由觀念甲可知，A 的最小值不可能爲 0，因此我們試圖嘗試看看，能不能退而求其次，使 A 的最小值爲 1。

2001÷4=500 組 … 餘 2 個平方數=1^2+2^2=5，但因爲希望 A 的最小值爲 1，

所以將須從 5 中抽掉 4，而 4 這個值又需要 1 組方可抵消。

所以剩下 500－1＝499 組 (奇數組)

②由觀念乙可知：

從 499 組中抽出兩組 $3^2,4^2,5^2,6^2$ 和 $7^2,8^2,9^2,10^2$，所以剩 499－2＝497 組

又 $3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$＝380 可轉換爲 380÷4=95 組

∴497 組－95 組＝402 組(偶數)，**故 A 的最小值爲** 1

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲(95+3)x4+2=394**

【型三：T_2 ÷4=偶數組 … 餘 3 個平方數】EX：T_2=2003

①2003÷4=500 組 … 餘 3 個平方數=$1^2+2^2+3^2$=14，但因爲希望 A 的最小值爲 0，所以將須從 14 中抽掉 14，而 14 這個值又需要 3 組平方數再加 2 方可抵消。

所以剩下 500－3＝497 組，但還需解決 2 的問題

②由觀念丙可知：

從 497 組中抽出一組 $4^2,5^2,6^2,7^2$，所以剩 497－1＝496 組

又 $4^2+5^2+6^2+7^2$＝126 再加上 2 後可轉換爲 128÷4=32 組

∴496 組－32 組＝464 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲(32+4)×4+3=147**

【型四：T_2 ÷4=奇數組 … 餘 0 個平方數】EX：T_2 =2004

①2004÷4=501 組 … 餘 0 個平方數，若我們有辦法使這 501 組湊成偶數組，則 A 的最小值就可爲 0 了。

②由觀念乙可知：

從 501 組中抽出兩組 $1^2,2^2,3^2,4^2$ 和 $5^2,6^2,7^2,8^2$ ，所以剩 501－2＝499 組

又 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=204$ 可轉換爲 204÷4=51 組

∴499 組－51 組＝448 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲(51+2)×4+0=212**

【型五：T_2 ÷4=奇數組 … 餘 1 個平方數】EX：T_2 =2005

此類型已於第 7 頁中討論過。

【型六：T_2 ÷4=奇數組 … 餘 2 個平方數】EX：T_2 =2006

①由觀念甲可知，A 的最小值不可能爲 0，因此我們試圖嘗試看看，能不能退而求其次，使 A 的最小值爲 1。

2006÷4=501 組 … 餘 2 個平方數= $1^2+2^2=5$，但因爲希望 A 的最小值爲 1

，所以將須從 5 中抽掉 4，而 4 這個值又需要 1 組平方數方可抵消。

所以剩下 501－1＝500 組 (偶數組)

②∵500 組即爲偶數組，**故 A 的最小值爲 1**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲(0+1)×4+2=6**

【型七：T_2 ÷4=奇數組 … 餘 3 個平方數】EX：T_2 =2007

①2007÷4=501 組 … 餘 3 個平方數= $1^2+2^2+3^2=14$，但因爲希望 A 的最小值爲 0

，所以將須從 14 中抽掉 14，而 14 這個值又需要 3 組平方數再加 2 方可抵消。

所以剩下 501－3＝498 組，但還需解決 2 的問題

②由觀念丁可知：

從 498 組中抽出三組平方數 $4^2,5^2,6^2,7^2$ 和 $8^2,9^2,10^2,11^2$ 和 $12^2,13^2,14^2,15^2$

，所以剩 498－3＝495 組

又 $(4^2+5^2+6^2+7^2)+(8^2+9^2+10^2+11^2)+(12^2+13^2+14^2+15^2)=1226$ 再加上 2 後可轉換爲 1228÷4=307 組

∴495 組－307 組＝188 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_2 值爲(307+6)×4+3=1255**

【型八：T_2 ÷4=偶數組 … 餘 0 個平方數】EX：T_2=2008

①2008÷4=502 組 … 餘 0 個平方數

②∵502 組即爲偶數組，故 A 的最小值爲 0

③適用此規則及計算過程的最小 T_2 值爲 2×4+0=8

陸、推廣與討論

設 $A = 1^3 \square 2^3 \square 3^3 \square \cdots \square (T_3-2)^3 \square (T_3-1)^3 \square T_3^{\,3} \geqq 0$，$T_3 \in N$，若在上式空格中任意填入加減符號使 A 值爲最小，則求 A 的最小值爲何?

一、針對 T_3=2005 時探討解法：

(一)、針對上述題目找出解法：

1、我們於求解的過程中發現－

當 T_3 被 4 除餘 1 或 2 時，A 的最小值亦不可能爲 0 (稱之爲觀念戊)

因此，由觀念戊可知：當 T_3=2005 時，A 的最小值不可能爲 0

2、此題既然無法使 A 的最小值爲 0，則退而求其次，希望能使 A 的最小值爲 1，因此我們希望藉著依〝三次方ㄇ字型圖〞所示之規律進行加減法運算，能使其值爲零，但可惜的是 2005 不是 16 的倍數，所以現在想利用〝八數一組，兩組相消〞的觀念(如下式)來解決此一問題。

$1^3-2^3-3^3+4^3-5^3+6^3+7^3-8^3-9^3+10^3+11^3-12^3+13^3-14^3-15^3+16^3=0$

$\Rightarrow \ 1^3-2^3-3^3+4^3-5^3+6^3+7^3-8^3=-48$，$-9^3+10^3+11^3-12^3+13^3-14^3-15^3+16^3=48$

事實上，當 a 爲正整數時 ……

$a^2-(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2-(a+4)^2+(a+5)^2+(a+6)^2-(a+7)^2=-48$

$-a^2+(a+1)^2+(a+2)^2-(a+3)^2+(a+4)^2-(a+5)^2-(a+6)^2+(a+7)^2=48$。

現在，我們將此題之解法分步驟來加以說明：

Step1.

2005÷8=250 組 … 餘 5 個立方數=$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$=225，但因爲希望 A 的最小值爲 1，所以將須從 225 中抽掉 224，而 224 這個值又需要 4 組立方數(每組總值爲 48)再加 32 方可抵消。所以剩下 250－4＝246 組，但還需解決 32 的問題方可抵消。

其實 Step1 所述之內容可用數學式子來表示： $225-(48\times4)-(32)=1$

即〝所餘立方數的總和-(48×被抽掉的組數)-(亦須被抽掉的值)=A 的最小值〞

Step2.

[思考]

再進行步驟 Step2 前我們先思考二個問題：

思考 1：若從 246 組中抽出偶數組，則會剩下偶數組。又若所抽出的偶數組之立方數間進行任意加減法運算後所得之值(設其爲 S)再加上 32 共可

轉換為(S+32)÷48 組，則(S+32)÷48 之值必須為偶數組，因為唯有如此，偶數組－偶數組方可為偶數組。此時 S=64+96k (k 為非負整數)，亦即 S÷96 之值以帶分數表示後，其分數部份須為 $\frac{16}{24}$

思考 2：若從 246 組中抽出奇數組，則會剩下奇數組。又若所抽出的奇數組之立方數間進行任意加減法運算後所得之值(設其為 T)再加上 32 共可轉換為(T+32)÷48 組，則(T+32)÷48 之值必須為奇數組，因為唯有如此，奇數組－奇數組方可為偶數組。此時 T=16+96k (k 為非負整數)，亦即 m÷96 之值以帶分數表示後，其分數部份須為 $\frac{4}{24}$

再者，我們利用 Excel 2003 將 6^3□……□12^3□13^3、14^3□……□20^3□21^3、22^3□……□28^3□29^3 三個部份，分別依不同之加減符號規律進行加減法運算並求出其值，同時亦求出其值除以 96 後，以帶分數表示之分數部份為何？如下**表(二)**。

表(二)

加減符號規律	6^3□……□12^3□$13^3=m_1$ ($m_1\div96$之值以帶分數表示後，其分數部份) (m_1之值)	14^3□……□20^3□$21^3=m_2$ ($m_2\div96$之值以帶分數表示後，其分數部份) (m_2之值)	22^3□……□28^3□$29^3=m_3$ ($m_3\div96$之值以帶分數表示後，其分數部份) (m_3之值)
＋＋＋－	$(\frac{23}{24})$ (2204)	$(\frac{7}{24})$ (16732)	$(\frac{15}{24})$ (55836)
＋＋－＋	$(\frac{6}{24})$ (3576)	$(\frac{14}{24})$ (20888)	$(\frac{22}{24})$ (64312)
＋－＋＋	$(\frac{1}{24})$ (4708)	$(\frac{9}{24})$ (24612)	$(\frac{17}{24})$ (72164)
－＋＋＋	$(\frac{14}{24})$ (5624)	$(\frac{22}{24})$ (27928)	$(\frac{6}{24})$ (79416)
＋＋－－	$(-\frac{17}{24})$ (−2276)	$(-\frac{17}{24})$ (−7460)	$(-\frac{17}{24})$ (−15716)
＋－＋－	$(-\frac{22}{24})$ (−1144)	$(-\frac{22}{24})$ (−3736)	$(-\frac{22}{24})$ (−7864)
－＋＋－	$(-\frac{9}{24})$ (−228)	$(-\frac{9}{24})$ (−420)	$(-\frac{9}{24})$ (−612)

現在開始進行 Step2 的陳述

由〝表(二)〞可知：$(-\frac{1}{24})+(\frac{17}{24})=\frac{16}{24}$恰好滿足［思考 1］之要求

所以從 246 組中，抽出二組來進行表(二)中所示加減符號規律之運算(如下式)，因此還剩 246－2＝244 組

$$
\begin{array}{rl}
 & -(+6^2-7^2+8^2+9^2+10^2-11^2+12^2+13^2) \\
-) & (+22^2+23^2-24^2-25^2+26^2+27^2-28^2-29^2) \\
\hline
 & 11008
\end{array}
$$

又 11008 再加上 32 後可轉換爲 11040÷48=230 組

∴244 組－230 組＝14 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 1**

Step3.

適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(230+2+4)x8+5 = 1893**

3、針對上述題目中 T_3 值之不同推廣出 16 種類型：

【型 01：T_3÷8=偶數組 … 餘 1 個立方數】EX：T_3=2001

①2006÷8=250 組 … 餘 1 個立方數=1^3=1

②∵250 組即爲偶數組，**故 A 的最小值爲 1**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(2)x8+1 = 17**

【型 02：T_3÷8=偶數組 … 餘 2 個立方數】EX：T_3=2002

①2002÷8=250 組 … 餘 2 個立方數=1^3+2^3=9，

∵希望達到〝9-(48x0)-(8)=1〞的目的　∴依然維持 250 組

②從 250 組中，抽出一組來進行運算(如下式)，因此還剩 250－1＝249 組

【參閱附表二】

$3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3=3016$

又 3016 再加上 8 後可轉換爲 3024÷48=63 組

∴249 組－63 組＝186 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 1**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(63+1)x8+2 = 514**

【型 03：T_3÷8=偶數組 … 餘 3 個立方數】EX：T_3=2003

①2003÷8=250 組 … 餘 3 個立方數=$1^3+2^3+3^3$=36，

∵希望達到〝36-(48x0)-(36)=0〞的目的　∴依然仍維持 250 組

②從 250 組中，抽出一組來進行運算(如下式)，因此還剩 250－1＝249 組

【參閱附表三】

$4^3+5^3+6^3-7^3+8^3+9^3+10^3-11^3=972$

又 972 再加上 36 後可轉換爲 1008÷48=21 組

∴249 組－21 組＝228 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(21+1)×8+3 = 179**

【型 04： T_3 ÷8=偶數組 … 餘 4 個立方數】EX： T_3 =2004

①2004÷8=250 組 … 餘 4 個立方數= $1^3+2^3+3^3+4^3$ =100，

∵希望達到〝100-(48×2)-(4)=0〞的目的　∴剩下 250－2＝248 組

②從 248 組中，抽出一組來進行運算(如下式)，因此還剩 248－1＝247 組

【參閱附表四】

$5^3+6^3-7^3+8^3+9^3+10^3-11^3+12^3=2636$

又 2636 再加上 4 後可轉換爲 2640÷48=55 組

∴247 組－55 組＝192 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(55+1+2)×8+4 = 468**

【型 05： T_3 ÷8=偶數組 … 餘 5 個立方數】EX： T_3 =2005

此類型已於第 10 頁中討論過。

【型 06： T_3 ÷8=偶數組 … 餘 6 個立方數】EX： T_3 =2006

①2006÷8=250 組 … 餘 6 個立方數= $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$ =441，

∵希望達到〝441-(48×9)-(8)=1〞的目的　∴剩下 250－9＝241 組

②從 241 組中，抽出二組來進行運算(如下式)，因此還剩 241－2＝239 組

【參閱附表六】

$$
\begin{array}{rr}
 & -7^3-8^3+9^3-10^3-11^3-12^3+13^3-14^3=-4732 \\
+) & -15^3-16^3+17^3+18^3-19^3-20^3+21^3+22^3=8324 \\
\hline
 & 3592
\end{array}
$$

又 3592 再加上 8 後可轉換爲 3600÷48=75 組

∴239 組－75 組＝164 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 1**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(75+2+9)×8+6 = 694**

【型 07： T_3 ÷8=偶數組 … 餘 7 個立方數】EX： T_3 =2007

①2007÷8=250 組 … 餘 7 個立方數= $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3$ =784，

∵希望達到〝784-(48×16)-(16)=0〞的目的　∴剩下 250－16＝234 組

②從 234 組中，抽出四組來進行運算(如下式)，因此還剩 234－4＝230 組

【參閱附表七】

$$-8^3-9^3-10^3+11^3-12^3-13^3-14^3+15^3=-4204$$
$$-16^3-17^3-18^3+19^3-20^3-21^3-22^3+23^3=-23724$$
$$352^3-353^3-354^3+355^3+356^3-357^3-358^3+359^3=8532$$
$$+)\ 360^3-361^3-362^3+363^3+364^3-365^3-366^3+367^3=8724$$

－10672

又－10672 再加上 16 後可轉換爲 |-10656|÷48=222 組

∴230 組－222 組＝8 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(222+4+16)x8+7 = 1943**

【型 08：T_3 ÷8=奇數組 … 餘 0 個立方數】EX：T_3=2008

①2008÷8=251 組 … 餘 0 個立方數=0^3=0，

∵希望達到〝0-(48x0)-(0)=0〞的目的　∴依然維持 251 組

②從 251 組中，抽出四組來進行運算(如下式)，因此還剩 251－4＝247 組

【參閱附表八】

$$1^3-2^3-3^3+4^3+5^3-6^3-7^3+8^3=108$$
$$9^3-10^3-11^3+12^3+13^3-14^3-15^3+16^3=300$$
$$17^3-18^3-19^3+20^3+21^3-22^3-23^3+24^3=492$$
$$+)\ 25^3-26^3-27^3+28^3+29^3-30^3-31^3+32^3=684$$

1584

又 1584 再加上 0 後可轉換爲 1584÷48=33 組

∴247 組－33 組＝214 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(33+4)x8 = 296**

【型 09：T_3 ÷8=奇數組 … 餘 1 個立方數】EX：T_3=2009

①2009÷8=251 組 … 餘 1 個立方數=1^3=1，

∵希望達到〝1-(48x0)-(0)=1〞的目的　∴依然維持 251 組

②從 251 組中，抽出二組來進行運算(如下式)，因此還剩 251－2＝249 組

【參閱附表一】

$$2^3+3^3-4^3+5^3+6^3+7^3-8^3+9^3=872$$
$$+)\ -10^3+11^3-12^3+13^3-14^3+15^3-16^3+17^3=2248$$

3120

又 3120 再加上 0 後可轉換爲 3120÷48=65 組

∴249 組－65 組＝184 組(偶數)，**故 A 的最小值爲 1**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(65+2)x8+1 = 537**

【**型 10：T_3÷8=奇數組 … 餘 2 個立方數**】EX：T_3=2010

①2010÷8=251 組 … 餘 2 個立方數=1^3+2^3=9，

∵希望達到〝9-(48×0)-(8)=1〞的目的 ∴依然維持 251 組

②從 251 組中，抽出一組來進行運算(如下式)，因此還剩 251－1＝250 組

【**參閱附表二**】

$-3^3+4^3-5^3+6^3-7^3+8^3-9^3+10^3=568$

又 568 再加上 8 後可轉換為 576÷48=12 組

∴250 組－12 組＝238 組(偶數)，**故 A 的最小值為** 1

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值為**(12+1)×8+2 = 106

【**型 11：T_3÷8=奇數組 … 餘 3 個立方數**】EX：T_3=2011

①2011÷8=251 組 … 餘 3 個立方數=$1^3+2^3+3^3$=36，

∵希望達到〝36-(48×0)-(36)=0〞的目的 ∴依然維持 251 組

②從 251 組中，抽出二組來進行運算(如下式)，因此還剩 251－2＝249 組

【**參閱附表三**】

$$
\begin{array}{rr}
 & -12^3+13^3-14^3-15^3-16^3+17^3-18^3-19^3=-17524 \\
+) & -20^3+21^3-22^3+23^3-24^3+25^3-26^3+27^3=6688 \\
\hline
 & -10836
\end{array}
$$

又-10836 再加上 36 後可轉換為 |-10800|÷48=225 組

∴249 組－225 組＝24 組(偶數)，**故 A 的最小值為** 0

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值為**(225+2)×8+3 = 1819

【**型 12：T_3÷8=奇數組 … 餘 4 個立方數**】EX：T_3=2012

①2012÷8=251 組 … 餘 4 個立方數=$1^3+2^3+3^3+4^3$=100，

∵希望達到〝100-(48×2)-(4)=0〞的目的 ∴還剩 251－2＝249 組

②從 249 組中，抽出二組來進行運算(如下式)，因此還剩 249－2＝247 組

【**參閱附表四**】

$$
\begin{array}{rr}
 & 5^3+6^3-7^3+8^3+9^3+10^3-11^3+12^3=2636 \\
+) & -13^3-14^3-15^3+16^3-17^3-18^3-19^3+20^3=-13824 \\
\hline
 & -11188
\end{array}
$$

又-11188 再加上 4 後可轉換為 |-11184|÷48=233 組

∴247 組－233 組＝14 組(偶數)，**故 A 的最小值為** 0

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值為**(233+2+2)×8+4 = 1900

【型 13：T_3÷8=奇數組 … 餘 5 個立方數】EX：T_3=2013

①2013÷8=251 組 … 餘 5 個立方數=$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$=225，

∵〝所餘立方數的總和-(48×被抽掉的組數)-(亦須被抽掉的值)=A 的最小值〞

亦即希望達到〝225-(48×4)-(32)=1〞的目的

∴剩下 251－4＝247 組

②從 247 組中，抽出三組來進行運算(如下式)，因此還剩 247－3＝244 組

【參閱附表五】

$$\begin{array}{rr} & 6^3+7^3-8^3+9^3+10^3+11^3-12^3+13^3=3576 \\ & -14^3-15^3-16^3+17^3-18^3-19^3-20^3+21^3=-16732 \\ +) & -22^3-23^3+24^3+25^3-26^3-27^3+28^3+29^3=15716 \\ \hline & 2560 \end{array}$$

又 2560 再加上 32 後可轉換爲 2592÷48=54 組

∴244 組－54 組＝190 組(偶數)，故 A 的最小值爲 1

③適用此規則及計算過程的最小 T_3 值爲(54+3+4)x8+5=493

【型 14：T_3÷8=奇數組 … 餘 6 個立方數】EX：T_3=2014

①2014÷8=251 組 … 餘 6 個立方數=$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$=441，

∵希望達到〝441-(48×9)-(8)=1〞的目的　∴還剩 251－9＝242 組

②從 242 組中，抽出一組來進行運算(如下式)，因此還剩 242－1＝241 組

【參閱附表六】

$-7^3+8^3-9^3+10^3-11^3+12^3-13^3+14^3=1384$

又 1384 再加上 8 後可轉換爲 1392÷48=29 組

∴241 組－29 組＝212 組(偶數)，故 A 的最小值爲 1

③適用此規則及計算過程的最小 T_3 值爲(29+1+9)x8+6 = 318

【型 15：T_3÷8=奇數組 … 餘 7 個立方數】EX：T_3=2015

①2015÷8=251 組 … 餘 7 個立方數=$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3$=784，

∵希望達到〝784-(48×16)-(16)=0〞的目的　∴還剩 251－16＝235 組

②從 235 組中，抽出一組來進行運算(如下式)，因此還剩 235－1＝234 組

【參閱附表七】

$8^3+9^3-10^3+11^3+12^3+13^3-14^3+15^3=6128$

又 6128 再加上 16 後可轉換爲 6144÷48=128 組

∴234 組－128 組＝106 組(偶數)，故 A 的最小值爲 0

③適用此規則及計算過程的最小 T_3 值爲(128+1+16)x8+7 = 1167

【型 16： T_3 ÷8=偶數組 … 餘 0 個立方數】EX： T_3 =2016

①2016÷8=252 組 … 餘 0 個立方數= 0^3 =0，

∵希望達到〝0-(48×0)-(0)=0〞的目的　∴依然維持 252 組

②∵252 組即爲偶數組，**故 A 的最小值爲 0**

③適用此規則及計算過程的**最小 T_3 值爲(2)×8 = 16**

柒、結論

一、 2^{n+1} 個連續整數 n 次方後依〝n 次方ㄇ字型圖〞所示之規律進行加減法運算後，其值爲 0　(n 爲正整數)

【未來研究】

(一)、但事實上，我們覺得該敘述中的〝連續整數〞四個字若改成〝等差的連續整數〞，則原結果依然成立。

(二)、其中〝n 次方ㄇ字型圖〞也並非爲唯一的圖形表示法

二、題目： $A = 1^2\Box 2^2\Box 3^2\Box\cdots\cdots\Box(T_2-2)^2\Box(T_2-1)^2\Box T_2^{\,2} \geqq 0$， $T_2 \in N$ ，□內任意填入〝＋〞或〝－〞進行加減法運算，求出 A 的最小值？

針對題目中的 T_2 值來討論，我們推廣出八種類型：**(如下表三)**

【型 a： T_2 ÷4=b 組 … 餘 c 個平方數】　**(表三)**

a	b	c	A 的最小值	適用先前所述規則及計算過程的最小 T_2 值
一	偶數	1	1	9
二		2	1	394
三		3	0	147
四	奇數	0	0	212
五		1	1	293
六		2	1	6
七		3	0	1255
八	偶數	0	0	8

然而，事實上，我們不只可以知道其最小值爲何，甚至於可以找出一組其加減運算過程中□內的〝＋〞、〝－〞符號的排列順序。

三、將原題推廣成：$A = 1^3□2^3□3^3□\cdots\cdots□(T_3-2)^3□(T_3-1)^3□T_3^3 \geqq 0$，$T_3 \in N$，□內任意填入〝＋〞或〝－〞進行加減法運算，求出 A 的最小值？

針對題目中的 T_3 值來討論，我們推廣出 16 種類型：**(如下表四)**

【型 a：$T_3 \div 8$=b 組 … 餘 c 個立方數】 **(表四)**

a	b	c	A 的最小值	適用先前所述規則及計算過程的最小 T_3 值
01	偶數	1	1	17
02		2	1	514
03		3	0	179
04		4	0	468
05		5	1	1893
06		6	1	694
07		7	0	1943
08	奇數	0	0	296
09		1	1	537
10		2	1	106
11		3	0	1819
12		4	0	1900
13		5	1	493
14		6	1	318
15		7	0	1167
16	偶數	0	0	16

然而，事實上，我們不只可以知道其最小值爲何，甚至於可以找出一組其加減運算過程中□內的〝＋〞、〝－〞符號的排列順序。

四、【未來研究】

最後，我們嘗試著猜想：

若將原題改成【$A = 1^k \square 2^k \square 3^k \square \cdots \square (n-2)^k \square (n-1)^k \square n^k \geq 0$，□內任意填入〝＋〞或〝－〞進行加減法運算，求出 A 的最小值？ (其中正整數 n 和 k 為定值)】，則事實上，只要 n 值夠大，A 的最小值必可為 1 或 0。

捌、參考資料

1、國中數學課本[康]第一冊

2、國中數學課本[康]第三冊

3、**數學歸納法**（無日期）。民 90 年 2 月 15 日，取自：http://mathsup.math.ntnu.edu.tw/computer/2001-1/g4/g4/Weds/Industry%20%20of%20%20Math.htm

4、許志農教授（無日期）。**中學數論－2. 數學歸納法**。民 95 年 2 月 15 日，取自：http://www.fg.tp.edu.tw/~math/source/num2.htm

5、**由九九乘法表看連續整數立方和**（無日期）。民 90 年 2 月 15 日，取自：http://www.mathland.idv.tw/fun/cubsum.htm

評　　語

030421　化整為零

很實際的極小值問題，作者利用其所發現的規律模式將複雜的問題簡化，創意十足，可惜的是，也因為作者的分析大部份仰賴此模式，對於適用此分析方式的最小的 k 值沒能做更進一步的討論,如果能在這方面多下功夫,會是更好的作品。