中華民國第四十六屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030415

三角形周長等分線的作圖與數量分佈

學校名稱： 臺北縣立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 廖文偉	陳明貴
國二 劉立晴	鄭釧鋒
國二 鄭慈	
國二 林士捷	

關 鍵 詞：三角形周長等分線、平分三角形周長、拋物線

題目

三角形周長等分線的作圖與數量分佈

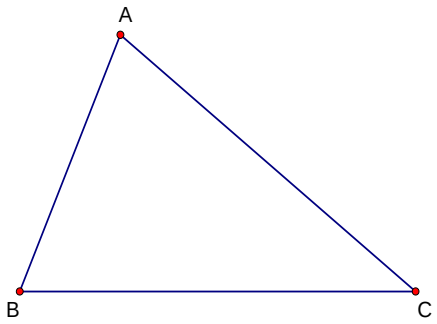
摘要

從基測的一個題目開始，過三角形頂點作出周長等分線，發現三條過頂點的周長等分線交於一點。再把指定通過的點 P，換成三角形邊上任意一點，畫出過 P 點的周長等分線，在眾多周長等分線中，我們發現了一條特殊的周長等分線，其他的周長等分線，中點皆落在此特殊周長等分線上，在文中，我們稱之爲**基本等周線**。後來我們將 P 點改爲任意指定的一點，作出過 P 點的周長等分線。我們找到了一個類似三角形的曲線區域，在文中稱爲**包絡區**，當 P 點在包絡區內部可繪出三條周長等分線，在這個區域的外部，只能作出一條周長等分線。

壹、研究動機

94 年第二次國中基測數學科第 30 題的題目大意是：

已知ΔABC 如下圖，通過 A 點作一直線 L，等分ΔABC 的周長。假設 L 與ΔABC 另一個交點為 M，請指出 M 的位置。



老師講解完這一題後，我們把題目改爲：

通過任意指定點 P，如何作一直線 L，等分ΔABC 的周長。

當 P 點在ΔABC 邊上移動時，我們作了許多等分周長的直線，發現這直線有一些特殊的性質。可是當 P 點不在ΔABC 邊上時，我們發現這個問題十分具有挑戰性，於是開始了這一次的研究。以下將等分ΔABC 周長的直線或線段，都簡稱爲ΔABC 的**等周線**。

貳、研究目的

一、通過三角形的頂點，如何作出等周線？這三條通過頂點的等周線有什麼性質？

二、通過三角形邊上任意指定點 P，如何作出等周線？這些等周線有什麼性質？

三、通過任意指定點 P，如何作出等周線？這些等周線又有什麼性質？

四、當 P 點的位置任意改變時，通過 P 點的等周線數量會如何變化？

參、研究設備及器材

筆、尺、圓規、電腦、*GSP* 繪圖軟體。

肆、研究內容

一、通過三角形頂點如何作出等周線？這三條等周線有什麼性質？

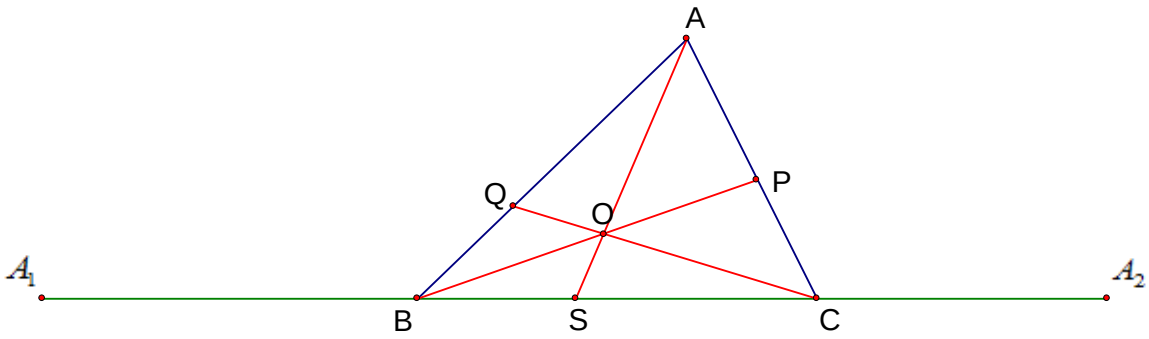
(一) 作圖方法

1. 延長 $\overline{BC}$

2. 如圖分別在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上取點 A_1 、 A_2 ，使 $\overline{A_1B}=\overline{AB}$ 、 $\overline{A_2C}=\overline{AC}$

4. 取 $\overline{A_1A_2}$ 的中點 S

5. 連 $\overline{AS}$ 即爲所求



發現：我們用同樣方式畫出另外兩條過頂點等周線，發現三條過頂點等周線竟然交於同一點，使用 *G S P*軟體把三角形的三頂點任意移動，發現三條等周線仍然交於一點，於是，我們想是不是每一個三角形都有如此現象呢？老師告訴我們可以嘗試用國中課程所學的幾何推理的方式，加以證明。.

(二) 通過頂點的三條等周線交於同一點

已知 $\overline{CQ}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{AS}$ 爲 ΔABC 的三條過頂點等周線。

令 $\overline{CQ}$ 、 $\overline{BP}$ 交於 O點（如圖 1 所示），現在我們要證明 $\overline{AS}$ 也必定通過 O點。

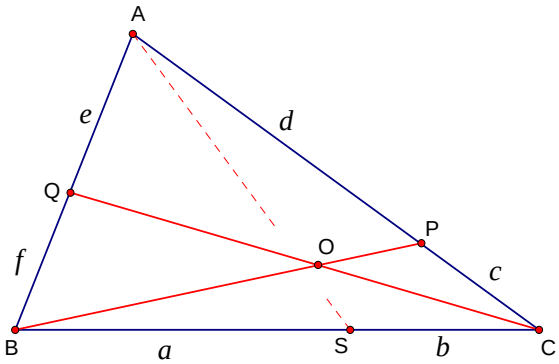


圖 1：$\overline{CQ}$、$\overline{BP}$、$\overline{AS}$ 分別為 ΔABC 的三條過頂點等周線

令 $\overline{SB}=a$、$\overline{SC}=b$、$\overline{CP}=c$、$\overline{AP}=d$、$\overline{AQ}=e$、$\overline{BQ}=f$，

因爲 $d+c+b=\frac{1}{2}$周長，$d+c+e=\frac{1}{2}$周長，所以 $e=b$，

同理可知： $d=a$ 、 $f=c$ 。

先作 $\overrightarrow{AO}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 S'，如下圖 2

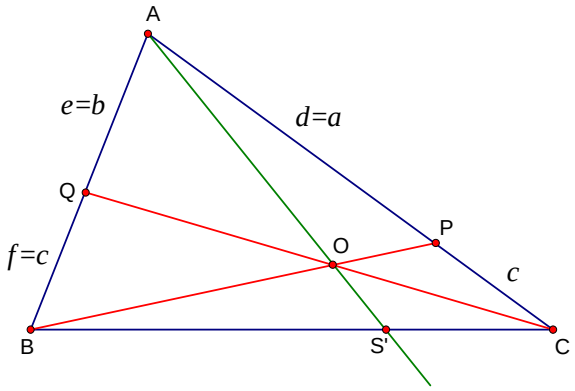


圖 2：假設 $\overrightarrow{AO}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 S'

則： $\frac{\Delta ABO\text{面積}}{\Delta ACO\text{面積}}=\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}}$ ---------- <1>

$\frac{\Delta BCO\text{面積}}{\Delta ABO\text{面積}}=\frac{c}{a}$ ---------- <2>

$\frac{\Delta ACO\text{面積}}{\Delta BCO\text{面積}}=\frac{b}{c}$ ---------- <3>

<1>×<2>×<3> 可推得 $1=\frac{b}{a}\times\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}}$

所以 $\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}}=\frac{a}{b}$，由圖 1 知 $\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}}=\frac{a}{b}$，所以 $\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}}=\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}}$，又 S 和 S'兩點都在 $\overline{BC}$ 上

所以 $S'=S$，即 $\overline{AS}$ 通過 O 點。

討論：**對任意三角形，通過頂點的三條等周線必交於同一點。**我們已探討三角形過頂點的等周線，那如果是在三角形的邊上任意給定一點 P，那麼過 P 點的等周線又有什麼特殊性質呢？

二、通過三角形邊上任意指定點 P 如何作出等周線？這些等周線又有哪些性質呢？

(一) 作圖方法(以 P 點在 $\overline{BC}$ 上爲例)

1. 用前一部分的方法作過頂點等周線 $\overline{AS}$ 。
2. 當 P 點在 $\overline{SC}$ 上時，如圖 3，在 $\overline{AB}$ 上取點 Q，使 $\overline{AQ}=\overline{PS}$ 。
3. 當 P 點在 $\overline{SB}$ 上時，如圖 4，在 $\overline{AC}$ 上取點 Q，使 $\overline{AQ}=\overline{PS}$ 。
4. 連 $\overline{PQ}$ 即爲所求。

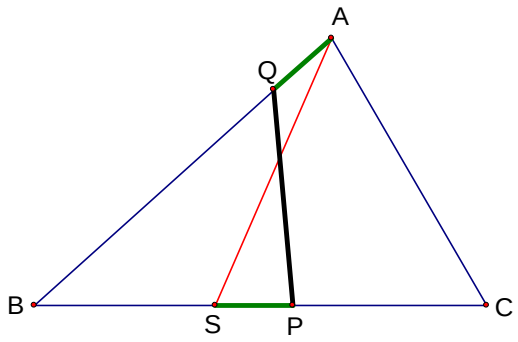


圖 3：P 在 $\overline{SC}$ 上所得到的等周線 $\overline{PQ}$

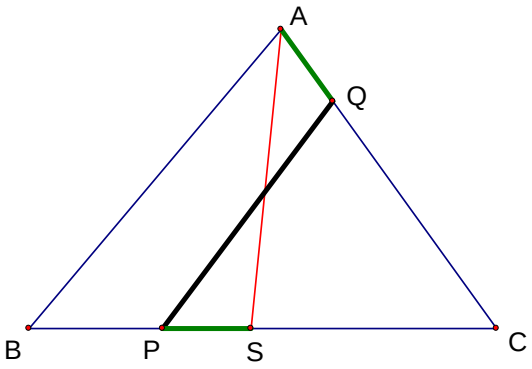


圖 4：P 在 $\overline{SB}$ 上所得到的等周線 $\overline{PQ}$

用同樣方式畫出多條等周線後，我們發現其中有一條十分特殊的等周線，如圖 5 的 $\overline{PQ}$ ，ΔPBQ 呈一個等腰三角形，此時 $\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$周長 ，這樣的等周線 $\overline{PQ}$ 對 $\angle B$ 具有對稱性。在研究中我們把它稱之爲 $\angle B$ 的**基本等周線**或頂點 B 的**基本等周線**，同理，在圖 6 中，$\overline{CP}=\overline{CQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$周長，$\overline{PQ}$ 也稱爲 $\angle C$ 的基本等周線或頂點 C 的基本等周線。

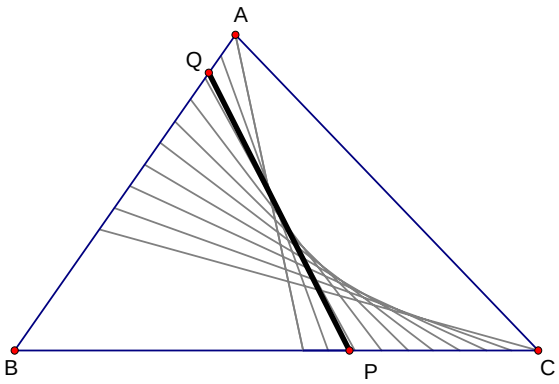


圖 5：$\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$ 周長時，$\overline{PQ}$ 為 $\angle B$ 的基本等周線

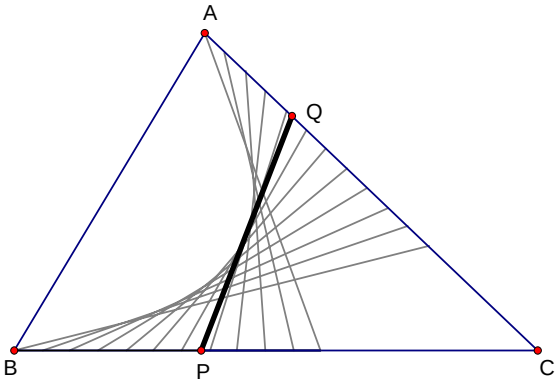
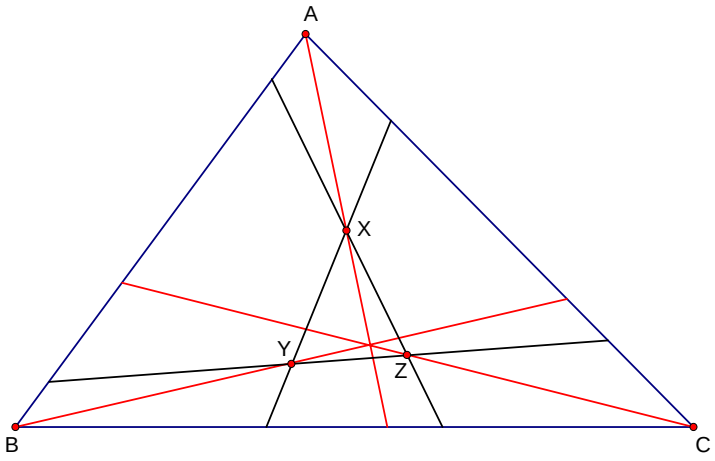


圖 6：$\overline{CP}=\overline{CQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$ 周長時，$\overline{PQ}$ 為 $\angle C$ 的基本等周線

我們把 ΔABC 的三條基本等周線(黑色)和三條過頂點的等周線(紅色)畫在一起，如下圖：

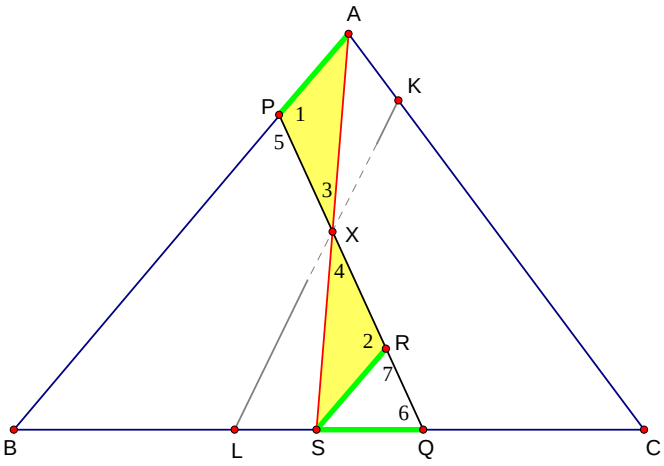


發現：

1. 過 A 點等周線會和 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的基本等周線三線交於一點 X。
   過 B 點等周線會和 $\angle A$ 、 $\angle C$ 的基本等周線三線交於一點 Y。
   過 C 點等周線會和 $\angle B$ 、 $\angle A$ 的基本等周線三線交於一點 Z。
2. 上述的交點位置，看起來很像是各頂點等周線(紅色)的中點。
3. 利用 *GSP* 軟體把三角形三頂點隨意移動，發現上述的現象依然存在，這些現象是任意三角形都具備的性質嗎？

(二) 基本等周線與其他等周線的關係

已知 $\overline{PQ}$ 是 $\angle B$ 的基本等周線， $\overline{AS}$ 是通過頂點 A 的等周線， $\overline{PQ}$ 、 $\overline{AS}$ 相交於點 X， $\overline{LK}$ 是 $\angle C$ 的基本等周線，現在我們要證明點 X 是 $\overline{AS}$ 的中點。



過 S 作一條與 $\overline{AB}$ 平行的直線，設此直線與 $\overline{PQ}$ 交於 R 點，

因爲 $\overline{PB}=\overline{QB}$ ， $\angle 5=\angle 6$ ， 又 $\angle 5=\angle 7$ (同位角)， 所以 $\angle 6=\angle 7$ ， $\overline{SR}=\overline{SQ}$ ，

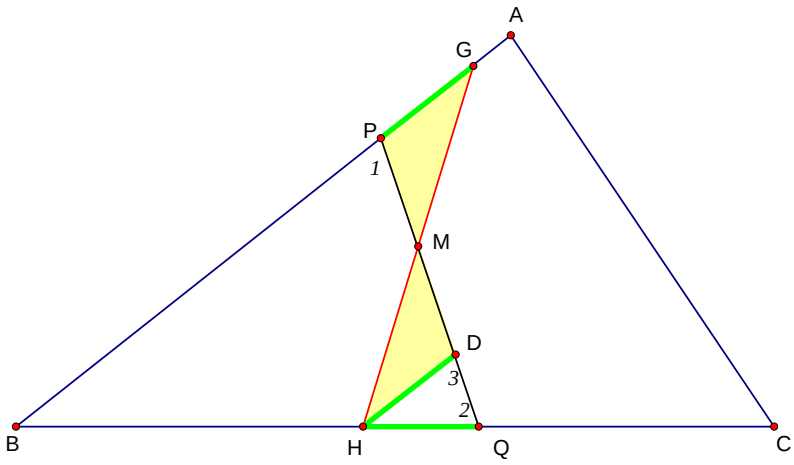
又 $\overline{SQ}=\overline{AP}$，所以 $\overline{SR}=\overline{AP}$，再加上 $\angle 3=\angle 4$(對頂角)， $\angle 1=\angle 2$(內錯角)

得 $\Delta RXS\cong\Delta PXA$， $\overline{AX}=\overline{SX}$。因此，$\overline{AS}$ 與基本等周線的交點位置是 $\overline{AS}$ 的中點 X。

同理可證：$\angle C$ 的基本等周線 $\overline{LK}$，也和 $\overline{AS}$ 交於 $\overline{AS}$ 的中點 X。

討論：

1. 一條過頂點的等周線和另兩角的基本等周線，三線交於同一點，而且這個交點即是過頂點等周線的中點。
2. 後來我們想，如果把 $\overline{AS}$ 換成其他沒有通過頂點的等周線 $\overline{GH}$，是否還是會被基本等周線平分呢？如下圖，等周線 $\overline{GH}$ 兩端點在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上，$\overline{PQ}$ 是 $\angle B$ 的基本等周線，M 是 $\overline{GH}$ 和 $\overline{PQ}$ 的交點，我們以同樣方法可以證明 M 點還是 $\overline{GH}$ 的中點。

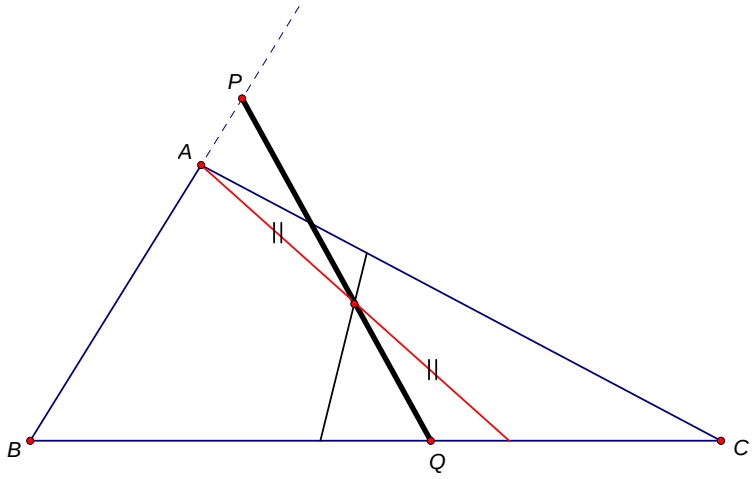


爲了方便敘述，我們把 ΔABC 的等周線 $\overline{GH}$，依其位置分成三種：

1. 若一等周線 $\overline{GH}$ 兩端點在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，則我們稱 $\overline{GH}$ 爲 $\angle A$ 的等周線。
2. 若一等周線 $\overline{GH}$ 兩端點在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上，則我們稱 $\overline{GH}$ 爲 $\angle B$ 的等周線。
3. 若一等周線 $\overline{GH}$ 兩端點在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 上，則我們稱 $\overline{GH}$ 爲 $\angle C$ 的等周線。

討論：

1. ΔABC 中，同一角的等周線中點都會落在該角的基本等周線上。
2. 基本等周線作圖時，必須在三角形的邊上各取 $\frac{1}{4}\Delta ABC$ 周長，所以當 ΔABC 的某個邊長比 $\frac{1}{4}$ 周長短的時候，就會有基本等周線跑到三角形外面的情形發生。如下圖：



$\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$ 周長，因爲 $\overline{AB}<\frac{1}{4}\Delta ABC$ ，所以 P 點跑到 $\overline{AB}$ 的延長線上， $\overline{PQ}$ 不再是 $\angle B$ 的等周線。但是經過類似的討論，可以知道這樣的 $\overline{PQ}$ 仍具備 $\angle B$ 基本等周線的性質，因此當 $\angle B$ 的基本等周線不存在時，我們就用這樣的 $\overline{PQ}$ 來代替 $\angle B$ 的基本等周線。

在討論完過三角形邊上任意指定一點 P 的等周線後，我們就要面對最困難的主題了：如果 P 點變成一個任意移動的點，那麼要如何畫出過 P 點的等周線呢？

三、通過任意指定一點 P，要怎麼作出等周線？這些等周線有什麼特殊的性質呢？

對於任意指定點 P，可能作出不只一條的等周線，但只要用相同方法分別作出 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的等周線就可以了，而我們以下的說明都以 $\angle B$ 爲例。

(一) 將 ΔABC 放在座標平面上，觀察 $\angle B$ 的等周線群

我們畫出許多條 $\angle B$ 的等周線後，爲了進一步探討它們的性質，所以就利用基本等周線的對稱性質來觀察，我們以 $\angle B$ 的基本等周線 $\overline{DE}$ 爲 x 軸，$\angle B$ 的分角線爲 y 軸，如下圖。

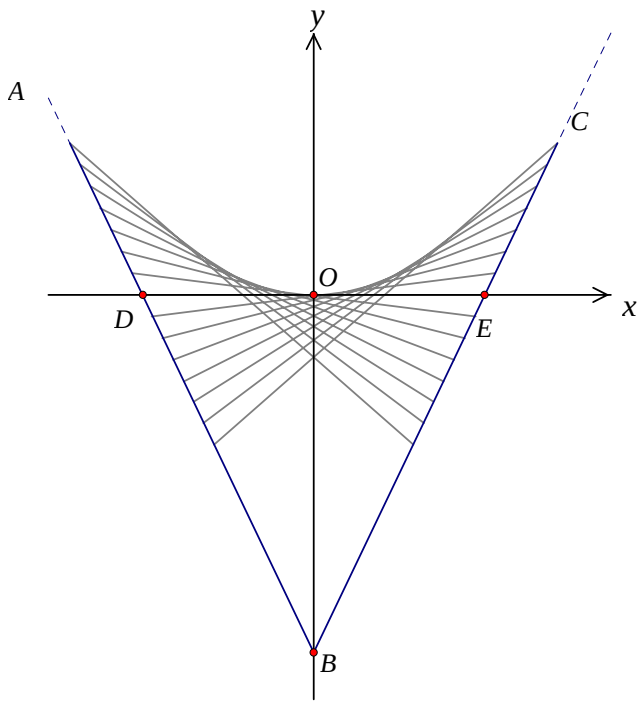


圖 7：畫出 ∠B 的等周線群後，仔細觀察

仔細觀察後，我們覺得這些等周線好像繞著一個點旋轉。爲了求證真的有那一點存在，我們作出幾條等周線的中垂線(綠色)，如圖 8。

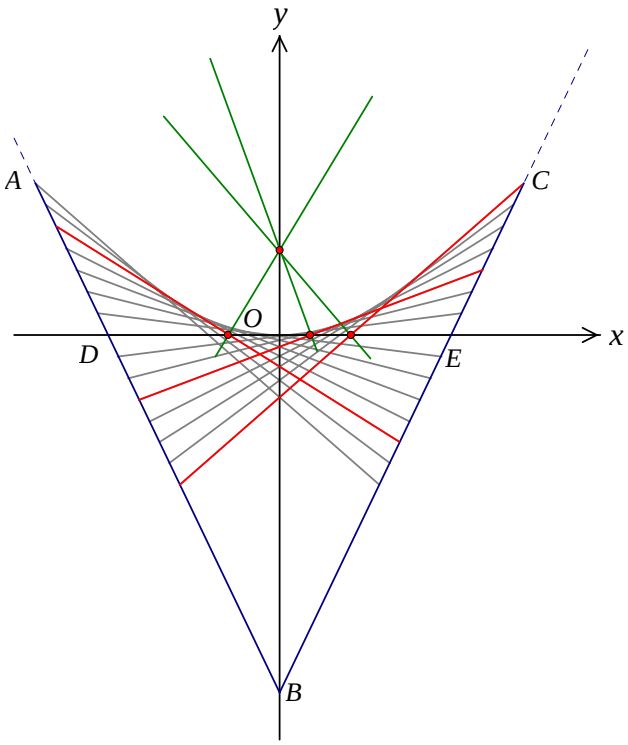


圖 8：等周線的中垂線交於同一點

發現：我們所畫出的三條等周線的中垂線(綠色)交於 y 軸上的同一點，如果這是等周線的普遍性質，對我們的問題＜等周線作圖＞，將會有很大的幫助。

(二) $\angle B$的等周線段之中垂線皆交於同一點

以$\angle B$的等周線爲例，現在我們要證明是否等周線的中垂線與 y 軸的交點都相同。

如圖 9，已知$\overline{PQ}$爲$\angle B$的一條等周線，M 是$\overline{PQ}$的中點，$\overline{PQ}$的中垂線交 y 軸於 F 點，

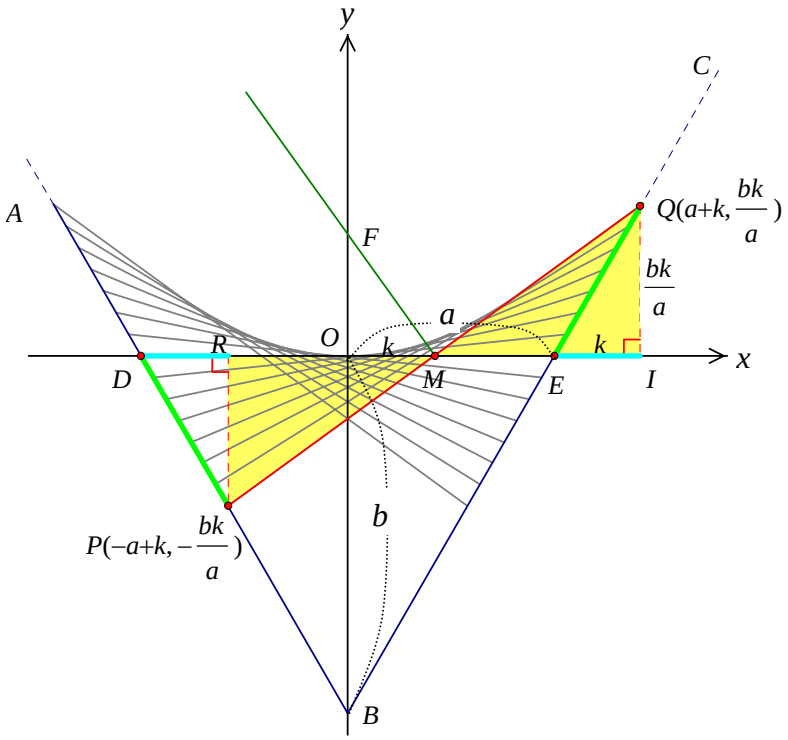


圖 9：等周線段的中垂線與 y 軸的交點

分別過 Q、P 二點作與 x 軸垂直的直線，交 x 軸於點 I、R 二點。

令 $\overline{DO}=\overline{EO}=a$ ， $\overline{BO}=b$ ， $\overline{IE}=k$，其中 a、b、k 都是正數

所以 $D(-a, 0)$、 $E(a, 0)$、 $B(0, -b)$，現在要求出 F 點的座標。

因爲 $\overline{PR}//\overline{QI}$ ，且 $\overline{PM}=\overline{QM}$ ，所以 $\Delta RPM\cong\Delta IQM$

因爲 $\overline{OB}//\overline{QI}$ ，所以 $\Delta QIE\sim\Delta BOE$ ， $\overline{QI}:\overline{EI}=\overline{OB}:\overline{OE}$ ， $\overline{QI}:k=b:a$

$\overline{QI}=\frac{bk}{a}$ ，因此 Q 點座標爲$(a+k, \frac{bk}{a})$，P 點座標爲$(-a+k, -\frac{bk}{a})$

由 P、Q 兩點座標可推得$\overline{PQ}$的中點 M 座標爲$(k, 0)$， $\overline{MO}=k$， $\overline{MI}=a-k+k=a$

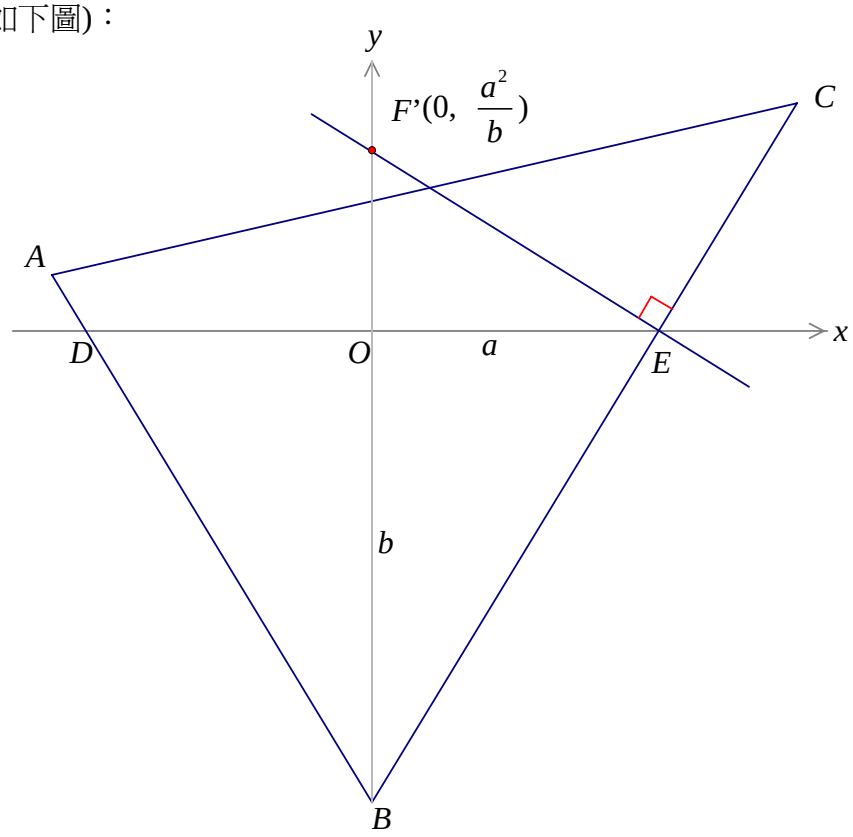
因爲 $\Delta FOM\sim\Delta MIQ$ ，所以 $\overline{FO}:\overline{OM}=\overline{MI}:\overline{QI}$ ，所以 $\overline{FO}:k=a:\frac{bk}{a}$ ， $\overline{FO}=\frac{a^2}{b}$

所以 F 點座標爲$(0, \frac{a^2}{b})$。

討論：因爲我們所推得的 F 點座標$(0, \frac{a^2}{b})$並不會因 k 值的變化而受影響，所以我們可以得

到一個結論：$\angle B$的等周線之中垂線交於同一點，而這點位於$\angle B$的角平分線上，即是圖中的 F 點我們稱這個點爲$\angle B$等周線的**旋轉中心**。

後來我們猜測如果通過點 E 作與 $\overline{BC}$ 垂直的直線，交 y 軸於 F'，是否此點和旋轉中心是同一點呢？(如下圖)：



因爲 $\Delta F'OE \sim \Delta EOB$ (子母相似)

所以 $\overline{F'O} : a = a : b$， $\overline{F'O} = \frac{a^2}{b}$，所以 $F'=F$

結論：**從基本等周線端點作$\angle B$兩邊的垂線與 y 軸的交點，則交點和旋轉中心是同一點。**

在發現此結論後，對於任意指定點 P，我們便可輕易畫出過 P 點的等周線。

(三) 通過三角形內部任意指定點 P，如何作出 $\angle B$ 的等周線？

作圖方法：(如圖 10)

1. 作 $\angle ABC$ 的分角線 L。
2. 畫出 $\angle B$ 的基本等周線，交 $\angle B$ 的兩邊於 D、E 兩點。
3. 過 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線交直線 L 於 F 點(旋轉中心)。
4. 連 $\overline{PF}$ ，以 $\overline{PF}$ 爲直徑畫圓，交 $\overline{DE}$ 於 M 點。(有一點兩點或不存在)
5. 作 $\overrightarrow{PM}$ ，若 $\overrightarrow{PM}$ 與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 各有一個交點，則 $\overline{PM}$ 就是 $\angle B$ 的等周線。

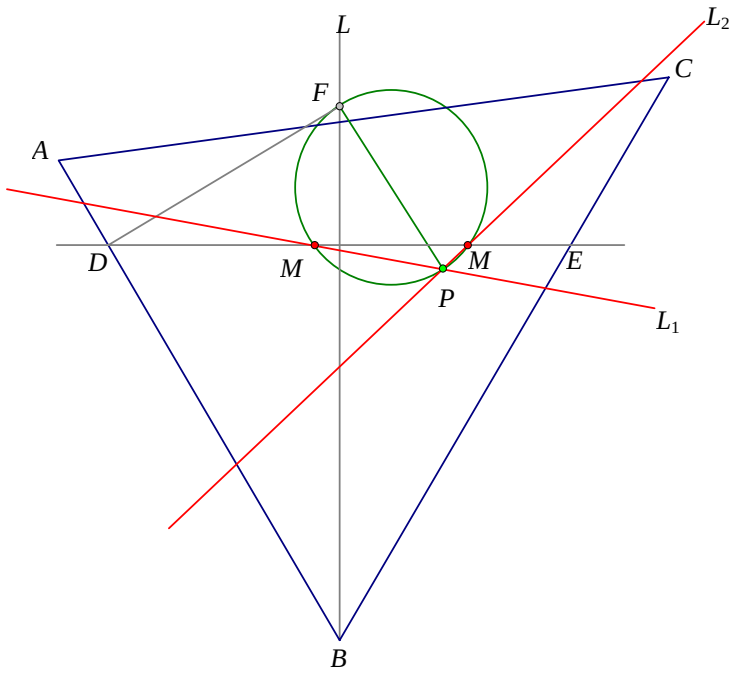


圖 10：通過任一指定點 P，針對 $\angle B$ 作等周線

討論：

1. 對於指定點 P，上面已經作出 $\angle B$ 的等周線，再用相同方法對 $\angle A$、$\angle C$ 作等周線就可作出過 P 點所有的等周線了。
2. 上面的作圖步驟 4，M 點可能有一個、兩個或不存在，作圖步驟 5，$\overrightarrow{PM}$ 與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 也可能沒交點，因此針對 $\angle B$ 所作 ΔABC 的等周線結果可能是一條、二條或根本沒有。如何由 P 點的位置，來決定 $\angle B$ 的等周線的數量呢？
3. 任意給一指定點 P，針對 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 都作完等周線後，最多是幾條？如何由 P 點的位置，來決定 $\angle B$ 的等周線的總數量呢？這一連串的問號，即是我們下一研究的主題！

四、當 P 點的位置任意改變時，通過 P 點等周線數量會如何變化？

在上一節，我們對於任意指定點 P 作過 P 點的等周線的時候，發現會影響過 P 點等周線數量的因素有兩項：

1. M 點的數量。也就是當我們將 P 點與旋轉中心 F 相連接時，以 $\overline{PF}$ 爲直徑的圓與基本等周線的交點。
2. 我們畫出的 $\overrightarrow{PM}$ 與 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 是否相交。如圖 10，L_1 是$\angle B$ 的等周線，但 L_2 與 $\overline{BC}$ 沒交點，所以不是$\angle B$ 的等周線。

(一) 如圖 10，當 P 點在 $\overline{DE}$ 下方時，以 $\overline{FP}$ 爲直徑的圓，和 $\overline{DE}$ 一定會有兩個交點 M，將 P 點慢慢往上移動，到達 $\overline{DE}$ 的上方後，兩個 M 點會越來越靠近，到最後就會只有一個 M 點，此時如果 P 點再往上移動，就沒有交點 M 了。於是我們便想：如果把只能構出一點 M 的 P 點畫出，應該會有很大的幫助，畫出一些這樣的 P 點後，加以觀察，我們覺得那些 P 點連起來很像一條曲線，於是我們便用 *GSP* 軟體把 P 點的軌跡畫出。

作法：(如圖 11)

1. 用前一節的方法作出$\angle B$的基本等周線 $\overline{DE}$ 和$\angle B$的分角線 L，並作出旋轉中心 F。
2. 在 $\overline{DE}$ 上取一動點 M，作過點M且垂直 $\overline{DE}$ 的直線 L_1。
4. 連 $\overline{FM}$ ，作 $\overline{FM}$ 的中垂線交 L_1 於 Q。
5. 以 Q 爲圓心， $\overline{FQ}$ 爲半徑畫圓，再將半徑 $\overline{FQ}$ 延長一倍，得到直徑另一端點 P。
6. 作點 M 移動時，點 P 的軌跡即爲所求。

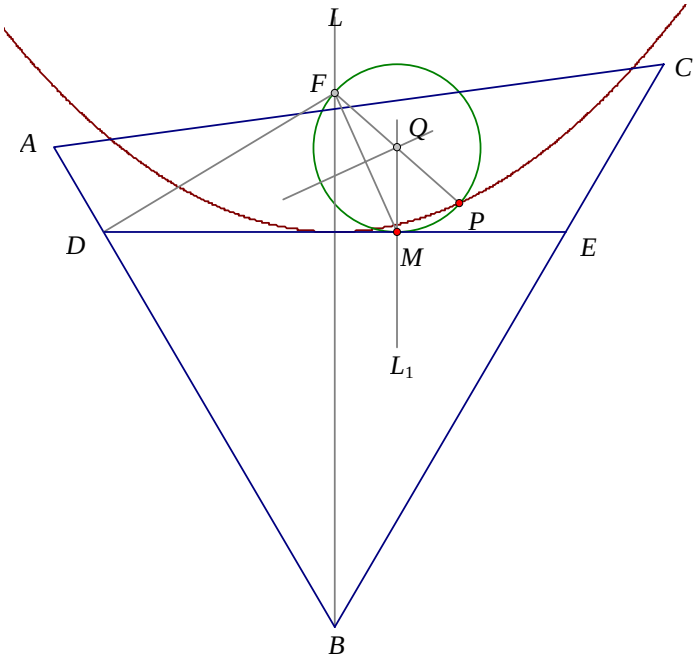


圖 11：以 $\overline{FP}$ 為直徑的圓剛好與基本等周線 $\overline{DE}$ 相切時，所得的 P 點軌跡

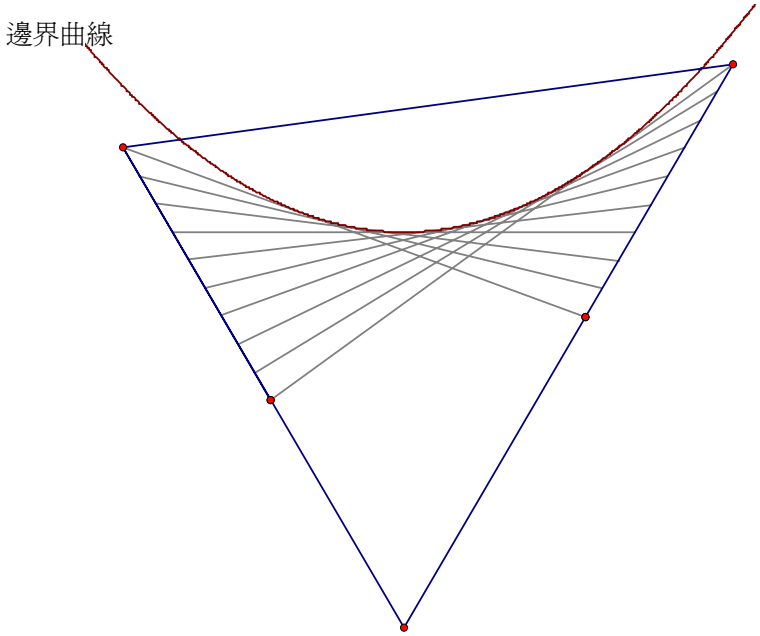
討論：(針對 $\angle B$ 的討論)

1. 若 P 點在曲線內部(曲線上方)，則圓不會與 $\overleftrightarrow{DE}$ 相交，所以沒有 M 點。
2. 若 P 點在曲線外部(曲線下方)，則圓與 $\overleftrightarrow{DE}$ 會有兩個交點，所以有二個 M 點。
3. 若 P 點在曲線上，則圓與 $\overleftrightarrow{DE}$ 正好相切，所以有一個 M 點。

因爲這條曲線有上述的性質，所以我們稱這個曲線爲**邊界曲線**。

(二) 邊界曲線與等周線的關係

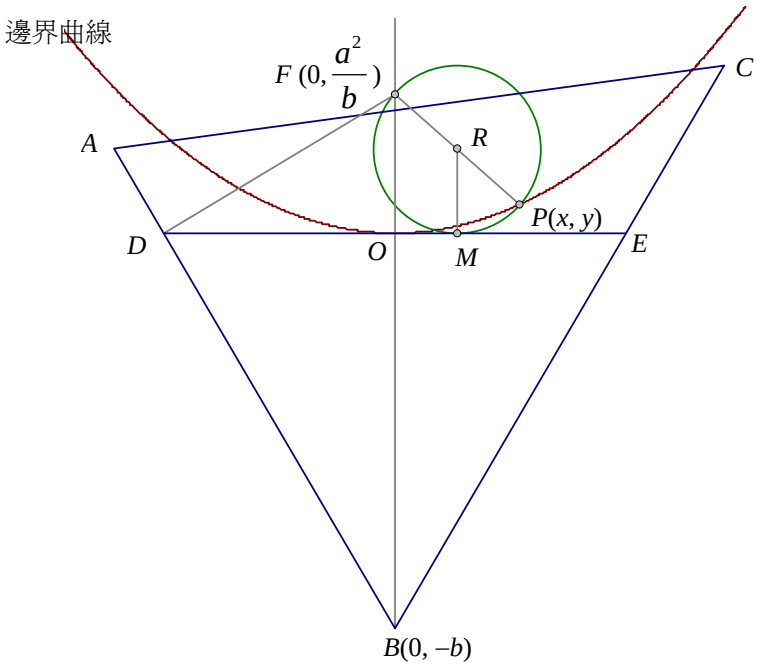
在我們畫出邊界曲線和許多條等周線後，發現我們所畫出的等周線皆與此邊界曲線相切，如下圖，是否同一角的等周線皆與這一角的邊界曲線相切呢？



這一發現如果是真的，對於如何判斷等周線數量將會有很大的幫助，爲了確定邊界曲線和等周線的關係，我們必須分別求出等周線與邊界曲線的方程式。

使用圖 9 的座標系統，令 $\overline{OE}=\overline{OD}=a$ ， $\overline{BO}=b$，則 F 點座標爲$(0,\ \frac{a^2}{b})$，令 $P(x,y)$ 邊界曲線上的任一點，現在要求 x、y 的關係式，即是邊界曲線的方程式。

如下圖，R 點爲 $\overline{\mathrm{PF}}$ 的中點，所以圓心 R 的點座標$(\frac{x}{2},\frac{\frac{a^2}{b}+y}{2})$，所以 M 點的座標爲$(\frac{x}{2},0)$。

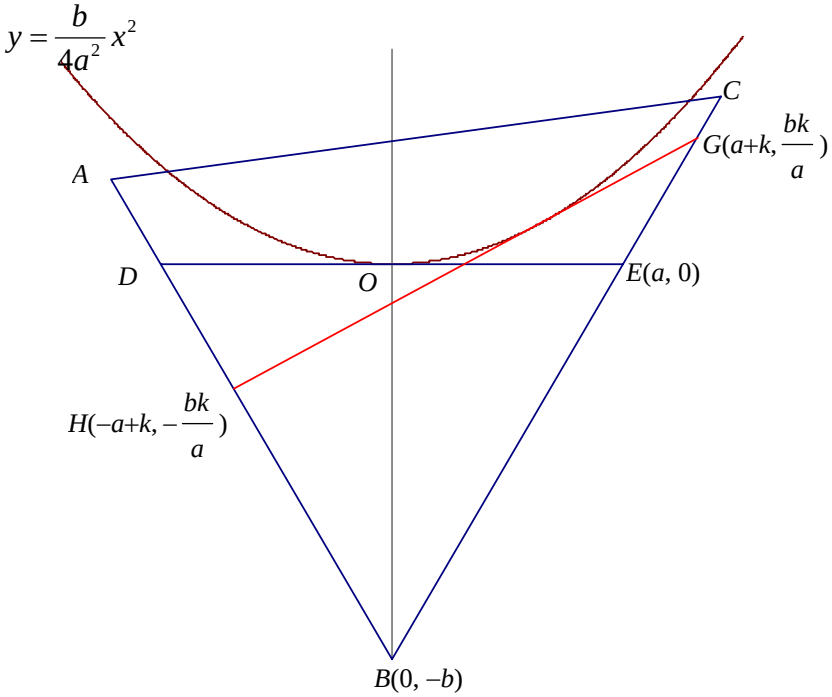


因爲 $\overline{FR}^2 = \overline{MR}^2$ ，所以 $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{-\frac{a^2}{b} + y}{2})^2 = (\frac{\frac{a^2}{b} + y}{2})^2$

展開整理，最後我們得出一關係式： $y = \frac{b}{4a^2} x^2$

這是一個二次函數，而函數圖形是一個拋物線，所以我們可以知道這條曲線是一條拋物線，以後，在我們的研究裡，邊界曲線也稱爲**邊界拋物線**。

接下來我們要求出等周線的方程式，如下圖， $\overline{GH}$ 是一條 $\angle B$ 的等周線，



參考圖 9，令 G 點座標爲 $(a+k,\frac{bk}{a})$ ，H 點座標爲 $(-a+k,-\frac{bk}{a})$

由 G、H 兩點座標可得，$\overleftrightarrow{GH}$ 的方程式爲： $y=\frac{bk}{a^2}x-\frac{bk^2}{a^2}$

用我們上面所推得的邊界曲線方程式和 $\overleftrightarrow{GH}$ 的直線方程式解聯立方程式。

$$\begin{cases} y=\frac{bk}{a^2}x-\frac{bk^2}{a^2} \\ y=\frac{b}{4a^2}x^2 \end{cases}$$ ， 得 $x^2-4kx+4k^2=0$ ，即 $(x-2k)^2=0$ ，

$x=2k$ (二重根)， $y=\frac{bk^2}{a^2}$

等周線與邊界曲線只有一個交點($2k$, $\frac{bk^2}{a^2}$)，且等周線與 y 軸(拋物線的對稱軸)不平行，所以等周線與邊界拋物線相切。

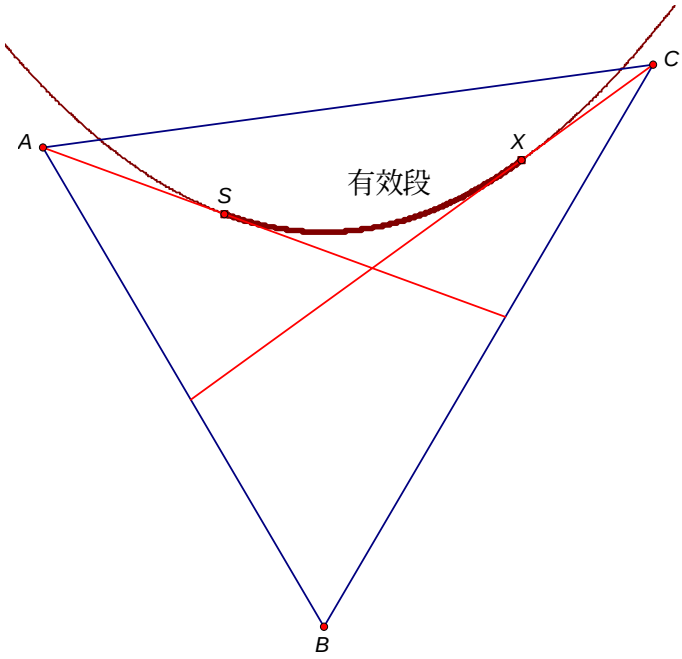
討論：

1. $\angle B$的邊界曲線是一條拋物線，而且此拋物線與$\angle B$的每一條等周線都相切。
2. 因爲$\angle B$的每一條等周線都和$\angle B$的邊界拋物線相切，所以通過 P 點的等周線也就是過 P 點與邊界拋物線相切的直線，於是等周線數量問題便可用「切線數量」來取代。

(三) 通過一個指定點 P，$\angle B$的等周線數量會如何變化？

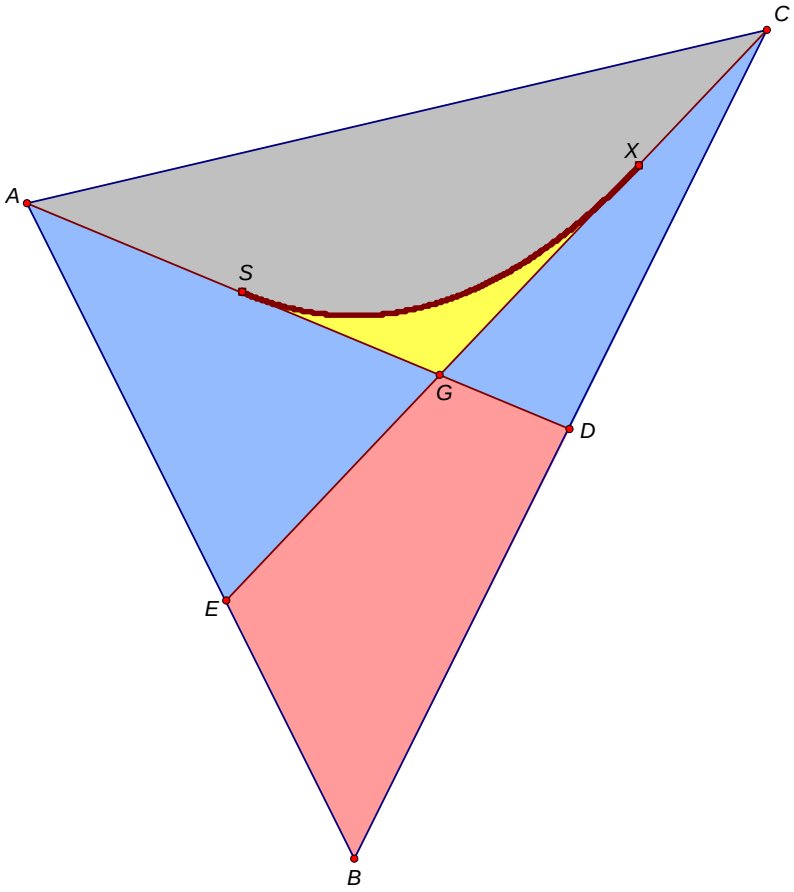
上一節我們知道等周線和邊界拋物線皆相切，所以只要找出和邊界拋物線相切的線，並加以驗證，就能決定過 P 點的等周線的數量了。

因爲之前我們判斷 $\overleftrightarrow{PM}$ 是不是一條等周線，是根據 $\overleftrightarrow{PM}$ 與 $\angle B$ 兩邊的交點是否在 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 上，而當兩交點不在 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 兩邊上時，是因爲超出 A 點或 C 點，所以我們畫出過頂點 A 和 C 的等周線作爲邊界，令這兩條頂點等周線，分別和邊界拋物線相切於 S 和 X，當 $\overleftrightarrow{PM}$ 的切點在 S~X 的曲線段上時，$\overleftrightarrow{PM}$ 就是 $\angle B$ 的等周線，而如果切點超出 S~X 段，則 $\overleftrightarrow{PM}$ 就不是等周線。所以我們把 S~X 段稱爲**曲線有效段**。



現在我們先以 $\angle B$ 爲例，畫出過點 A、點 C 的等周線，再畫出 $\angle B$ 的邊界曲線有效段，於是我們可以把三角形分成幾塊區域，如下圖，再來探討當 P 點在區域中(不含邊界)會有幾條等周線通過。以下探討的等周線數量皆是 $\angle B$ 的等周線。

1. 當 P 點在黃色區域中，過 P 點與曲線有效段有兩條切線，所以有兩條等周線通過。
2. 當 P 點在藍色區域中，過 P 點與曲線有效段只有一條切線，所以過 P 點只能有一條等周線通過。
3. 當 P 點在紅色區域中，過 P 點與曲線有效段沒有切線，所以無法有等周線通過。
4. 當 P 點在灰色區域中，過 P 點與曲線無法產生切線，所以當然也不會有等周線。



5. P 點在各區域邊界上時(不含端點)

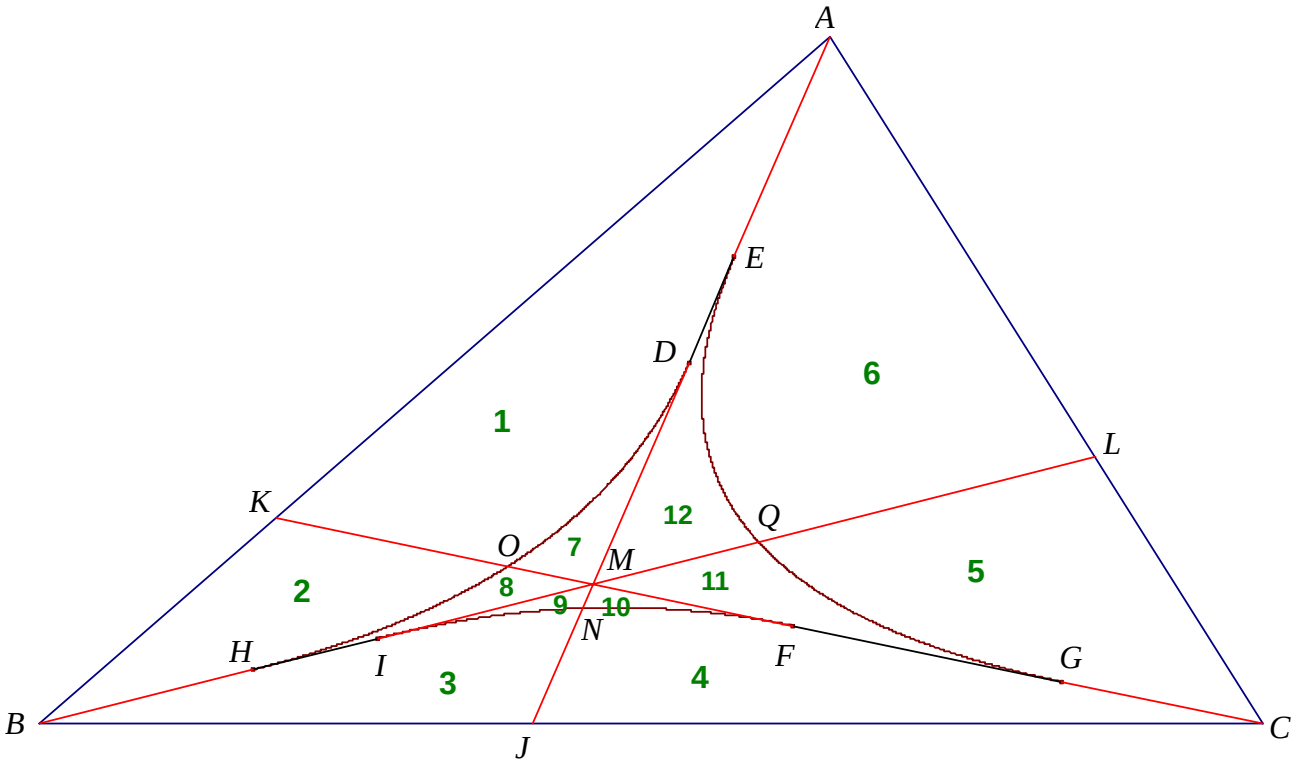
P 點位置	曲線有效段 S~X	$\overline{SG}$	$\overline{XG}$	$\overline{EG}$	$\overline{DG}$	$\overline{AE}$	$\overline{CD}$	$\overline{AS}$	$\overline{CX}$	$\overline{EB}$	$\overline{DB}$	$\overline{AC}$
等周線數量	1	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0

6. 當 P 點在各端點上時：

P 點位置	G點	A點	C點	D點	E點	X點	S點	B點
等周線數量	2	1	1	1	1	1	1	0

(四) 通過一個指定點 P， ΔABC 的全部等周線數量，會如何變化？

針對一個角討論完等周線的數量變化後，我們要探討當三個方向皆考慮時，過 P 點的等周線總數量，於是我們將三個角的三條曲線有效段畫出，再畫出三條過頂點的等周線，其中 $\overline{AJ}$ 、$\overline{CK}$ 、$\overline{BL}$ 是 3 條通過頂點的等周線，分別與曲線有效段相切於 D、E、G、F、I、H，六個切點連成三個線段，$\overline{IH}$、$\overline{DE}$ 、$\overline{FG}$ 這三條線段分別是頂點等周線的一部份，這三條線段與三條曲線有效段圍成一個封閉區域，我們稱它爲包絡區，P 是一個指定點，若直線 T 通過 P 點而且與曲線效段相切，則直線 T 就是 ΔABC 的等周線，如下圖：



現在我們繼續用前面的方法判斷，過 P 點等周線數量：

1. 當 P 點在 1 區時，過 P 點與曲線有效段 E~G 有一條切線，與另兩條曲線有效段無法產生切線，所以過 P 點只有一條等周線。同理，當 P 點在 2、3、4、5、6 區時，過 P 點也只有一條等周線。
2. 當 P 點在 7 區時，過 P 點與曲線有效段 D~H 有兩條切線，與曲線有效段 E~G 有一條切線，除此之外再無其他切線，所以過 P 點有三條等周線。同理，當 P 點在 8、9、10、11、12 區時，過 P 點也有三條等周線。

3. 當 P 點在各區域邊界上時(不含端點)

P 點位置	曲線有效段	$\overline{DM}$ $\overline{NM}$	$\overline{IM}$ $\overline{QM}$	$\overline{FM}$ $\overline{OM}$	$\overline{DE}$ $\overline{HI}$ $\overline{FG}$	$\overline{AE}$ $\overline{BH}$ $\overline{GC}$	$\overline{NJ}$ $\overline{OK}$ $\overline{PL}$
等周線數量	2	3	3	3	2	1	1

5. 當 P 點在端點上

P 點位置	M	D I F	N O Q	E H G	A B C	J K L
等周線數量	3	2	2	1	1	1

6. 綜合以上討論，對整個 ΔABC 而言，通過一個指定點 P，等周線的數量爲：

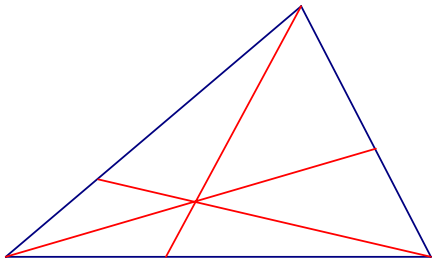
(1) P 在包絡區內部(不含邊界)：有三條等周線

(2) P 在包絡區邊界(不含三個尖端點)：有兩條等周線。

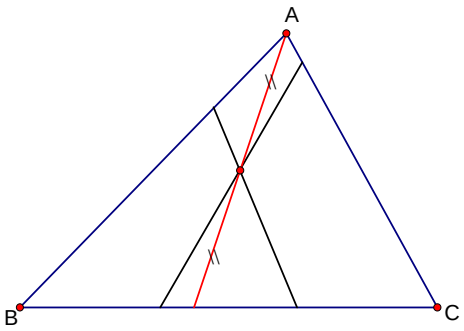
(3) P 在其他位置(即三個尖端點和包絡區外部)：有一條等周線。

伍、結論:

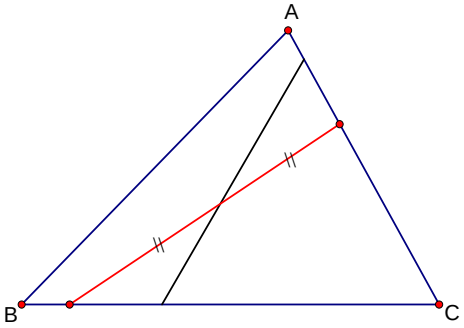
一、 通過三角形三頂點所作的三條等周線交於同一點。



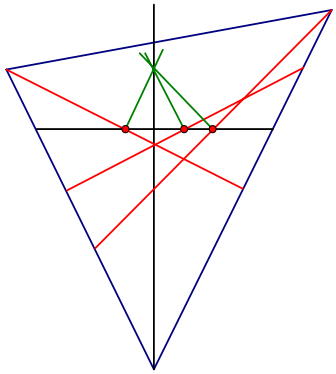
二、 一條過頂點等周線會和另兩角的基本等周線交於同一點，而且這個交點是頂點等周線中點。



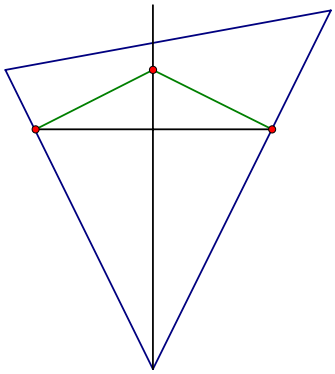
三、 同一角的基本等周線會平分同一角的等周線。



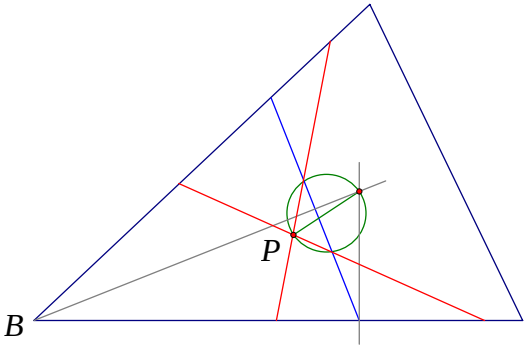
四、 同一角的等周線的中垂線會交此角的分角線(*y* 軸)於同一點（旋轉中心）。



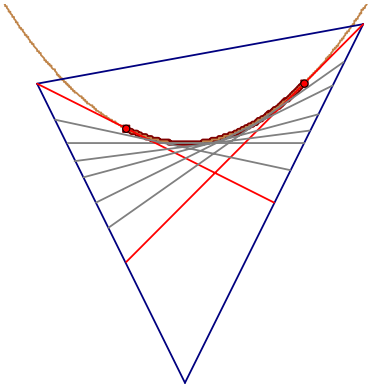
五、 過基本等周線兩端點與其角的兩邊作垂線也會通過旋轉中心。



六、 對於任意指定點 P，可以使用圖 10 的方法，作出 ΔABC 的等周線，過 P 點作 $\angle B$ 的等周線，可能兩條、一條或者沒有。



七、 同一角的等周線皆與同一角的邊界曲線相切，而且切點一定落在曲線有效段。

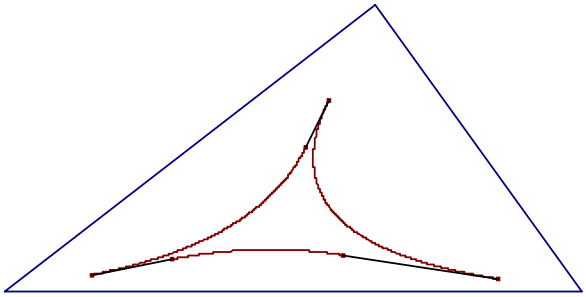


八、 對 ΔABC 而言，通過一個指定點 P，等周線的數量爲：

1. P 在包絡區內部(不含邊界)：有三條等周線

2. P 在包絡區邊界(不含三個尖端點)：有兩條等周線。

3. P 在其他位置(即三個尖端點和包絡區外部)：有一條等周線。



陸、展望：

一、 如果周長分割時不是平分，而是依 a：b 分割，如何作周長分割線？分割線數量如何變化？

二、 針對四邊形、五邊形……，任給一點 P，過 P 點如何作周長分割線？分割線如何變化？

三、 周長分割線和面積分割線有什麼關聯？哪些直線可以同時分割周長和面積？

柒、參考資料：

一、 94 年第 2 次國中基測試題

二、 國中數學課本 南一版第 3 冊第 4 章 平面座標與二元一次方程式的圖形

三、 國中數學課本 南一版第 4 冊第 3 章 一元二次方程式

四、 國中數學課本 南一版第 4 冊第 4 章 三角形的全等與尺規作圖

五、 幾何辭典

六、 2006 台灣國際科展作品：凸 N 邊形等分面積線數量之分布探索

七、 中華民國中小學科展第 45 屆作品：同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究

評　　語

030415　三角形周長等分線的作圖與數量分佈

對等周綫作了詳盡的分析，確實刻割了三角形內部任一點的等周綫數量與具體畫法，引用到的概念亦在國中的數學課程範圍內。作品中提及等周綫的各種性質十分有趣，能活用這些性質並找出規律性，表達亦清晰，是一份值得鼓勵的好作品。