中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030416

內接相似三角形的尺規作圖

學校名稱： 臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 郭至中	李進福
國二 秦睿謙	劉晉宏
國二 詹逸傑	
國二 郭名旗	

關 鍵 詞：相似三角形、尺規作圖法

摘要

本研究探討了在任一三角形內，做一內接相似三角形的方法，與存在範圍的討論，並依照研究的內容與過程，分爲四大主題：

主題一、給定邊上一點作內接相似三角形

經由相關資料的協助與我們自己的研究，本研究提供了三種作圖法：垂足法、軌跡法、旋轉法。

主題二、內接相似三角形之存在範圍

給定邊上的點，並不一定可做出內接相似三角形。因此在邊上有「臨界點」的存在。並依照不同的條件分做二十六種狀況討論。

主題三、給定形內一點作內接相似三角形

將給定的點在邊上移動時，所做出三角形的邊形成了一個拋物線的軌跡。經由探索拋物線的性質，完成了給定三角形內一點，作過此點的內接相似三角形。並且運用主題二的結果將三角形內分爲四區，由點所在的位置不同，最多可做出兩個內接相似三角形。

主題四、最小的內接相似三角形作圖

利用主題三的研究結果，我們也提出了最小內接相似三角形的尺規作圖法。

由以上四個主題的研究，我們完成了給定邊上和形內一點內接相似三角形的尺規作圖法和可以作圖的範圍，以及最小內接相似三角形的尺規作圖法。

壹、 研究動機

老師在課堂上曾說過：「在一三角形中，每邊中點連成的三角形，必爲原三角形的內接且相似的三角形。」可是我們感到疑惑，此三角形是否爲唯一的內接相似三角形，如果不是，那要如何做才能找出其他內接相似三角形呢？而如果要在三角形內找到最小的內接相似三角形又要如何作呢？我們就如此抱著疑問展開了一路的研究之路。

貳、 研究目的

1. 尋找如何在任意三角形內做內接相似三角形。
2. 判斷給定邊上和形內一點時可否作出內接相似三角形之方法。
3. 尋找三角形內最小內接相似三角形的作法。

參、 研究器材

電腦（GSP 繪圖軟體），紙，筆，頭腦

肆、 研究與討論過程

我們猜測「過三角形任意邊上，必有可形成至少一個內接相似三角形」，因此，我們便從圖書館找看看有沒有關於這個主題的資料。我們找到在第 37 屆高中組科展第二名中有類似的題目，把這一件作品的結論應用到我們的問題，並且利用 GSP 觀察其幾何的性質。

我們也試著用不同的方法來做出三角形內的內接相似三角形，對於這個問題我們想到了三種方法完成。並且隨後觀察圖形的現象，發現了內接相似三角形並不一定存在，而且所作出的三角形邊的軌跡形成一條拋物線。因此，我們繼續研究和尋找相關的資料，解決我們心

中的疑問。以下便是我們研究的過程：

【主題一】內接相似三角形的作圖

問題：

在△ABC 的 $\overline{AB}$ 上取一點 D，作出△DEF 使得，D 在 $\overline{AB}$ 上，E 在 $\overline{AC}$ 上，F 在 $\overline{BC}$ 上，且△ABC～△FED。

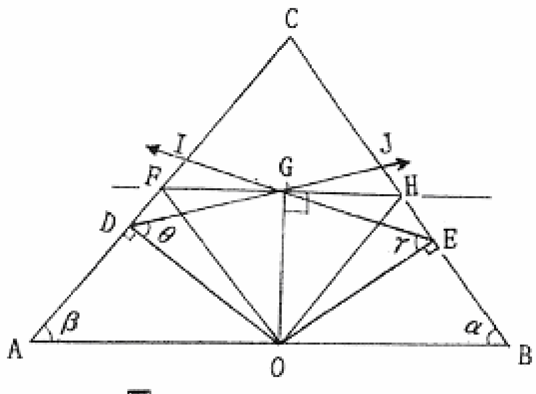
第 37 屆高中組第二名的科展作品「如何在三角形內找一個含給定角且具有最小面積的內接三角形」(1-2 頁)，其中提到了給定角作內接三角形的作圖法，作圖方法內容如下：

（一）定義：在我們的研究內容中，為了配合我們的研究，我們以兩個條件定義內接三角形。

1. 內接三角形的三頂點需分別在原三角形的三邊上
2. 內接三角形的任一邊和原三角形的任一邊不重合

（二）任意三角形內接任一三角形之探討：

1. 如何做出任一三角形之內接任一三角形：



圖一

(1)作法：參考圖一

a.在 $\overline{AB}$ 上一點 O

b.過 O 作 $\overline{OD}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 D、$\overline{OE}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 E

c.過 D、E 作 $\overrightarrow{DJ}$ 、$\overrightarrow{EI}$ 分別與 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 交於 J、I 兩點，且 $\angle JDO=\theta$，$\angle JDO=\gamma$，

$\overrightarrow{DJ}$ 、$\overrightarrow{EI}$ 交於 G

d.連接 O、G，過 G 作 $\overleftrightarrow{FH}$ 垂直且交 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 於 F、H

e.連接 $\overline{OF}$ 、$\overline{OH}$ ，則△OFH 即為以 θ 、γ 、$\pi-\theta-\gamma$ 為三內角的內接三角形

(2)證明：參考圖一

a.在四邊形 OGHE 中、因$\angle OGH = \angle OEH = \frac{\pi}{2}$ => $\angle OGH$ 與$\angle OEH$ 互補=>O、F、H、E 四點共圓=>$\angle OEG = \angle OHG = \gamma$

b.同理，O、G、F、D 四點共圓=>$\angle ODG = \angle OFG = \theta$

c.故△OFH 即一以θ 、γ、$\pi - \theta - \gamma$爲三內角的內接三角形

作法一（垂足法）：

我們將他們作品任意指定的兩個角，改爲大三角形的其中兩內角，利用他們的研究成果，作出符合我們題目的內接相似三角形。我們的作法如下：

【作法】:

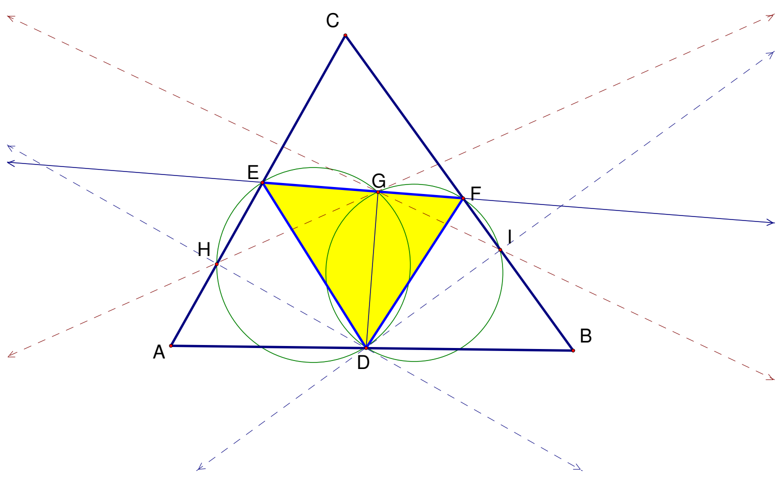
如【圖 1-2】

1.作$\overleftrightarrow{DH} \perp \overline{AC}$ ，$\overleftrightarrow{DI} \perp \overline{BC}$ ，分別交$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 於 H、I。

2.作∠DHG=∠CBA, ∠DIG=∠CAB，且$\overleftrightarrow{HG}$ 、$\overleftrightarrow{IG}$ 相交於 G。

3.過 G 作$\overline{EF} \perp \overline{DG}$ ，分別交$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 於 E、F。

4.則△ABC～△FED



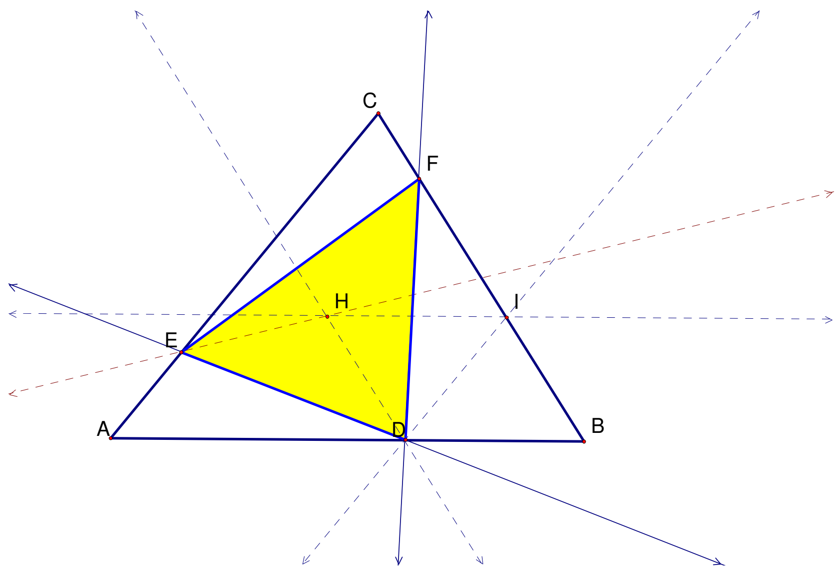
【圖 1-2】

作法二（旋轉法）：

我們想到只要先在兩邊上任意的點上，作出一個相似三角形，再將三角形隨著其中一個頂點旋轉並放大，使得原本不在邊上的頂點到原三角形邊上即可求出。

如【圖 1-3】先以 D 爲一頂點，並在$\overline{BC}$ 上任取一點 I，作出一個相似△DIH 。接著以 D

爲旋轉和放大中心，將△DIH 旋轉放大至符合條件之處，因爲旋轉時∠D 的角度固定，點 H 將平移至點 E，點 I 則平移至點 F，此時∠EDF=∠HDI，只要掌握的移動方向，找到與 $\overline{AC}$ 的交點即可。



【圖 1-3】

【作法】:

1. 分別在 $\overline{BC}$ 上取點 I，使得 $\overleftrightarrow{DI}//\overleftrightarrow{AC}$ 。
2. 作 $\overleftrightarrow{IH}$ 使得∠HID=∠A、作 $\overleftrightarrow{DH}$ 使得∠HDI=∠C，且 $\overleftrightarrow{IH}$ 相交 $\overleftrightarrow{DH}$ 於 H。
3. 作∠DHE =∠DIC，且 $\overleftrightarrow{EH}$ 相交 $\overline{AC}$ 於 E。
4. 作∠EDF=∠HDI，且 $\overleftrightarrow{DF}$ 相交 $\overline{BC}$ 於 F。
5. 則△FED 即爲所求。

【證明】:

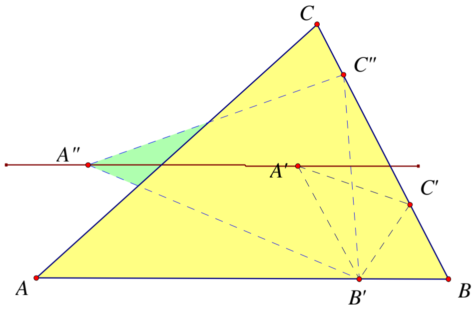
∵∠IDH=∠FDE， ∠DHE=∠DIF∴△DHE～△DIF

∵∠EDF=∠HDI， $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DH}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{DI}} \Rightarrow \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DI}}$ ∴△ABC～△IHD～△FED (SAS)

作法三（軌跡法）：

我們在△ABC 內部作一個相似三角形△A'B'C'，且 B'、C' 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 上。將 B' 固定不動，拖曳 C' 觀察 A' 的軌跡，發現 A' 的軌跡竟為一條直線。

在【圖 1-4】中，我們知道相似三角形的邊長成比例，故 $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{A''B''}}{\overline{B''C''}}$=r 且

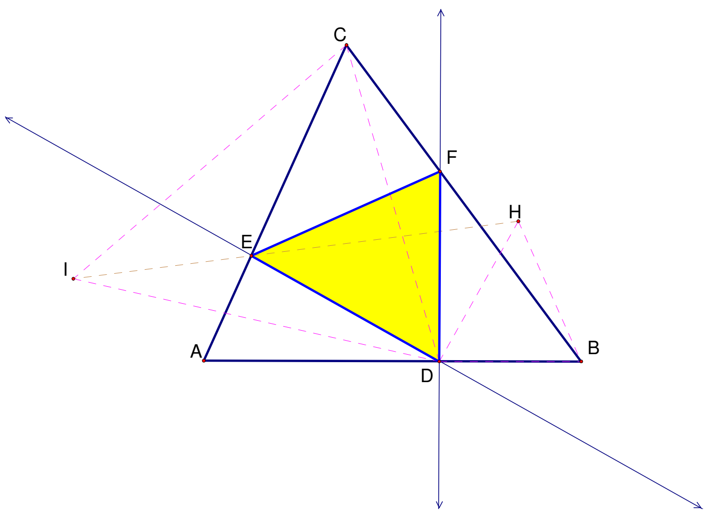


【圖 1-4】

∠A'B'C'=∠A"B'C"=∠B。因為 C' 沿著 $\overline{BC}$ 移動，故 A' 的軌跡即將 $\overline{BC}$ 上的每一點，以 B' 為中心縮放 r 倍之後，再旋轉∠B 的度數，故將一條直線縮放再旋轉之後，依然是一條直線。因此只要能找出這一條軌跡，軌跡與 $\overline{CA}$ 的交點即為內接三角形的頂點，我們便利用這個特性作出我們需要的圖形。

【作法】:（如【圖 1-5】）

1. 作△BHD～△ABC 且點 C,H 在相對於 $\overline{AB}$ 的同側。
2. 作△CID～△ABC 且點 A,I 在相對於 $\overline{BC}$ 的同側。
3. 連接 $\overline{IH}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E。
4. ∠EDF=∠C，F 在 $\overline{BC}$ 上。
5. △FED 即為所求。



【圖 1-5】

【證明】：

∵△IDC～△HDB∴ $\frac{\overline{ID}}{\overline{HD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$ ，∵∠IDH=∠CDB， $\frac{\overline{ID}}{\overline{HD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$

∴△IDH～△CDB，∠EID=∠FCD。又∠IDE=∠CDF∴△IDE～△CDF

故 $\frac{\overline{ED}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{ID}}{\overline{CD}}$ ，△ABC～△CID～△FED (SAS)

雖然我們有三種方法可以解決我們的問題，可是我們比較好奇的是：用不同方法求出的內接相似三角形是否不同。於是我們藉由 GSP 的驗證，發現所做出的三角形皆爲同一個，並且證明了我們的發現：

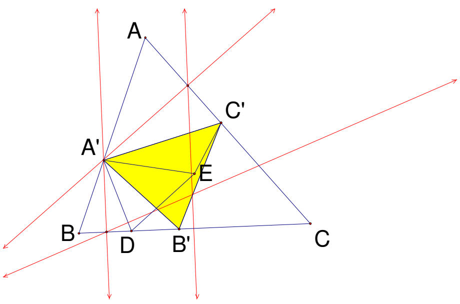
三種作圖法皆作出相同的相似三角形

一、垂足法和旋轉法：

首先做出旋轉法所需的未內接相似三角形 A'DE ，再用垂足法做出內接相似三角形 A'B'C' ，連接 $\overline{C'E}$ 得知，若旋轉法做出的內接相似三角形與垂足法做出的完全相同，則 $\angle C'EA' = \angle A'DC$ (∵旋轉法是利用 ∠A'DC 旋轉 $\overleftrightarrow{A'E}$ 交 $\overline{AC}$ 於 C')。

已知△A'DE～△A'B'C' ∴ $\overline{A'D} : \overline{A'E} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$ ，又 $\angle EA'D = \angle C'A'B'$

∴ $\angle C'A'E = \angle B'A'D$ ，∵ △A'DB'～△A'EC' ∴ $\angle C'EA' = \angle B'DA'$ (SAS) #得證



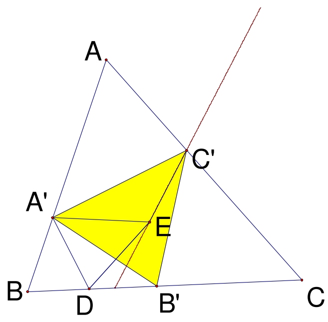
【圖 1-6】

二、軌跡法和旋轉法

首先做出旋轉法所需的未內接相似三角形 A'DE ，再用軌跡法做出內接相似三角形 A′B′C′ ，連接 $\overline{C'E}$ 得知，若旋轉法做出的內接相似三角形與軌跡法做出的完全相同，則 ∠C'EA'=∠A'DC (∵旋轉法是利用 ∠A'DC 旋轉 $\overleftrightarrow{A'E}$ 交 $\overline{AC}$ 於 C')。

已知△A'DE～△A'B'C' ∴ $\overline{A'D} : \overline{A'E} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$ ，又 $\angle EA'D = \angle C'A'B'$

∴ $\angle C'A'E = \angle B'A'D$ ，∵ △A'DB'～△A'EC' ∴ $\angle C'EA' = \angle B'DA'$ (SAS) #得證



【圖 1-7】

三、結論

在△ABC 中給定一點，求過此點的內接相似三角形的三種作圖法，所做出的內接相似三角形皆爲同一個。

【主題二】利用軌跡法探討三角形存在範圍的觀察與研究

在研究過程中，我們發現給定邊上任一點，不一定可以做出內接相似三角形。有的時候，作出的三角形其頂點會在原三角形邊的延長線上。因此，內接相似三角形的存在有一定的範圍在，所以我們研究了在給定邊上一點時的相關位置，看看在何種範圍之下，內接相似三角形才會存在。另外，內接相似三角形頂點所在的位置不同，其結果也不相同，所以我們依照△A'B'C'各點所在邊的不同，分出六種狀況來討論。首先，我們先定義何謂內接相似三角形，並且爲了方便起見，我們訂定三角形的三邊長分別爲 $\overline{AB}=c$ 、 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{AC}=b$ 。

定義：

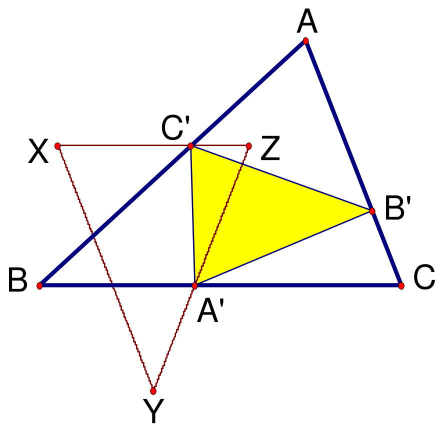
△A' B' C'爲△ABC 的內接三角形，且△A' B' C'～△ABC，則△A' B' C'即爲△ABC 的內接相似三角形。

狀況一：

A'在 $\overline{BC}$ 上，B'在 $\overline{AC}$ 上，C'在 $\overline{AB}$ 上。

在 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 上各取一點 A'、B'，作△A'B'C'～△ABC。則將 B'沿著△ABC 的邊移動時，C'所形成的軌跡爲△XYZ。

$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點,即爲內接相似三角形頂點的位置。故當 $\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 有交點時，內接相似三角形存在。



【圖 2-1-1】

如【圖 2-1-1】所示，當 A'向 B 移動時，$\overline{XZ}$ 向上平移；當 A'向 C 移動時，$\overline{XZ}$ 向下平移。然而，$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 的相交情況，會因為這兩條線段的長短關係有所不同。當 $\overline{XZ} \geq \overline{AB}$ 時，移動 A'使得 $\overline{XZ}$ 往上移動至兩線段相交的臨界時，此時 A 點在 $\overline{XZ}$ 上；移動 A'使得 $\overline{XZ}$ 往下移動至兩線段相交的臨界時，此時 B 點在 $\overline{XZ}$ 上。若 $\overline{XZ} \leq \overline{AB}$，移動 A'使得 $\overline{XZ}$ 往上移動至兩線段相交的臨界時，此時 Z 點在 $\overline{AB}$ 上；移動 A'使得 $\overline{XZ}$ 往下移動至兩線段相交的臨界時，此時 X 點在 $\overline{AB}$ 上。

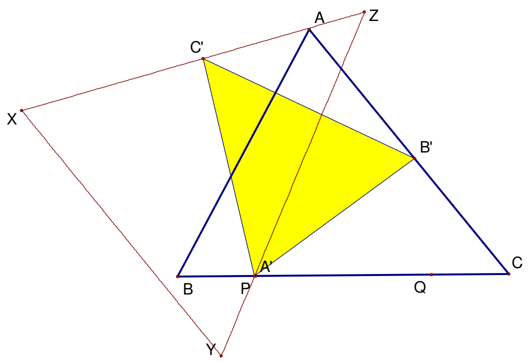
因此我們有必要分做兩種情況討論，且我們發現的 $\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 關係和 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的長度關係有關。因此（狀況一）又分成(a) $\overline{AC} \geq \overline{AB}$ 和(b) $\overline{AC} \leq \overline{AB}$ 兩種情形：

$$\because \frac{\overline{XZ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}，\overline{XZ} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} \therefore \overline{XZ} \geq \overline{AB} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} \geq \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 \geq \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} \geq \overline{AB}。$$

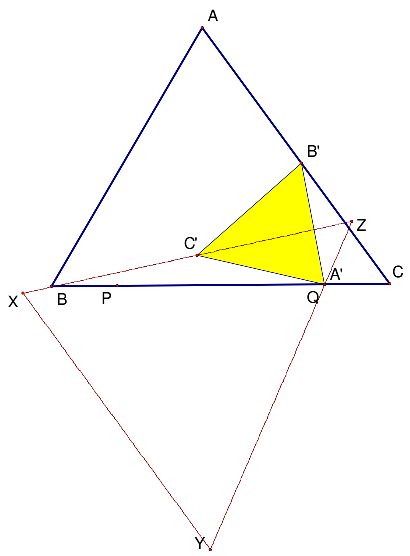
$$\left(\because \overline{AC}>0，\overline{AB}>0\right) \text{同理 } \overline{XZ} \leq \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} \leq \overline{AB}。$$

狀況一之一($\overline{AC} \geq \overline{AB}$)

假設 $\overline{BC}$ 上一點 P，使 A'點在 P 上時，A 點剛好在 $\overline{XZ}$ 上。當 $\overline{BP} > \overline{BA'}$ 時，$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 無交點，則無法做內接相似三角形。(如【圖 2-1-2】)



【圖 2-1-2】



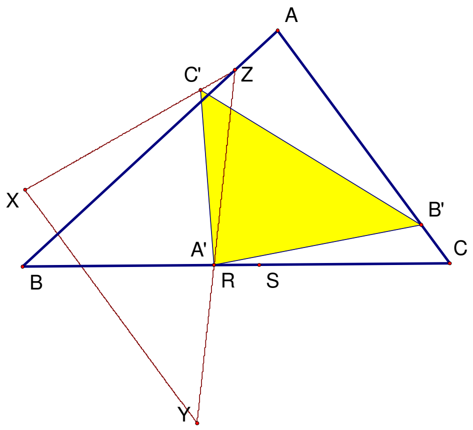
【圖 2-1-3】

假設 $\overline{BC}$ 上一點 Q，使 A'點在 Q 上時，B 點剛好在 $\overline{XZ}$ 上。當 $\overline{CQ} > \overline{CA'}$ 時，$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 無

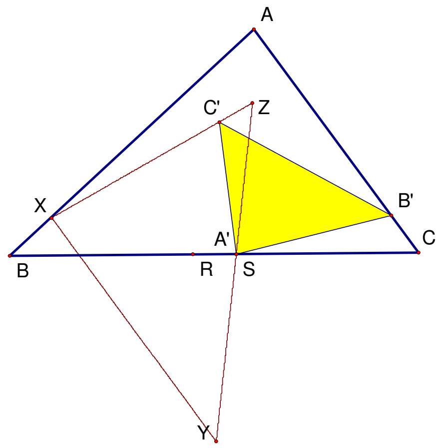
交點，則無法做內接相似三角形。(如【圖 2-1-3】)

狀況一之二($\overline{AC} \le \overline{AB}$)

假設 $\overline{BC}$ 上一點 R，使 A' 點在 R 上時，Z 點剛好在 $\overline{AB}$ 上。當 $\overline{RB} > \overline{A'B}$ 時，$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 無交點，則無法做內接相似三角形。(如【圖 2-1-4】)



【圖 2-1-4】



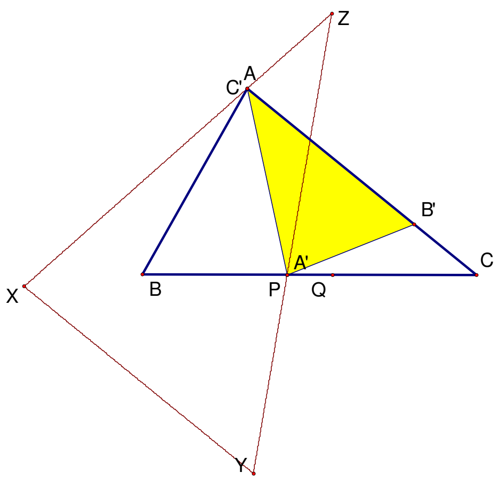
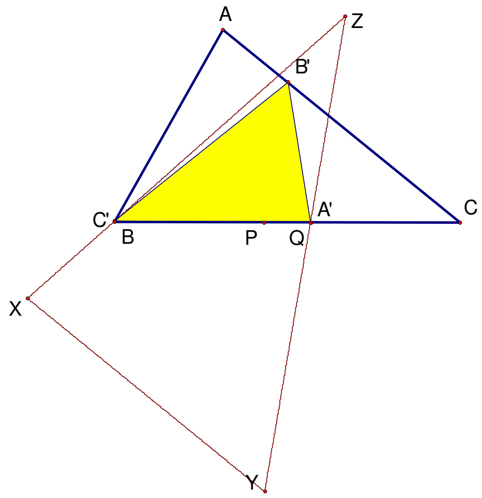
【圖 2-1-5】

假設 $\overline{BC}$ 上一點 S，使 A' 點在 S 上時，X 點剛好在 $\overline{AB}$ 上。當 $\overline{SC} > \overline{A'C}$ 時，$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 無交點，則無法做內接相似三角形。(如【圖 2-1-5】)

我們把 P,Q,R,S 稱作 A' 的『臨界點』，若要作出內接相似三角形，則 A' 點必須符合

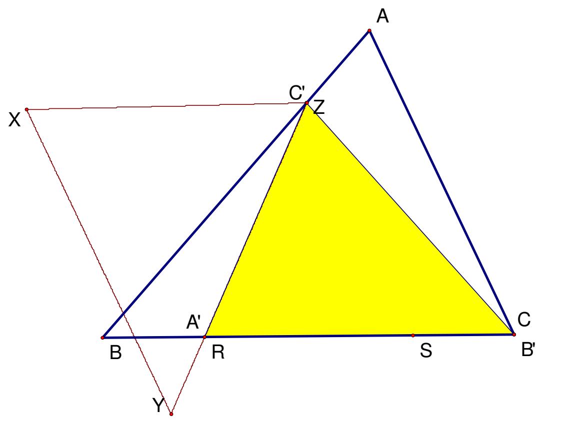
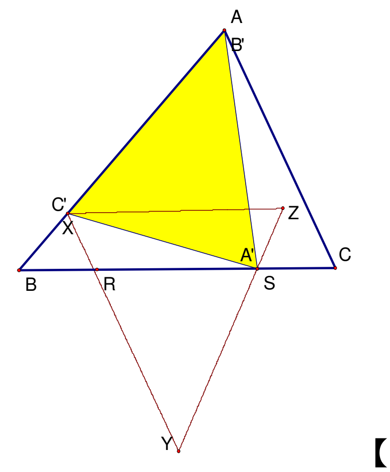
$\overline{PC} \ge \overline{A'C} \ge \overline{QC}$ 或 $\overline{RC} \ge \overline{A'C} \ge \overline{SC}$，接著討論在這情況下三角形的臨界點位置。

(a) $\overline{AC} \ge \overline{BC}$ ：

 【圖 2-1-6】	 【圖 2-1-7】
(1)當 A' 點在 P 的位置時，做出的內接相似三角形 $\triangle A'B'C'$，且 C' 的軌跡：$\triangle XYZ$ $\angle C = \angle C'$，$\overline{AP} = \overline{PC}$，$\overline{PC} = \dfrac{b}{2}\sec C$。當 $\angle C$	(2)當 A' 點在 Q 的位置時，做出的內接相似三角形 $\triangle A'B'C'$，且 C' 的軌跡：$\triangle XYZ$ $\angle C = \angle C'$，$\overline{B'C'} = \dfrac{a}{2}\sec C$，$\dfrac{\overline{A'C'}}{b} = \dfrac{\overline{B'C'}}{a}$，

$>\angle A$ 時，P 點即爲 B 點。	$\frac{\overline{A'C'}}{b}=\frac{\sec C}{2}$，$\overline{QB}=\frac{b}{2}\sec C$。當 $\angle C>\angle A$ 時，Q 點即爲 C 點。

$(b)\ \overline{AC}\le\overline{AB}$ ：

 【圖 2-1-8】	 【圖 2-1-9】
(1)當 A' 點在 R 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 C'的軌跡：△XYZ $\angle B=\angle B'$，$\overline{B'C'}=\frac{a}{2}\sec B$，$\frac{\overline{A'B'}}{c}=\frac{\overline{B'C'}}{a}$，$\frac{\overline{A'B'}}{c}=\frac{\sec B}{2}$，$\overline{RC}=\frac{c}{2}\sec B$。當 $\angle B>\angle A$ 時，R 點即爲 B 點。	(2)當 A' 點在 S 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 C'的軌跡：△XYZ $\angle B=\angle B'$，$\overline{AS}=\overline{BS}$，$\overline{SB}=\frac{\overline{AB}}{2}\sec B$，當 $\angle B>\angle A$ 時。S 點即爲 C 點。

結論：當 $\overline{AC}\ge\overline{AB}$ 時：① $\angle C\le\angle A$，則 $\overline{PC}=\frac{b}{2}\sec C$，$\overline{QB}=\frac{b}{2}\sec C$。

② $\angle C>\angle A$，則 $\overline{PC}=a$，$\overline{QB}=a$。

當 $\overline{AC}\le\overline{AB}$ 時：① $\angle B\le\angle A$，$\overline{RC}=\frac{c}{2}\sec B$，$\overline{SB}=\frac{c}{2}\sec B$。

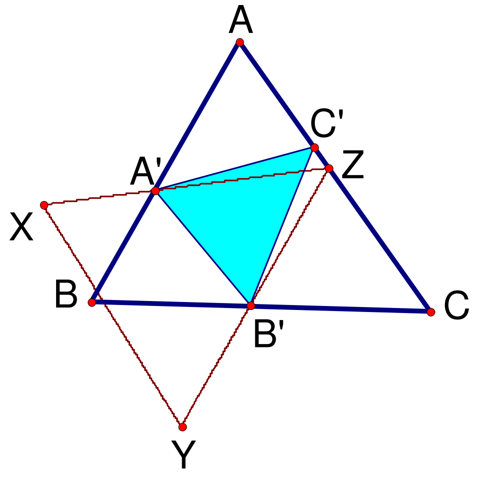
② $\angle B>\angle A$，則 $\overline{RC}=a$，$\overline{SB}=a$。

狀況二：

A'在$\overline{AB}$上，B'在$\overline{BC}$上，C'在$\overline{AC}$上

在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上各取一點B'、C'，作$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$。則將C'沿著$\triangle ABC$的邊移動時，A'所形成的軌跡爲$\triangle XYZ$。

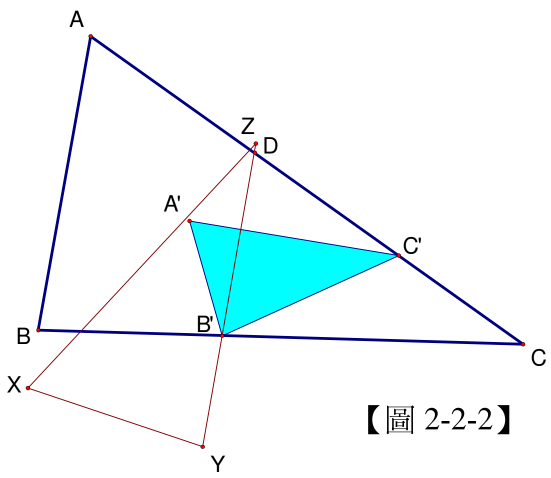
$\overline{XZ}$與$\overline{AB}$的交點，即爲內接相似三角形頂點的位置。故當$\overline{XZ}$與$\overline{AB}$有交點時，內接相似三角形存在。



【圖 2-2-1】

此種狀況下，我們發現 Z 點固定在$\overline{AC}$上移動，其證明過程如下：

> 如【圖 2-2-2】所示，假設 Z 不在$\overline{AC}$上且$\overline{YZ}$交$\overline{AC}$於 D 假設$\overline{YZ}$交$\overline{AC}$於D 。∵
>
> $\triangle ABC \sim \triangle DB'C$ ∴ $\dfrac{\overline{B'D}}{\overline{B'C}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$。∵ $\dfrac{\overline{B'Z}}{\overline{B'C}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$，$\dfrac{\overline{B'D}}{\overline{B'C}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ∴ $\overline{B'Z}=\overline{B'D}$，即 Z 點與 D 點重合，
>
> Z點必在$\overline{AC}$上 。



【圖 2-2-2】

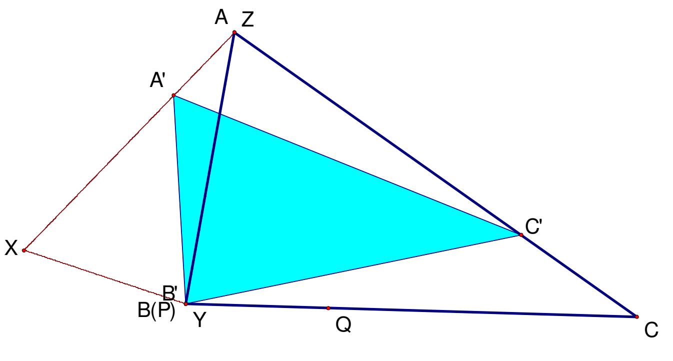
如【圖 2-2-1】所示，當B'向 B 移動時，$\overline{XZ}$向上平移；當B'向 C 移動時，$\overline{XZ}$向下平移。與前面之狀況相同，$\overline{XZ}$與$\overline{AB}$相交的情況，與$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$的長度關係有關。因此（狀況二）又分成(a) $\overline{AC} \geq \overline{BC}$和(b) $\overline{AC} \leq \overline{BC}$兩種情形：

$\because \dfrac{\overline{XZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ， $\overline{XZ}=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{BC}}$ $\therefore \overline{XZ}\ge\overline{AB}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{BC}}\ge\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{AC}\ge\overline{BC}$ 。

同理 $\overline{XZ}\le\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{AC}\le\overline{BC}$ 。

與狀況一相同，我們訂定B'的「臨界點」P、Q、R、S，若要作出內接相似三角形，當 $\overline{AC}\ge\overline{BC}$ 時， $\overline{PC}\ge\overline{B'C}\ge\overline{QC}$ ；當 $\overline{AC}\le\overline{BC}$ 時， $\overline{RC}\ge\overline{B'C}\ge\overline{SC}$ ，其臨界點之討論如下。

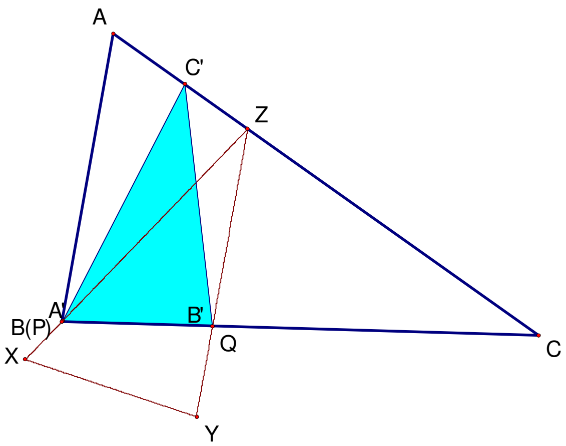
(a) $\overline{AC}\le\overline{BC}$ ：



【圖 2-2-3】

(1)當 B' 點在 P 的位置時，作相似三角形 $\triangle A'B'C'$ ，且 A' 的軌跡： $\triangle XYZ$

$\dfrac{\overline{YZ}}{a}=\dfrac{c}{a}$ ， $\overline{YZ}=c$ ， $\angle ZB'C=\angle B$ ， Z 點與 A 點重合， B'點即爲 B 點。



【圖 2-2-4】

(2)當 B'點在 Q 的位置時，作相似三角形 $\triangle A'B'C'$ ，且 A' 的軌跡： $\triangle XYZ$ 。

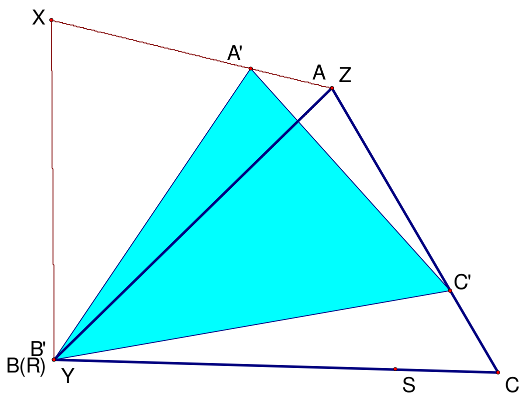
$\triangle A'C'C\sim\triangle ABC$ ， $\dfrac{\overline{A'C'}}{c}=\dfrac{\overline{A'C}}{b}$ ，

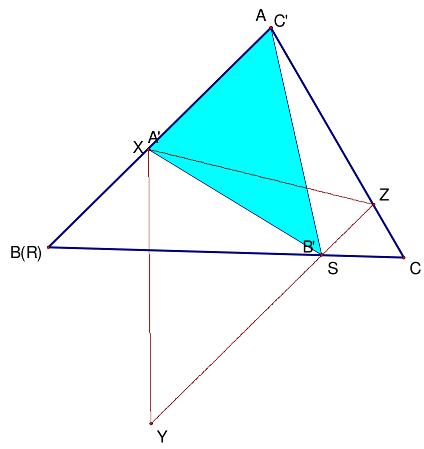
$\overline{A'C'}=\overline{A'C}\times\dfrac{c}{b}$ ， $\dfrac{\overline{A'B'}}{c}=\dfrac{\overline{A'C'}}{b}$ ，

$\overline{A'B'}=\overline{A'C'}\times\dfrac{c}{b}$ ， $\overline{A'B'}=a\times\dfrac{c}{b}\times\dfrac{c}{b}$ ，

$\overline{BQ}=a\times\left(\dfrac{c}{b}\right)^2$ 。當 $\angle C>\angle B$ 時，Q 點即爲 C 點。

(b) $\overline{AC} > \overline{BC}$ ：

<table>
<tr>
<td>

【圖 2-2-5】</td>
<td>

【圖 2-2-6】</td>
</tr>
<tr>
<td>(1)當 B' 點在 R 的位置時，作相似三角形 $\triangle A'B'C'$ ，且 A' 的軌跡： $\triangle XYZ$
$\frac{\overline{YZ}}{a}=\frac{c}{a}$ ， $\overline{YZ}=c$ ， $\angle ZB'C=\angle B$ ， Z點與 A 點重合， B' 點即為 B 點。</td>
<td>(2)當 B' 點在 S 的位置時，作相似三角形 $\triangle A'B'C'$ ，且 A' 的軌跡： $\triangle XYZ$
$\angle C'=\angle C$ ， $\triangle B'BA \sim \triangle ABC$ ， $\frac{c}{a}=\frac{\overline{BB'}}{c}$ ，
$\overline{SB}=\frac{c^2}{a}$ ，當 $\angle C > \angle A$ 時。S 點即為 C 點。</td>
</tr>
</table>

結論： 當 $\overline{AC} \geq \overline{BC}$ 時：① $\angle C \leq \angle B$ ，則 $\overline{PC}=a$ ， $\overline{QB}=a\times\left(\frac{c}{b}\right)^2$

② $\angle C > \angle B$ ，則 $\overline{PC}=a$ ， $\overline{QB}=a$ 。

當 $\overline{AC} \leq \overline{AB}$ 時：① $\angle C \leq \angle A$ ，則 $\overline{RC}=a$ ， $\overline{SB}=\frac{c^2}{a}$ 。

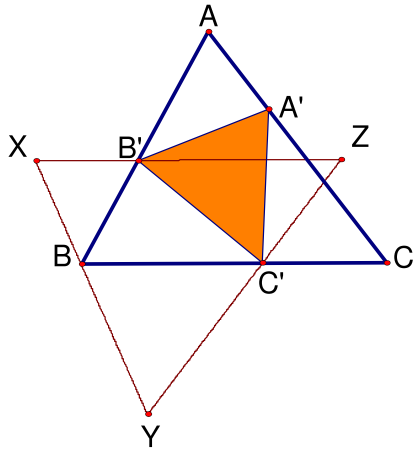
② $\angle C > \angle A$ ，則 $\overline{RC}=a$ ， $\overline{SB}=a$ 。

狀況三：

C' 在 $\overline{BC}$ 上，B' 在 $\overline{AB}$ 上， A' 在 $\overline{AC}$ 上

在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上各取一點 C' 、 A' ，作 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$。則將 A' 沿著 $\triangle ABC$ 的邊移動時，B' 所形成的軌跡為 $\triangle XYZ$。

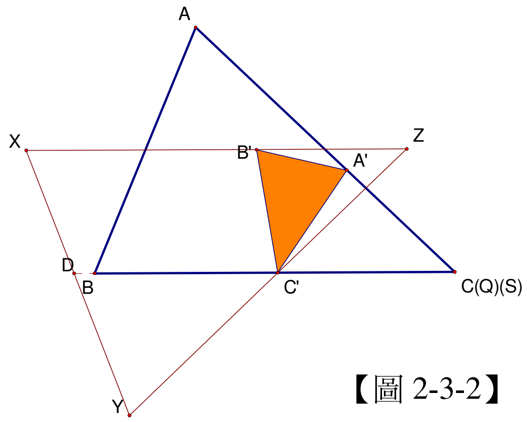
$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點,即為內接相似三角形頂點的位置。故當 $\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 有交點時，內接相似三角形存在。



【圖 2-3-1】

在此種狀況下，我們發現$\overline{XZ}=\overline{BC}$且 B 點必在$\overline{XY}$上，其證明過程如下：

如【圖 2-3-2】，$\because \dfrac{\overline{XZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\ \therefore \overline{XZ}=\overline{BC}$。假設$\overline{XY}$不通過 B，作$\overline{C'D}//\overline{XZ}$且D在$\overline{XY}$上。 $\because \dfrac{\overline{DC'}}{\overline{XZ}}=\dfrac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}\ \therefore \overline{DC'}=\overline{BC'}$，即 D 點和 B 點重合$\Rightarrow \overline{XY}$必通過B點。



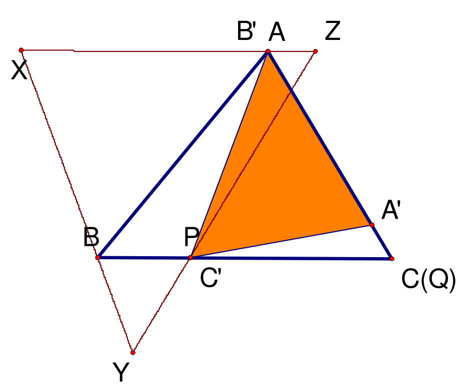
【圖 2-3-2】

如【圖 2-3-1】所示，當C'向 B 移動時，$\overline{XZ}$向上平移；當C'向 C 移動時，$\overline{XZ}$向下平移。與前面之狀況相同，$\overline{XZ}$相交$\overline{AB}$的情況，與$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的長度有關，因此（狀況三）又分成(a) $\overline{AB}\le\overline{BC}$和(b) $\overline{AB}\ge\overline{BC}$兩種情形：

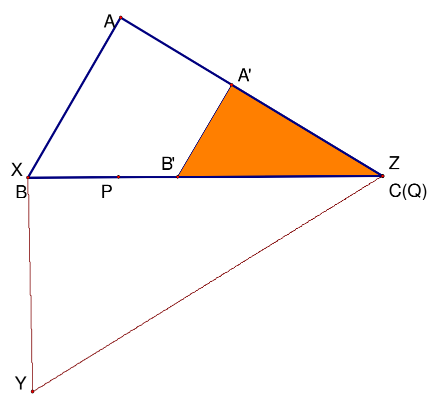
如前述，$\because \overline{XZ}=\overline{BC}\ \therefore \overline{XZ}\le\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{BC}\le\overline{AB}$。同理$\overline{XZ}\ge\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{BC}\ge\overline{AB}$

與狀況一相同，我們訂定B'的「臨界點」P、Q、R、S，若要作出內接相似三角形，當$\overline{AB}\ge\overline{BC}$時，$\overline{PC}\ge\overline{B'C}\ge\overline{QC}$；當$\overline{AB}\le\overline{BC}$時，$\overline{RC}\ge\overline{B'C}\ge\overline{SC}$，其臨界點之討論如下。

(a) $\overline{AB}\ge\overline{BC}$：



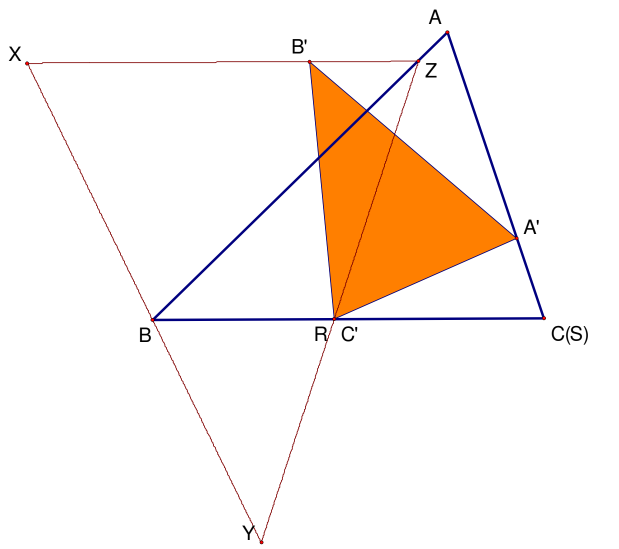
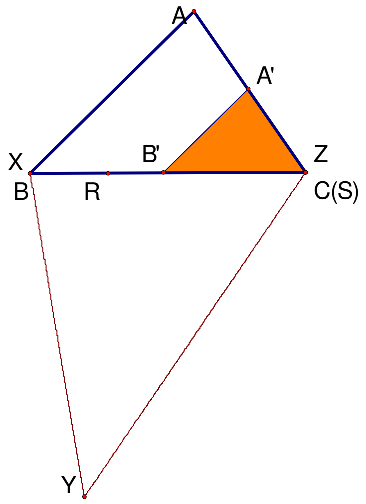
【圖 2-3-3】



【圖 2-3-4】

(1) 當C'點在 P 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 B'的軌跡：△XYZ $\angle B'=\angle B$，$\triangle C'AC \sim \triangle ABC$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\overline{C'C}}{b}$，$\overline{PC}=\dfrac{b^2}{a}$。當 $\angle B>\angle A$ 時，P 點即爲 B 點。	(2) 當C'點在 Q 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 B'的軌跡：△XYZ $\overline{XZ}=a$，$\angle YC'B=\angle C$，X 點與 B 點重合，C'點即爲 C 點。

(b) $\overline{AB}\le\overline{BC}$：

 【圖 2-3-5】	 【圖 2-3-6】
(1)當C'點在 R 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 B'的軌跡：△XYZ $\triangle A'BB' \sim \triangle ABC$，$\dfrac{\overline{A'B}}{c}=\dfrac{\overline{A'B'}}{b}$，$\overline{A'B'}=b\times\dfrac{a}{c}$， $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{b}{c}$，$\overline{A'C'}=\overline{A'B'}\times\dfrac{b}{c}$， $\overline{RC}=\overline{A'B'}\times\dfrac{b}{c}=a\times\left(\dfrac{b}{c}\right)^2$。當 $\angle B>\angle C$ 時，R 點即爲 B 點。	(2)當C'點在 S 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 B'的軌跡：△XYZ $\dfrac{\overline{YZ}}{b}=\dfrac{a}{b}$，$\overline{YZ}=a$，$\angle YC'B=\angle C$，X 點與 B 點重合，C'點即爲 C 點。

結論： 當 $\overline{AB}\ge\overline{BC}$ 時：① $\angle B\le\angle A$，則 $\overline{PC}=\dfrac{b^2}{a}$，$\overline{QB}=a$

② $\angle B>\angle A$，則 $\overline{PC}=a$，$\overline{QB}=a$。

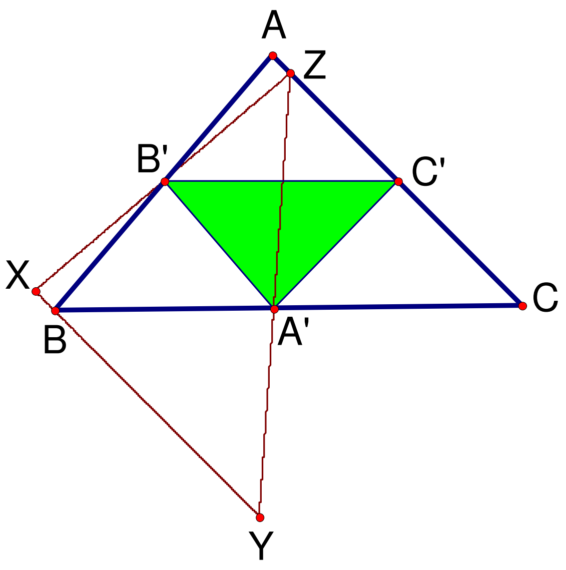
當 $\overline{AB}\le\overline{BC}$ 時：① $\angle B\le\angle C$，則 $\overline{RC}=a\times\left(\dfrac{b}{c}\right)^2$，$\overline{SB}=a$。

② $\angle B>\angle C$，則 $\overline{RC}=a$，$\overline{SB}=a$。

狀況四：

B'在$\overline{AB}$上，A'在$\overline{BC}$上，C'在$\overline{AC}$上

在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上各取一點A'、C'，作△A'B'C'～△ABC。則將C'沿著△ABC的邊移動時，B'所形成的軌跡爲△XYZ。$\overline{XZ}$與$\overline{AB}$的交點,即爲內接相似三角形頂點的位置。故當$\overline{XZ}$與$\overline{AB}$有交點時，內接相似三角形存在。如【圖2-4-2】所示，當C'向B移動時，$\overline{XZ}$向上平移；當C'向C移動時，$\overline{XZ}$向下平移。



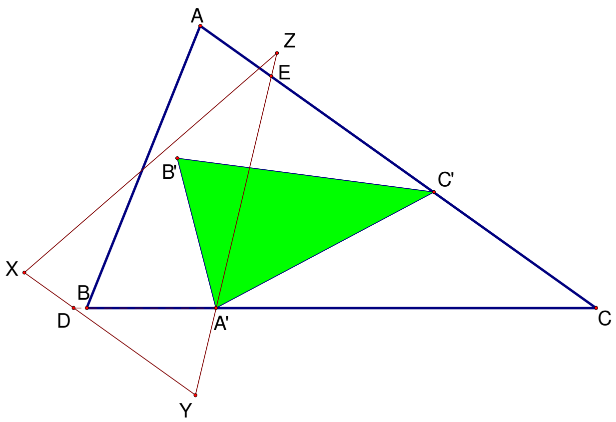
【圖 2-4-1】

我們發現無論A'在$\overline{BC}$上哪裡，$\overline{XY}$必通過B點，且$\overline{AC}$必通過Z。

如【圖 2-4-2】$\because \dfrac{\overline{XZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ $\therefore \overline{XZ}=\overline{AB}$。假設$\overline{XY}$與$\overline{BC}$的延長線相交於D。

$\because \dfrac{\overline{DA'}}{\overline{XZ}}=\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{AB}}$ $\therefore \overline{DA'}=\overline{BA'}$，即D點和B點重合$\Rightarrow \overline{XY}$必通過B點。

如【圖 2-4-2】，假設Z不在$\overline{AC}$上且$\overline{YZ}$交$\overline{AC}$於E。$\because$ △ABC～△A'EC $\therefore \dfrac{\overline{A'E}}{\overline{A'C}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$。$\because \dfrac{\overline{A'Z}}{\overline{A'C}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$，$\dfrac{\overline{A'Z}}{\overline{A'C}}=\dfrac{\overline{A'E}}{\overline{A'C}}$ $\therefore \overline{A'Z}=\overline{A'E}$，即Z點必在$\overline{AC}$上。

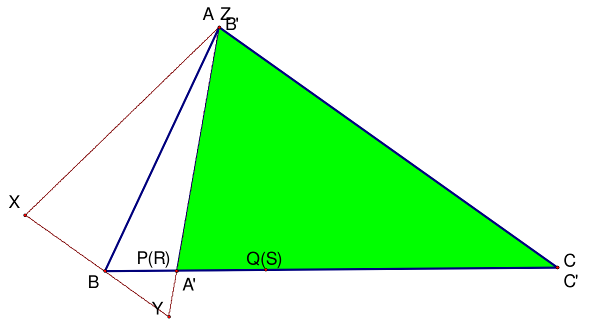
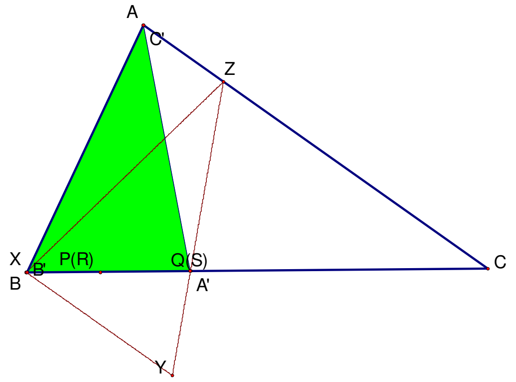


【圖 2-4-2】

A'點在移動時，$\overline{XY}$通過B點，且Z點在$\overline{AC}$上，X在$\overline{AB}$上時和B在$\overline{XY}$上時爲同一

點，故 P、R 重合。又 Z 在 $\overline{AC}$ 上時和 A 在 $\overline{XZ}$ 上時為同一點，故 Q、S 重合。

A'的臨界點位置，其討論情形如下：

 【圖 2-4-3】	 【圖 2-4-4】
(1)當 A'點在 P(R)的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 B'的軌跡：△XYZ △ABC～△A'B'C'，$\dfrac{\overline{A'C}}{b}=\dfrac{\overline{B'C'}}{a}$，$\overline{PC}=\dfrac{b^2}{a}$。 當∠B＞∠A 時，P、R 點即為 B 點。	(2)當 A'點在 Q(S)的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 B'的軌跡：△XYZ △ABC～△A'B'C'，$\dfrac{\overline{A'B}}{c}=\dfrac{\overline{B'C'}}{a}$，$\overline{BQ}=\dfrac{c^2}{a}$。 當∠C＞∠A 時，R、S 點即為 C 點。

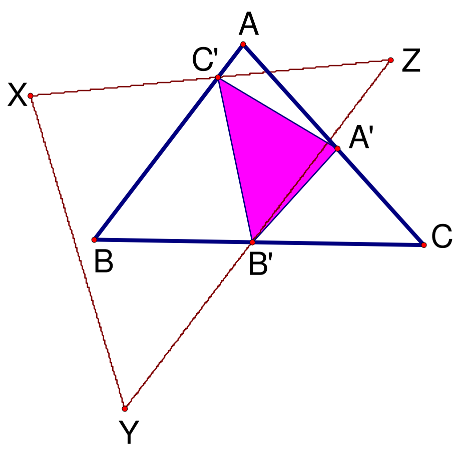
結論：①∠B≤∠A，則 $\overline{PC}=\overline{RC}=\dfrac{b^2}{a}$。②∠B＞∠A，則 $\overline{PC}=\overline{RC}=a$。

③∠C≤∠A，則 $\overline{BQ}=\overline{BS}=\dfrac{c^2}{a}$。④∠C＞∠A，則 $\overline{BQ}=\overline{BS}=a$。

狀況五：

C'在 $\overline{AB}$ 上，B'在 $\overline{BC}$ 上，A'在 $\overline{AC}$ 上

在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 上各取一點 B'、A'，作△A'B'C'～△ABC。則將 A'沿著△ABC 的邊移動時，C'所形成的軌跡為△XYZ。$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點，即為內接相似三角形頂點的位置。故當 $\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 有交點時，內接相似三角形存在。



【圖 2-5-1】

如【圖 2-5-1】所示，當 B'向 B 移動時，$\overline{XZ}$ 向上平移；當 B'向 C 移動時，$\overline{XZ}$ 向下平移。$\overline{XZ}$ 和 $\overline{AB}$ 的相交情形和 $\overline{XZ}$、$\overline{AB}$ 的長度有關，而這兩條線段的關係又和 $\overline{AB}^2$ 和 $\overline{AC}\cdot\overline{BC}$

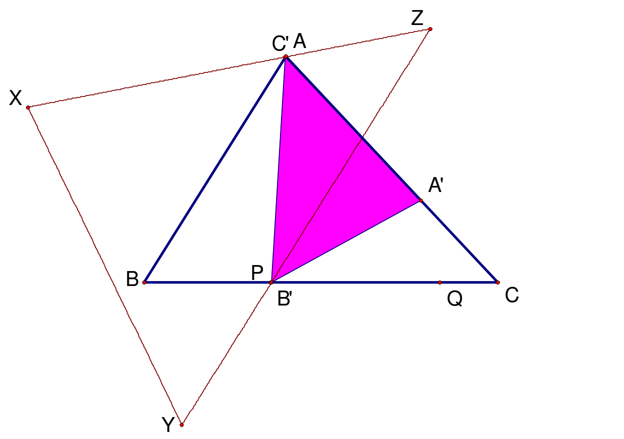
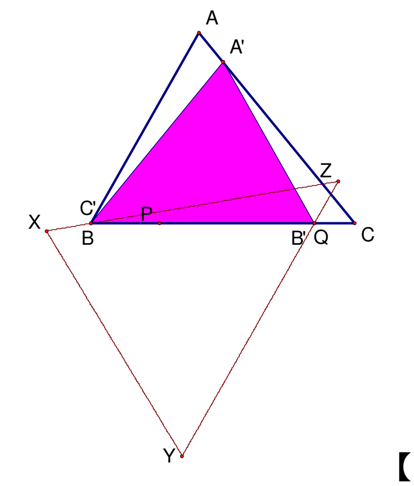
有關，所以我們分作(a) $\overline{AC}\cdot\overline{BC}\ge\overline{AB}^2$ 和(b) $\overline{AC}\cdot\overline{BC}\le\overline{AB}^2$ 討論：

$\because\dfrac{\overline{XZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ，$\overline{XZ}=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}}$ $\therefore\overline{XZ}\ge\overline{AB}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}}\ge\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{BC}\cdot\overline{AC}\ge\overline{AB}^2$ 。

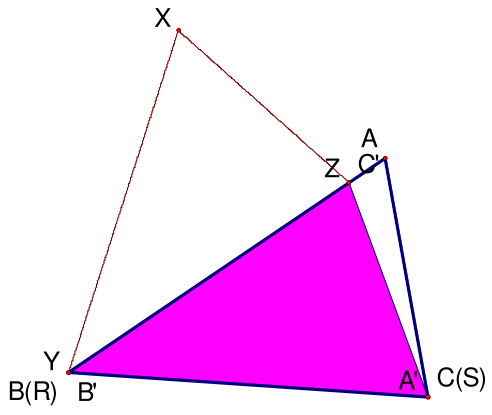
同理 $\overline{XZ}\le\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{BC}\cdot\overline{AC}\le\overline{AB}^2$ 。

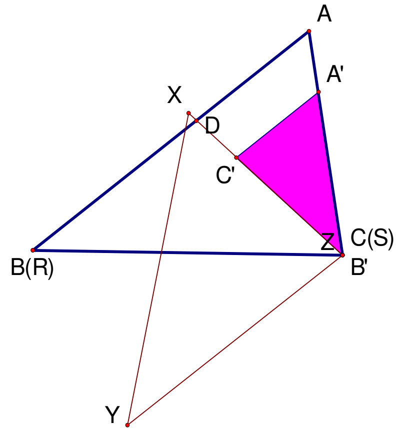
與前狀況相同，我們訂定 B'的「臨界點」P、Q、R、S，若要作出內接相似三角形，當 $\overline{AC}\times\overline{BC}\ge\overline{AB}^2$ 時，$\overline{PC}\ge\overline{B'C}\ge\overline{QC}$ ；當 $\overline{AC}\times\overline{BC}\le\overline{AB}^2$ 時，$\overline{RC}\ge\overline{B'C}\ge\overline{SC}$ ，其臨界點之討論如下。

(a) $\overline{AC}\cdot\overline{BC}\ge\overline{AB}^2$ ：

 【圖 2-5-2】	 【圖 2-5-3】
(1)當 B'點在 P 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 C'的軌跡：△XYZ $\angle C=\angle C'$ ，$\overline{AP}=\overline{PC}$ ，$\overline{PC}=\dfrac{b}{2}\sec C$ 。當∠C >∠A 時，P 點即爲 B 點。	(2)當 B'點在 Q 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 C'的軌跡：△XYZ $\overline{C'A'}=\dfrac{a}{2}\sec C$ ，$\overline{C'B'}=\overline{C'A'}\times\dfrac{a}{b}$ ，$\overline{BQ}=\dfrac{a^2}{2b}\sec C$ 。當∠C >∠B 時，Q 點即爲 C 點。

$(b)\ \overline{AC}\cdot\overline{BC}\le\overline{AB}^2$ ：

<table>
<tr>
<td>


【圖 2-5-4】
</td>
<td>


【圖 2-5-5】
</td>
</tr>
<tr>
<td>
(1)當 B'點在 R 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 C'的軌跡：△XYZ

$\angle ZB'C=\angle B$，Z 點必在 $\overline{AB}$ 上，R 即為 B 點。
</td>
<td>
(2)當 B'點在 S 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 C'的軌跡：△XYZ

假設 $\overline{XY}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 D，△AZD～△ABC，

$\dfrac{\overline{ZD}}{b}=\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{\overline{XZ}}{b}=\dfrac{a}{c}$，$\overline{ZD}=\overline{XZ}$，S 點即為 C 點。
</td>
</tr>
</table>

結論： 當 $\overline{AC}\cdot\overline{BC}\ge\overline{AB}^2$ 時：

① $\angle C\le\angle A$，則 $\overline{PC}=\dfrac{b}{2}\sec C$ 。② $\angle C>\angle A$，則 $\overline{PC}=a$。

③ $\angle C\le\angle B$，則 $\overline{BQ}=\dfrac{a^2}{2b}\sec C$ 。④ $\angle C>\angle B$，則 $\overline{BQ}=a$ 。

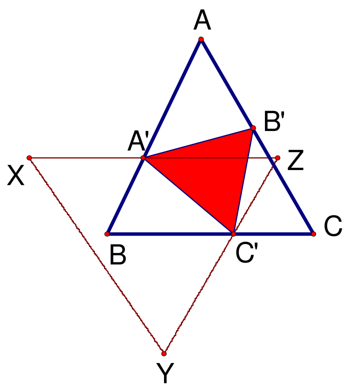
當 $\overline{AC}\cdot\overline{BC}\le\overline{AB}^2$ 時：$\overline{RC}=a$ ，$\overline{SB}=a$

狀況六：

A'在 $\overline{AB}$ 上，C'在 $\overline{BC}$ 上，B'在 $\overline{AC}$ 上。

在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 上各取一點 C'、B'，作△A'B'C'～△ABC。則將 B'沿著△ABC 的邊移動時，A'所形成的軌跡為△XYZ。

$\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點,即為內接相似三角形頂點的位置。故當 $\overline{XZ}$ 與 $\overline{AB}$ 有交點時，內接相似三角形存在。



【圖 2-6-1】

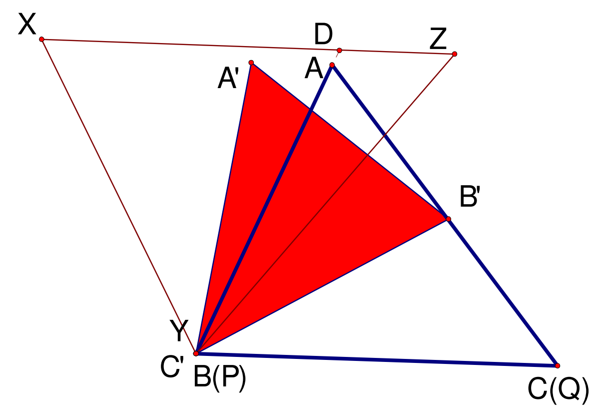
如【圖 2-6-1】所示，當C'向 B 移動時，$\overline{XZ}$向上平移；當C'向 C 移動時，$\overline{XZ}$向下平移。與前狀況相同，我們可以分做(a) $\overline{AC}^2 \geq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$和(b) $\overline{AC}^2 \leq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$來討論：

$\because \dfrac{\overline{XZ}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，$\overline{XZ}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}$ $\therefore \overline{XZ}\geq\overline{AB} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} \geq \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 \geq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$。

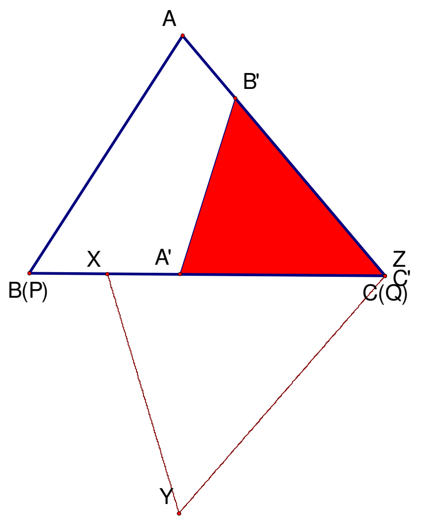
同理$\overline{XZ}\leq\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 \leq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$。

與前狀況相同，我們訂定B'的「臨界點」P、Q、R、S，若要作出內接相似三角形，當$\overline{AC}^2 \geq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$時，$\overline{PC}\geq\overline{B'C}\geq\overline{QC}$；當$\overline{AC}^2 \leq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$時，$\overline{RC}\geq\overline{B'C}\geq\overline{SC}$，其臨界點之討論如下。

(a) $\overline{AC}^2 \geq \overline{AB}\cdot\overline{BC}$：



【圖 2-6-2】



【圖 2-6-3】

(1)當C'點在 P 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 A'的軌跡：△XYZ

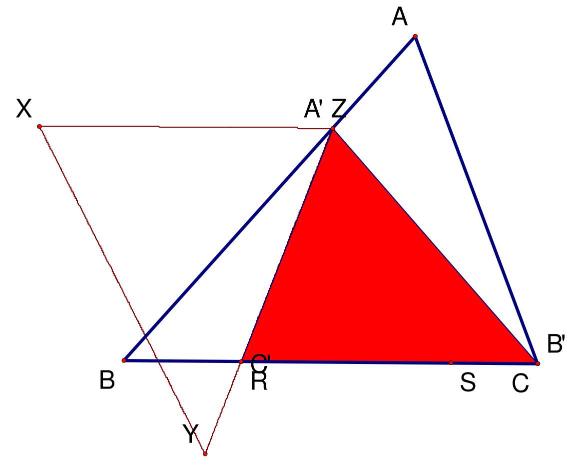
作$\overline{AB}$//$\overline{DB}$且 D 在$\overline{XZ}$上，∠XBZ=∠ABC，∠DXC=∠CAB，△XDB～△ABC，

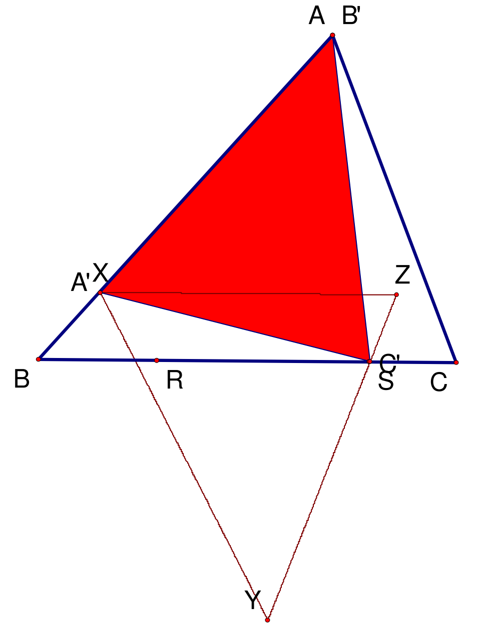
$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{XB}}=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{\overline{XB}}{\overline{AB}}=\dfrac{b}{a}$，$\overline{BD}=\overline{XB}\cdot\dfrac{a}{b}=c$，A 點必在$\overline{XZ}$上，則 P 點位置即爲 B 點。

(2)當C'點在 Q 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 A'的軌跡：△XYZ

∠BC'Y＝∠C，X 點必在$\overleftrightarrow{BC}$上，則 Q 點位置即爲 C 點。

(b) $\overline{AC}^2 \le \overline{AB}\cdot\overline{BC}$ ：

<table>
<tr>
<td>

【圖 2-6-4】</td>
<td>

【圖 2-6-5】</td>
</tr>
<tr>
<td>(1)當 C'點在 R 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 A'的軌跡：△XYZ
$\overline{B'A'}=\frac{a}{2}\sec B$，$\overline{C'B'}=\overline{B'A'}\times\frac{a}{c}$，$\overline{CR}=\frac{a^2}{2c}\sec B$。
當∠B >∠C 時，R 點即爲 B 點。</td>
<td>(2)當 C'點在 S 的位置時，做出的內接相似三角形△A'B'C'，且 A'的軌跡：△XYZ
∠B=∠B'，$\overline{AS}=\overline{BS}$，$\overline{BS}=\frac{c}{2}\sec B$。
當∠B >∠A 時，S 點即爲 C 點。</td>
</tr>
</table>

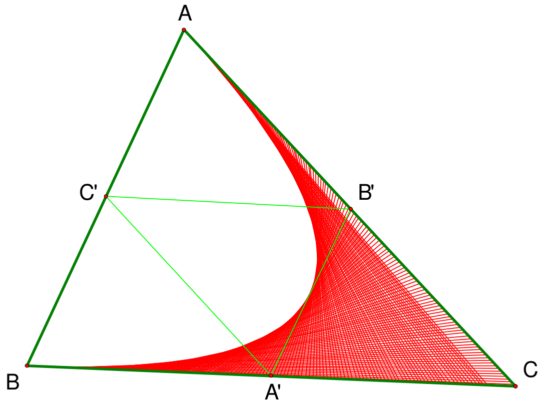
結論：當 $\overline{AC}^2 \ge \overline{AB}\cdot\overline{BC}$ 時：C'在 $\overline{BC}$ 上任何位置皆可作出內接相似三角形

當 $\overline{AC}^2 \le \overline{AB}\cdot\overline{BC}$ 時：

① ∠B ≤ ∠C，則 $\overline{RC}=\frac{a^2}{2b}\sec B$。② ∠B >∠C，則 $\overline{RC}=a$。

③ ∠B ≤ ∠A，則 $\overline{SB}=\frac{c}{2}\sec B$。④ ∠B>∠A，則 $\overline{SB}=a$。

【主題三】過三角形內部一點作內接相似三角形

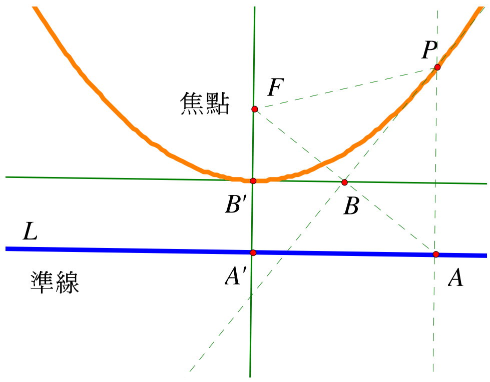


【圖 3-1】

在 ΔABC 作一內接相似三角形時，沿著 $\overline{BC}$ 平移 A'時，$\overline{A'B'}$ 的軌跡包絡形成一個拋物線。

由【圖 3-1】可以看出，$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 爲此拋物線的兩條切線，$\overline{A'B'}$ 爲端點分別在這兩條切線上的第三條切線。如果給定形內一點，要做出過此點之內接相似三角形，只要做出此拋物線的切線就可以找出內接相似三角形所對應的邊，由此邊即可畫出內接相似三角形。所以我們若能找出拋物線之焦點及準線，即可畫出過三角形內一點的切線。

由拋物線的定義可得知，拋物線上的每一點 P，到焦點 F 的距離與到準線 L 的距離相等（$\overline{PF} = \overline{PA}$）。在 L 上任取一點 A，過 A 作準線 L 的垂線和 $\overline{FA}$ 的中垂線，則其交點 P 即爲拋物線上的一點。此時，$\overline{FA}$ 的中垂線 $\overleftrightarrow{PB}$ 爲拋線上的切線，P 爲切點、$\overline{FB}$ 爲焦點與切線的距離。



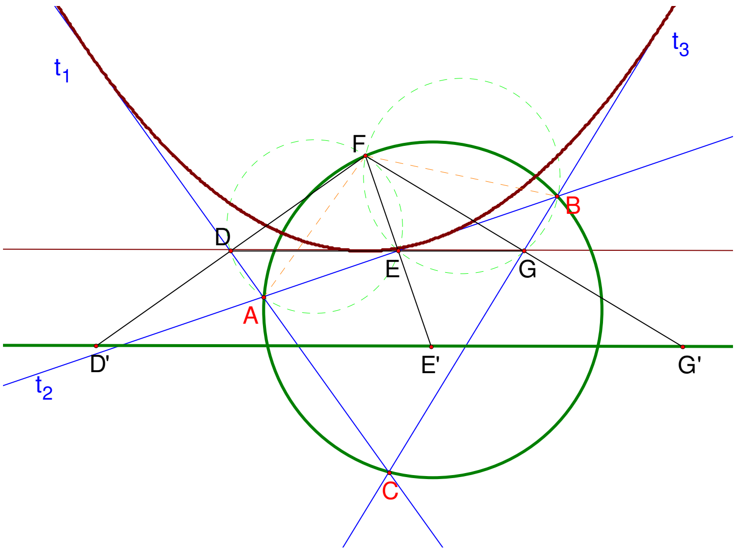
【圖 3-2】

我們發現拋物線的任三條切線所形成的三角形的外接圓必通過焦點。其證明如下：

【性質 1】：拋物線的任三條切線所形成的三角形的外接圓必通過焦點

【證明】:(如【圖 3-3】)

焦點 F 對於三切線 t_1、t_2、t_3 所作鏡射的三點 D'、E'、G' 皆落於準線上。 則 F 對於三切線 t_1、t_2、t_3 所垂線的垂足 D、E、G 亦共線，($\because \frac{\overline{FD}}{\overline{FD'}}=\frac{\overline{FE}}{\overline{FE'}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{FG'}}=\frac{1}{2}$) $\therefore \angle DEA=\angle BEG$。又 $\overline{FD}\perp\overline{AC}$、$\overline{FE}\perp\overline{AB}$，$\therefore$A、D、E、F 共圓，故 $\angle AFD=\angle AED$。 同理 $\angle GFB=\angle GEB$，故 $\angle AFB=\angle DFG$。 又 F、D、C、G 共圓 ($\overline{FD}\perp\overline{AC}$、$\overline{FG}\perp\overline{BC}$)，$\angle DFG+\angle C=180^\circ$。 故 $\angle AFB+\angle C=180^\circ$，即 A、F、B、C 共圓。



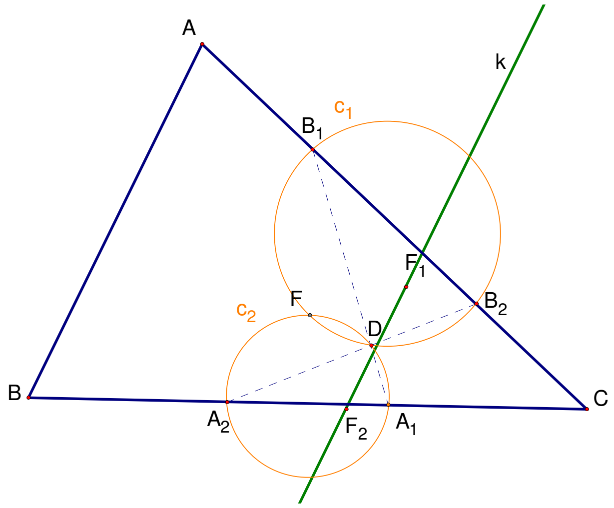
【圖 3-3】

拋物線準線及焦點作圖方法

因為任三條切線所形成的三角形的外接圓必通過拋物線的焦點，所以我們只需要四條切線形成兩個三角形，兩個三角形的外接圓交點為拋物線的焦點。再者由拋物線的基本定義可得知，焦點對切線作鏡射必位於準線上，故只要由焦點對任兩條切線作鏡射後兩個點的連線即為準線。

【作法】:(如【圖 3-4】)

1.作兩個內接相似三角形之 $\overline{AB}$ 對應邊 $\overline{A_1B_1}$ 及 $\overline{A_2B_2}$，且 $\overline{A_1B_1}$ 交 $\overline{A_2B_2}$ 於 D。 2.分別作 $\triangle A_1A_2D$ 及 $\triangle B_1B_2D$ 的外接圓 c_2、c_1，且此兩圓相交於焦點 F。 3.分別以 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$ 為對稱軸，作點 F 的鏡射得 F_1、F_2。 4. 連接 F_1、F_2 得準線 k。



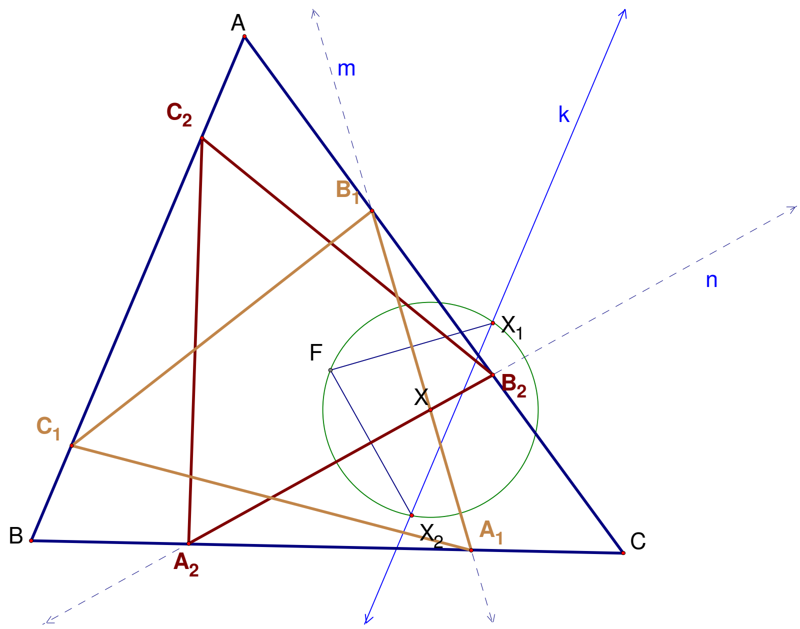
【圖 3-4】

過三角形內一點作內接相似三角形作圖方法

有了焦點和準線，要畫出過此點的切線就不困難了。於是過三角形內部一點作內接相似三角形的作法如下：（我們只做了主題二中各狀況的其中一種，其餘的作法皆相同）

【已知】：△ABC，且 $\overline{AB} \le \overline{AC}$，∠C＜∠A，三角形內部一點 X。

【求作】：過 X 點作△A'B'C'，且 A' 在 $\overline{BC}$ 上、B' 在 $\overline{AC}$ 上、C' 在 $\overline{AB}$ 上。



【圖 3-5】

【作法】:(如【圖 3-5】)

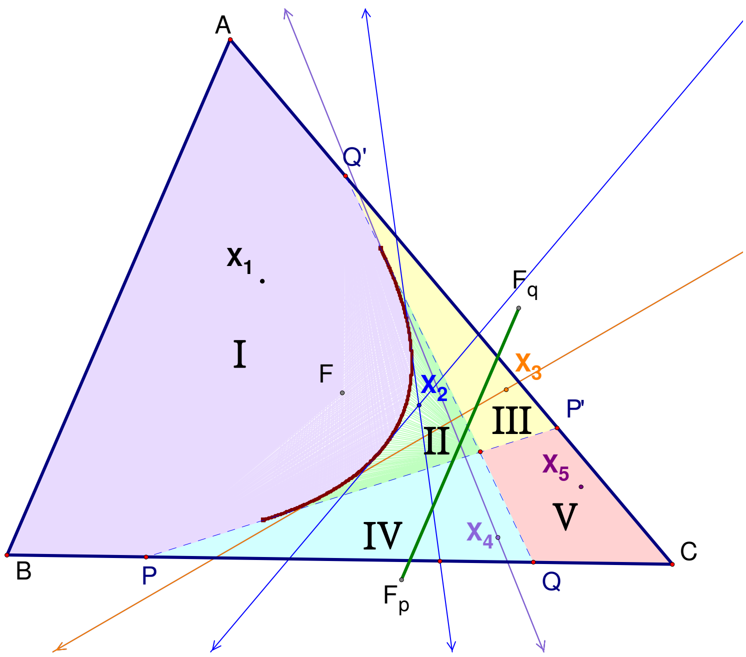
1.先找出拋物線焦點 F 及準線 k。 2.以 X 爲圓心，$\overline{XF}$ 爲半徑畫圓，交準線 k 於 X_1、X_2。 3.作 $\overline{FX_1}$、$\overline{FX_2}$ 的中垂線 m、n，且直線 m 交 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 於 A_1、B_1，直線 n 交 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 於 A_2、B_2。 4.分別由 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$ 作內接相似三角形 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$，則此兩三角形即爲所求。

存在範圍討論

我們發現從切線作出的相似三角形不一定內接，我們利用主題二討論的臨界點，畫出兩條臨界三角形的邊，若所做的切線與三角形邊的交點超出臨界點所給定的範圍，則內接相似三角形不存在。

如【圖 3-6】，$\overline{PP'}$、$\overline{QQ'}$ 爲兩條臨界切線，能做出切線的部份只有在兩臨界切線與拋物線之間。將 F 點分別以 $\overline{PP'}$、$\overline{QQ'}$ 爲鏡射軸作鏡射得到 F_p、F_q，則此即爲準線上的兩個臨界點。想要做過 X 點的切線時，以 X 爲圓心、$\overline{XF}$ 爲半徑畫圓，若圓與 $\overline{F_pF_q}$ 有交點，即可做出切線。若線段的兩端點分別在圓內和圓外，此時 $\overline{F_pF_q}$ 與圓只有一個交點；若線段兩端點同時在圓內或圓外，則 $\overline{F_pF_q}$ 與圓沒有交點。

給定一個點在三角形內部時，最多做出兩個內接相似三角形，我們把能做出三角形個數的狀況，分作以下幾個區塊。爲了方便，我們以 d(X,L)表示點 X 到直線 L 的距離。



【圖 3-6】

抛物線上：由拋物線性質得知，當點在拋物線上時，恰可作出一條拋物線。

I 區： X_1在 I 區，拋物線的內側，無法作出切線。因此 $d(X_1,\overline{F_pF_q})>\overline{FX_1}$時，無法做出內接相似三角形。

II 區：X_2在 II 區，$d(X_2,\overleftrightarrow{F_pF_q})<\overline{FX_2}$ ，$\overline{FX_2}\le\overline{X_2F_q}$ ，$\overline{FX_2}\le\overline{X_2F_p}$ 。以 X_2 爲圓心 $\overline{FX_2}$ 爲半徑畫圓時，與 $\overline{F_pF_q}$ 會有兩個交點。（$\because\overline{FX_2}<\overline{X_2F_q}$ ，$\therefore F_q$ 在圓外。同理，F_p 也在圓外）所以 X_2 可作出兩條切線。

III 區：X_3在 III 區時，$d(X_3,\overleftrightarrow{F_pF_q})<\overline{FX_3}$ ，$\overline{FX_3}>\overline{X_3F_q}$ ，$\overline{FX_3}\le\overline{X_3F_p}$ 。以 X_3 爲圓心 $\overline{FX_3}$ 爲半徑畫圓會與 $\overline{F_pF_q}$ 有一個交點。（$\because F_p$ 在圓外， F_q 在圓內），所以 X_3 只可作出一條切線。

IV 區：X_4在 IV 區時，$d(X_4,\overleftrightarrow{F_pF_q})<\overline{FX_4}$ ，$\overline{FX_4}\le\overline{X_4F_q}$ ，$\overline{FX_4}>\overline{X_4F_p}$ 。以 X_4 爲圓心 $\overline{FX_4}$ 爲半徑畫圓會與 $\overline{F_pF_q}$ 有一個交點。（$\because F_p$ 在圓內，F_q 在圓外）所以 X_4 只可作出一條切線。

V 區：X_5在 V 區時，$d(X_5,\overleftrightarrow{F_pF_q})<\overline{FX_5}$ ，$\overline{FX_5}>\overline{X_5F_q}$ ，$\overline{FX_5}>\overline{X_5F_p}$ 。以 X_5 爲圓心 $\overline{FX_5}$ 爲半徑畫圓與 $\overline{F_pF_q}$ 沒有交點。（$\because F_p$ 、 F_q 皆在圓內）所以 X_5 無法作出切線。

【主題四】最小的內接相似三角形的尺規作圖法

以 GSP 作圖並觀察現象，我們猜測當切線段切於拋物線頂點時好像是最短的。我們的問題是：「對於任一拋物線和拋物線的兩條切線 $\overline{BA}$ 、 $\overline{BC}$ 。分別在 $\overline{BA}$ 、 $\overline{BC}$ 上取兩點 A'、 B'，

使得 $\overline{A'B'}$ 與拋物線亦相切，則何時 $\overline{A'B'}$ 的長度為最短？」因此我們繼續尋找拋物線的相關性質，並解決了我們的問題。

【性質 2】：當拋物線的切線與拋物線相切於頂點時，焦點與切線的距離最短

P 為拋物線上一點，B' 為拋物線頂點，如【圖 3-2】，$\overline{FA'} \perp L$，故 $\overline{FA'} \le \overline{FA}$，即

$\overline{FB'} = \frac{1}{2}\overline{FA'} \le \frac{1}{2}\overline{FA} = \overline{FB}$。

【性質 3】：對任一拋物線及兩切線 l、m，在 l、m 上各取兩點 B、C 且 $\overline{BC}$ 亦與拋物線相切，當 $\overline{BC}$ 切拋物線於頂點時，$\overline{BC}$ 最小。

【證明】:（如【圖 4-2】）

如圖作△ABC 的外切圓，且由【性質 1】得知，此圓必通過焦點。

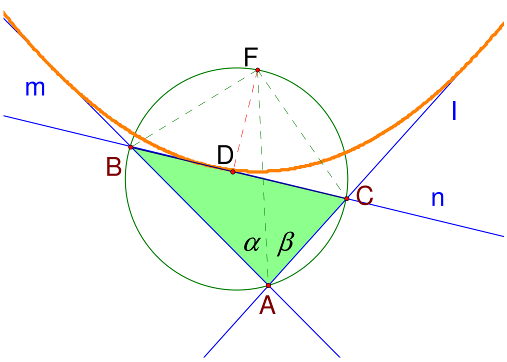
過 F 作 $\overline{FD} \perp \overline{BC}$ 於 D，連接 $\overline{BF}$、$\overline{CF}$。

設 $\angle BAF = \angle BCF = \alpha$、$\angle CAF = \angle CBF = \beta$。

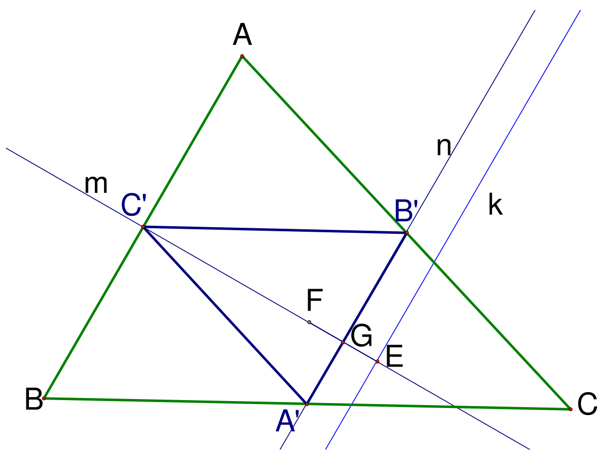
則 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = \overline{FD}\cot\beta + \overline{FD}\cot\alpha = \overline{FD}(\cot\beta + \cot\alpha)$

因為切線 l、m 及焦點皆固定不動，所以 α、β 皆為定值。

又由【性質 2】得知，當 D 為頂點時，$\overline{FD}$ 最小。故此時 $\overline{BC}$ 最小。得證。



【圖 4-2】



【圖 4-3】

最小內接相似三角形作圖法：

解決了上述的問題之後，我們便可以利用此結果找出三角形內最小的內接相似三角形。先利用主題三找出拋物線的焦點和準線，再作出切拋物線頂點的切線。

於是最小內接相似三角形的作法如下：(如【圖 4-3】)

【已知】：△ABC

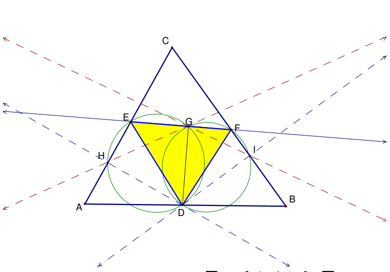
【求作】：作一內接相似三角形 A'B'C'（ A'在 $\overline{AB}$ 上、B'在 $\overline{BC}$ 、C'在 $\overline{CA}$ 上)，且△A'B'C'的面積為最小。

【作法】：

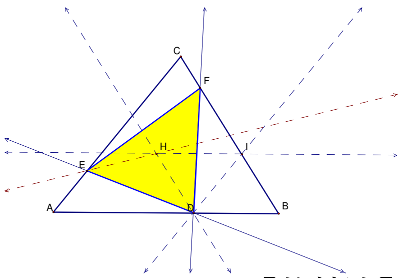
1.利用【主題三】的方法找出拋物線焦點 F 及準線 k。
2.並過 F 作直線 k 的垂線 m，且 k、m 相交於 E。
3.作 $\overline{FE}$ 的中垂線 n，且直線 n 分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 於 A' 、 B' 。
4.作 $\angle C'A'B' = \angle A$ ，連接 $\overline{B'C'}$ ，則△A'B'C'即為所求。

伍、 結論

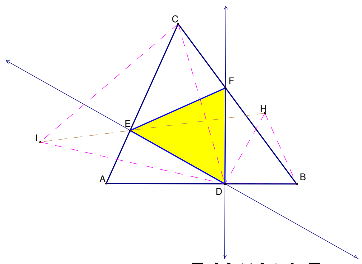
一、給定三角形上一點內接相似三角形，有三種尺規作圖方法：垂足法、旋轉法、軌跡法。



【垂足法】

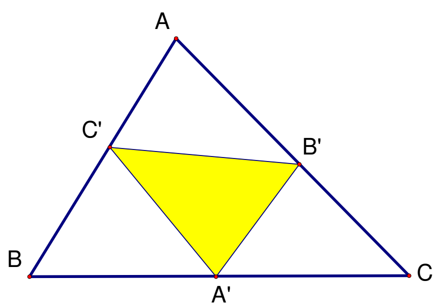


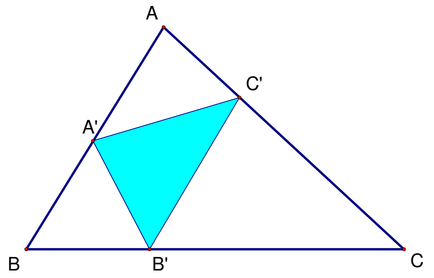
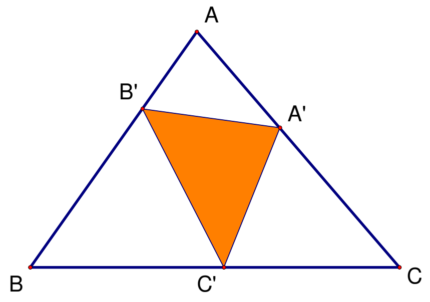
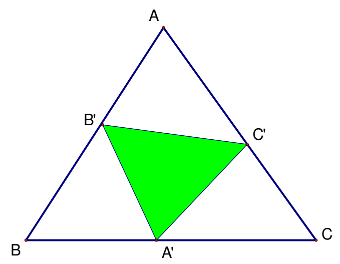
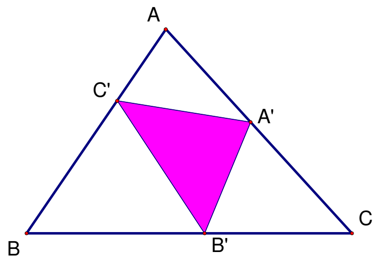
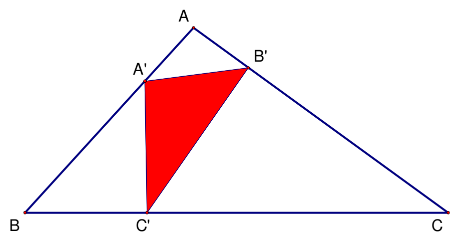
【旋轉法】



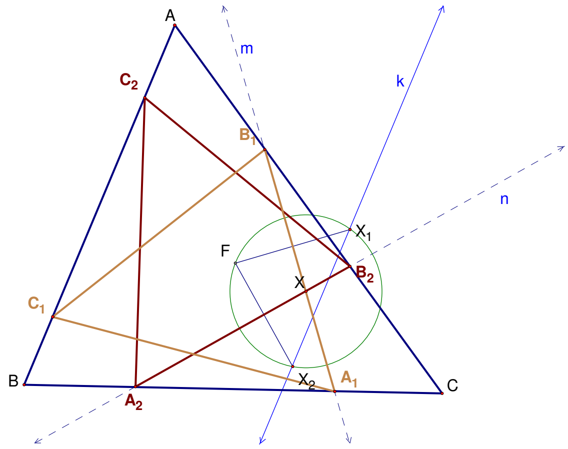
【軌跡法】

二、給定三角形邊上一點，內接相似三角形的存在範圍：

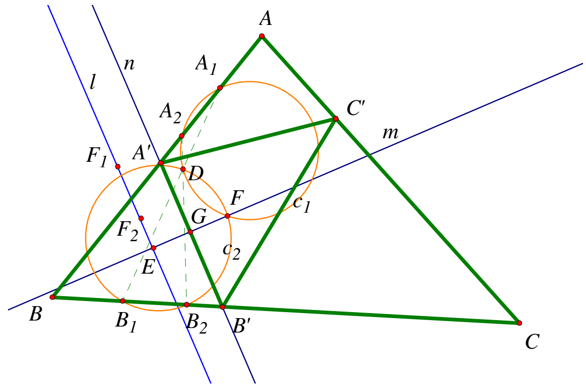
狀況			△A'B'C'存在條件
	$b \ge c$	$c \le a$	$\frac{b}{2}\sec C \ge \overline{A'C} \ge a - \frac{b}{2}\sec C$
		$c > a$	△A'B'C'必存在
	$b \le c$	$b \le a$	$\frac{c}{2}\sec B \ge \overline{A'C} \ge a - \frac{c}{2}\sec B$
		$b > a$	△A'B'C'必存在

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td rowspan="2">$b \ge a$</td><td colspan="2">$c \le b$</td><td>$a \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^2 \ge \overline{B'B}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c > b$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$b \le a$</td><td colspan="2">$c \le a$</td><td>$\frac{c^2}{a} \ge \overline{B'B}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c > a$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td rowspan="2">$c \ge a$</td><td colspan="2">$b \le a$</td><td>$\frac{b^2}{a} \ge \overline{C'C}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b > a$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c \le a$</td><td colspan="2">$b \le c$</td><td>$a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2 \ge \overline{C'C}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b > c$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td rowspan="2">$a \ge b$</td><td colspan="2">$c \le a$</td><td>$\frac{b^2}{a} \ge \overline{A'C} \ge a - \frac{c^2}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c > a$</td><td>$\frac{c^2}{a} \ge \overline{A'B}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a < b$</td><td colspan="2">$c \le a$</td><td>$\frac{b^2}{a} \ge \overline{A'C}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c > a$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td rowspan="5">
</td><td rowspan="4">$ab \ge c^2$</td><td rowspan="2">$c \le a$</td><td>$c \le b$</td><td>$\frac{b}{2}\sec C \ge \overline{B'C} \ge a - \frac{a^2}{2b}\sec C$</td></tr>
<tr><td>$c > b$</td><td>$\frac{a^2}{2b}\sec C \ge \overline{B'B}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c > a$</td><td>$c \le b$</td><td>$\frac{b}{2}\sec C \ge \overline{B'C}$</td></tr>
<tr><td>$c > b$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td colspan="3">$ab \le c^2$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td rowspan="5">
</td><td rowspan="4">$ac \ge b^2$</td><td rowspan="2">$b \le c$</td><td>$b \le a$</td><td>$\frac{a^2}{2c}\sec B \ge \overline{C'C} \ge a - \frac{c}{2}\sec B$</td></tr>
<tr><td>$b > a$</td><td>$\frac{c}{2}\sec B \ge \overline{C'B}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$b > c$</td><td>$b \le a$</td><td>$\frac{a^2}{2c}\sec B \ge \overline{C'C}$</td></tr>
<tr><td>$b > a$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
<tr><td colspan="3">$ac \le b^2$</td><td>$\triangle A'B'C'$ 必存在</td></tr>
</table>

三、利用任兩個內接相似三角形和拋物線性質，即可作出過三角形內一點的內接相似三角形及最小內接相似三角形。



【過內部一點 X 作內接相似三角形】



【最小內接相似三角形】

四、給定三角形內一點 X，求作一邊過 X 之內接相似三角形。可做出內接相似三角形個數的條件（F 為焦點，$\overline{F_pF_q}$ 為準線段）：

1. $d(X,\overline{F_pF_q})=\overline{FX}$ ：則恰可作出一內接相似三角形。

2. $d(X,\overline{F_pF_q})>\overline{FX}$ ：則無法做出內接相似三角形。

3. $d(X,\overline{F_pF_q})<\overline{FX}$ ：

①$\overline{FX}\le\overline{XF_q}$ 且 $\overline{FX}\le\overline{XF_p}$ ，則可作出兩內接相似三角形。

②$\left(\overline{FX}-\overline{XF_p}\right)\left(\overline{FX}-\overline{XF_q}\right)\le 0$，且 $\overline{XF_p}$ 、$\overline{XF_q}$ 不同時等於 $\overline{FX}$，則恰可作出一內接相似三角形。

③$\overline{FX}>\overline{XF_q}$ 且 $\overline{FX}>\overline{XF_p}$ ，則無法做出內接相似三角形。

陸、參考書目

1. 翁福永編，民 92，The Geomete's Sketchpad 4.0 版 操作手冊，建國中學。
2. 曾兆廷、李維善，如何在三角形內找一個含給定角且具有最小面積的內接三角形。中華民國第三十七屆中小學科學展覽，高中組。
3. 高級中學數學第四冊，民 93，南一書局。
4. 探索拋物館，http://steiner.math.nthu.edu.tw/ne01/tjy/edu-parabola/index.htm 。

評　　語

030416　內接相似三角形的尺規作圖

1. 建議可再探討一些特殊三角形(如:正三角形、直角三角形、鈍角三角形)的作圖情形。

2. 也可以延伸到多邊形的內接相似多邊形的作圖情形。