中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030414

怎樣分才公平三角形面積兩等分的尺規作圖

學校名稱： 金門縣立金沙國民中學

作者：	指導老師：
國三 張至皓	張惠群
國三 何玉婉	洪湧泉
國三 何知一	
國三 張城豪	

關 鍵 詞：測量、三角形的重心

怎麼分才公平
三角形面積兩等分的尺規作圖

壹、摘要

傳統尺規作圖除了明確的作法，更必須設法證明以強化其嚴謹性；本研究除了利用尺規作圖對「過一定點將三角形面積二等分」詳加探討外，並借重動態幾何軟體GSP，藉由實測數據作直接驗證。

貳、研究動機

國中數學第五冊探討到重心時，提到：三角形任一中線將此三角形分成兩個等積的三角形。那時候老師問我們一個問題：可不可以畫出一條不是三角形中線的直線將三角形面積兩等分？因此，我們決定一起研究這個問題，並嘗試應用電腦GSP軟體—在幾何證明之外，加上實測的驗證方法，看看在平面上過任一定點可否作一直線將平面上的三角形面積兩等分。

參、研究目的

一、利用國中所學數學知識，由不同的思考方向和角度，尋求解決問題的方法。

二、藉由GSP軟體輔助傳統尺規作圖，並透過實際操作或實測，驗證相關結果，有效突破傳統尺規作圖上之瓶頸，將資訊融入在學習當中。

三、探討給定一個三角形及一個定點，可否利用尺規作圖作出通過該定點的一條直線，將該三角形分割成二個面積相等的三角形。

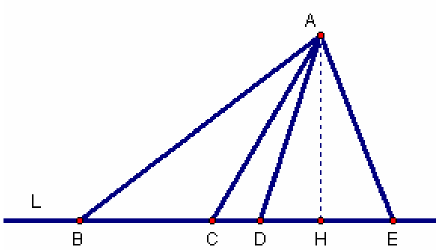
肆、研究設備與器材：

紙、筆、直尺、圓規、電腦、GSP軟體。

伍、研究過程或方法：

一、先備知識：

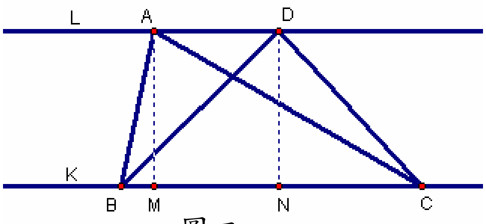
(一)等底同高(如下圖一)或同底等高(如下圖二)的兩個三角形面積相等。



圖一

如果 $\overline{BC}=\overline{DE}$

則▲ABC=$\frac{1}{2}\bullet\overline{BC}\bullet\overline{AH}=\frac{1}{2}\bullet\overline{DE}\bullet\overline{AH}$=▲ADE

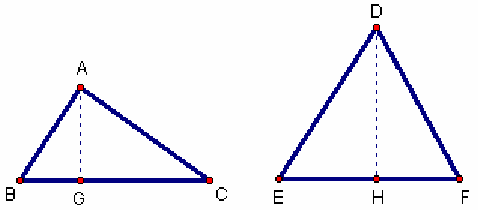


圖二

如果 L//K

則▲ABC=$\frac{1}{2}\bullet\overline{BC}\bullet\overline{AM}=\frac{1}{2}\bullet\overline{BC}\bullet\overline{DN}$=▲DBC

(二)兩個三角形如果有一組內角對應相等，則此兩個三角形的面積比等於夾此對應角兩邊乘積的比。



圖三

如左圖三，已知△ABC 與△DEF 中，∠B=∠E，

則▲ABC: ▲DEF=($\overline{AB}\bullet\overline{BC}$)：($\overline{DE}\bullet\overline{EF}$)

Pf. 分別作 $\overline{AG}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{DH}\perp\overline{EF}$ (如圖)

則△ABG~△DEH(AA 相似)

∴ $\overline{AG}$ ： $\overline{DH}=\overline{AB}$ ： $\overline{DE}$

可設 $\overline{AG}=k\overline{AB}$ ， $\overline{DH}=k\overline{DE}$

▲ABC：▲DEF=($\frac{1}{2}\bullet\overline{BC}\bullet\overline{AG}$)：($\frac{1}{2}\bullet\overline{EF}\bullet\overline{DH}$)

=($\overline{BC}\bullet k\overline{AB}$)：($\overline{EF}\bullet k\overline{DE}$)

=($\overline{AB}\bullet\overline{BC}$)：($\overline{DE}\bullet\overline{EF}$)

二、依定點 P 與△ABC 的位置關係分類討論：

(一)定點 P 在△ABC 的一頂點上。

【已知】△ABC，P 與 B 重合。

【求作】過 P 作一直線將△ABC 兩等分。

【作法】1. 取 $\overline{AC}$ 的中點 D。

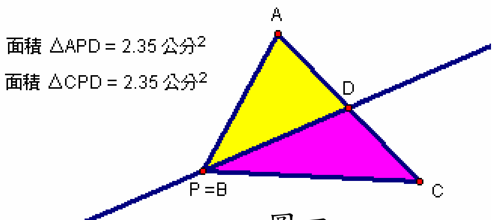
2. 連接 $\overline{PD}$ ，則直線 PD 即為所求。(如下圖四)

【證明】1. ∵P 點與 B 點重合，且 D 是 $\overline{AC}$ 的中點，

∴ $\overline{PD}$ 是 $\overline{AC}$ 上的中線。

2. ∴▲APD=▲CPD=$\frac{1}{2}$▲ABC …(等底同高)，

∴直線 PD 合於所求。



圖四

(二)定點 P 在△ABC 一邊的中點上。

【已知】△ABC，P 是 $\overline{BC}$ 的中點。

【求作】過 P 作一直線將△ABC 兩等分。

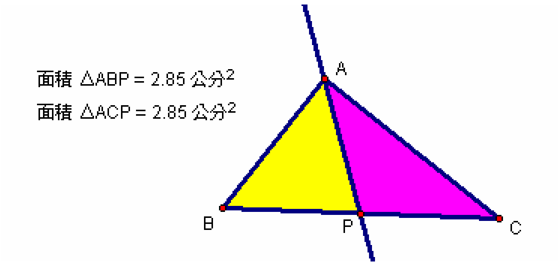
【作法】1. 連接 $\overline{AP}$ 。

2. 則直線 AP 即為所求。(如下圖五)

【證明】1. ∵ $\overline{AP}$ 是 $\overline{BC}$ 上的中線。

2. ∴▲ABP=▲ACP=$\frac{1}{2}$▲ABC　…(等底同高)，

∴直線 AP 合於所求。



圖五

(三)定點 P 在△ABC 的一邊上，但不是頂點也不是邊的中點。

【已知】△ABC，P 是 $\overline{BC}$ 上的一點，但 P≠B，P≠C，P 也不是 $\overline{BC}$ 的中點。

【求作】過 P 作一直線將△ABC 兩等分。

【作法】1. 連接 $\overline{AP}$ 。

2. 取 $\overline{BC}$ 的中點 D，並過 D 作 $\overline{DE}$ // $\overline{AP}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E。(註 1)

3. 連接 $\overline{PE}$ ，則直線 PE 即為所求。(如下圖六)

【證明】1. 連接 $\overline{AD}$ 。(如下圖七)

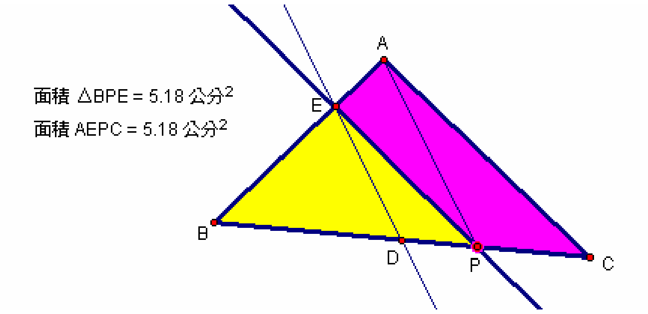
2. ∵ $\overline{DE}$ // $\overline{AP}$ ，∴▲ADE=▲PED　…(同底等高)。

3. 又∵ $\overline{AD}$ 是中線，

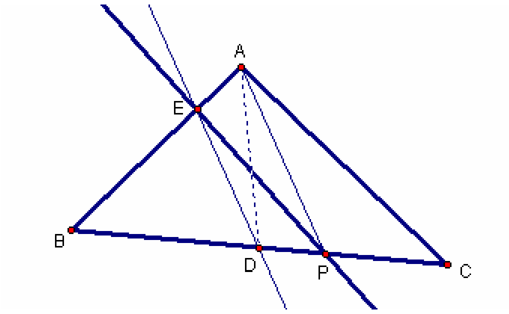
∴▲ABD=$\frac{1}{2}$▲ABC

4. 則▲BPE=▲BED+▲PED=▲BED+▲ADE=▲ABD=$\frac{1}{2}$▲ABC

5. ∴直線 PE 合於所求。

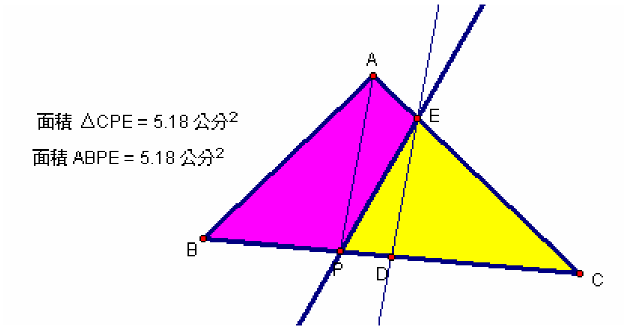


圖六



圖七

(註 1)若 P 在 D 的左邊，則過 D 作 $\overline{DE}$ // $\overline{AP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E，如下圖八，則 $\overline{PE}$ 仍合於所求。



圖八

(四)定點 P 在△ABC 的內部。

【已知】△ABC，P 是△ABC 的內部任一點。

【求作】過 P 作一直線將△ABC 兩等分。

【作法】1. 取 $\overline{AC}$ 的中點 D，連接 $\overline{BD}$ 、 $\overline{AP}$ 、 $\overline{DP}$ 。

2. 取一點 E，使得 E、P 均在 $\overline{AB}$ 的同一側，作∠BAE=∠PAD，∠ABE=∠APD。

3. 過 P 作 $\overline{PF}$ // $\overline{AC}$ 交 $\overline{AE}$ 於 F。

4. 再過 P、E、F 三點作一外接圓 O，交 $\overline{AB}$ 於 G、H。

5. 連接 $\overline{GP}$ 並交 $\overline{AC}$ 於 I，

6. 則直線 GPI 即為所求。(如下圖九)

【證明】1. 在△ABE 與△APD 中，

2. ∵∠BAE=∠PAD，∠ABE=∠APD

3. ∴△ABE~△APD (AA 相似)。

4. ∴ $\overline{AB}$ ： $\overline{AP}$ = $\overline{AE}$ ： $\overline{AD}$ ， 即 $\overline{AB}\bullet\overline{AD}=\overline{AP}\bullet\overline{AE}$ ……①

5. $\because \overline{PF} // \overline{AC}$，∴∠AIP=∠FPG(同位角)

6. 連接$\overline{GE}$，則∠FEG=$\frac{1}{2}$弧 GF=∠FPG （對同弧的圓周角）

7. 由 5.和 6.得∠AIP=∠FEG

8. 又∠IAP=∠EAG …(∵∠PAD=∠BAE)

9. ∴△IAP~△EAG (AA 相似)。

10. ∴$\overline{AI}:\overline{AE}=\overline{AP}:\overline{AG}$，即$\overline{AP}\bullet\overline{AE}=\overline{AI}\bullet\overline{AG}$……②

11. 由①、②得$\overline{AI}\bullet\overline{AG}=\overline{AB}\bullet\overline{AD}$

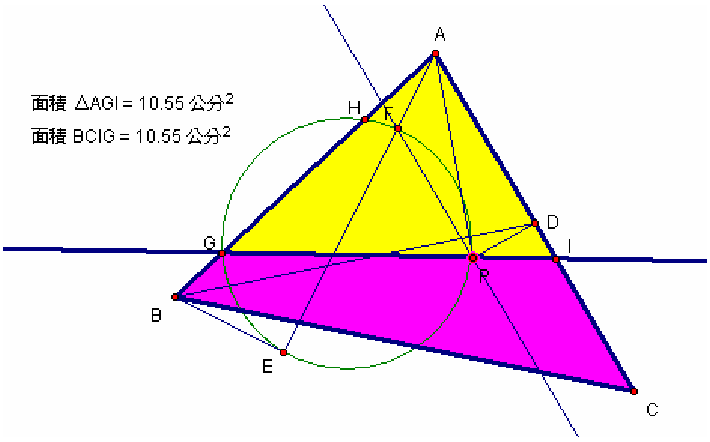
12. 則▲AIG:▲ABD=($\overline{AI}\bullet\overline{AG}$):($\overline{AB}\bullet\overline{AD}$)(先備知識(二))

=1：1

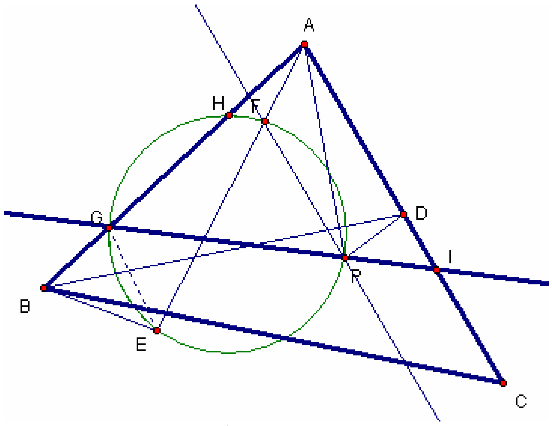
13. ∵$\overline{BD}$是中線，∴▲ABD=$\frac{1}{2}$▲ABC

14. ∴▲AIG=▲ABD=$\frac{1}{2}$▲ABC

15. ∴直線 GPI 合於所求。(如下圖十)



圖九



圖十

(五)定點 P 在△ABC 任一邊的延長線上。

【已知】△ABC，P 是$\overline{BC}$的延長線上的一點。

【求作】過 P 作一直線將△ABC 兩等分。

【作法】1. 取 $\overline{AC}$ 的中點 D，連接 $\overline{BD}$ 、 $\overline{AP}$ 、 $\overline{DP}$ 。

2. 取一點 E，使得 E、P 分別在 $\overline{AB}$ 的不同側，作∠BAE=∠PAD，∠ABE=∠APD。

3. 過 P 作 $\overline{PF}$ // $\overline{AC}$ 交 $\overrightarrow{EA}$ 的延長線於 F。

4. 再過 P、E、F 三點作一外接圓 O，交 $\overline{AB}$ 於 G。

5. 連接 $\overline{GP}$ 並交 $\overline{AC}$ 於 H，

6. 則直線 GHP 即為所求。(如下圖十一)

【證明】1. 在△ABE 與△APD 中，

2. ∵∠BAE=∠PAD，∠ABE=∠APD

3. ∴△ABE~△APD (AA 相似)。

4. ∴ $\overline{AB}$ ： $\overline{AP}$ = $\overline{AE}$ ： $\overline{AD}$ ， 即 $\overline{AB} \bullet \overline{AD} = \overline{AP} \bullet \overline{AE}$ ……①

5. 延長 $\overline{AC}$ 交圓 O 於 I、J 兩點

6. ∵ $\overline{PF}$ // $\overline{AC}$ ，∴弧 JP=弧 IF …(平行線截等弧)

7. 連接 $\overline{GE}$ ，則∠AHP=∠IHP

$=\frac{1}{2}$(弧 IF+弧 FP+弧 JG) …(圓內角求法)

$=\frac{1}{2}$(弧 JP+弧 FP+弧 JG) …(∵弧 JP=弧 IF)

=∠FEG …(圓周角求法)

=∠AEG

8. 又∠HAP=∠EAG …(∵∠PAD=∠BAE)

9. ∴△HAP~△EAG (AA 相似)。

10. ∴ $\overline{AH}$ ： $\overline{AE}$ = $\overline{AP}$ ： $\overline{AG}$ ， 即 $\overline{AP} \bullet \overline{AE} = \overline{AG} \bullet \overline{AH}$ ……②

11. 由①、②得 $\overline{AG} \bullet \overline{AH} = \overline{AB} \bullet \overline{AD}$

12. 則▲AGH：▲ABD=

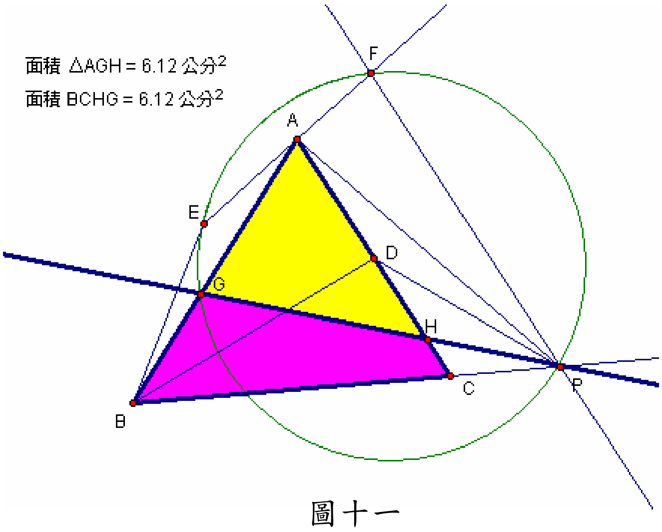
=($\overline{AG} \bullet \overline{AH}$)：($\overline{AB} \bullet \overline{AD}$) …(先備知識(二))

=1：1

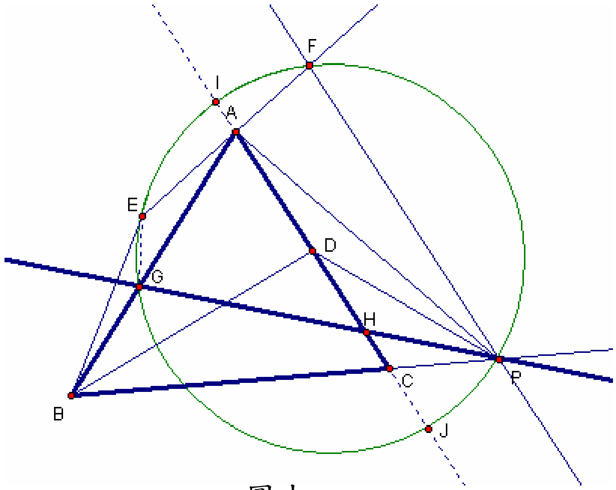
13. ∵ $\overline{BD}$ 是中線，∴▲ABD= $\frac{1}{2}$ ▲ABC

14. ∴▲AGH=▲ABD= $\frac{1}{2}$ ▲ABC

15. ∴直線 GHP 合於所求。(如下圖十二)



圖十一



圖十二

(六)定點 P 在△ABC 的外部，且 P 不在任一邊的延長線上。

【已知】△ABC，P 是△ABC 外部的任一點，但 P 不在任一邊的延長線上。

【求作】過 P 作一直線將△ABC 兩等分。

【作法】1. 取 $\overline{AC}$ 的中點 D，連接 $\overline{BD}$ 、 $\overline{AP}$ 、 $\overline{DP}$ 。

2. 取一點 E，使得 E、P 分別在 $\overline{AB}$ 的不同側，作∠BAE=∠PAD，∠ABE=∠APD。

3. 過 P 作 $\overline{PF}$ // $\overline{AC}$ 交 $\overrightarrow{EA}$ 的延長線於 F。

4. 再過 P、E、F 三點作一外接圓 O，交 $\overline{AB}$ 於 G。

5. 連接 $\overline{GP}$ 並交 $\overline{AC}$ 於 H，

6. 則直線 GHP 即為所求。(如下圖十三)

【證明】1. 在△ABE 與△APD 中，

2. ∵∠BAE=∠PAD，∠ABE=∠APD

3. ∴△ABE~△APD (AA 相似)。

4. ∴ $\overline{AB}$ ： $\overline{AP}$ = $\overline{AE}$ ： $\overline{AD}$ ， 即 $\overline{AB}\bullet\overline{AD} = \overline{AP}\bullet\overline{AE}$ ……①

5. 延長 $\overline{AC}$ 交圓 O 於 I、J 兩點

6. ∵ $\overline{PF}$ // $\overline{AC}$ ，∴弧 JP=弧 IF …(平行線截等弧)

7. 連接 $\overline{GE}$ ，則∠AHP=∠IHP

$=\frac{1}{2}$(弧 IF+弧 FP+弧 JG) …(圓內角求法)

$=\frac{1}{2}$(弧 JP+弧 FP+弧 JG) …(∵弧 JP=弧 IF)

=∠FEG …(圓周角求法)

=∠AEG

8. 又∠HAP=∠EAG　　…(∵∠PAD=∠BAE)

9. ∴△HAP~△EAG (AA 相似)。

10. ∴$\overline{AH}$ ： $\overline{AE}=\overline{AP}$ ： $\overline{AG}$ ， 即 $\overline{AP}\bullet\overline{AE}=\overline{AG}\bullet\overline{AH}$ ……②

11. 由①、②得 $\overline{AG}\bullet\overline{AH}=\overline{AB}\bullet\overline{AD}$

12. 則▲AGH：▲ABD

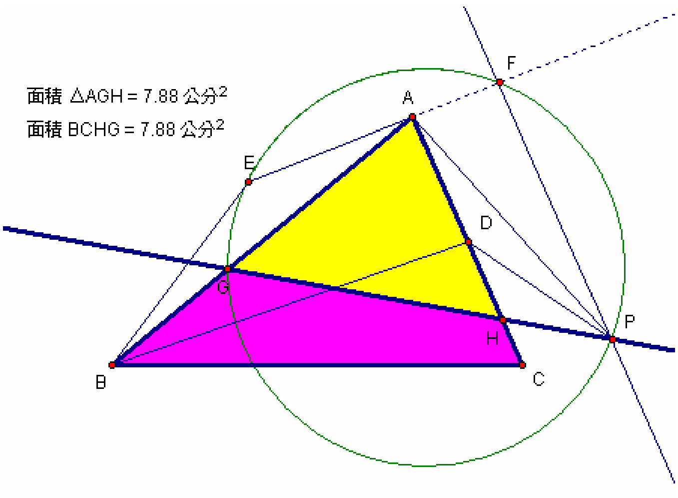
=($\overline{AG}\bullet\overline{AH}$)：($\overline{AB}\bullet\overline{AD}$)　　　…(先備知識(二))

=1：1

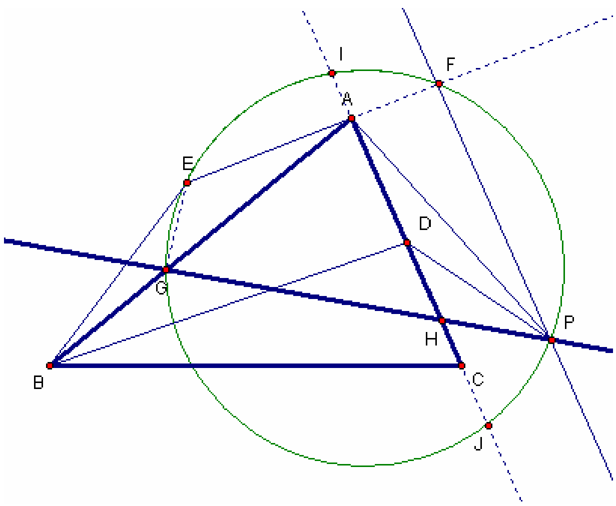
13. ∵ $\overline{BD}$ 是中線，∴▲ABD=$\frac{1}{2}$▲ABC

14. ∴▲AGH=▲ABD=$\frac{1}{2}$▲ABC

15. ∴直線 GHP 合於所求。(如下圖十四)



圖十三



圖十四

討論：(五)、(六)除了點的位置稍有不同外，作法及證明內容幾乎是一模一樣的，因此我們可以把(五)併在(六)之中，換句話說，我們可以稱(五)是(六)的特例。

陸、結論

一、以上各種尺規作圖法，都要用到「作三角形一邊上的中線，將此三角形面積兩等分」的性質。

二、(三)~(六)的尺規作圖法，都要用到「過直線外一點作該直線的平行線」的作圖。

三、(四)~(六)的尺規作圖法，都要用到「過不共線的三點作一外接圓」的作圖，以及「兩個三角形如果有一組內角對應相等，則此兩個三

角形的面積比等於夾此對應角兩邊乘積的比」的性質。

四、運用 GSP 軟體使我們輕鬆完成理論證明的驗證。

五、平面上過任意一點必可作一直線將一個三角形面積兩等分。

柒、參考資料

一、康軒版國中數學課本第二冊第 1 章、第四冊第 5 章、第五冊第 2、4 章。

二、昌爸工作坊(http://www.mathland.idv.tw/)

評　　語

030414　怎樣分才公平三角形面積兩等分的尺規作圖

1. 透過電腦 GSP 輔助作圖使圖形精確而美觀是一優點。

2. 把三角形面積兩等分的作圖在科展或其他資料中均已有討論過，而本作品中的作法似乎缺少創造性及延展性。