中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030418

內心、垂心、外心是3位循環節的循環小數？！

學校名稱： 臺北縣立中山國民中學

作者：	指導老師：
國二 胡雅涵 國二 林彥維 國一 陳冠廷 國一 詹淨	胡慶勝

關 鍵 詞：內心、外心、尤拉線

作品名稱：內、垂、外心是 3 位循環節的循環小數?

摘要：三角形的內心 I,向外部或向內部作”過三頂點與 I 連線的垂直線”時，I 會成爲新的三角形的垂心或外心，而且依內、垂、外心的次序循環。新三角形的外心與 I 共線，與尤拉線存在特殊的關係且三角形間相似。

壹、研究動機：

三角形內心到三邊等距離，是三角形內切圓的圓心。既然三角形還有外心、重心、垂心、旁心，他們有沒有存在某種關係，將他們串起來？外心、重心、垂心構成尤拉線，爲什麼內心沒有份呢？

貳、研究目的：

1. 尋找某種作圖方法，能使三角形的心，變成新三角形的心。
2. 研究內心的軌跡、性質，以及正弦定理的應用。
3. 尋找內、垂、外心的邊長、面積關係。
4. 尋找內心是否有類似尤拉線的新連線。

參、研究設備及器材：

1.電腦 GSP軟體

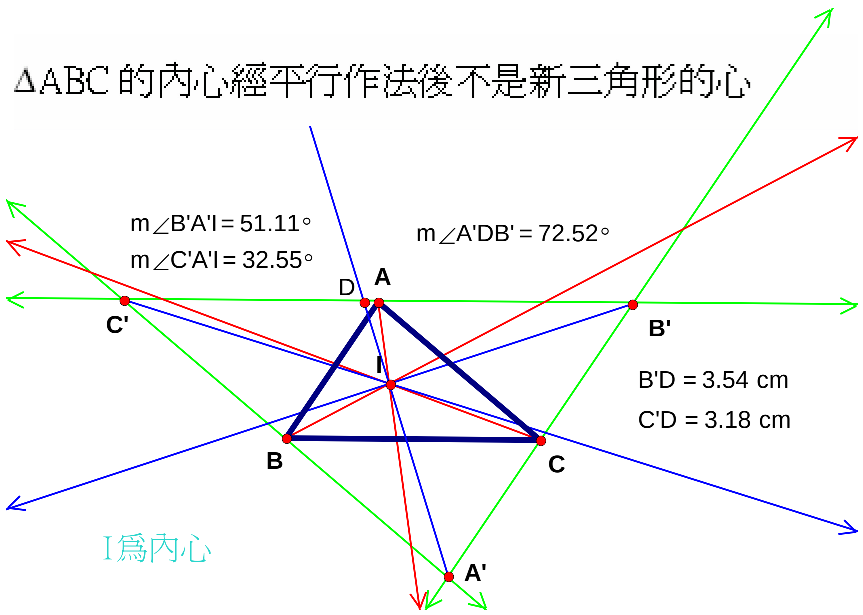
2.紙筆

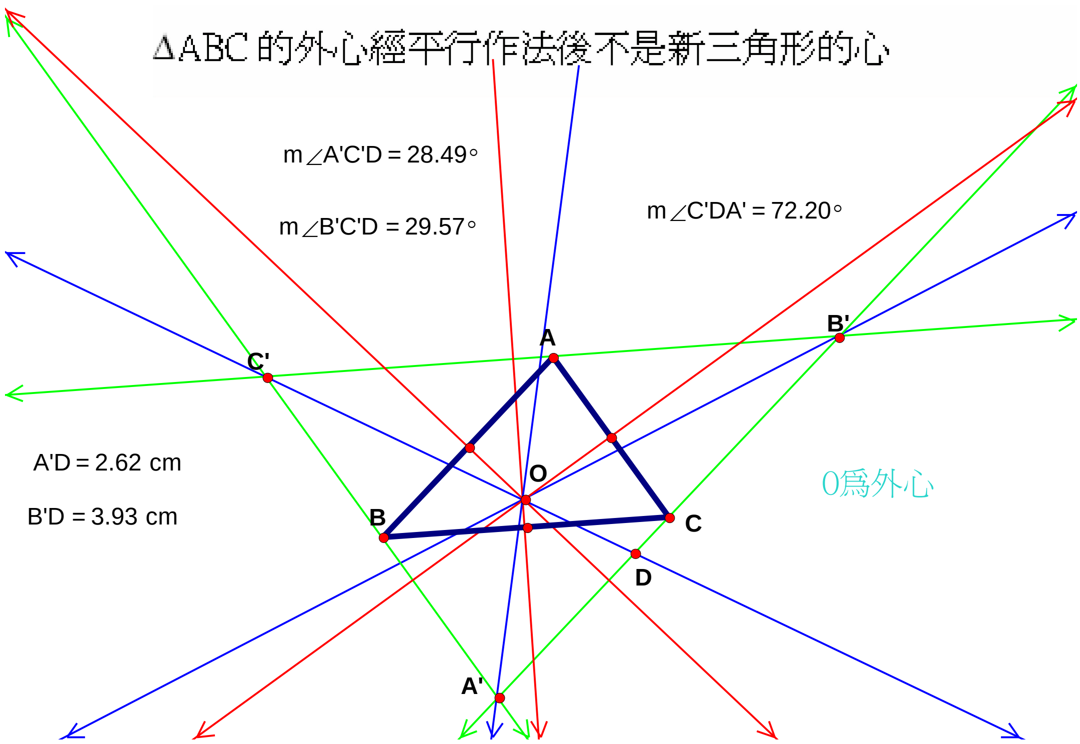
肆、研究過程及方法

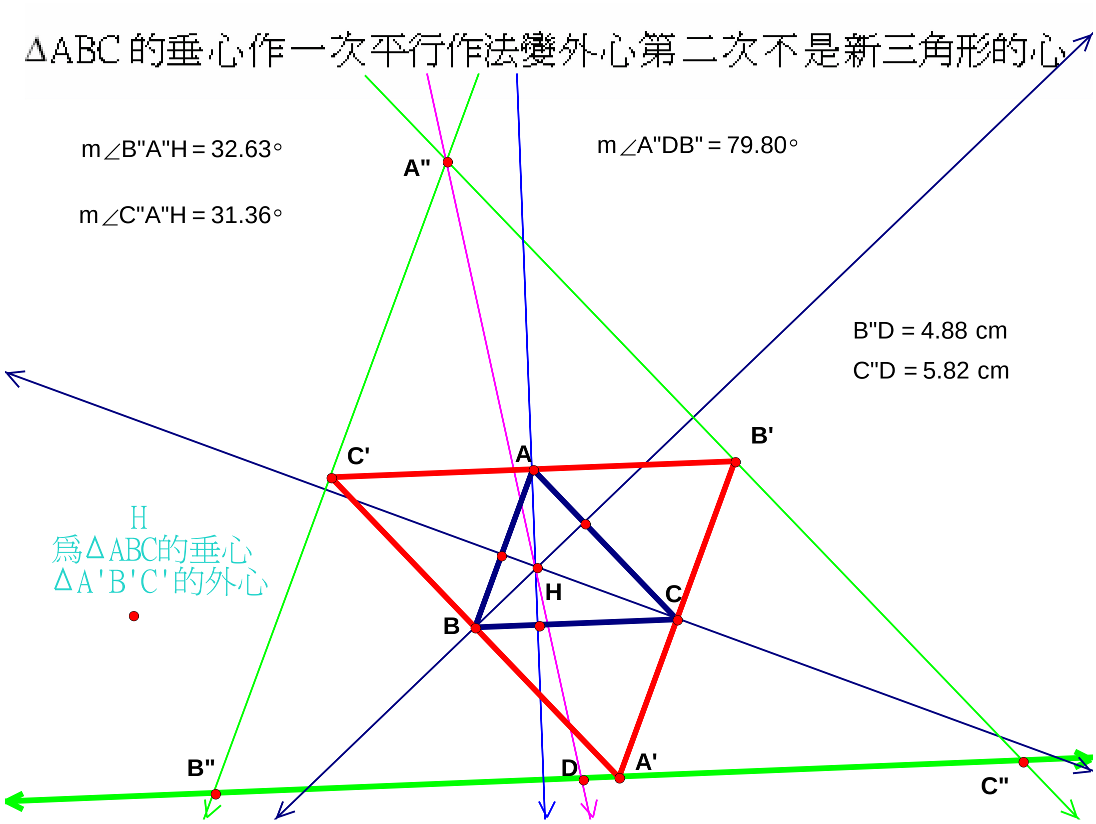
一、尋找某種作圖方法，能使三角形的心，變成新三角形的心

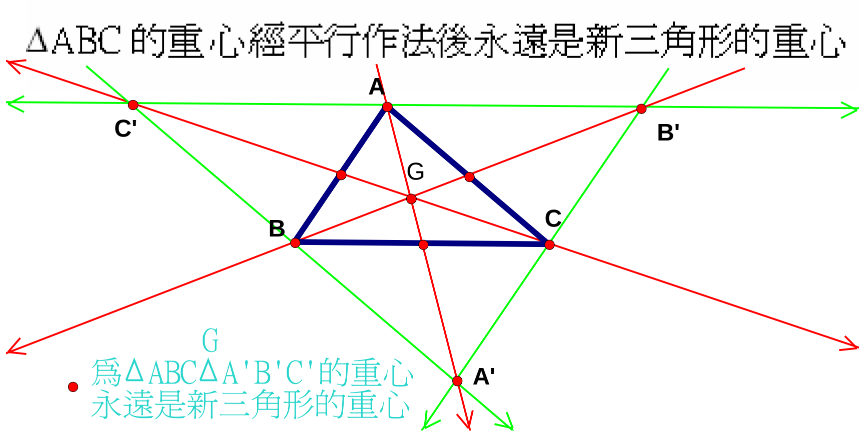
定義：平行作法是指過三角形的頂點分別作平行底邊的直線

垂直作法是指作”過三頂點與I連線”的垂直線。




ΔABC 的外心經平行作法後不是新三角形的心
m∠A'C'D = 28.49°
m∠B'C'D = 29.57°
m∠C'DA' = 72.20°
A'D = 2.62 cm
B'D = 3.93 cm
O爲外心
A
B
C
O
D
A'
B'
C'


ΔABC 的垂心作一次平行作法變外心第二次不是新三角形的心
m∠B"A"H = 32.63°
m∠C"A"H = 31.36°
m∠A"DB" = 79.80°
B"D = 4.88 cm
C"D = 5.82 cm
H
爲ΔABC的垂心
ΔA'B'C'的外心
A"
A
B
C
H
C'
B'
A'
B"
C"
D



二、研究三角形內心的軌跡及性質 發現垂直作法

性質1： 已知 ΔABC，$\overline{BC}$的位置和長度一定

求作$\Delta A'BC$的內心 I 的軌跡，但 $\angle A' = \angle A$ 。

作法：

1作ΔABC的外接圓圓O

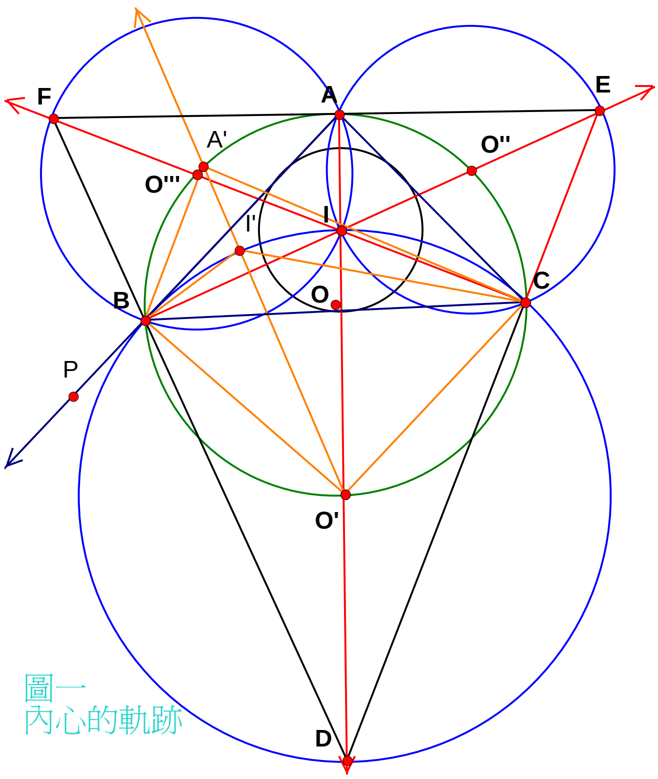
2作ΔABC的內心I，延長

$\overleftrightarrow{AI}$與圓O交於O' 則$\overline{O'B} = \overline{O'I} = \overline{O'C}$

即 O'爲ΔBIC的外心，B，I，C 共圓

且O'在分角線上

$\because$ $\overline{BC}$和$\angle A$一定，$\therefore$ ΔABC的外接圓的位置和大小一定，且O'爲定點，$\overline{OB}$爲定長的線段 因此，I在以O'爲圓心，$\overline{O'B}$爲半徑的圓弧BIC上。



圖一
內心的軌跡

反之，在圓弧BIC上任取一點I'，延長$\overline{O'I'}$交圓O於A'

$\because$ $\angle O'A'C = \angle BA'O'$ (CO'弧BO'弧的圓周角)

$\angle I'BC = \angle A'BI'$ ($\angle O'BC + \angle I'BC = \angle BA'O' + \angle A'BI'$)

$\therefore$ I'爲$\Delta A'BC$的內心

弧長BIC爲內心 I 的軌跡。

性質2： I 爲 ΔABC 的內心，M、N、K 爲內切圓與三邊的切點則

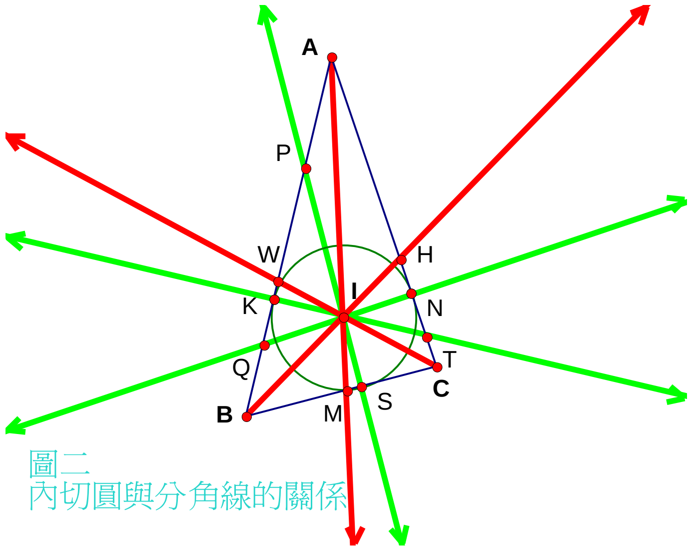
$\angle PIN = \angle C$ $\angle NIT = \angle A$ $\angle PIK = \angle B$

$$\angle \mathrm{AIP}=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{C}-\angle \mathrm{B})$$

$$\angle \mathrm{HIN}=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{C}-\angle \mathrm{A})$$

$$\angle \mathrm{WIK}=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{B}-\angle \mathrm{A})$$

$$\angle \mathrm{PIW}=\frac{1}{2}(\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B})=\angle \mathrm{AIH}$$



圖二
內切圓與分角線的關係

證明：

NISC爲圓內接四邊形

$\therefore \angle \mathrm{PIN}=\angle \mathrm{C}$　同理　$\angle \mathrm{NIT}=\angle \mathrm{A}$　$\angle \mathrm{PIK}=\angle \mathrm{B}$

在ΔPBS中　$\angle \mathrm{BPS}=90^\circ-\angle \mathrm{B}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{AIP}$

$\angle \mathrm{AIP}=90^\circ-\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}$

(本圖因 $\angle \mathrm{C}>\angle \mathrm{B}$所以P在A的左邊，反之P在A的右邊時便成 $\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}$)

同理 $\angle \mathrm{HIN}=\angle \mathrm{BIQ}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{C}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$

$\angle \mathrm{WIK}=\angle \mathrm{TIC}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$

$\therefore \angle \mathrm{PIW}=\angle \mathrm{PIK}-(\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}-\frac{1}{2}\angle \mathrm{A})=\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}+\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$

$\angle \mathrm{AIH}=\angle \mathrm{PIN}-\angle \mathrm{PIA}-\angle \mathrm{HIN}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}+\frac{1}{2}\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{PIW}$

三、垂直作法 ΔDEF 的存在性及性質

性質3：若I爲 ΔABC 的內心，O',O'',O'''爲ΔABC的三分角線與外接圓的交點且圓 O',O'',O'''與ΔABC的三分角線交於D、E、F三點。則

(1)過頂點A、B、C且垂直 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$ 的直線必交於D、E、F三點、

(2)I爲 ΔDEF 的垂心

(3) $\overline{\mathrm{IA}}\times\overline{\mathrm{ID}}=\overline{\mathrm{IB}}\times\overline{\mathrm{IE}}=\overline{\mathrm{IC}}\times\overline{\mathrm{IF}}$

(4) O', O'', O''' 分別爲 BC, AC, AB 弧的中點 且 在 $\overline{\mathrm{BC}}$，$\overline{\mathrm{AC}}$，$\overline{\mathrm{AB}}$的中垂線上

證明：(圖三)

(1) $\because \angle ICD+\angle ICE=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ (直徑的圓周角=90^0)

即 $\overline{IC}\perp\overline{DE}$　且D、C、E共線

同理　$\overline{IB}\perp\overline{DF}$ 且 D, B, F共線, $\overline{\mathrm{IA}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$ 且 F, A, E共線

平面上　過直線上一點且垂直此線的直線唯一

且 $\overline{IA},\overline{\mathrm{IB}},\overline{\mathrm{IC}}$ 不兩兩互相垂直也不平行或重疊

$\therefore$ 垂直 $\overline{IA},\overline{\mathrm{IB}},\overline{\mathrm{IC}}$ 的直線必交於D、E、F三點。

(2) $\therefore \Delta DEF$ 爲一三角形且I爲 ΔDEF 的垂心。

(3) $\because \Delta\mathrm{IAE} \sim \Delta\mathrm{IBD}$ (AA相似)

$\Delta\mathrm{IAF} \sim \Delta\mathrm{ICD}$ (AA相似)

$\therefore \overline{\mathrm{IA}} \times \overline{\mathrm{ID}} = \overline{\mathrm{IB}} \times \overline{\mathrm{IE}} = \overline{\mathrm{IC}} \times \overline{\mathrm{IF}}$

(4) $\because$ O' 爲 ΔBIC 的外心， $\overline{O'B} = \overline{O'C}$ $\therefore$ 在 $\overline{\mathrm{BC}}$ 的中垂線上。

由等弦對等弧性質得 O' 爲BC弧的中點

其餘同理可證。

性質4：(1)D、E、F爲 ΔABC 的旁心。

(2) $\Delta O'O''O''' \sim \Delta DEF$ 且面積爲 $\frac{1}{4}\Delta\mathrm{DEF}$

證明：

(1) $\because \angle\mathrm{IBC} + \angle\mathrm{CBD} = 90°$

$= \angle ABI + \angle DBP$

$\therefore \angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{DBP}$

又 $\overleftrightarrow{\mathrm{AD}}$ 爲 $\angle$A的角平分線

$\therefore$ D爲 $\angle$A內的旁心內

E、F同理可證

(2)在 ΔDIF 中

$\overline{O'O'''} // \overline{\mathrm{DF}}$ $\overline{\mathrm{O'O'''}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{DF}}$

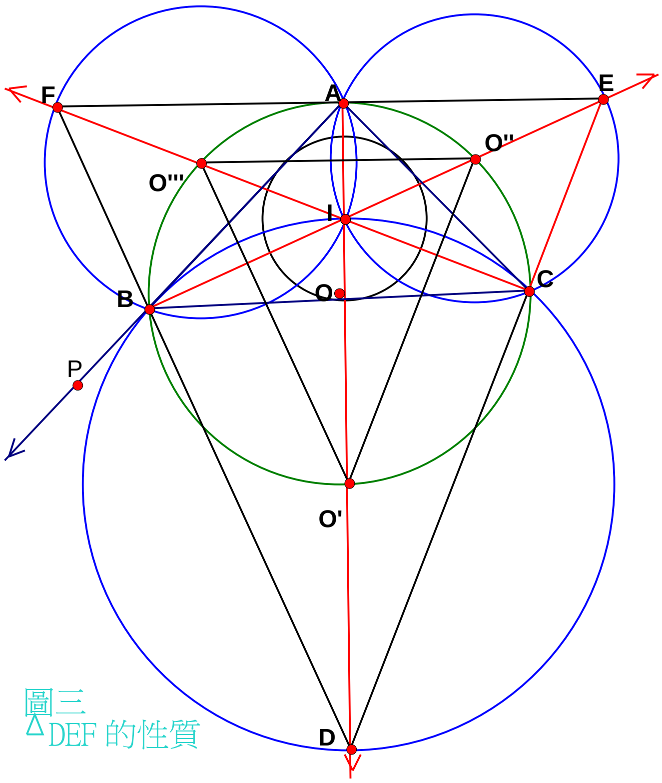
(三角形兩邊中點連線性質)

同理 $\overline{O'O''} // \overline{DE}$ $\overline{O'O''} = \frac{1}{2}\overline{DE}$

$\overline{O''O'''} // \overline{EF}$ $\overline{O''O'''} = \frac{1}{2}\overline{EF}$

$\therefore \Delta O'O''O''' \sim \Delta DEF$

面積爲 $\frac{1}{4}\Delta DEF$



圖三

ΔDEF 的性質

性質5：(1) $\angle D = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ $\angle\mathrm{ADB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{C}$ $\angle\mathrm{ADE} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{B}$

(2) $\angle E = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ $\angle\mathrm{AEB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{C}$ $\angle\mathrm{BED} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{A}$

(3) $\angle F = 90° - \frac{1}{2}\angle C$ $\angle\mathrm{AFC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{B}$ $\angle\mathrm{DFC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{A}$

證明：(圖三)

$\because \angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ (內心性質)

$\angle D = 90° - \frac{1}{2}\angle A$　(圓內接四邊形對角互補)

$\because \angle BID = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90° - \frac{1}{2}\angle C$　(三角形外角性質)

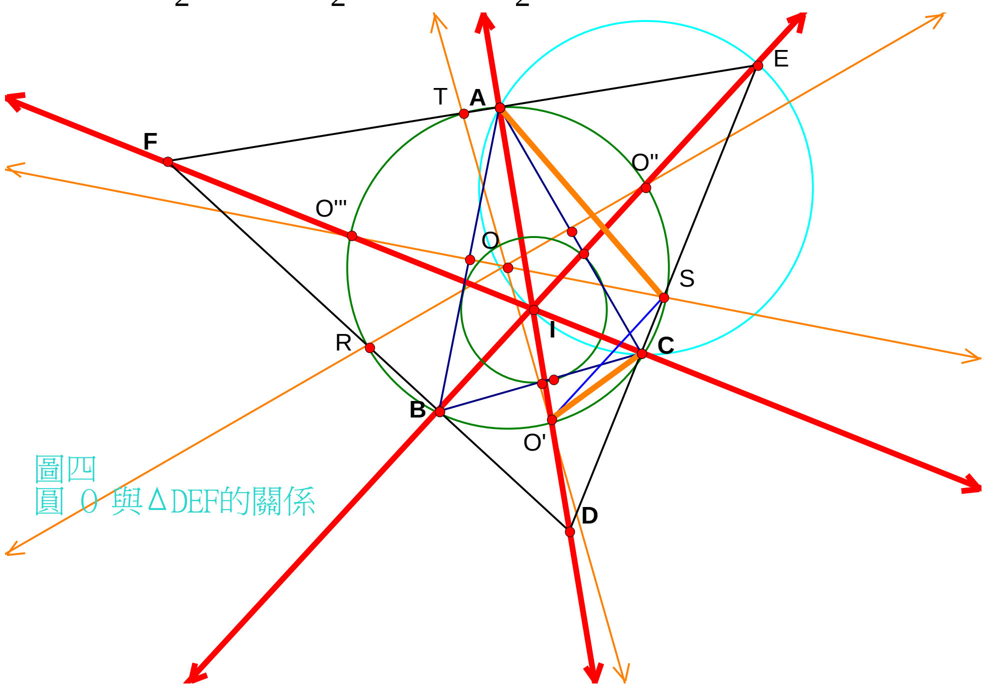
$\because \angle \mathrm{IBD} = 90°$　$\therefore \angle ADB = 90° - \angle BID = \frac{1}{2}\angle C$

同理 $\angle ADE = \frac{1}{2}\angle B$，其他同理可證

性質6：(1)圓O通過 ΔDEF 三邊的中點S、T、R，三高的垂足點

(2)T、R　、S與 O'，O''，O'''的連線會通過 ΔABC 三邊的中點

(3) $\frac{1}{2}\overline{FI} \times \overline{CI} = \frac{1}{2} \times \overline{DI} \times \overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{EI} \times \overline{BI}$



圖四
圓 O 與ΔDEF的關係

證明：(圖四)

(1)三角形的旁心在三角形外接圓的外部。(參考資料2，NO437)

且圓O不是 ΔDEF 的內切圓

設圓O交 $\overline{DE}$ 於C、S兩點

$\therefore \angle CEI = \angle CAI$　(對IC弧)

$= \angle CSO'$ (對O'C弧)

$\therefore \overline{O'S} // \overline{IE}$ (同位角相等)　又$\overline{\mathrm{DO'}} = \overline{\mathrm{IO'}}$　$\therefore \overline{DS} = \overline{ES}$(三角形中點性質)

其餘同理可證

(2) 在ΔRBO''中　$\angle RBO'' = 90°$

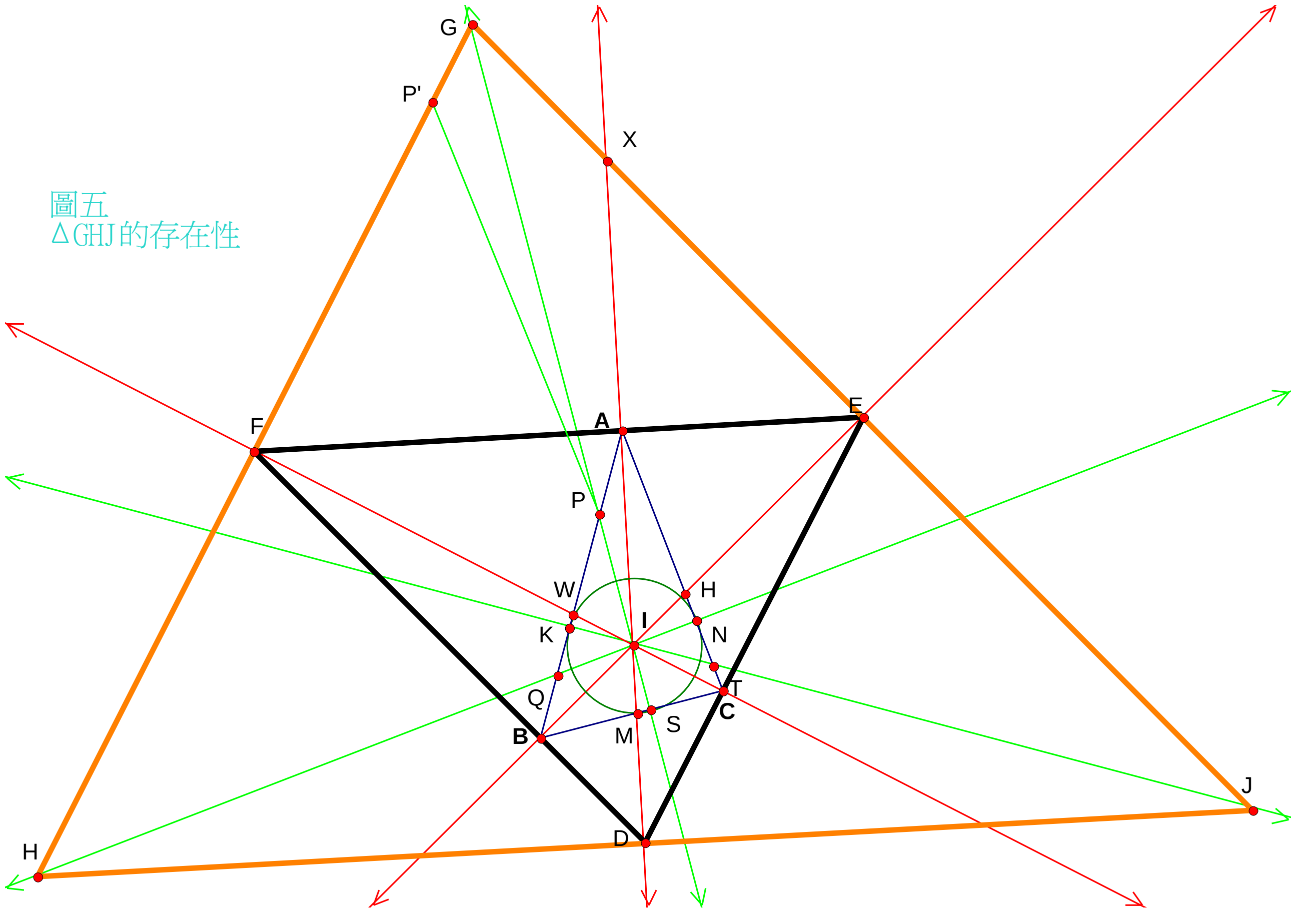
$\therefore \overline{RO''}$ 為圓O的直徑，又 O''在$\overline{\mathrm{AC}}$的中垂線上(性質3)

$\therefore \overline{RO''}$ 通過 $\overline{AC}$ 的中點

其餘同理可證

(3)圓的內冪性質

四、垂直作法 ΔGHJ 的存在性及性質



性質7：(圖五)

G、H、J在ΔABC內切圓的切點與內心I的連線上。

證明：設內心I與切點S的連線不通過G

不失一般性，設交$\overline{FG}$於P',作$\overline{PG}$

$$\angle FGE = 180° - (90° + \frac{1}{2}\angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$$

由性質2得 $\angle \mathrm{FIP'} = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ $\quad \angle \mathrm{P'IX} = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$

$\angle XGP = \frac{1}{2}\angle B$ $\quad \angle \mathrm{P'GP} = \frac{1}{2}\angle C$ $\quad \angle \mathrm{P'PG} = 0°$ $\quad$ P' = G

其餘同理可證

性質8：(圖六)

(1)I爲ΔGHJ的外心

(2)$\Delta DEF \cong \Delta GFE \cong \Delta FHD \cong \Delta EDJ$,面積爲$\Delta$GHJ的1/4

(3)$\Delta DEJ \sim \Delta BDC \sim \Delta BAF \sim \Delta EAC \sim \Delta HGJ$

(4)$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{\overline{DE}}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{\overline{JE}}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{\overline{DF}}}$

證明：

GFDE爲平行四邊形 $\Delta DEF \cong \Delta GFE$ DHFE爲平行四邊形 $\Delta DEF \cong \Delta FHD$

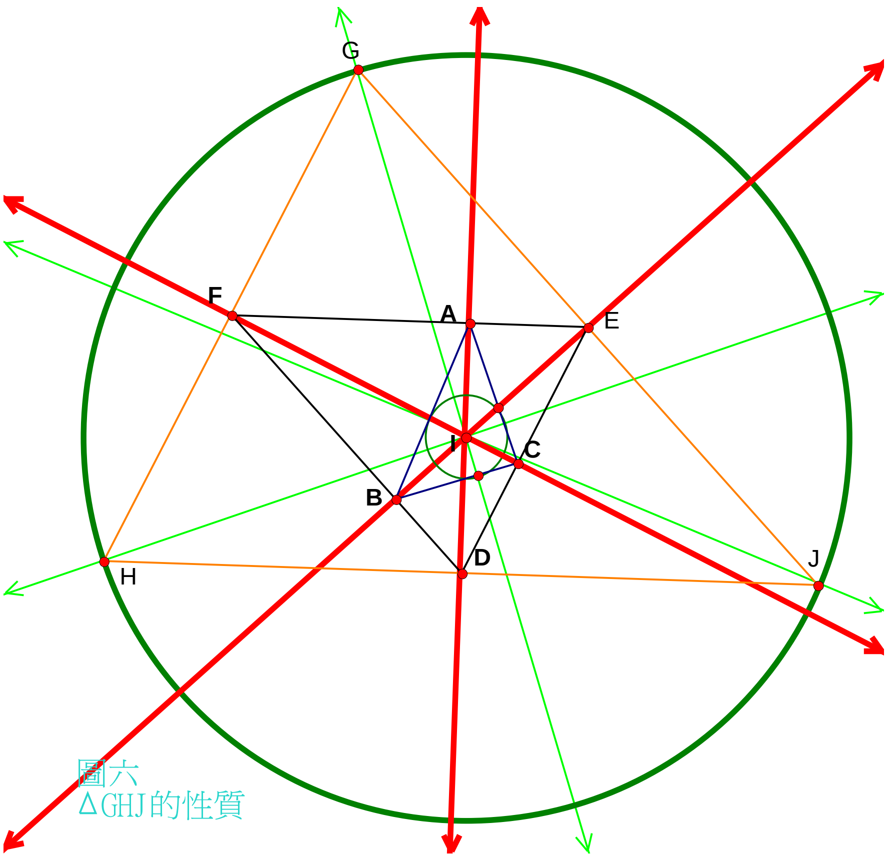
$\overline{IF}$爲$\overline{GH}$的的中垂線 $\overline{ID}$爲$\overline{HJ}$的中垂線 (1)(2)得證

$$\angle EDJ = \angle DEF = 90° - \frac{1}{2}\angle B \text{ (性質2,5)}$$

$= \angle CBD = \angle ABF$　同理　對應角相等

AAA相似　對應邊成比例

(3)(4)得證



圖六
ΔGHJ的性質

性質9：

$\angle HGJ = 90° - \frac{1}{2}\angle A$　　$\angle IGH = \frac{1}{2}\angle C$　　$\angle IGJ = \frac{1}{2}\angle B$

$\angle GHJ = 90° - \frac{1}{2}\angle B$　　$\angle IHG = \frac{1}{2}\angle C$　　$\angle IHJ = \frac{1}{2}\angle A$

$\angle HJG = 90° - \frac{1}{2}\angle C$　　$\angle IJG = \frac{1}{2}\angle B$　　$\angle IJH = \frac{1}{2}\angle A$

證明：性質9,10得　$\Delta DEF \cong \Delta EDJ$　　$\Delta DEJ \sim \Delta HGJ$

餘同性質5

五、$\Delta A'B'C'$的存在性及循環性質

性質10：(圖七)

(1) 直線IA、IB、IC爲 $\angle A', \angle B', \angle C'$的分角線

(2)$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

(3)I的性質循環

證明：(1) 設$\overline{IB'}$不是$\angle B$的分角線交$\overline{GJ}$於一點W

$\Delta B'GI \cong \Delta B'JI$　(RHS)　　$\therefore \overline{IB'}$爲$\angle B'$的分角線

$\Delta GWB' \cong \Delta JWB'$　(SAS全等)　　$\therefore \overline{GW} = \overline{JW}$

E 爲 $\overline{GJ}$的中點(性質8)　$\therefore$ W = E的中點

直線$\overleftrightarrow{BE}$與直線$\overleftrightarrow{IB'}$爲同一直線，爲$\angle B'$的分角線

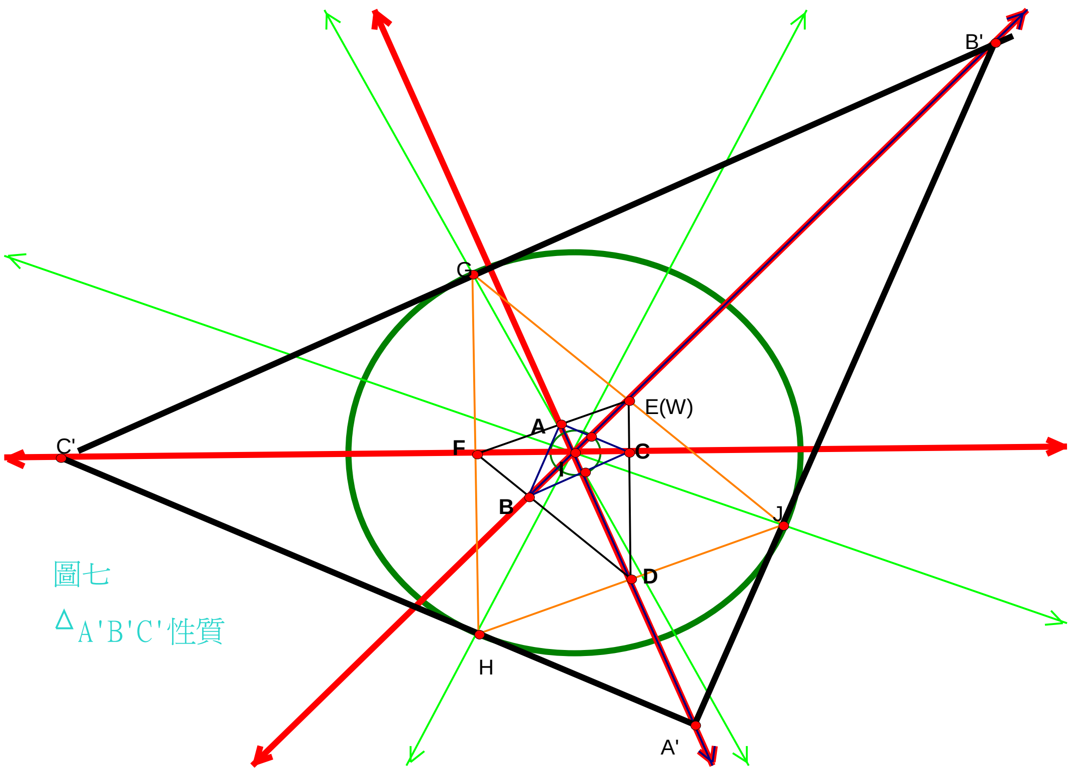
其餘同理可證

$$(2)\angle \mathrm{BIC}=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A \qquad (I\text{為}\Delta \mathrm{ABC}\text{的內心})$$

$$=\angle \mathrm{B'IC'} \qquad (\text{對頂角相等})$$

$$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle \mathrm{A'} \quad (\mathrm{I}\text{為}\Delta \mathrm{A'B'C'}\text{的內心}) \quad \therefore \angle \mathrm{A}=\angle \mathrm{A'}$$

(3) I為 ΔA'B'C'，ΔABC的內心 所以性質得以循環



圖七
ΔA'B'C'性質

性質11：向內作的垂直作法(圖七)

已知 $\Delta A'B'C'$ 及其內心I，以垂直作法向內作圖時

I的性質依次為內、外、垂心，所得三角形與上述相同

若無聲明均指向外作圖。

證明：向內作圖時，須先從內切圓I與三邊切點作起，除程序顛倒外 其餘皆同。

六、循環、同系間的性質

定義：垂直作法中，以I為內心、垂心、外心的三個三角形稱作一循環。

在不同循環中，同以I為內心、垂心、外心的三角形稱作系。

性質12：(圖八)

$$(1)\frac{\overline{\overline{IA}}}{\overline{\overline{IA'}}}=\frac{\overline{ID}}{\overline{ID'}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{IG'}}=\frac{\overline{\overline{AB}}}{\overline{\overline{AB'}}}$$

$$(2)\frac{\overline{\overline{IA}}}{\overline{\overline{IA'}}}=\frac{\overline{ID}}{\overline{ID'}}=\frac{\overline{IG}}{\overline{IG'}}=\frac{\overline{\overline{AB}}}{\overline{\overline{AB'}}}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$$

$$(3)\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\Delta DEF}{\Delta D'E'F'}=\frac{\Delta GHJ}{\Delta G'H'J'}=\sin^2(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin^2(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin^2(\frac{1}{2}\angle C)$$

證明：(1) $\because \Delta IAB \sim \Delta IA'B'$ 　($\because \overline{AB}//\overline{A'B'}$ 　AA相似)

$\Delta IDF \sim \Delta ID'F'$ 　($\because \overline{DF}//\overline{D'F'}$)

$\Delta IBD \sim \Delta IB'D'$ 　($\because \angle IBD = \angle IB'D'$ 　$\angle BID = \angle B'ID'$)

$\because \Delta IDH \sim \Delta ID'H'$ 　　($\angle IDH = \angle ID'H$ 　$\angle DIH = \angle D'IH'$)

$$\therefore \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{ID'}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{IH'}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{IG'}}$$

(2) 直角$\Delta A'IH$中 　$\overline{IH} = \overline{IA'} \times \sin(\frac{1}{2}\angle A)$......(1)

ΔHIF中 　$\overline{IF} = \overline{IH} \times \sin(\frac{1}{2}\angle C)$......(2)

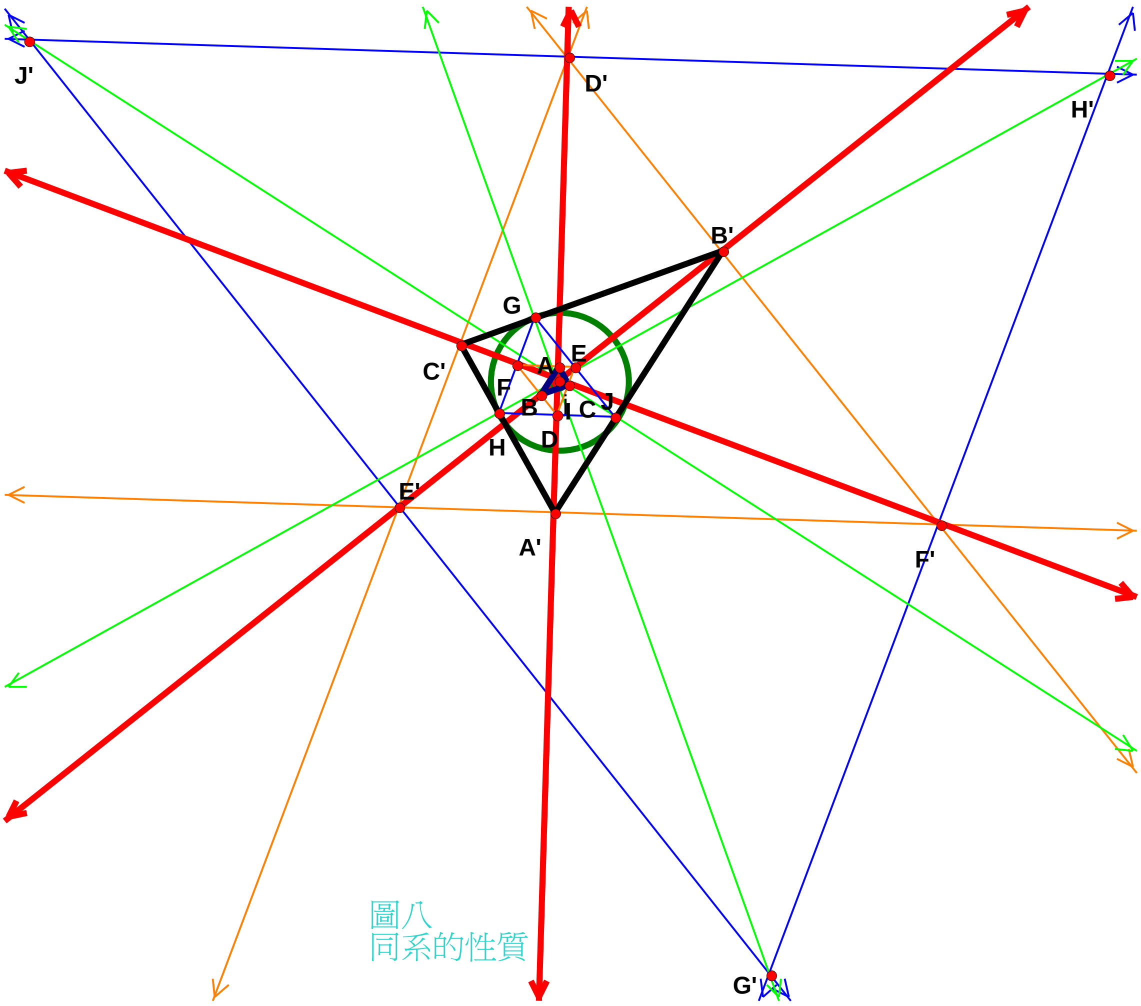
ΔAIF中 　$\overline{IA} = \overline{IF} \times \sin(\frac{1}{2}\angle B)$......(3)

由(1)(2)(3)得 $\overline{IA} = \overline{IA'} \times \sin(\frac{1}{2}\angle A) \times \sin(\frac{1}{2}\angle B) \times \sin(\frac{1}{2}\angle C)$

又$\Delta AIC \sim \Delta A'IC$

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \sin(\frac{1}{2}\angle A) \times \sin(\frac{1}{2}\angle B) \times \sin(\frac{1}{2}\angle C)$$

(3)兩相似三角形面積比等於對應邊的平方比



圖八
同系的性質

性質13：

設R_{ABC}爲 ΔABC 的外接圓半徑，R_{DEF}爲 ΔDEF 的外接圓半徑，
R_{GHJ}爲 ΔGHJ 的外接圓半徑，則(1) $R_{DEF}=2\times R_{ABC}$ ， $R_{GHJ}=2\times R_{DEF}$

$$(2) R_{A'B'C'}=\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)}\times R_{ABC}$$

證明：

(1) 由正弦定理得知

$$(\frac{\overline{BC}}{\sin A})/(\frac{\overline{EF}}{\sin D})=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\times\frac{\sin D}{\sin A}=\frac{2\times R_{ABC}}{2\times R_{DEF}}=\frac{R_{ABC}}{R_{DEF}}$$

$$\because \Delta BCI\sim\Delta FEI\quad (AA\text{相似})\ \therefore \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{EF}}}=\frac{\overline{\mathrm{IB}}}{\overline{\mathrm{IF}}}=\sin\angle\mathrm{IFB}=\sin(\frac{1}{2}\angle \mathrm{A})$$

$$\because \sin D=\sin(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)=\cos(\frac{1}{2}\angle A)$$

$$\sin A=\sin(2\times\frac{1}{2}\angle A)=2\times\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\cos(\frac{1}{2}\angle A)$$

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\times\frac{\sin D}{\sin A}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\frac{\cos(\frac{1}{2}\angle A)}{2\times\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\cos(\frac{1}{2}\angle A)}=\frac{1}{2}=\frac{R_{ABC}}{R_{DEF}}$$

餘同

$$(2)\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'\quad \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)\quad (\text{性質}12)$$

$$\therefore (\frac{\overline{AB}}{\sin C})/(\frac{\overline{A'B'}}{\sin C'})=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\times\frac{\sin C'}{\sin C}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)=\frac{R_{ABC}}{R_{A'B'C'}}$$

性質14：

設 O爲ΔABC的外心，P爲ΔDEF的外心，I爲ΔGHJ的外心，Q爲ΔA'B'C'的外心，則

(1) $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{IO}}$ O爲九點圓圓心

(2) P，O，I，Q 共線 $\overline{IO}:\overline{IQ}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$

證明：

(1) 作$\overline{PO}$，$\overline{\mathrm{OI}}$ (圖九)

$$\angle PLO=\angle PRO+\angle O'''OR=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B\ ......(1)$$

$$\angle TKV=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B=\angle PKO\ ......(2)$$

$$\angle OUI=\angle PKO=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B\quad (\overline{\mathrm{PR}}//\overline{\mathrm{IO''}}\ \text{同時垂直}\overline{\mathrm{DF}})......(3)$$

$$\angle OWU=\angle PLO=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B\ ......(4)$$

又$\Delta KRO\cong\Delta UO''O$ (ASA全等) $\therefore \overline{\mathrm{OK}}=\overline{\mathrm{OU}}$......(5)

由(1)(2)(3)(4)(5)得$\overline{OK}=\overline{OL}=\overline{OU}=\overline{OW}$

K、L、U、W共圓

$\overline{PL}=\overline{IW}$ $\quad\angle \mathrm{PLO}=\angle \mathrm{IWO}\quad$ $\overline{\mathrm{LO}}=\overline{\mathrm{WO}}$ $\quad\therefore \Delta \mathrm{POL}\cong \Delta \mathrm{IOW}$

$\therefore \overline{PO}=\overline{IO}$ 且 $\angle \mathrm{POL}=\angle \mathrm{WOI}$ $\quad\therefore$ P，O，I共線

(2) (圖十)

$\because \angle AOB=\angle A'QB'$ (外心性質) $\quad\angle \mathrm{OAB}=\angle \mathrm{QA'B'}\quad\therefore \Delta \mathrm{AOB}\sim \Delta \mathrm{A'QB'}$

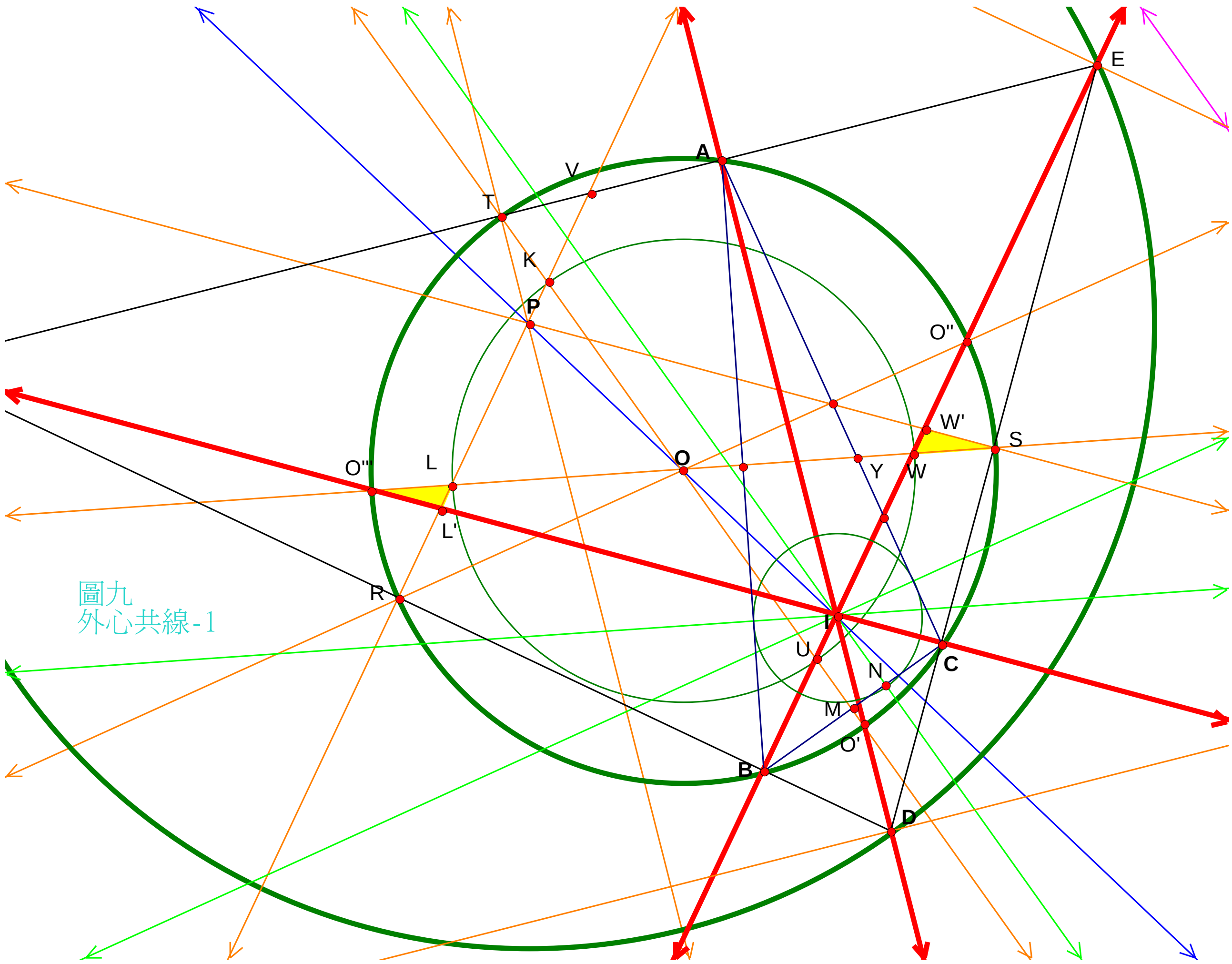
$\overline{AO}:\overline{A'Q}=\overline{AB}:\overline{A'B'}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$

$\because \Delta AIB\sim\Delta A'IB$ (AA相似)

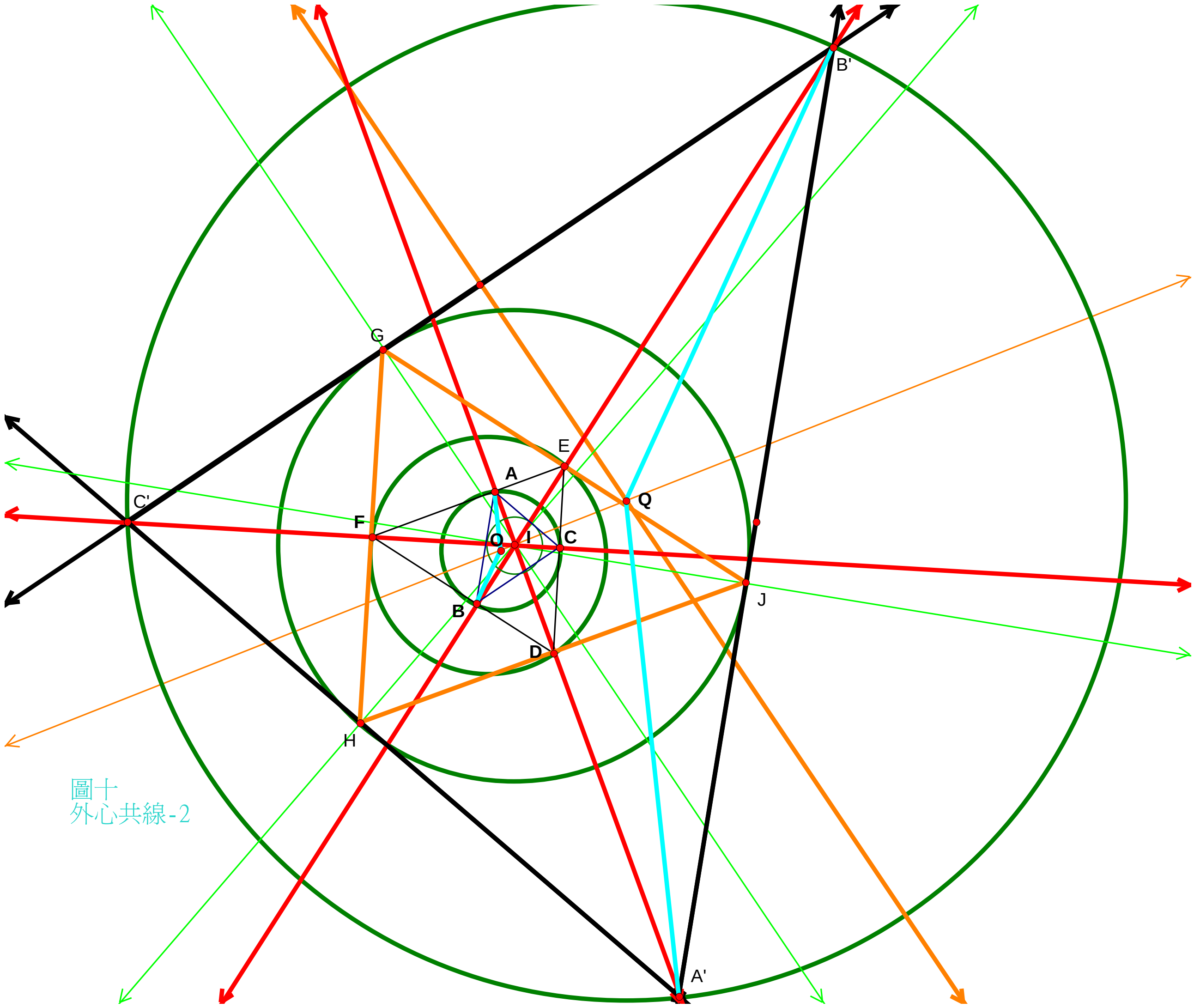
$\overline{AI}:\overline{A'I}=\overline{AB}:\overline{A'B'}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$

又$\angle OAI=\angle QA'I$ $\quad\therefore \Delta \mathrm{OAI}\sim \Delta \mathrm{QA'I}$ (SAS相似)

$\therefore \angle \mathrm{AIO}=\angle \mathrm{A'IQ}\quad\therefore$ O, I, Q 共線 $\quad$ 且 $\overline{\mathrm{IO}}:\overline{\mathrm{IQ}}=\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$



圖九
外心共線-1



圖十
外心共線-2

七、外心連線與尤拉線的關係

性質15：

設 O爲ΔABC的外心，P爲ΔDEF的外心，I爲ΔGHJ的外心，Q爲ΔA'B'C'的外心，

W爲ΔDEF的重心，K爲ΔGHJ的垂心 則

(1) 外心連線爲垂心類和外心類的尤拉線

(2) $\overline{\mathrm{IP}} = \overline{\mathrm{PK}} = 6\,\overline{\mathrm{OW}} = 3\overline{PW} = 2\overline{OP}$　P爲九點圓圓心

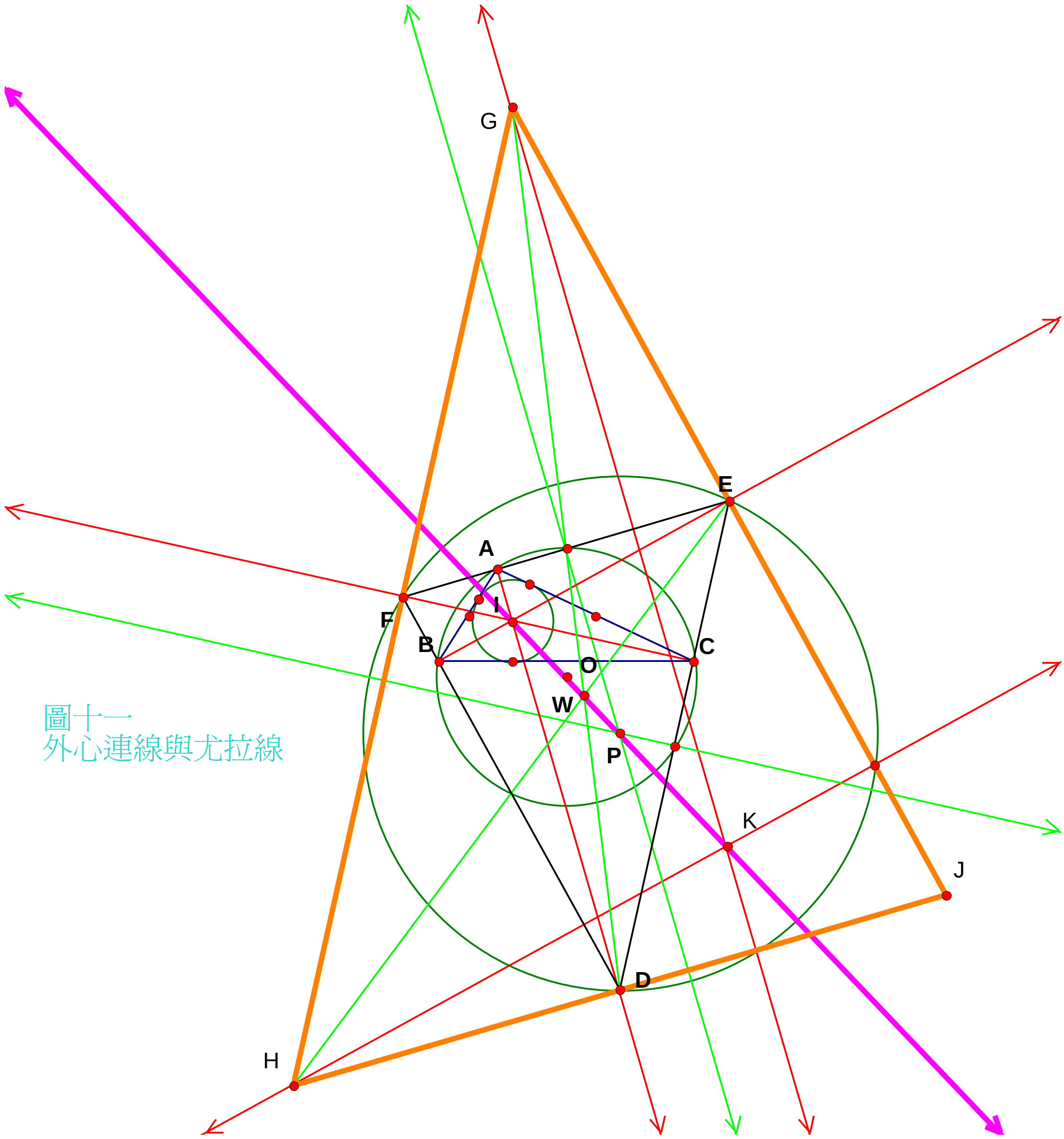
證明：(圖十一)

(1) I 爲 ΔDEF 的垂心，P 爲 ΔDEF的外心　性質14 得外心連線 爲ΔDEF的尤拉線

W在外心連線上　D, E, F 爲ΔGHJ的中點　∴ W爲ΔGHJ的重心

K爲垂心 ∴ 外心連線爲ΔGHJ的尤拉線

(2)由性質14　$\overline{\mathrm{IO}} = \overline{\mathrm{PO}}$　及尤拉線性質　得證



圖十一
外心連線與尤拉線

性質16：

(1) P爲 ΔDEF的外心 則圓P過 ΔGHJ三高垂足點 及三邊中點

(2) $\overline{DP} \perp \overline{BC}$， $\overline{\mathrm{DP}} // \overline{\mathrm{GI}} // \overline{\mathrm{BC}}$的中垂線且等分線段

證明：

(1)設圓P交 $\overline{HJ}$ 於D,M 則 $\overline{DM}$ 的的中垂線 $\overline{\mathrm{PT}}$ 必過圓心P

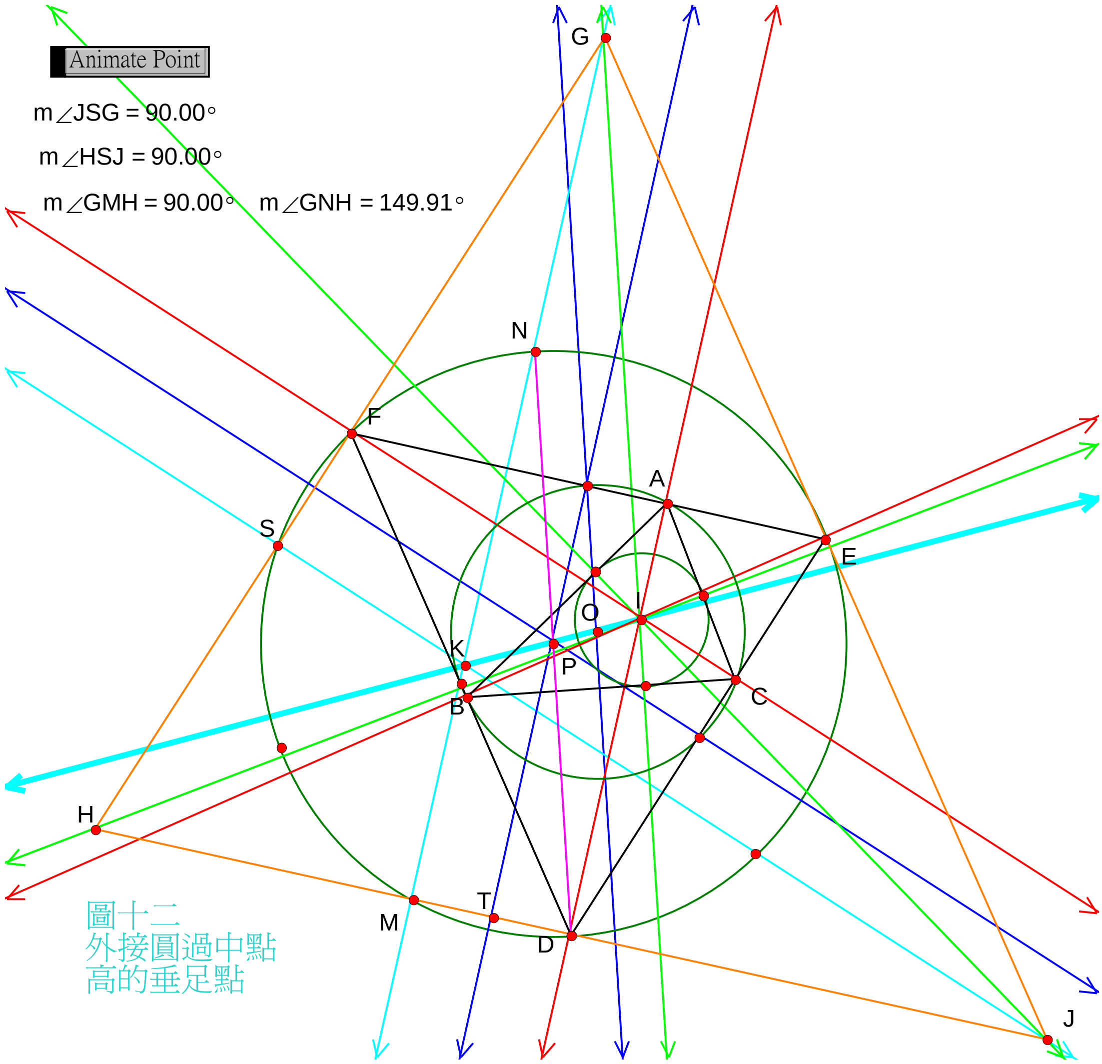
作$\overline{\mathrm{DP}}$交圓於N 則$\angle \mathrm{NMD} = 90°$ $\overline{\mathrm{MN}} // \overline{\mathrm{PT}} // \overline{\mathrm{AD}}$

作 $\overleftrightarrow{\mathrm{IP}}$ 交 $\overline{\mathrm{NM}}$ 於K 則 $\overline{\mathrm{IP}} = \overline{\mathrm{PK}}$

由性質15得 K 爲垂心 又$\angle \mathrm{NMD} = 90° \therefore \overleftrightarrow{\mathrm{NM}}$爲高過G點 得證

(2) $\angle \mathrm{PDI} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{C} - \angle \mathrm{NDF} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{C} - \angle \mathrm{NEF} = \frac{1}{2}(\angle \mathrm{C} - \angle \mathrm{B}) = \angle \mathrm{AIG}$ $\therefore \overline{\mathrm{DP}} // \overline{\mathrm{GI}}$

又性質14 $\overline{\mathrm{IO}} = \overline{\mathrm{PO}}$ $\therefore$線段被平分 得證



圖十二
外接圓過中點
高的垂足點

伍、討論與應用

一、尋找消失的三角形

(一) 已知底邊 $\overline{BC}$ 的位置及長度，及內心 I 的位置

求作：原先的三角形ABC

作法：

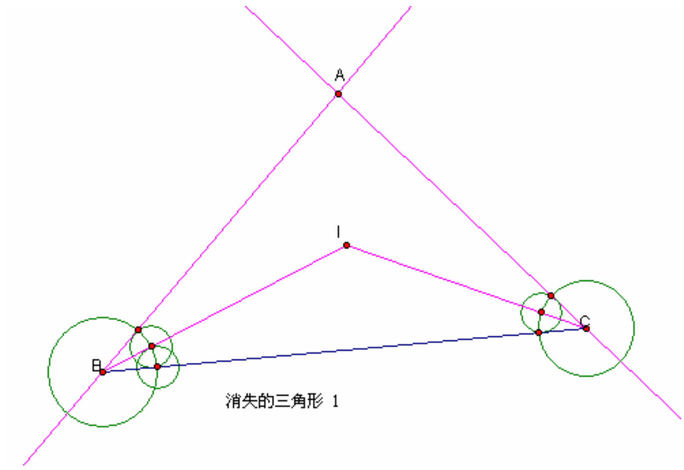
(1)作 $\overline{BI}$ ， $\overline{CI}$

(2)作 $\angle B = 2\angle IBC$

$\angle C = 2\angle ICB$

交 $\angle B$ 的邊於A

(3)則 ΔABC 即為所求



(二)已知底邊 $\overline{BC}$ 中的片斷 $\overline{BE}$ ，及內心 I 的位置

求作：原先的三角形ABC

作法：

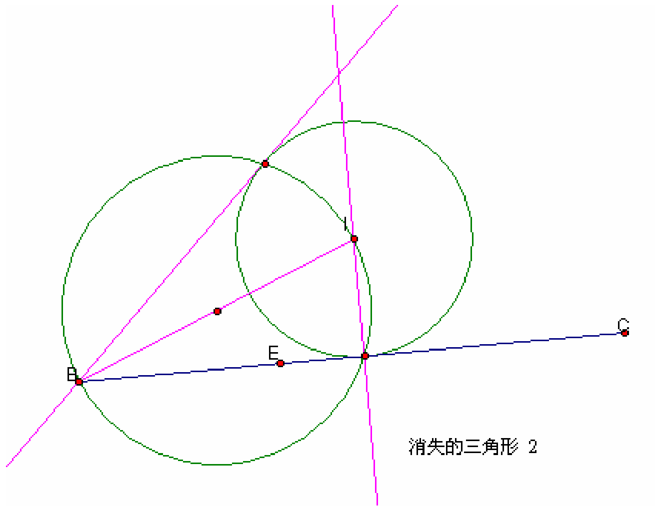
(1)作內切圓圓I，延長 $\overleftrightarrow{BE}$

(2)過B點作圓I的另一切線 $\overleftrightarrow{BA}$

(3)**在適當的位置固定A點**

作圓I的另一條切線交 $\overleftrightarrow{BE}$ 於C

(4)**則** ΔABC **可作出，但不唯一**。



(三) 已知底邊 $\overline{BC}$ 中的片段 $\overline{BE}$, 及內心 I 的位置, $\angle A = a$ 度

求作：原先的三角形ABC

作法：

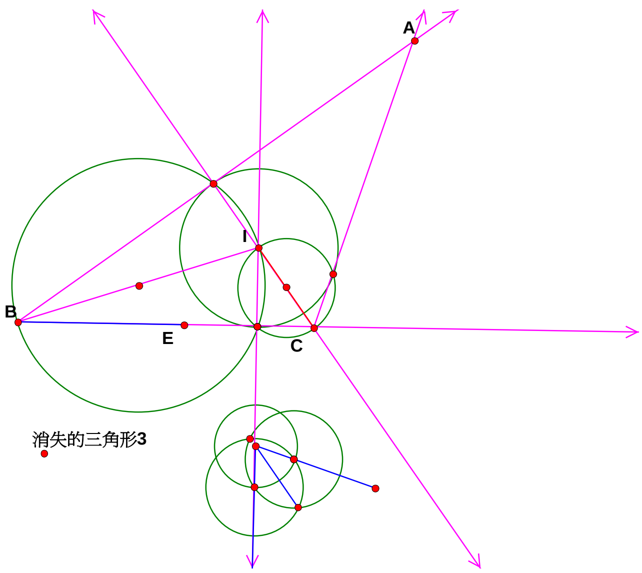
(1) 延長 $\overleftrightarrow{BE}$ ，作內切圓圓I。

(2)過B點作圓I的另一切線 $\overleftrightarrow{BA}$

(3)作 $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ 交 $\overleftrightarrow{BE}$ 於C

(4)過C作圓I的切線交 $\angle B$ 的邊長於A。

(5)則 ΔABC 即為所求。



證明：

已知 I 為內心 $\angle IBE=\frac{1}{2}\angle B$　由全等性質知 $\angle IBA=\frac{1}{2}\angle B$

$\angle BIC=\angle IBA+\angle A+\angle ICA$ (外角性質)

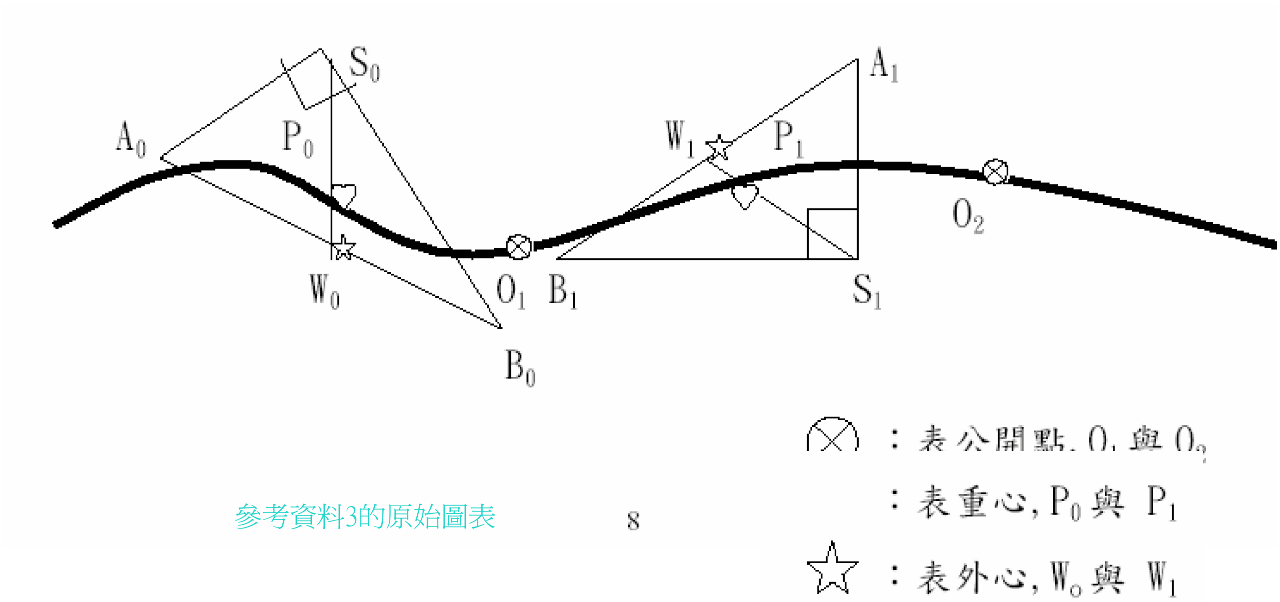
$=90°+\frac{1}{2}\angle A$　(作圖)

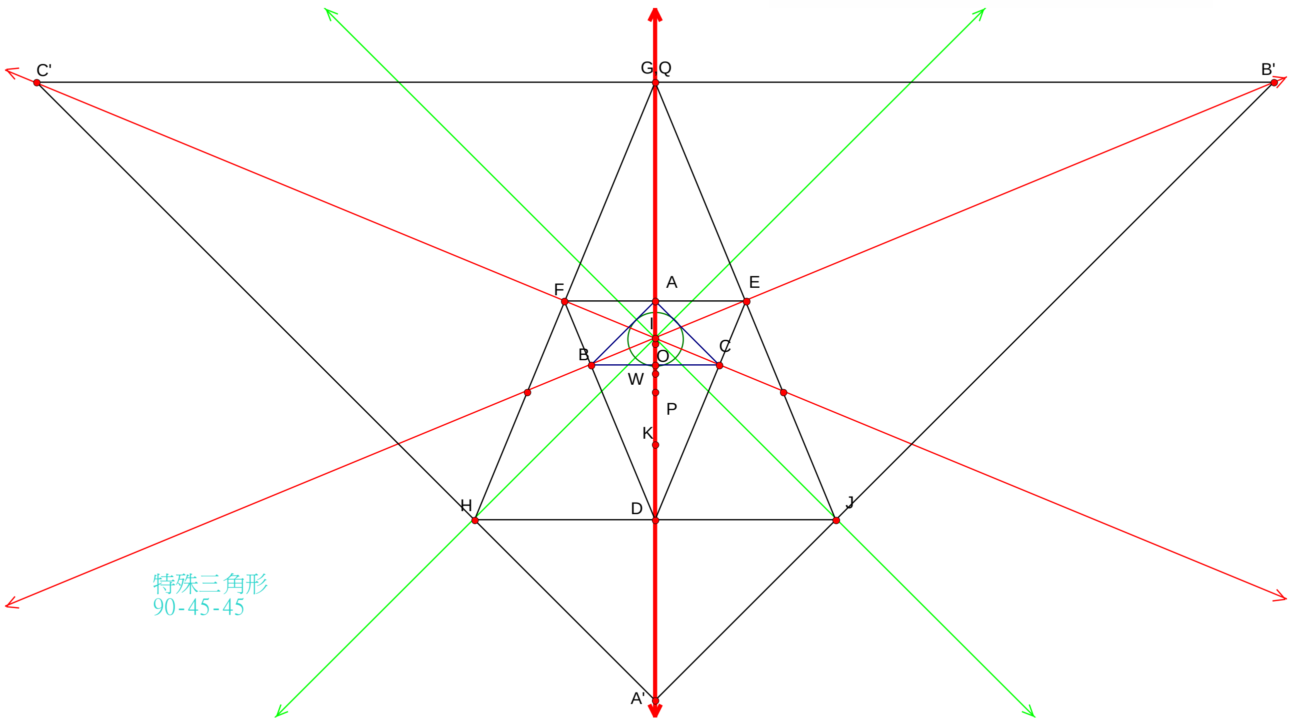
$\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A+\angle ICA=90°$ ，$\therefore \angle ICA=\frac{1}{2}\angle C$　I為內心無誤

二、密碼學的應用

討論1

由資料3得直角三角形垂心重心外心可作為密碼
那特殊三角形的外心連線是否亦可作為密碼





討論2

是否可利用外接圓通過垂心、外心系的三邊中點、三高的垂足點作為密碼

陸、結論

(一)循環性：若I爲內心，由垂直作法所形成的三角形

(1)I會依次爲新三角形的內心→垂心→外心且循環

(2)內心、垂心系的頂點皆在角平分線上，

外心系的在內切圓的切點與內心的連線上。

(3)內心系的外接圓通過垂心系的三邊中點、三高的垂足點

垂心系的外接圓通過外心系的三邊中點、三高的垂足點

外心系的外接圓與內心系的三邊相切

(二)內角的角度只有兩種：

(1)當內角等於 $\angle A$ ，$\angle B$，$\angle C$ 時，I爲此種三角形的內心

(2)當內角等於 $\angle D = 90° - \frac{1}{2}\angle A$　$\angle E = 90° - \frac{1}{2}\angle B$　$\angle F = 90° - \frac{1}{2}\angle C$

時，會被分角線、內切圓的切點與內心的連線，分割成

$\angle D = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$　$\angle E = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$　$\angle F = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$

I爲此種的三角形的垂心或外心，爲銳角或直角三角形。

(三)邊長關係：

(1)同系的三角形是以I爲中心，$\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$爲比值的反向伸縮變換

面積比爲$\sin^2(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin^2(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin^2(\frac{1}{2}\angle C)$

(2)在同一個循環裏，外心系的三角形是垂心系放大2倍。

(3)外心系的邊長是垂心系的2倍。但I爲垂心的三角形 ΔDEF

是I爲內心的三角形 ΔABC 邊長關係如下：

$\overline{DE} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin(\frac{1}{2}\angle C)}$ ，$\overline{EF} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin(\frac{1}{2}\angle A)}$ ，$\overline{DF} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin(\frac{1}{2}\angle B)}$

不同循環再依(1)變換。

(四)外心、外接圓關係：

(1)在同一個循環裏，外接圓的半徑關係：

外心系是垂心系的2倍，垂心系是內心系的2倍。

(2)所有的外心與I共線且同一循環的各個三角形的外心等距

不同循環的三角形的外心之距離間的比例

亦爲 $\sin(\frac{1}{2}\angle A)\times\sin(\frac{1}{2}\angle B)\times\sin(\frac{1}{2}\angle C)$ 。

(五)與尤拉線的關係：

(1)外心連線爲垂心系和外心系的尤拉線

(2)等腰三角形的外心連線在頂角平分線上

(3)距離：

外心系的外心到垂心系的外心=垂心系的外心到外心系的垂心
=6倍內心系的外心到垂心系的重心=3倍垂心系的外心到重心的距離

柒、參考資料及其他

1、南一版第二冊第一章幾何圖形的性質、仁林版第二冊第三章幾何圖形的性質

2、世部貞市郎　幾何學辭典　九章出版社　民國80年四月三版。

3、王旭正 林雅淇 快速金鑰回復之三角形三心爲定位廣播策略研究。
2005/4/28 取自
http://dsns.csie.nctu.edu.tw/ssp/docs/Secure%20Broadcasting%20in%20Large%20Networks.pdf

評　　語

030418　內心、垂心、外心是 3 位循環節的循環小數？！

1. 作品名稱不太妥。
2. 善用所學的幾何知識對三角形的內、垂、外心做一些有趣的探討，給出完整的証明，簡潔清晰。
3. 講解清楚、條理分明，\]是份好作品。