中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030411

趣談多邊形點數之關係

學校名稱： 縣立大里高中(附設國中)

作者：	指導老師：
國一　洪若慈	王美惠
國一　程楨惠	
國一　林蓓妤	

關 鍵 詞：數與形之規律、平面圖之點數、立體圖之點數

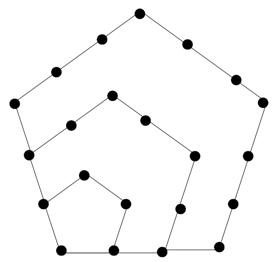
作品名稱：趣談多邊形點數之關係

摘要：

當任意多邊形每邊點數不斷增加時，總和點數應該是多少?其變化之方式又是為何呢?當圖形由平面改成立體時，其總和點數之變化是否又與平面時的變化有何關聯呢?本篇文章主要是探討多邊形在每邊點數不斷增加時，總和點數之變化情形，進而探討在三角錐、四角錐…至 m 角錐之總和點數，循序漸進的去找出數與形之規律。

壹、研究動機

在數與形之關係中，我們曾研究一個題目：在每邊點數不同時，五邊形點總點數之變化，如下圖所示。



我們可找出每邊點數為 4 時之總點數變化關係,但這並不足以滿足我們求知的欲望。因此我們想深入瞭解在每邊點數為 n 時之總點數的變化為何？甚至當它為任意多邊形且每邊點數為 n 時，總點數應為何？我們試著去找出其規律，進而探討在三維立體圖形時點數之變化情形。

貳、研究目的

尋找出多邊形在二維平面及三維立體空間時，數的規律與其變化情形

參、研究設備及器材

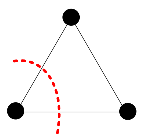
個人電腦、數位相機、不同顏色黏土、牙籤、VISO2002、WORD2003 軟體

肆、研究過程及方法

一、二維平面多邊形之點數變化：

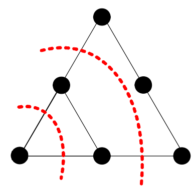
(一)、三角形點數之變化:

1、每邊點數為 2 時：三角形之總點數為：1+2=3；如圖(1)



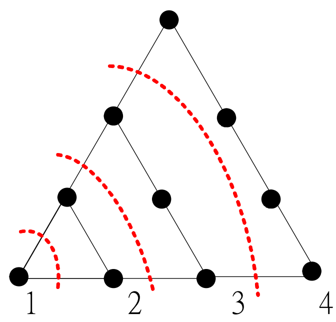
圖(1)

2、每邊點數為 3 時：三角形之總點數為 1+2 + 3 = 6；如圖(2)



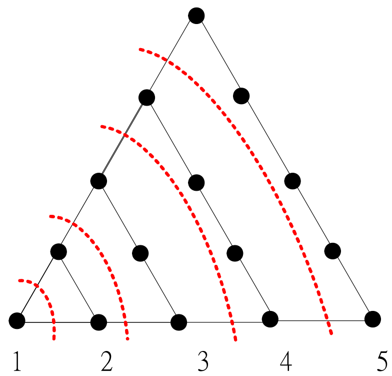
圖(2)

3、每邊點數為 4 時： 三角形之總點數為：1+ 2 +3 +4 = 10；如圖(3)



圖(3)

4、每邊點數為 5 時： 三角形之總點數為：1 + 2 +3 +4 +5= 15；如圖(4)



圖(4)

5、每邊點數為 n 時：

三角形在每邊點數為 n 時，其總點數為：1 + 2 + 3 + 4 +⋯+n

討論：由上述，從三角形中，可發現點數由 1，2，⋯n 依序增加，在小學六年級時我們曾經學過 1，2 ...到 10 加總中曾經有提到其計算方式如下：

$$S_{10} = \frac{(1+10)\times 10}{2} \quad \text{........................} \ (1)$$

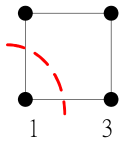
故也可推出在三角形，每邊點數為 n 時之關係為：

$$S_{p(3,n)} = \frac{(1+n)\times n}{2} \ \text{...........................} \ (2)$$

[註：$S_{p(3,n)}$ 3 是三角形，每邊點數為 n，p 是指二維平面之圖形]

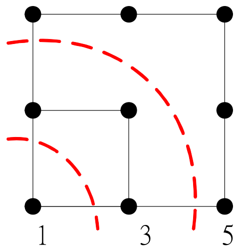
（二）、**四邊形點數之變化**

1、每邊點數為 2 時：四邊形之總點數為：1+3=4；如圖(5)



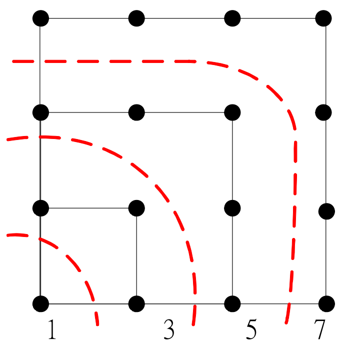
圖(5)

2、每邊點數為 3 時：四邊形之總點數為：1+ 3+ 5= 9；如圖(6)



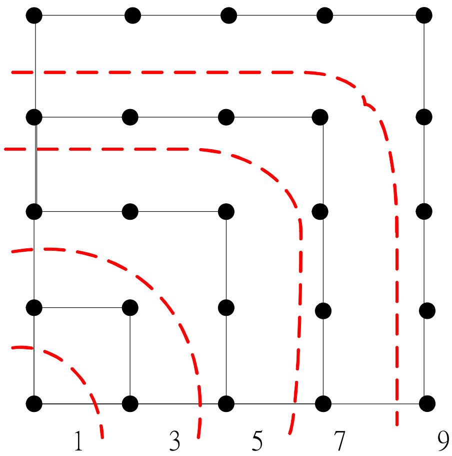
圖(6)

3、每邊點數為 4 時：四邊形之總點數為：1+3+5+7=16；如圖(7)



圖(7)

4、每邊點數為 5 時： 四邊形之總點數為：1+3+5+7+9=25；如圖(8)

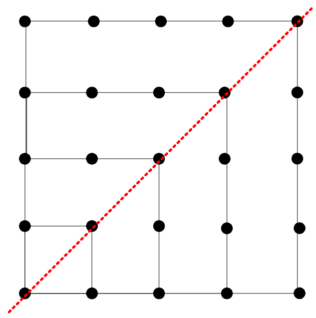


圖(8)

5、每邊點數為 n 時之總點數：

四邊形每邊點數為 n 時總點數推導如下：從這個變化中，我們想利用剛才所用總和的公式試著去做做看。

想法：在我們計算任意多邊形角度總和中，曾學過計算角度時，可以把任意多邊形分割成數個三角形。所以，在這裡我們試著將四邊形分割成 2 個三角形如圖(9)，並找出他們之間的關係。計算時我們如果用 2 個三角形去計算點數的話，可得到的式子如下：



圖(9)

$$S_n = \frac{(1+n)\times n}{2}\times 2 = n\times(n+1) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

但是，這樣的結果並不正確。在計算過程中，我們發現有一邊被重複計算過了。經過討論，我們發現此式必須將重複邊的點數扣除，且重複邊之點數為 n；修正的式子如下：

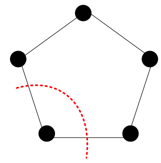
$$S_{p(4,n)} = n \times (n+1) - n$$

$$= n^2 + n - n$$
$$= n^2 \quad \text{.....................................} (4)$$

[註：$S_{p(4,n)}$ 4 是四邊形，每邊點數為 n，p 是指二維平面之圖形]

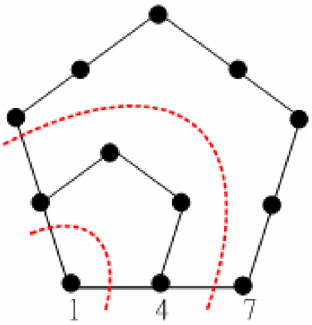
(三)、五邊形點數之變化

1、每邊點數為 2 時： 五邊形之總點數為 1+4 = 5 如圖(10)



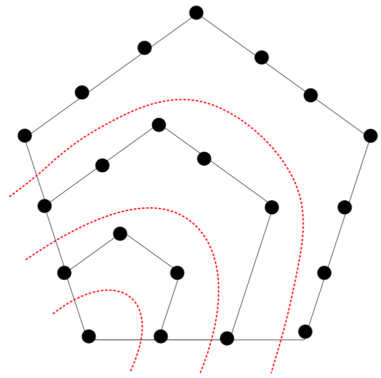
圖(10)

2、每邊點數為 3 時：五邊形之總點數為 1+4+7=12 圖(11)



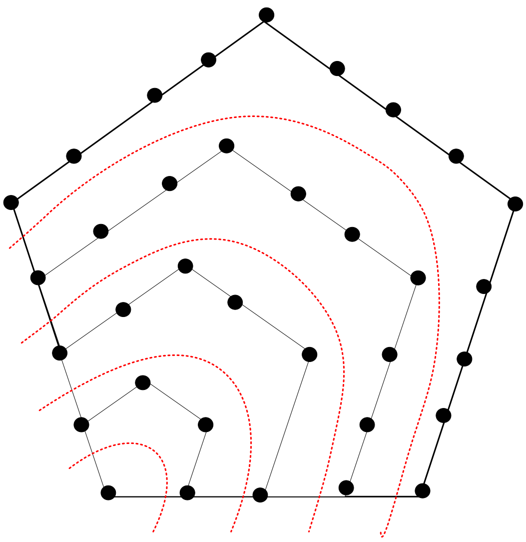
圖(11)

3、每邊點數為 4 時：五邊形之總點數為 1+4+7+10=22 如圖(12)



圖(12)

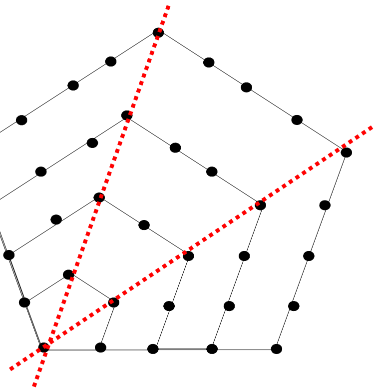
4、每邊點數為 5 時：五邊形之總點數為 1+ 4+ 7+ 10+ 13= 35 如圖(13)



圖(13)

5、每邊點數為 n 時之總點數：

五邊形每邊點數為n時之總點數，推導如下：我們試著再用前面(第2頁)所提到計算三角形的點數的方式，並將五邊形做簡單的分割。將五邊形分割成3個三角形如圖(14)。且有2個邊被重複計算過了，重複邊之點數為n，故其總點數公式推導如下：



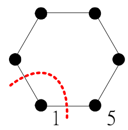
圖(14)

$$
\begin{aligned}
S_{p(5,n)} &= \frac{(n+1)\times n}{2}\times 3-2n \\
&= \frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n-2n \\
&= \frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n \text{ .... (5)}
\end{aligned}
$$

[註：$S_{p(5,n)}$ 5是五邊形，每邊點數為n，p是指二維平面之圖形]

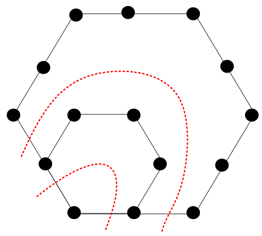
(四)、六邊形點數之變化

1、每邊點數為 2 時：六邊形之總點數為 1 +5= 6 如圖(15)



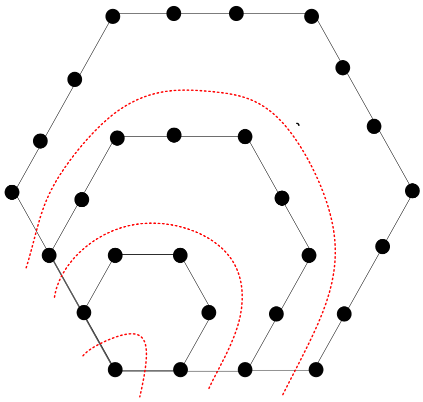
圖(15)

2、每邊點數為 3 時：六邊形之總點數為 1+5+9=15 如圖(16)



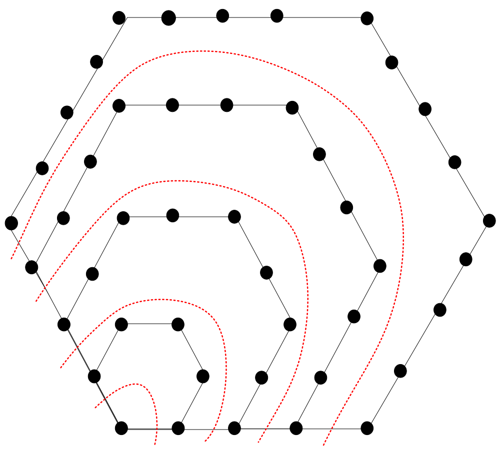
圖(16)

3、每邊點數為 4 時：六邊形之總點數為 1+5+9+13=28 如圖(17)



圖(17)

4、每邊點數為 5 時：六邊形之總點數為 1+5+9+13+17=45 如圖(18)

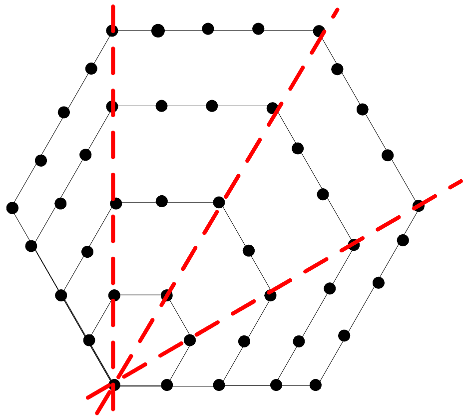


圖(18)

5、六邊形中每邊點數為 n 時之總點數推論如下：

經由上述討論結果，於六邊形時每邊點數為 n 總點數之關係。我們可順利將其公式推導出如下：首先將六邊形分割成四個三角形如圖(19)所示，我們發現，有三個邊被重複計算，此時重複邊之點數為 n。故修正後六邊形在每邊點數為 n 時，其總點數之推導如下：

$$
\begin{aligned}
S_{p(6,n)} &= \frac{(n+1)\times n}{2}\times 4-3n \\
&= (n^2+n)\times 2-3n \\
&= 2n^2+2n-3n \\
&= 2n^2-n \quad \text{......} (6)
\end{aligned}
$$



圖(19)

（五）、任意多邊形點數之變化

經由了三角形到六邊點數的推導過程中所獲得的經驗，我們可進一步探討任意多邊形中每邊點數為 n 時其總點數變化。

1、m 邊形可將其切割成 m-2 個三角形

2、此 m-2 個三角形中，被重複計算之邊數有 m-3 個

其總點數之 $S_{p(m,n)}$之關係推導如下；其中 m 代表任意多邊形邊數，n 代表每邊之點數。(如 $S_{p(4,3)}$表示為四邊形圖形，且每邊點數為 3，p 是指二維平面之圖形)

$$S_{p(m,n)} = \frac{(n+1)\times n}{2}\times(m-2)-(m-3)\times n$$

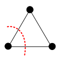
$$=\frac{(n^2+n)\times(m-2)}{2}-mn+3n$$

$$=\frac{mn^2+mn-2n^2-2n-2mn+6n}{2}$$

$$=\frac{mn^2-mn-2n^2+4n}{2} \quad \text{.....................} (7)$$

故我們可以獲得在平面圖形中：任意 m 邊形，每邊點數為 n 時，總點數之通式 $S_{p(m,n)}=\frac{mn^2-mn-2n^2+4n}{2}$。接下來我們欲討論於三維立體圖形時其點數之變化。此乃以之前推導二維平面點數之變化為基礎，更進一步探討在三角錐，四角錐…到 m 邊角錐點每邊點數為 n 時總點數之變化。

二、三維立體多邊形角錐之點數變化：

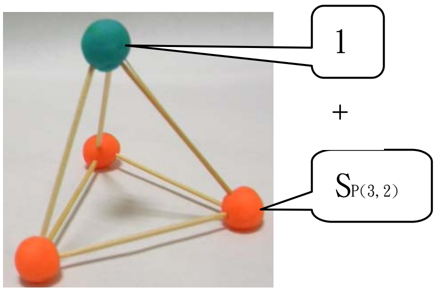
建構三維立體圖形，此乃以二維維平面組合成立體角錐之圖形。如三角錐中每邊點數為 2 時，是以● + 所建構而成，如圖(19)所示。對於角錐點數之探討，可以將我們的視野從平面拉到立體的圖形中。

(一)、三角錐之點數變化：

1、每邊點數為 2 時，如圖(19)，三角錐之總點數為；$S_{L(3,2)}=1+S_{p(3,2)}=1+3$。

［註：$S_{L(3,2)}$ 為三角形，且每邊點數為 2；

P 是指二維平面圖形；L 是指三維立體圖形］



圖(19)

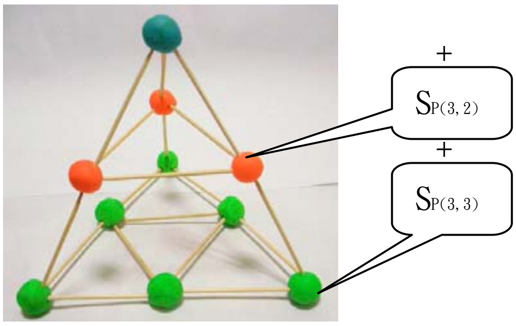
2、每邊點數為 3 時，如圖(20)，三角錐之總點數為

$S_{L(3,2)}=1+\ S_{p(3,2)}\ +S_{p(3,3)}$

$=1+3+6$

$=1+(1+2)+(1+2+3)$

1



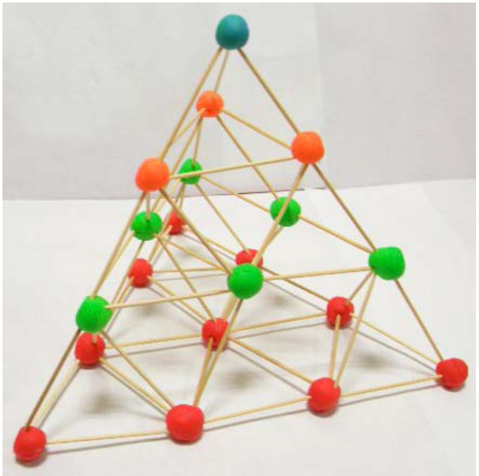
圖(20)

3、每邊點數為 4 時，如圖(21)三角錐之總點數為：

$S_{L(3,2)}=1+S_{P(3,2)}+S_{P(3,3)}+S_{P(3,4)}$

$=1+3+6+10$

$=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$



圖(21)

由上述中我們可觀察出這是由(4 個 1)、(3 個 2)、(2 個 3)及(1 個 4)所組成，我們可將這些數字排列成三角形如圖(22)所示，再將三角形旋轉兩次所得如圖(23)、(24)所示，最後將此三個三角形相同位置之值相加後，所得之數值均為 6 如圖(25)所示。故我們可發現 $1+S_{P(3,2)}+S_{P(3,3)}+S_{P(3,4)}$總和可以很容易被求出來，其總和為 $6\times10\times\frac{1}{3}$ 故我們可將式子改寫如下：

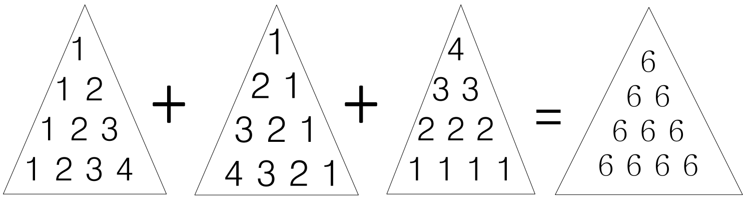
$S_{L(3,4)}=1+S_{P(3,2)}+S_{P(3,3)}+S_{P(3,4)}$

$=1+3+6+10$

$=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$

$=(4+2)\times10\times\frac{1}{3}$

［註：$S_{P(3,4)}-S_{P(3,3)}=4$］



圖(22)　　圖(23)　　圖(24)　　圖(25)

4、每邊點數為 n 時，三角錐之總點數推導如下：由上述每邊點為 4 時之推導過程中，我們可找出每邊點數為 n 時之總數關係。

$$S_{L(3,n)} = 1+S_{P(3,2)}+S_{P(3,3)}+S_{P(3,4)}+\cdots+S_{P(3,n)}$$

$$=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots[1+2+3+\ldots n]$$

$$=(n+2)\times\frac{(n+1)\times n}{2}\times\frac{1}{3}$$

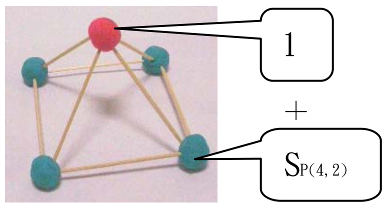
$$=\frac{(n+2)\times(n+1)\times n}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

[**註**：$S_{L(3,n)}$ 為三角形；且每邊點數為 n；L 是指三維立體圖形]

(二)、四角錐之點數變化：

1、每邊點數為 2 時，如圖(27)，四角錐之總點數為 $1+ S_{P(4,2)} =1+4$

[註 $S_{L(4,2)}$ 為四邊形，每邊點數為 2，L 是指三維立體圖形]



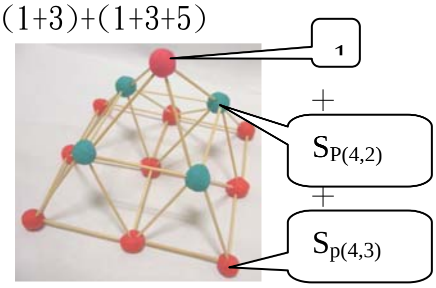
圖(27)

2、每邊點數為 3 時，如圖(28)，四角錐之總點數為

$$S_{L(4,3)}=1 + S_{P(4,2)} + S_{P(4,3)}$$

$$=1+4+9$$

$$=1+(1+3)+(1+3+5)$$



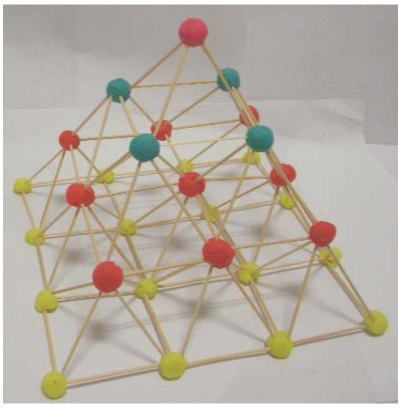
圖(28)

3、每邊點數為 4 時，如圖(29)，四角錐之總點數為

$S_{L(4,4)}=1+S_{P(4,2)}+S_{P(4,3)}+S_{P(4,4)}$

$=1+4+9+16$

$=1+(1+3)+(1+3+5)+(1+3+5+7)$



圖(29)

由上述中我們可觀察出這是由(4 個 1)、(3 個 3)、(2 個 5)及(1 個 7)所組成。我們將這些數字排成三角形如圖(30)所示，再將三角形旋轉兩次所得如圖(31)、(32)所示，最後將此三個三角形相同位置之值相加，所得之數值均為 9，如圖(33)所示。故我們可發現 $1+S_{P(4,2)}+S_{P(4,3)}+S_{P(4,4)}$總和可以很容易被求出來，其總和為 $9\times10\times\frac{1}{3}$

故我們可將式子改寫如下：

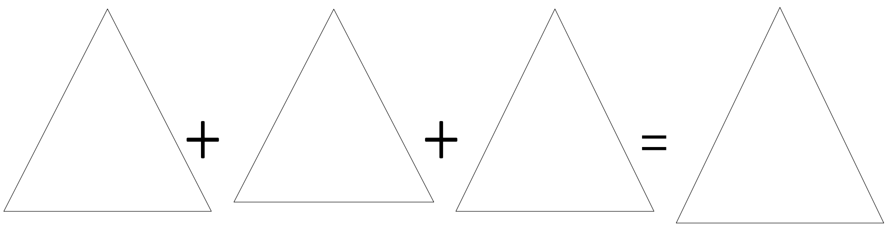
$S_{L(4,4)}=1+S_{P(4,2)}+S_{P(4,3)}+S_{P(4,4)}$

$=1+4+9+16$

$=1+(1+3)+(1+3+5)+(1+3+5+7)$

$=(7+2)\times10\times\frac{1}{3}$

［註：$S_{P(4,4)}-S_{P(4,3)}=7$］



圖(30)　圖(31)　圖(32)　圖(33)

4、每邊點數為 n 時，四角錐之總點數推導如下：

由上述每邊點為 4 時之推導過程中，我們可找進一步找出每邊點數為 n 時之總數關係。

$S_{L(4,n)}=1+S_{p(4,2)}+S_{p(4,3)}+S_{p(4,4)}+\cdots+S_{p(4,n)}$

$= 1+(1+3)+(1+3+5)+(1+3+5+7)+\cdots[1+3+5+\ldots+\left(S_{p(4,n)}-S_{p(4,n-1)}\right)]$

$= 1+(1+3)+(1+3+5)+(1+3+5+7)+\cdots\left[1+3+5+\ldots(n^2-(n-1)^2\right]$

$= (2n-1+\mathbf{2})\times\frac{(n+1)\times n}{2}\times\frac{1}{3}$

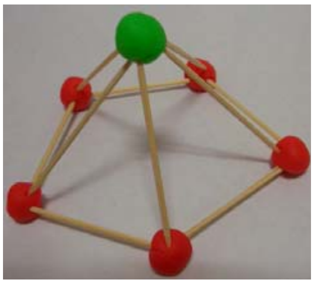
$= \frac{(\mathbf{2}n+\mathbf{1})\times(n+\mathbf{1})\times n}{\mathbf{6}}$ .... (9)

[**註：**$S_{L(4,n)}$ 為四邊形；且每邊點數為 n；L 是指三維立體圖形]

(三)、五角錐之點數變化：

1、每邊點數為 2 時，如圖(34)，五角錐之總點數為 $S_{L(5,3)}=1+S_{P(5,2)}=1+5$

[註：$S_{L(5,2)}$為五邊形，且每邊點數為 2，L 是指三維立體圖形]



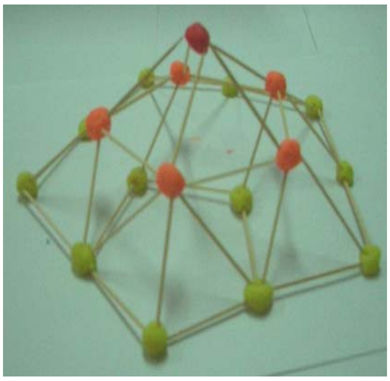
圖(34)

2、每邊點數為 3 時，如圖(35)(36)，5 角錐之總點數為：

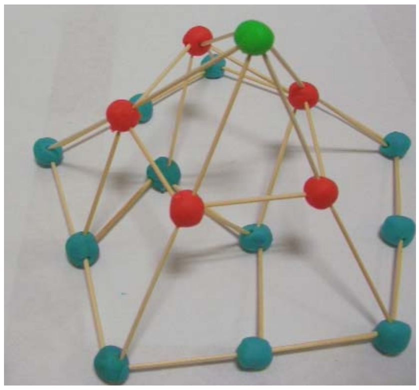
$S_{L(5,3)}=1+S_{P(5,2)}+S_{P(5,3)}$

$= 1+5+12$

$= 1+(1+4)+(1+4+7)$



圖(35)



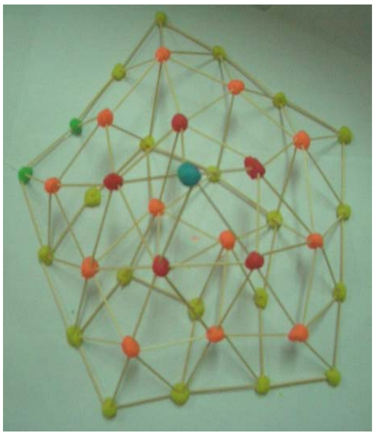
圖(36)

3、每邊點數為 4 時，如圖(37)(38)，五角錐之總點數為

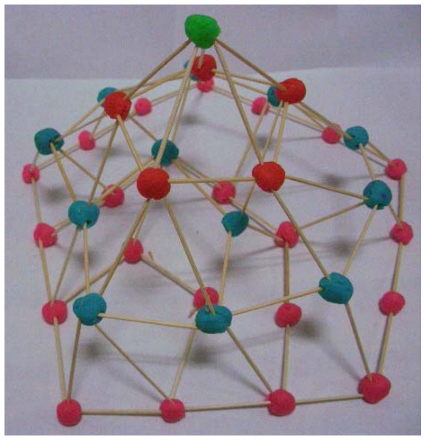
$S_{L(5,4)}=1+S_{P(5,2)}+S_{P(5,3)}+S_{P(5,4)}$

$=1+5+12+22$

$=1+(1+4)+(1+4+7)+(1+4+7+10)$



圖(37)



圖(38)

由上述中我們可觀察出這是由(4 個 1)、(3 個 4)、(2 個 7)及(1 個 10)所組成。我們將這些數字排成三角形如圖(39)所示，再將三角形旋轉兩次所得如圖(40)、(41)所示，最後將此三個三角形相同位置之值相加，所得之數值均為 12 如圖(42)所示。故我們可發現 $1+S_{P(5,2)}+S_{P(5,3)}+S_{P(5,4)}$總和可以很容易被求出來，其總和為 $12\times10\times\frac{1}{3}$ 故我們可將式子改寫如下：

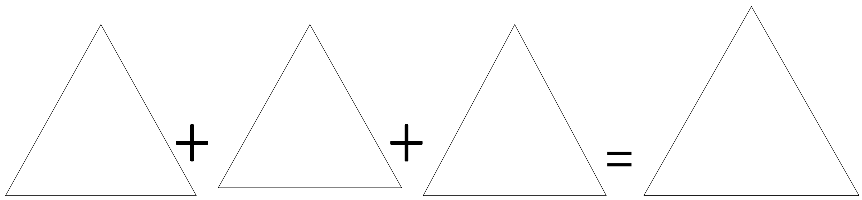
$S_{L(5,4)}=1+S_{P(5,2)}+S_{P(5,3)}+S_{P(5,4)}$

$= 1+5+12+22$

$= 1+(1+4)+(1+4+7)+(1+4+7+10)$

$=(10+2)\times10\times\frac{1}{3}$

[註：小括號中的 10 為 $S_{P(5,4)}-S_{P(5,3)}=10$ 中可得]



圖(39) 圖(40) 圖(41) 圖(42)

4、每邊點數為 n 時，五角錐之總點數推導如下：

由上述每邊點為 4 時之推導過程中，我們可找進一步找出每邊點數為 n 時之總數關係。

$S_{L(5,n)}=1+S_{P(5,2)}+S_{P(5,3)}+S_{P(5,4)}+\cdots+S_{P(5,n)}$

$=1+(1+4)+(1+4+7)+(1+4+7+10)$

$=1+(1+4)+(1+4+7)+(1+4+7+10)+\cdots[1+4+7+10+\cdots+(S_{P(5,n)}-S_{P(5,n-1)})]$

$=1+(1+4)+(1+4+7)+(1+4+7+10)+\cdots[1+4+7+10\ldots+(3n-2)]$

$=(3n-2+2)\times\frac{(n+1)\times n}{2}\times\frac{1}{3}$

$$= \frac{3n\times(n+1)\times n}{6}$$

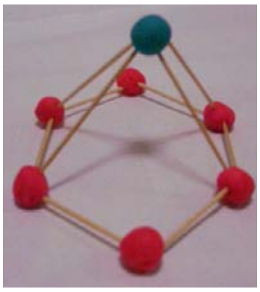
$$= \frac{n^2\times(n+1)}{2} \text{........................ (10)}$$

［**註**：$S_{L(5,n)}$ 為五邊形；且每邊點數為 n；L 是指三維立體圖形］

（四）、六角錐之點數變化：

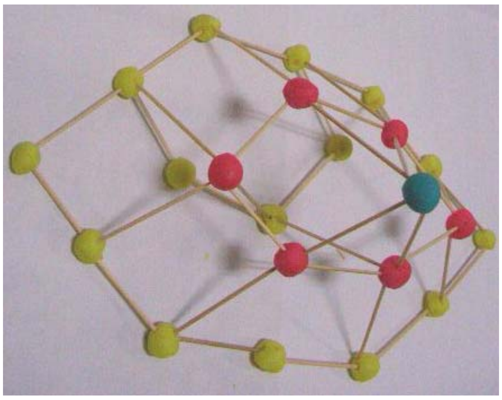
1、每邊點數為 2 時，如圖(43)六角錐之總點數為 $S_{L(6,2)}=1+S_{p(6,2)}=1+6$

［註：$S_{L(6,2)}$ 6 是指六邊形，而 2 指每邊點數為 2，L 是指三維立體圖形］



圖(43)

2、每邊點數為 3 時，如圖(44)，六角錐之總點數為：



圖(44)

$S_{L(6,3)}=1+S_{P(6,2)}+S_{P(6,3)}$

$=1+6+15$

$=1+(1+5)+(1+5+9)$

3、每邊點數為 4 時，六角錐之總點數為：

$S_{L(6,4)}=1+S_{P(6,2)}+S_{P(6,3)}+S_{P(6,4)}$

$=1+6+15+28$

$=1+(1+5)+(1+5+9)+(1+5+9+13)$

由上述中我們可觀察出這是由(4 個 1)、(3 個 5)、(2 個 9)及(1 個 13)所組成。我們將這些數字排成三角形如圖(45)所示，再將三角形旋轉兩次所得如圖(46)、(47)所示，最後將此三個三角形相同位置之值相加，所得之數值均為 15 如圖(46)所示。故我們可發現 $1+S_{P(6,2)}+S_{P(6,3)}+S_{P(6,4)}$總和可以很容易被求出來，其總和為

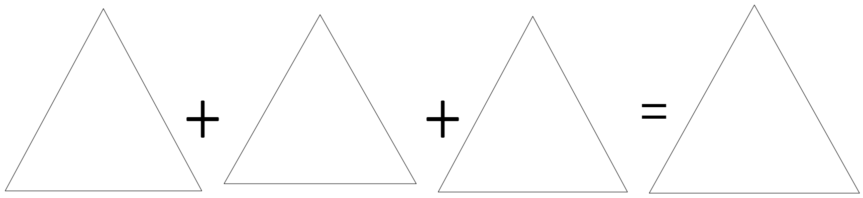
$15\times10\times\frac{1}{3}$ 故我們可將式子改寫如下：

$S_{L(6,4)}=1+S_{P(6,2)}+S_{P(6,3)}+S_{P(6,4)}=1+6+15+28$

$=1+(1+5)+(1+5+9)+(1+5+9+13)$

$=(13+2)\times10\times\frac{1}{3}$

［註：$S_{p(6,4)}-S_{p(6,3)}=13$］



圖(45)　圖(46)　圖(47)　圖(48)

4、每邊點數為 n 時，六角錐之總點數推導如下：

由上述每邊點為 4 時之推導過程中，我們可找進一步找出每邊點數為 n 時之總數關係。

$S_{L(6,n)}=1+S_{P(6,2)}+S_{P(6,3)}+S_{P(6,4)}+S_{P(6,4)}+\cdots S_{P(6,n)}$

$=1+(1+5)+(1+5+9)+(1+5+9+13)+\cdots[1+5+9+13+\cdots(S_{p(6,n)}-S_{p(6,n)})]$

$=1+(1+5)+(1+5+9)+(1+5+9+13)+\cdots\ [\mathbf{1}+\mathbf{5}+\mathbf{9}+\ldots(\mathbf{4}n-\mathbf{3})]$

$$=(\mathbf{4}n-\mathbf{3}+\mathbf{2})\times\frac{(n+\mathbf{1})\times n}{\mathbf{2}}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$$=\frac{(\mathbf{4}n-\mathbf{1})(n+\mathbf{1})\times n}{\mathbf{6}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

[**註**：$S_{L(6,n)}$ 為六邊形；且每邊點數為 n；L 是指三維立體圖形]

(五) m 角錐點數之變化

在 m 角錐每邊點數為 n 時之總和點數之探討中，我們將利用前述所得之經驗去探討其總和

$S_{L(m,n)}=1+S_{P(m,2)}+S_{P(m,3)}+S_{P(m,4)}\cdots+S_{P(m,n)}$

$$=\left[S_{p(m,n)}-S_{p(m,n-1)}+2\right]\times\frac{(n+1)\times n}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$\Theta\ S_{p(m,n)}=\frac{mn^2-mn-2n^2+4n}{2}$$

$$S_{p(m,n-1)}=\frac{m(n-1)^2-m(n-1)-2(n-1)^2+4(n-1)}{2}$$

$$\therefore S_{p(m,n)}-S_{p(m,n-1)}=mn-m-2n+3$$

$S_{L(m,n)}=1+S_{P(m,2)}+S_{P(m,3)}+S_{P(m,4)}\cdots+S_{P(m,n)}$

$$=\left[S_{p(m,n)}-S_{p(m,n-1)}+2\right]\times\frac{(n+1)\times n}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=(mn-m-2n+3+2)\times\frac{(n+1)\times n}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{(mn-m-2n+5)(n+1)\times n}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

伍、研究結果

一、二維平面點數為之探討

(一)、 三角形： $S_{p(3,n)}=\frac{(1+n)\times n}{2}$

(二)、 四邊形： $S_{p(4,n)}=n^2$

(三)、 五邊形： $S_{p(5,n)}=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$

(四)、 六邊形： $S_{p(6,n)}=2n^2-n$

(五)、m 邊形： $S_{p(m,n)}=\frac{mn^2-mn-2n^2+4n}{2}$

二、三維立體角錐點數之探討

(一)、三角錐：$S_{L(3,n)}=\frac{(n+2)\times(n+1)\times n}{6}$

(二)、四角錐：$S_{L(4,n)}=\frac{(2n+1)\times(n+1)\times n}{6}$

(三)、五角錐：$S_{L(5,n)}=\frac{n^2\times(n+1)}{2}$

(四)、六角錐：$S_{L(6,n)}=\frac{(4n-1)(n+1)\times n}{6}$

(五)、m 角錐：$S_{L(m,n)}=\frac{(mn-m-2n+5)(n+1)\times n}{6}$

陸、結論：

在本篇「趣談多邊形點數」我們發現想找出點數與邊數之間的關係並不難，而且也不一定要死記公式。經由邊數與點數的探討過程中，從一點兩點，從平面到立體圖形循序漸進的找出其規則，讓我們深刻體會出學習數與形這一章的精神所在。回想起在國文課本中沈復在「兒時記趣」中所提到：余憶童稚時，能張目對日，**明察秋毫，見藐小微物，必細察其紋理，故時有物外之趣**。在這次科展中，讓我們瞭解到日常生活中有很多東西，如果仔細去觀察必然也會有很多收穫，這就是這次科展中我們覺得最有樂趣的地方。

柒、參考資料及其他

（一）Brian Bolt 著、王榮輝譯 數學遊樂園之舉一反三 牛頓出版公司 。

（二）台北市立建國高級中學四九屆三一四班全體同學 數學思考　九章出版社。

評　　語

030411　趣談多邊形點數之關係

參賽同學利用級數的概念來計算多邊形點的個數，因此得到一個不錯的公式。然而，處理的對象容易計算，深度不夠是最大的缺憾。